KUBIČNE KRIVULJE TRIKOTNIKA

TANJA VEBER

I. gimnazija v Celju

Math. Subj. Class. (2010): 51N20; 51M04; 14H45; 51N35

Članek obravnava kubične krivulje trikotnika. To so krivulje tretjega reda, ki potekajo skozi vsa tri oglišča trikotnika, središča včrtane ter pričrtanih krožnic. Nekatere premice v ravnini določajo družino kubičnih krivulj trikotnika, med njimi je najbolj znana Eulerjeva premica, ki določa družino kubičnih krivulj, imenovano Eulerjev snop kubičnih krivulj trikotnika.

CUBIC CURVES OF A TRIANGLE

This article investigates cubic curves of a triangle. These are curves of the third degree, which pass through the vertices of the triangle and through the incenter and the excenters of the triangle. Some lines in the plane determine a family of cubic curves, the most famous one is the Euler line, which determines the family of cubic curves, called the Euler pencil of cubic curves of the triangle.

Uvod

Prvi odmevnejši rezultati iz geometrije trikotnika, matematičnega področja, ki obravnava značilne točke trikotnika, njihove posebnosti in povezave, segajo v 18. stoletje. Iz tega časa izhajata izrek o Eulerjevi premici trikotnika in izrek o Simsonovih premicah. Največji razmah je geometrija trikotnika doživela v 19. stoletju, ko so bili dokazani novi izreki o tem, da določene točke trikotnika vedno ležijo na isti premici oziroma isti krožnici. Iz tega časa izvirajo nekatere znamenite krožnice trikotnika, kot so Feuerbachova, Spiekerjeva in Fuhrmannova krožnica, ter nekatere nove značilne premice trikotnika, na primer Brocardova os in Lemoineova premica. Nekaj dodatnega zagona je to področje dobilo z Möbiusovo uvedbo homogenih koordinat, ki so olajšale analitičnogeometrijski pristop k obravnavani tematiki. V dvajsetem stoletju pa je bilo to področje za dalj časa potisnjeno na stranski tir.

V zadnjem obdobju je geometrijo trikotnika moč ponovno v večji meri zaslediti v literaturi, kar je posledica razvoja računalniških orodij za dinamično geometrijo, ki nam omogočajo več matematičnega eksperimentiranja in s tem olajšajo postavljanje novih hipotez. Veliko zaslug na tem področju prav gotovo lahko pripišemo Clarku Kimberlingu, ki je v svoji knjigi [3] navedel seznam 360 značilnih točk trikotnika, seznam premic, na katerih ležijo vsaj tri od njih ter seznam krožnic, na katerih ležijo vsaj štiri od njih. Še več značilnih točk, že prek 3600, pa najdemo na Kimberlingovi spletni strani [10]. Kimberlingovo delo je geometrijo trikotnika po eni strani zaokrožilo, po drugi strani pa se odpirajo vedno nova vprašanja pri obravnavi stožnic, splošnih krivulj drugega reda, pa tudi posplošitve, povezave in obravnave krivulj tretjega reda ter krivulj višjih stopenj. V tem članku bomo spoznali nekaj zanimivosti o kubičnih krivuljah trikotnika. Pri njihovi obravnavi nam bodo delo olajšala nekatera dejstva, ki jih bomo predstavili v naslednjih dveh razdelkih.

Trilinearne koordinate

Naj bo ABC poljuben trikotnik v ravnini z oglišči A, B, C in stranicami a, b, c, pri čemer oglišče A leži nasproti stranice a, oglišče B nasproti stranice b in oglišče C nasproti stranice c. Naj bo P poljubna točka v ravnini. Evklidske razdalje točke P do nosilk stranic a, b, c označimo z $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. Tem razdaljam dodamo predznake (in dobimo novo trojico števil $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) na naslednji način. Nosilka stranice trikotnika razdeli ravnino trikotnika na dve polravnini. Polravnino, ki vsebuje tretje oglišče trikotnika, imenujemo *pozitivni breg* trikotnika glede na dano nosilko, drugo polravnino pa *negativni breg*. Če točka P leži na negativnem bregu trikotnika glede na nosilko stranice a, potem ima α_1 negativni predznak, torej $\alpha_1 = -\alpha_0$, če pa leži na pozitivnem bregu trikotnika glede na nosilko stranice a, pa je $\alpha_1 = \alpha_0$. Analogno velja glede predznakov števil β_1 in γ_1. Trojica realnih števil $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ natanko določa točko v ravnini in jo imenujemo *dejanske trilinearne razdalje* točke P. Za določitev točke bi bili dovolj samo dve trilinearni razdalji. S pomočjo vpeljanih dejanskih trilinearnih razdalj lahko definiramo homogene trilinearne koordinate točke P.

Definicija 1. *Homogene trilinearne koordinate* točke P so vsaka trojica realnih števil α, β, γ, ki zadoščajo pogojem $\alpha_1 = k\alpha$, $\beta_1 = k\beta$, $\gamma_1 = k\gamma$, kjer so α_1, β_1, γ_1 dejanske trilinearne razdalje točke P, k pa neničelno realno število.

V nadaljevanju bomo homogene trilinearne koordinate imenovali kar trilinearne koordinate. Trilinearne koordinate točke P označujemo $P = \alpha : \beta : \gamma$. Kadar imamo opravka z danim trikotnikom v ravnini, vpeljemo trilinearne koordinate, saj se v teh koordinatah zapis nekaterih značilnih točk trikotnika in nekaterih premic precej poenostavi. Trilinearne koordinate oglišč trikotnika so

$$A = 1 : 0 : 0,\ B = 0 : 1 : 0,\ C = 0 : 0 : 1,$$

enačbe nosilk stranic trikotnika so

$$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,$$

prav tako imajo poenostavljen zapis enačbe simetral notranjih in zunanjih kotov trikotnika

$$\alpha = \beta,\ \beta = \gamma,\ \gamma = \alpha \quad \text{ter}$$

$$\alpha = -\beta,\ \beta = -\gamma,\ \gamma = -\alpha.$$

Izberimo točko P znotraj trikotnika s stranicami a, b, c in naj bodo $P(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ njene dejanske trilinearne razdalje. V tem primeru ni težko premisliti, da je $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1 = 2S$, kjer je S ploščina trikotnika ABC. Enako velja za druge točke v ravnini. Zato je za poljubne trilinearne koordinate $P = \alpha : \beta : \gamma$ poljubne točke v evklidski ravnini izraz $a\alpha + b\beta + c\gamma$ enak nekemu večkratniku ploščine in je zato različen od 0.

Včasih je dobro, da evklidsko ravnino vložimo v projektivno ravnino in se tako izognemo težavam, ki nastanejo, kadar se v ravnini dve (vzporedni) premici ne sekata. Projektivna ravnina ima tako poleg običajnih točk še za eno premico dodatnih točk, ki jim rečemo *točke v neskončnosti*, premici pa *premica v neskončnosti*. Na njej ležijo presečišča vzporednih premic. Običajni model projektivne ravnine dobimo, če za „točke“ vzamemo premice v prostoru skozi koordinatno izhodišče, „premica“ skozi dve taki točki pa je ravnina, ki jo določata tema dvema točkama pripadajoči sekajoči se premici. V tako konstruirani ravnini se poljubni dve premici (ravnini skozi izhodišče) sekata. S pomočjo trilinearnih koordinat točke evklidske ravnine zlahka vložimo v tovrstno projektivno ravnino. Točki $P = \alpha : \beta : \gamma$ namreč priredimo premico v prostoru skozi koordinatno izhodišče in s smernim vektorjem (α, β, γ). Preslikava je dobro definirana, saj različni zapisi iste točke določajo isto premico. Izkaže se, da se točke s premice skozi dve dani točki preslikajo v premice na ravnini skozi izhodišče, ki jo določata premici, ki sta sliki začetnih dveh točk. Ravnine v prostoru skozi koordinatno izhodišče imajo enačbo oblike $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ za realne vrednosti l, m, n. To pomeni, da točke s premice skozi dve točki zadoščajo taki enačbi, kar pomeni, da je $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ enačba premice v trilinearnih koordinatah. Ker smo že videli, da enakosti $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ ne zadošča nobena točka v evklidski ravnini, po drugi strani pa je to premica v projektivni ravnini, sledi, da je to ravno prej omenjena premica v neskončnosti. Če presečišče dveh premic projektivne ravnine leži na tej premici, to dejansko pomeni, da sta ustrezni premici v evklidski ravnini vzporedni.

Na podlagi lastnosti projektivnih koordinat s pomočjo preprostih geometrijskih razmislekov (in izračunov) pokažemo, da veljajo naslednje povezave med točkami in premicami, podanimi s trilinearnimi koordinatami. Na primer, presečišče dveh premic ustreza smernemu vektorju, ki je vektorski produkt normal dveh ravnin.

Trditev 1. *Premici z enačbama* $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ *in* $l'\alpha + m'\beta + n'\gamma = 0$ *se sekata v točki* $(mn' - m'n) : (nl' - n'l) : (lm' - l'm)$.

TOČKA	DEJANSKE RAZDALJE	TRILINEARNE KOORDINATE
A,B,C	$(v_a, 0, 0)$, $(0, v_b, 0)$, $(0, 0, v_c)$	$1:0:0$, $0:1:0$, $0:0:1$
I	(r, r, r)	$1:1:1$
O	$(R\cos A, R\cos B, R\cos C)$	$\cos A : \cos B : \cos C$
I_A, I_B, I_C	$(-r_a, r_a, r_a)$, $(r_b, -r_b, r_b)$,$(r_c, r_c, -r_c)$	$-1:1:1$, $1:-1:1$, $1:1:-1$
V	$(2R\cos B\cos C, 2R\cos C\cos A, 2R\cos A\cos B)$	$\frac{1}{\cos A} : \frac{1}{\cos B} : \frac{1}{\cos C}$
F	$\left(\frac{R}{2}\cos(B-C),\ \frac{R}{2}\cos(C-A), \frac{R}{2}\cos(A-B)\right)$	$\cos(B-C) : \cos(C-A) : \cos(A-B)$
T	$\left(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}, \frac{2S}{3c}\right)$	$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ oz. $\frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}$

Trditev 2. *Premice z enačbami* $l_1\alpha+m_1\beta+n_1\gamma=0$, $l_2\alpha+m_2\beta+n_2\gamma=0$ *in* $l_3\alpha+m_3\beta+n_3\gamma=0$ *so konkurentne (se sekajo v skupni točki) natanko tedaj, ko velja*

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Trditev 3. *Naj bosta* $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ *in* $\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$ *dve različni točki. Enačbo premice, ki poteka skozi ti dve točki, dobimo z determinanto*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Prav tako pridemo s preprostimi, a daljšimi izračuni do trilinearnih koordinat nekaterih značilnih točk trikotnika. V tabeli so navedene trilinearne koordinate oglišč trikotnika, središča I trikotniku včrtane krožnice, središč I_A, I_B, I_C trikotniku pričrtanih krožnic, središča O trikotniku očrtane krožnice, središča F krožnice devetih točk ter višinske točke V in težišča trikotnika T. V nadaljevanju bomo oglišča in notranje kote trikotnika s stranicami a, b, c označevali z A, B, C. Iz teksta pa bo razvidno, na kaj se v tistem delu nanaša oznaka.

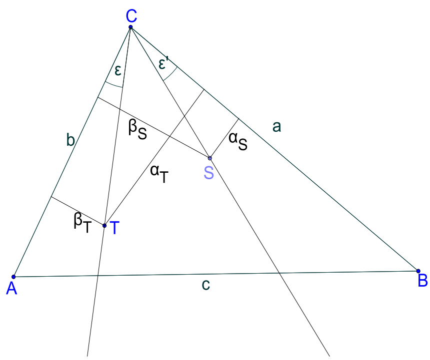
Izogonalna transformacija ravnine

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednjo trditev:

Trditev 4. *Premici $l\alpha - m\beta = 0$ in $m\alpha - l\beta = 0$ sta simetrični glede na simetralo kota C.*

Dokaz. Na premicah z enačbama $l\alpha - m\beta = 0$ oziroma $m\alpha - l\beta = 0$ izberimo točki $T = \alpha_T : \beta_T : \gamma_T$ oziroma $S = \alpha_S : \beta_S : \gamma_S$ tako, da bosta usmerjena kota $\epsilon = \angle ACT$ in $\epsilon' = \angle SCB$ ostra kota. Velja $l\alpha_T - m\beta_T = 0$ in $m\alpha_S - l\beta_S = 0$. Iz prve enačbe dobimo, da je $\frac{\alpha_T}{\beta_T} = \frac{m}{l}$, iz druge enačbe pa $\frac{\beta_S}{\alpha_S} = \frac{m}{l}$. S pomočjo spodnje slike lahko zapišemo

$$\sin\epsilon = \frac{\beta_T}{|CT|}, \quad \sin(C-\epsilon) = \frac{\alpha_T}{|CT|}, \quad \sin\epsilon' = \frac{\alpha_S}{|CS|}, \quad \sin(C-\epsilon') = \frac{\beta_S}{|CS|}.$$



S preoblikovanjem zgornjih enakosti dobimo naslednje:

$$\frac{\beta_T}{\alpha_T} = \frac{\sin\epsilon}{\sin(C-\epsilon)} = \frac{l}{m} = \frac{\alpha_S}{\beta_S} = \frac{\sin\epsilon'}{\sin(C-\epsilon')}.$$

Od tod sledi, da je

$$\sin\epsilon \cdot \sin(C - \epsilon') = \sin\epsilon' \cdot \sin(C - \epsilon).$$

Nato uporabimo adicijski izrek za sinus razlike in v nekaj korakih dobimo

$$\tan\epsilon = \tan\epsilon'.$$

To pa pomeni, da je $\epsilon = \epsilon'$. S tem smo dokazali, da sta premici skozi oglišče C in točko T oziroma S simetrični glede na simetralo kota C. ■

Prav tako velja, da sta premici z enačbama $m\beta - n\gamma = 0$ in $n\beta - m\gamma = 0$ simetrični glede na simetralo kota A ter premici $n\gamma - l\alpha = 0$ in $l\gamma - n\alpha = 0$ simetrični glede na simetralo kota B.

Imejmo dan $\triangle ABC$ in točko P, ki leži v ravnini danega trikotnika. Premico AP prezrcalimo preko simetrale kota A, premico BP preko simetrale kota B ter CP preko simetrale kota C. Pokažimo, da so tako dobljene premice iz treh konkurentnih premic s presečiščem P spet konkurentne.

Naj bo točka $P = l : m : n$ presečišče premic AP, BP in CP. Enačbe premic skozi pare danih točk so po vrsti:

$$n\beta - m\gamma = 0,\ l\gamma - n\alpha = 0,\ m\alpha - l\beta = 0.$$

Po trditvi 4 so enačbe simetričnih premic k danim premicam:

$$m\beta - n\gamma = 0,\ n\gamma - l\alpha = 0,\ l\alpha - m\beta = 0.$$

Determinanta

$$\begin{vmatrix} 0 & m & -n \\ -l & 0 & n \\ l & -m & 0 \end{vmatrix}$$

ima vrednost 0, zato so tudi te premice konkurentne.

To dejstvo je osnova, na podlagi katere bomo definirali izogonalno transformacijo ravnine.

Definicija 2. Naj bo P točka v ravnini trikotnika ABC, ki ne leži na nobeni izmed nosilk stranic trikotnika. Premico AP prezrcalimo preko simetrale notranjega kota pri oglišču A, premici BP ter CP pa ustrezno preko simetral notranjih kotov pri ogliščih B in C. Točko, v kateri se sekajo vse tri prezrcaljene premice, imenujemo *izogonalna konjugiranka točke* P in jo označujemo s P'. Preslikavo, ki vsaki točki P priredi izogonalno konjugiranko, pa imenujemo *izogonalna transformacija ravnine.*

V definiciji izogonalne transformacije izločimo točke, ki ležijo na nosilkah stranic trikotnika. Poglejmo si, zakaj. Če je točka P eno od oglišč trikotnika, denimo $P = A$, potem premica PA sploh ni določena, preostali premici PB in PC pa se obe preslikata v nosilko stranice BC. V tem primeru torej nimamo kandidata za točko P'. Če točka P leži na nosilki katerekoli stranice trikotnika, bi se z izogonalno transformacijo preslikala v nasprotno oglišče trikotnika. S tem bi izgubili injektivnost izogonalne transformacije. Zato izogonalno transformacijo obravnavamo kot preslikavo ravnine brez nosilk trikotnika. Nekatere lastnosti izogonalne transformacije so precej očitne.

1. Izogonalna transformacija je involucija: izogonalna konjugiranka izogonalne konjugiranke je prvotna točka. Kvadrat izogonalne transformacije je identiteta. Torej je $(P')' = P$.

2. Če točka P leži na katerikoli izmed simetral notranjih kotov trikotnika, leži na tej simetrali tudi njena izogonalna konjugiranka, saj se simetrala, preko katere zrcalimo, pri zrcaljenju ohranja. To pomeni, da se ohranja presečišče simetral notranjih kotov, to pa je središče trikotniku včrtane krožnice; $I' = I$.

3. Prav tako se z izogonalno transformacijo ohranjajo simetrale zunanjih kotov, saj je kot med simetralama zunanjega in notranjega kota pravi kot. Od tod vidimo, da se ohranjajo tudi središča pričrtanih krožnic.

Naslednji izrek podaja trilinearne koordinate izogonalne konjugiranke k dani točki.

Izrek 5. *Naj bo $P = \alpha : \beta : \gamma$ točka v ravnini trikotnika ABC, ki ne leži na nobeni izmed nosilk stranic trikotnika. Njena izogonalna konjugiranka je*

$$P' = \alpha^{-1} : \beta^{-1} : \gamma^{-1}.$$

Zato namesto P' pogosto pišemo kar P^{-1}.

Dokaz. Naj bo P točka s trilinearnimi koordinatami $l : m : n$, ki ne leži na nobeni izmed nosilk stranic trikotnika. V tem primeru so vsa tri realna števila l, m in n različna od 0. Enačbe premic AP, BP, CP se glasijo:

$$n\beta - m\gamma = 0, \ l\gamma - n\alpha = 0, \ m\alpha - l\beta = 0.$$

Te premice se z zrcaljenjem preko simetral notranjih kotov trikotnika preslikajo v premice, katerih enačbe so navedene pred definicijo 2, kjer smo tudi dokazali, da so konkurentne. Presečišče teh premic je (po trditvi 1) izogonalna konjugiranka točke P s trilinearnimi koordinatami

$$P' = mn : ln : ml = l^{-1} : m^{-1} : n^{-1}.$$

■

Omenili smo že, da se središča trikotniku včrtane in pričrtanih krožnic z izogonalno transformacijo ohranjajo, hitro pa se o tem lahko prepričamo, če si pogledamo trilinearne koordinate teh točk. $I = 1 : 1 : 1 = I^{-1}$, $I_A = -1 : 1 : 1 = I_A^{-1}$, $I_B = 1 : -1 : 1 = I_B^{-1}$ in $I_C = 1 : 1 : -1 = I_C^{-1}$.

Če se vprašamo, kdaj je točka enaka svoji izogonalni kojugiranki, dobimo $(a, b, c) = \left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}, \frac{k}{c}\right)$, kar pomeni, da je $a^2 = b^2 = c^2 = k$. V trilinearnih koordinatah to pomeni $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $c = \pm 1$ in (primerjajte tabelo) vidimo, da velja naslednji izrek.

Posledica 6. *Središča danemu trikotniku včrtane in pričrtanih krožnic so edine točke, ki se z izogonalno transformacijo ohranjajo.*

Iz tabele, kjer imamo podane trilinearne koordinate značilnih točk trikotnika, lahko razberemo še en par izogonalnih konjugirank, to sta središče trikotniku očrtane krožnice $O = \cos A : \cos B : \cos C$ in višinska točka $V = \cos^{-1} A : \cos^{-1} B : \cos^{-1} C$.

V teh dveh razdelkih smo si na kratko ogledali trilinearne koordinate in izogonalno transformacijo ravnine, kar bomo potrebovali pri opisovanju kubičnih krivulj. Vsi radovedni bralci, ki sta jim ti dve poglavji vzbudili toliko zanimanja, da bi želeli podrobneje raziskati omenjeni področji, lahko več najdejo na spletni strani [9].

Kubične krivulje trikotnika

V tem razdelku si bomo najprej pogledali definicijo kubične krivulje trikotnika.

Definicija 3. *Kubična krivulja trikotnika s tečajem* F, Γ_F, je množica točk, ki so kolinearne s svojo konjugiranko in tečajem kubične krivulje;

$$\Gamma_F = \{P; P, P^{-1}, F \ \text{ so kolinearne}\}.$$

V naslednjem izreku bomo upravičili tako definirano ime množice Γ_F.

Izrek 7. *Množica točk Γ_F je kubična krivulja, ki poteka skozi središča trikotniku včrtane in pričrtanih krožnic, tečaj F in točko F^{-1}.*

Dokaz. Naj bo $F = f_1 : f_2 : f_3$ fiksna točka (tečaj krivulje Γ_F). Točka $P = \alpha : \beta : \gamma$ naj bo poljubna točka na krivulji Γ_F. Vemo, da je njena izogonalna konjugiranka točka $P^{-1} = \beta\gamma : \gamma\alpha : \alpha\beta$. Če naj bodo točke F, P, P^{-1} kolinearne, mora veljati:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Od tod sledi, da je:

$$f_1\alpha(\beta^2-\gamma^2)+f_2\beta(\gamma^2-\alpha^2)+f_3\gamma(\alpha^2-\beta^2)=0. \tag{i}$$

Dobili smo enačbo množice Γ_F v trilinearnih koordinatah, ki je tretje stopnje. Kot smo že omenili, bi enačbo lahko izrazili tudi v kartezičnih koordinatah in bi bila prav tako tretje stopnje. Ker se po posledici 2 točke I, I_A, I_B, I_C z izogonalno transformacijo ohranjajo, zagotovo ležijo na kubični krivulji. Prav tako neposredno iz definicije kubične krivulje sledi, da na tej krivulji ležita tudi točki F in F^{-1}. ∎

Strogo gledano se množica Γ_F in krivulja z enačbo (i) ne ujemata povsem. Razlikujeta se namreč v presečiščih slednje z nosilkami stranic trikotnika. V teh točkah izogonalna transformacija ni definirana in zato te ne ustrezajo definiciji množice Γ_F. Vendar pa običajno zaradi preprostosti z izrazom kubična krivulja trikotnika preprosto razumemo celo krivuljo z enačbo (i). Upoštevaje ta dogovor, na kubični krivulji trikotnika očitno ležijo tudi vsa tri oglišča trikotnika ABC.

Iz definicije kubične krivulje trikotnika pa sledi naslednji izrek:

Izrek 8. *Če točka P leži na krivulji Γ_F, potem na njej leži tudi njena izogonalna konjugiranka. Pravimo, da je Γ_F izogonalno simetrična.*

Ni težko premisliti, čemu je enaka kubična krivulja trikotnika, če za tečaj vzamemo oglišče trikotnika. Na podlagi enačbe (i) vidimo, da gre za unijo treh premic: nosilke stranice, ki leži nasproti izbranega oglišča, ter simetral notranjega in zunanjega kota trikotnika ob izbranem oglišču. Podobno vidimo, da dobimo tri premice tudi v primeru, če za tečaj vzamemo središče včrtane ali eno od središč pričrtanih krožnic. Zato se dogovorimo, da kubično krivuljo trikotnika Γ_F, kjer je $F \in \{A, B, C, I, I_A, I_B, I_C\}$, imenujemo *trivialna kubična krivulja trikotnika*. Prav tako se dogovorimo, da bomo kubično krivuljo trikotnika imenovali *degenerirana kubična krivulja trikotnika*, če jo bomo lahko zapisali kot unijo krivulj prvega in drugega reda ali kot unijo treh krivulj prvega reda. Trivialne kubične krivulje spadajo torej med degenerirane kubične krivulje trikotnika. Ali velja tudi obratno? Ne, izkaže se, da velja naslednji izrek, ki ga tu le navajamo. Dokaz izreka najdete v [7].

Izrek 9. *Kubična krivulja trikotnika s tečajem F je degenerirana natanko takrat, ko F leži na katerikoli izmed simetral notranjih ali zunanjih kotov danega trikotnika.*

V nadaljevanju pa bomo omenili snope kubičnih krivulj trikotnika.

Definicija 4. Naj bosta P in P^{-1} izogonalni konjugiranki v ravnini danega trikotnika, pri čemer $P \neq P^{-1}$, in p premica skozi točki P in P^{-1}. Potem družino

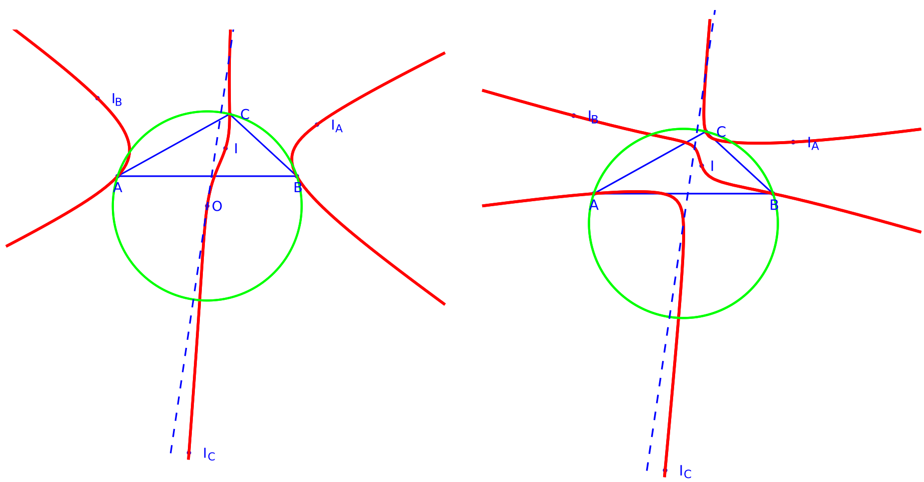
$$\{\Gamma_F, F \in p\}$$

imenujemo *snop kubičnih krivulj* trikotnika, pripadajoč paru konjugirank P in P^{-1}.

Iz definicije takoj sledi naslednji izrek:

Izrek 10. *Naj bo $\{\Gamma_F, F \in p\}$ snop kubičnih krivulj trikotnika, pripadajoč paru konjugirank P in P^{-1}. Vse krivulje iz tega snopa potekajo skozi točki P in P^{-1}.*

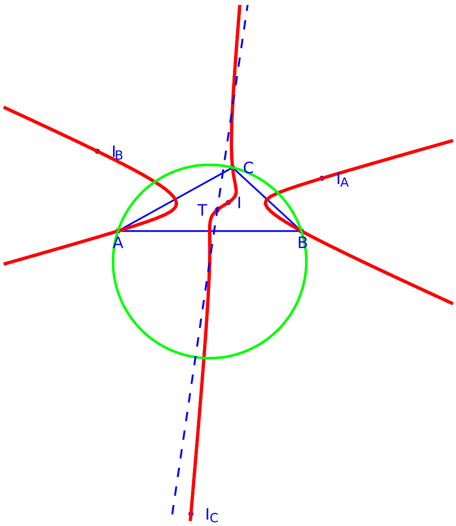
Vsaka premica, ki vsebuje par izogonalnih konjugirank, določa snop kubičnih krivulj trikotnika. Z izbiro točke F na premici skozi točki P in P^{-1} pa je kubična krivulja trikotnika iz tega snopa natanko določena. Ena izmed bolj znanih premic je Eulerjeva premica, to je premica, na kateri ležijo težišče trikotnika, višinska točka trikotnika in središče trikotniku očrtane krožnice. Višinska točka in središče trikotniku očrtane krožnice sta izogonalni konjugiranki. Snop kubičnih krivulj trikotnika, katerih tečaj leži na Eulerjevi premici, imenujemo Eulerjev snop kubičnih krivulj trikotnika.



Slika 1. Levo: *Napoleonova kubična krivulja trikotnika* ima za tečaj Feuerbachovo središče F, to je središče krožnice devetih točk. Na tej kubični krivulji ležijo vse točke v povezavi z znanimi Napoleonovimi trikotniki, to so oglišča Napoleonovih notranjih in zunanjih trikotnikov ter notranja in zunanja Napoleonova točka. Desno: *McCayeva kubična krivulja trikotnika.* Tečaj je središče trikotniku očrtane krožnice. Zanjo je značilno, da njena presečišča s trikotniku očrtano krožnico tvorijo enakostranični trikotnik. Zato ima ta kubična krivulja trikotnika vedno tri asimptote, ki se sekajo pod kotom 60°.

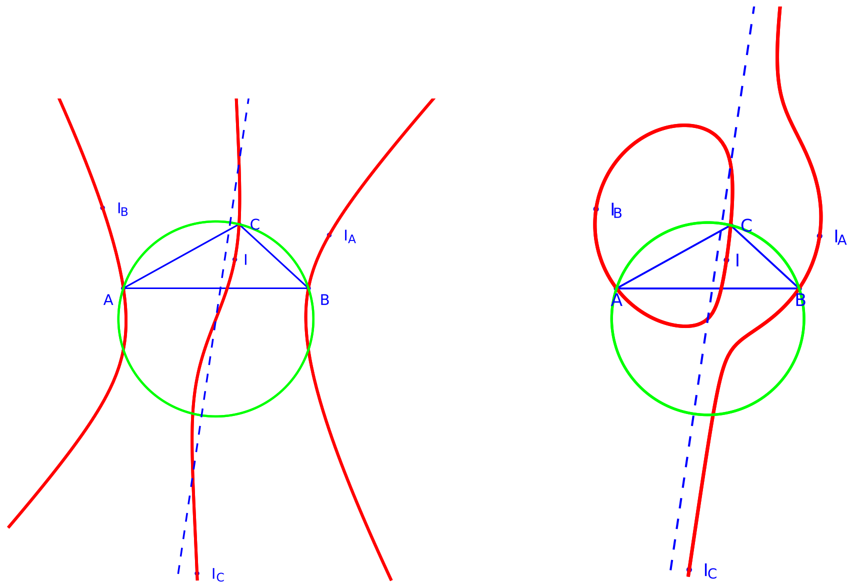
Eulerjev snop kubičnih krivulj trikotnika

Za konec naštejmo nekaj dejstev in izhodišč za nadaljnja razmišljanja o kubičnih krivuljah trikotnika, s poudarkom na krivuljah iz Eulerjevega snopa. Izberimo si za dani trikotnik v ravnini enakokraki trikotnik. Tedaj je Eulerjeva premica simetrala kota nasproti osnovnice. Tečaji vseh kubičnih krivulj trikotnika iz Eulerjevega snopa tako ležijo na simetrali notranjega kota trikotnika. Že v izreku 8 smo omenili, da so v tem primeru vse kubične krivulje trikotnika iz tega snopa degenerirane. Zapišemo jih lahko kot unijo stožnice in Eulerjeve premice ali kot unijo Eulerjeve premice in še dveh simetral notranjih oziroma zunanjih kotov danega enakokrakega trikotnika.



Slika 2. Levo: *Thompsonova kubična krivulja trikotnika*, njen tečaj je težišče trikotnika ABC. Desno: *Višinska kubična krivulja trikotnika*, njen tečaj je višinska točka trikotnika ABC.

V raznostraničnem trikotniku tvorijo Eulerjev snop raznotere kubične krivulje. Najpomembnejše med njimi so McCayeva, Napoleonova, Thompsonova, višinska, Darbouxova in Neubergova. Poleg trikotnika ABC, Eulerjeve premice, ki je označena s črtkano črto, in ustreznih kubičnih krivulj je na slikah prikazana tudi trikotniku ABC očrtana krožnica, in to zaradi naslednjih dejstev: oglišča trikotnika vedno ležijo tako na kubični krivulji trikotnika kot na očrtani krožnici. Izkaže pa se, da se število dodatnih presečišč kubične krivulje s trikotniku očrtano krožnico ujema s številom asimptot kubične krivulje trikotnika. Če ima kubična krivulja trikotnika z očrtano krožnico tri dodatna presečišča, označimo jih s točkami P, Q, R, potem je tečaj F kubične krivulje trikotnika višinska točka trikotnika PQR, asimptote kubične krivulje trikotnika pa so vzporedne premicam PF, QF, RF.



Slika 3. Levo: *Darbouxova kubična krivulja trikotnika.* Tečaj je De Longchampsova točka, ki je zrcalna slika višinske točke preko središča trikotniku očrtane krožnice. Desno: *Neubergova kubična krivulja trikotnika.* Tečaj le-te je točka v neskončnosti na Eulerjevi premici, ki jo označujemo z N. Ta točka je presečišče Eulerjeve premice in premice v neskončnosti. Neubergova kubična krivulja trikotnika seka trikotniku očrtano krožnico samo v eni točki, ki jo imenujemo Neubergova točka. Neubergova kubična krivulja trikotnika ima eno samo asimptoto.

Sklep

Kljub tisočletni zgodovini geometrije in dolgoletnim izkušnjam človeštva s to vejo matematike smo vedno znova presenečeni, koliko življenja skriva v sebi tako preprost objekt, kot je trikotnik. Ne le, da nam tri točke v ravnini določajo več kot 3600 različnih značilnih točk trikotnika, z izbiro četrte točke, tečaja kubične krivulje trikotnika, v življenje obudimo krivulje tretjega reda. Ko ta četrta točka drsi po Eulerjevi premici trikotnika, se pred nami zvrstijo člani Eulerjevega snopa kubičnih krivulj trikotnika z mnogimi skupnimi lastnostmi in mnogimi posebnostmi. Kdo ve, kakšna presenečenja v zvezi s trikotniki nas še čakajo v prihodnosti?

LITERATURA

[1] S. L. Loney, *The elements of coordinate geometry*, Part II, Trilinear Coordinates, etc., MacMillan, London, 1957.

[2] J. Casey, *Analytic geometry*, 2nd edition, Hodges & Figgis, Dublin, 1893.

[3] C. Kimberling, *Triangle centers and central triangles*, Congr. Numerantium **129**, 1998.

[4] H. M. Cundy in C. F. Parry, *Some cubic curves associated with a triangle*, J. Geom. **53** (1995), 41–66.

[5] G. M. Pinkernell, *Cubic curves in the triangle plane*, J. Geom. **55** (1996), 141–161.

[6] Z. Čerin: *On the cubic of Napoleon*, J. Geom. **66** (1999), No. 1–2, 55–71.

[7] T. Veber: *Kubične krivulje trikotnika*, magistrsko delo, Maribor, 2003.

[8] Cubics in the Triangle Plane, dostopno na spletu: `http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/ctc1.html`, povzeto dne 10. 2. 2012.

[9] Trilinear coordinates and other methods of modern analytical geometry of two dimensions: an elementary treatise, dostopno na spletu: `http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.chmm/1263315790`, povzeto 10. 2. 2012.

[10] Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle centers, dostopno na spletu: `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`, povzeto dne 10. 2. 2012.

VESTI

MATEMATIČNE NOVICE

Abelovo nagrado dobil Endre Szemerédi

Norveška Akademija znanosti je razglasila Abelovega nagrajenca za leto 2012. To je madžarski matematik **Endre Szemerédi** (Matematični inštitut Alfréd Rényi v Budimpešti in Oddelek za računalništvo na Univerzi Rutgers v ZDA). Nagrado je dobil za delo v diskretni matematki in teoretičnem računalništvu. Njegovi rezultati so pomemben prispevek k aditivni teoriji števil in ergodični teoriji. Boštjan Kuzman je podrobneje opisal [1] njegove dosežke v Delovi prilogi Znanost.

Vladimir Arnold na Krasu

Pred dvema letoma (junija 2010) je v Parizu umrl slavni ruski matematik **Vladimir Arnold**. Rojen je bil leta 1937 v Odesi v družini, ki je že več generacij nazaj dala znanstvenike. Njegova mati je bila Židinja. Arnold je bil zmeraj ponosen, da je potomec in del ruske inteligence. Po njegovih besedah ([2], str. 436):