MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO# 3

PRESEK LETNIK 44 (2016/2017) ŠTEVILKA 3

PRESEK

- UČINKOVITO RAZLIKOVANJE KLJUČEV
- POSKUSI S SVETLOBO
- ASTRONOMSKI IZZIVI TREH DEŽEL
- KLASIČNI ALGORITMI ZA UREJANJE V BLOČNEM PROGRAMIRANJU

ISSN 0351-6652

9 770351 665432

Skrajševanje časa vožnje letala po tleh

Težko se je odločiti, kateri del potovanja z letalom je bolj zoprn: prehod čez detektor kovin, sezuvanje čevljev, sredinski sedeži, boj za naslonjalo za roke med sedežema … Zagotovo na tak seznam sodi tudi čakanje na vzletni stezi tik pred vzletom. Kontrolorji letenja pogosto dovolijo letalom zapustiti izhod, četudi steza ni prosta, in tako povzročijo dolgo čakanje. Z matematičnimi modeli, ki temeljijo na verjetnostnem računu in na dinamičnem programiranju, lahko predvidimo potrebni čas do prihoda na stezo in čas čakanja na stezi. Tako pomagamo kontrolorjem izbrati med različnimi možnostmi, ki vplivajo na čas vzleta letala. Med preizkušanjem modela na različnih letališčih so uspeli skrajšati čas čakanja na stezi, kar je pripomoglo tudi k zmanjšanju gneče in k zmanjšani porabi goriva.

Modeli so zelo natančni in uspejo predvideti število letal na stezi na dve letali natančno. Kljub temu, da so zelo zapleteni (vsebujejo veliko število neznank, med njimi npr. vreme in konfiguracije steze), so izračuni zelo hitri. Kontrolorji dobivajo osvežene podatke o pričakovanih čakalnih vrstah na vsakih 15 minut. Modelov še ne uporabljajo prav vsa letališča, a se to utegne zgoditi zelo kmalu zaradi predvidenega povečanja zračnega prometa v naslednjih petih letih. Analize kažejo, da s primerno organizacijo vzletov lahko izboljšamo letališča in učinkovitost letalskih družb.

Za bolj natančne informacije si lahko preberete članek »A Queuing Model of the Airport Departure Process«, ki sta ga leta 2015 objavila I. Simaiakis in H. Balakrishnan.

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 44, šolsko leto 2016/2017, številka 3

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2016/2017 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, …), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Svetel obroč okoli Sonca na nebu prepredenem s koprenastimi oblaki. Foto: Lidija Babič

Učinkovito razlikovanje ključev

Janja Jerebic

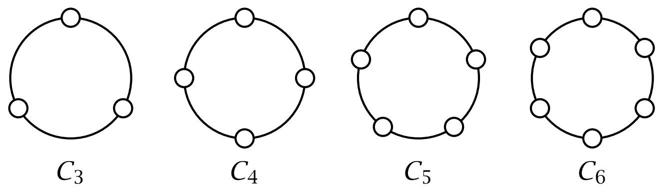
→ Skoraj vsak izmed nas se je že kdaj znašel v situaciji, ko je s šopom bolj ali manj enakih ključev stal pred zaklenjenimi vrati in iskal pravega. Problem učinkovitega razlikovanja ključev je leta 1979 predstavil Frank Rubin v reviji *Journal of Recreational Mathematics* [1] s spodnjo nalogo, katere rešitev je bila v omenjeni reviji objavljena leta 1980, podana pa je tudi v knjigi z naslovom: *Which Way Did the Bicycle Go?* [2]

Profesor, ki je slep, ima svoje ključe zbrane na okroglem nosilcu. Na razpolago ima ℓ različnih vrst oznak (obročev) za ključe, ki jih je mogoče ločiti po otipu. Vsako od ℓ oznak lahko uporabi poljubno mnogokrat. Ključev brez oznak profesor ne loči. Koliko ključev ima lahko na nosilcu, da bo ob uporabi ℓ različnih oznak znal izbrati pravega, četudi se mu bo nosilec zavrtel ali obrnil?

Recimo, da želimo na nosilcu imeti točno določeno število ključev. Potem vprašanje zastavimo takole:

Najmanj koliko različnih oznak potrebuje profesor, da bo ločil med svojimi n ključi?

Če ima profesor le en ključ, je jasno, da posebne oznake zanj ne potrebuje. V primeru več ključev je ključ brez oznake označen s tem, da nima dodatne oznake. Zato bomo v nadaljevanju predpostavili, da so vsi ključi označeni. Za en ključ na nosilcu je torej dovolj ena oznaka. Kaj pa, če ima dva ključa? Ker se nosilec lahko obrne ali zavrti, ključev ne bo mogoče razlikovati, če bosta enako označena. Potrebni sta torej vsaj dve različni oznaki in dve sta tudi dovolj. Jasno je namreč, da bo ključe mogoče vedno prepoznati, če bodo njihove oznake paroma različne. Naša naloga pa je, da poiščemo najmanjše potrebno število različnih oznak za učinkovito razlikovanje med ključi.

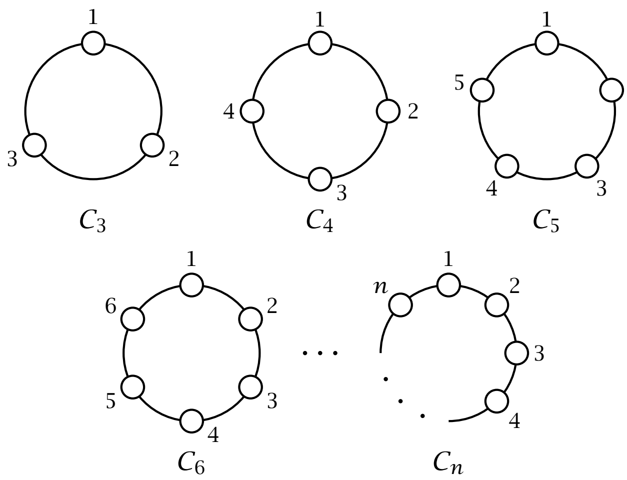


SLIKA 1.
Cikli

Pri reševanju naloge za tri ali več ključev si bomo pomagali z orodji teorije grafov. O osnovnih pojmih teorije grafov je Presek pisal že v prispevku *Stopnje točk grafov v nalogah*, ki je bil objavljen v drugi številki letnika 26, še več o grafih pa lahko preberete v knjigi R. J. Wilson in J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma 63, DMFA, Ljubljana, 1997. Okrogli nosilec z n ključi, kjer je $n \geq 3$, bomo identificirali s ciklom na n vozliščih, ki ga označimo s C_n. Vsako vozlišče cikla bo predstavljalo enega od ključev. Na sliki 1 so prikazani cikli C_3, C_4, C_5 in C_6, ki po vrsti predstavljajo nosilce s tremi, štirimi, petimi in šestimi ključi. V ciklu C_n je vsako vozlišče stopnje dva, kar pomeni, da ima natanko dve sosedni vozlišči. Če cikel C_n poljubno zavrtimo ali obrnemo, spet dobimo cikel C_n. Čeprav se položaj vozlišč pri tem lahko spremeni, se strukturne značilnosti grafa ohranijo. Gre torej za bijektivno preslikavo objekta samega vase, ki ohranja sosednost in nesosednost med vozlišči. Rečemo ji *avtomorfizem* ali *simetrija* grafa. Formalno avtomorfizem definiramo takole:

[1] Frank Rubin, *Problem 729*, Journal of Recreational Mathematics volume 11, p. 128, 1979.

[2] J. Konhauser, D. Velleman in S. Wagon, *Which Way Did the Bicycle Go?*, Dolciani series, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1996.



SLIKA 2.
Cikli z oštevilčenimi vozlišči

Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$. Bijektivna preslikava $\sigma : V(G) \to V(G)$ je avtomorfizem grafa G natanko tedaj, ko velja $uv \in E(G) \iff \sigma(u)\sigma(v) \in E(G)$.

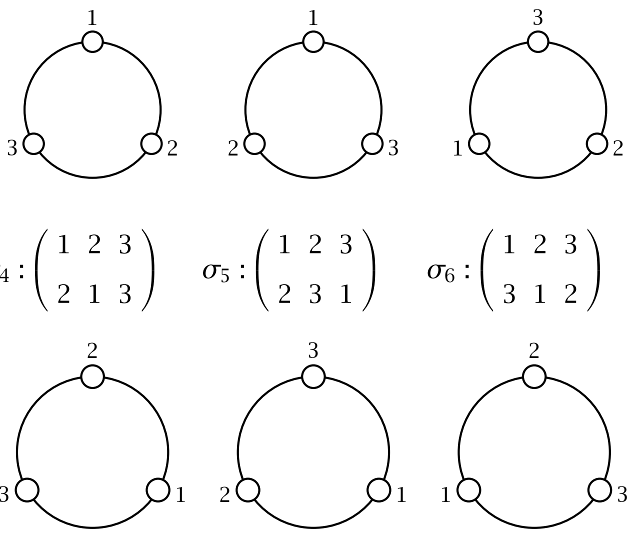
Avtomorfizem σ grafa G je pravzaprav permutacija njegovih vozlišč, ki ohranja sosednost med vozlišči (zadošča pogoju iz zgornje definicije). O permutacijah je Presek že pisal v tretji številki letnika 16, in sicer v prispevku *O igri petnajst in permutacijah*. Permutacijo σ lahko podamo na več načinov. Eden od njih je prikaz s tabelo, kjer v zgornjo vrstico zapišemo elemente množice $V(G)$, v spodnjo pa njihove slike. Če vozlišča cikla C_n po vrsti označimo s števili $1, 2, \ldots, n$, kot je prikazano na sliki 1, potem tabela permutacije $\sigma : V(C_n) \to V(C_n)$ izgleda takole:

$$\sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Število vseh permutacij množice z n elementi je enako $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Permutaciji σ, za katero je $\sigma(i) = i$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$, rečemo *identična permutacija* oz. *trivialni avtomorfizem* (identiteta).

Trije ključi

Začeli bomo s primerom treh ključev oz. s ciklom C_3. Vozlišča cikla C_3 označimo s števili 1,2 in 3 kot na sliki 2. Spodaj je zapisanih vseh $3! = 6$ permutacij vozlišč iz množice $V(C_3)$. Hitro lahko ugotovimo, da je vsaka od njih tudi avtomorfizem cikla C_3, saj ohranja sosednost med vozlišči, kot je prikazano na sliki 3.



$$\sigma_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

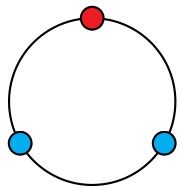
$$\sigma_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_5 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_6 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

SLIKA 3.
Avtomorfizmi cikla C_3

Najmanj koliko različnih oznak potrebuje profesor, da bo razlikoval tri ključe na okroglem nosilcu? Da je odgovor tri, ste verjetno že ugotovili, kljub temu pa razmislimo zakaj.

Poiskati moramo takšno označitev vozlišč cikla C_3, ki jo bo ohranjal le trivialni avtomorfizem. To pomeni, da po nobeni netrivialni simetriji nosilca za ključe razporeditev označenih ključev ne bo enaka začetni. Profesor bo zagotovo potreboval vsaj dve različni oznaki, saj v nasprotnem primeru vsak izmed šestih avtomorfizmov ohranja označitev. Toda zakaj dve oznaki nista dovolj? Pri poljubni označitvi treh ključev z dvema različnima oznakama bosta imela dva ključa zmeraj enako oznako. Oznaki bomo na slikah označevali z modro in rdečo barvo.

Oglejmo si sedaj označitev na sliki 4. Predpostavimo, da je profesor iz žepa potegnil nosilec s tako označenimi ključi. Ker ima le en ključ rdečo oznako, ki se po otipu razlikuje od modre oznake, ga bo hitro



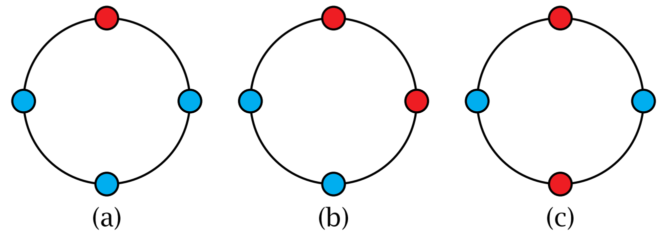
SLIKA 4.
Označitev cikla C_3 z dvema oznakama

prepoznal. Preostala dva ključa imata enaki oznaki. Eden od njiju je sicer na levi in drugi na desni strani rdečega ključa, a kaj, ko ne ve, če in kolikokrat se mu je nosilec obrnil. Zato taka označitev z dvema oznakama ne bo dobra, saj smo našli netrivialno simetrijo cikla C_3, ki to označitev ohranja. Za ta konkretni primer je to simetrija σ_2 s slike 3. Rečemo tudi, da označitev ni *razlikovalna*. Označitev vozlišč poljubnega grafa G je razlikovalna, če jo ohranja le trivialni avtomorzifem grafa G. Na podoben način kot zgoraj hitro ugotovimo, da nobena označitev vozlišč cikla C_3 z dvema različnima oznakama ni razlikovalna. Profesor bo zato moral vsakega od treh ključev označiti drugače.

Štirje ključi

Ugotovili smo že, da sta za dva ključa potrebni dve različni oznaki, za tri ključe pa tri različne oznake. Bodo zato za štiri ključe potrebne štiri različne oznake? Razmislimo. Graf, ki predstavlja okrogli nosilec s štirimi ključi, je cikel C_4. Označitev njegovih vozlišč z eno oznako ni razlikovalna, saj jo ohranjajo vsi avtomorfizmi cikla C_4. Preden nadaljujete z branjem, jih zapišite. Za razliko od permutacij vozlišč iz množice $V(C_3)$, od katerih vsaka določa avtomorfizem cikla C_3, je v primeru cikla C_4 le tretjina takih.

Preverimo sedaj, ali obstaja razlikovalna označitev vozlišč cikla C_4 z dvema oznakama. Na slikah ju bomo označili z rdečo in modro barvo. Glede na število oznak posamezne barve sta možnosti dve, $1+3$ in $2+2$, pri čemer sta pri drugi možnosti mogoči dve različni razporeditvi oznak. Če upoštevamo še vse simetrije cikla C_4, obstajajo le tri različne označitve njegovih vozlišč z dvema različnima oznakama. Prikazane so na sliki 5. Je katera od njih razlikovalna? Odgovor je ne. Predstavljajte si, da so vozlišča cikla C_4 označena s števili od 1 do 4 kot na sliki 2. Potem



SLIKA 5.
Označitve cikla C_4 z dvema oznakama

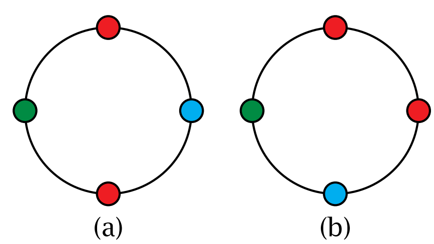
lahko za vsako od označitev (a), (b) in (c) najdemo netrivialni avtomorfizem, ki jo ohranja:

$$(a):\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\quad (b):\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

$$(c):\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}.$$

Kaj pa, če uporabimo tri različne oznake? Modri in rdeči dodajmo še zeleno. Pri vsaki taki označitvi bosta zmeraj dve vozlišči enako označeni. Če upoštevamo še različne razporeditve oznak in simetrije grafa, ugotovimo, da obstajata le dve različni označitvi vozlišč cikla C_4 s tremi različnimi oznakami. Prikazani sta na sliki 6.

Netrivialnega avtomorfizma, ki ohranja označitev 6(a), ni težko najti. A veste, kateri je? Za označitev 6(b) na prvi pogled ni videti, da bi tak avtomorfizem obstajal. Razmislimo sedaj, kaj mora veljati za avtomorfizem grafa na sliki 6(b), ki ohranja njegovo označitev. Ker avtomorfizem ohranja označitev, se lahko vozlišče določene barve preslika le v vozliče



SLIKA 6.
Označitvi cikla C_4 s tremi oznakami

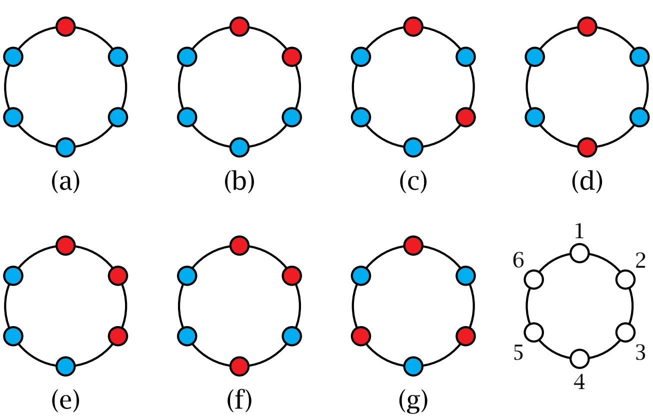
enake barve. To pomeni, da mora tak avtomorfizem fiksirati vozlišči modre in zelene barve (ju preslikati sami vase), saj sta edini vozlišči take barve. Ostaneta še vozlišči rdeče barve. Avtomorfizem, ki fiksira tudi ti dve vozlišči, je identiteta, avtomorfizem, ki bi zamenjal rdeči vozlišči in hkrati fiksiral modro in zeleno vozlišče, pa ne obstaja. Avtomorfizmi ohranjajo sosednost med vozlišči in zato zamenjava rdečih vozlišč, ki imata paroma različne barve sosednih vozlišč, ni mogoča. S tem smo dokazali, da je označitev s slike 6(b) razlikovalna označitev cikla C_4 s tremi oznakami, in ugotovili, da profesor za učinkovito razlikovanje med štirimi ključi na okroglem nosilcu ne bo potreboval štirih, ampak le tri različne oznake.

Pet ključev

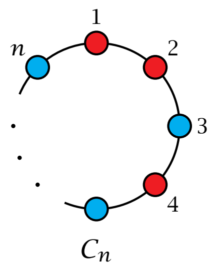
Obravnavo primera s petimi ključi prepustimo zainteresiranemu bralcu, ki naj dokaže, da so za razlikovanje med petimi ključi na okroglem nosilcu prav tako potrebne (in zadostne) tri različne oznake.

Šest ali več ključev

Bodo tri oznake potrebne tudi, če imamo na nosilcu šest ključev? Oglejmo si še ta primer. Da potrebujemo vsaj dve oznaki, je očitno. Vse možne označitve cikla C_6 z dvema oznakama (do simetrije natančno) so prikazane na sliki 7.



SLIKA 7.
Označitve cikla C_6 z dvema oznakama



SLIKA 8.
Označitev cikla C_n, $n > 6$, z dvema oznakama

Pričakovali bi, da bomo za vse primere hitro našli avtomorfizem, ki ohranja označitev. Toda za označitev (f) na sliki 7 je videti, da takega avtomorfizma ni (za vse ostale obstaja – poiščite ga!). Osredotočimo se sedaj na označitev (f) in si oglejmo njene posebnosti. Prva od teh je, da obstaja le eno rdeče vozlišče (4) z dvema modrima sosedama (3 in 5), od koder sledi, da ga avtomorfizem, ki ohranja označitev, mora fiksirati. Prav tako obstaja le eno modro vozlišče (3) z dvema rdečima sosedama (2 in 4), ki se bo zato tudi preslikalo samo vase. Vsako vozlišče v ciklu ima natanko dve sosedni vozlišči. Če avtomorfizem neko vozlišče fiksira, lahko ta isti avtomorfizem njegovi sosedni vozlišči bodisi fiksira bodisi zamenja. Če je eno od sosednih vozlišč fiksno, mora biti tudi drugo. Z zaporedno uporabo zgornjega razmisleka po vrsti ugotovimo, da so poleg vozlišč 3 in 4 fiksna še vozlišča 2, 5, 1 in 6 cikla C_6 s slike 7(f). Pri tem je bilo ključno to, da smo našli dve sosedni vozlišči cikla, ki ju mora poljuben avtomorfizem, ki ohranja označitev, fiksirati.

Predstavljajte si sedaj, da med vozlišči 5 in 6 cikla s slike 7(f) vrinemo še poljubno dolgo verigo modrih vozlišč in na ta način dobimo označen cikel C_n, kjer je $n > 6$ (slika 8). Tak cikel spet vsebuje natanko eno rdeče vozlišče z dvema modrima sosedama in natanko eno modro vozlišče z dvema rdečima sosedama. Zato mora avtomorfizem, ki ohranja označitev, ti dve vozlišči fiksirati. Omenjeni vozlišči sta poleg tega še sosedni. Ker ima vsako od njiju natanko dve sosedni vozlišči, od katerih je eno fiksno, mora biti tudi drugo fiksno. S tem posopkom nadaljujemo in ugotovimo, da je edini avtomorfizem cikla C_n, ki ohranja označitev s slike 8, identiteta. Rezultat je dokaj presenetljiv. Pričakovali bi, da bomo za razlikovanje med več ključi potrebovali več različnih oznak, a se je izkazalo drugače – če ima profesor na okroglem nosilcu šest ali več ključev, bo za učinkovito razlikovanje med njimi potreboval le dve različni oznaki.

Razlikovalno število grafa

Zgoraj predstavljeni problem so raziskovalci pred približno dvajsetimi leti posplošili tako, da nosilec za ključe ni bil več nujno okrogel in da so definirali **razlikovalno število** poljubnega grafa G, $D(G)$ kot najmanjše število d, za katerega obstaja razlikovalna označitev grafa G z d različnimi oznakami. Koncept razlikovalnega števila je bil vpeljan v članku M. O. Albertson in K. L. Collins, *Symmetry breaking in graphs*, Electron. J. Combin. 3(1996), R18. Danes smo torej določili razlikovalno število ciklov in ugotovili, da je $D(C_3) = D(C_4) = D(C_5) = 3$ ter $D(C_n) = 2$ za $n \geq 6$. O znanih razlikovalnih številih drugih grafov pa več kdaj drugič.

× × ×

Naloga

Marko Razpet

→ Izračunaj

- $6^2 - 5^2$, $56^2 - 45^2$, $556^2 - 445^2$, $5556^2 - 4445^2$.

Nato rezultate posploši na razliko kvadratov oblike

- $\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2$.

Rešitev

Uporabimo enakost $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ in dobimo:

- $6^2 - 5^2 = (6-5)(6+5) = 1 \cdot 11 = 11$,
- $56^2 - 45^2 = (56-45)(56+45) = 11 \cdot 101 = 1111$,
- $556^2 - 445^2 = (556-445)(556+445) = 111 \cdot 1001 = 111111$,
- $5556^2 - 4445^2 = (5556-4445)(5556+4445) = 1111 \cdot 10001 = 11111111$.

Predvidevamo, da velja enakost

- $$\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2 = \underbrace{11\ldots1}_{2n+2}. \qquad (1)$$

Če hočemo (1) zares izpeljati, ne le uganiti, se moramo spomniti, kaj desetiški mestni zapis števil sploh pomeni. 1949 je npr. le krajši zapis števila $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 9$. Brez težav pa lahko krajše izrazimo vsoto $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, kjer je q poljubno število, ki ni enako 1, n pa poljubno naravno število. Ker je $qS_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1} = S_n - 1 + q^{n+1}$, dobimo S_n iz enačbe $qS_n = S_n + (q^{n+1} - 1)$:

- $$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

V posebnem primeru $q = 10$ je

- $$1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^n = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1). \qquad (2)$$

Enakost (1) lahko sedaj z uporabo mestnega zapisa in (2) preverimo tako:

- $$\begin{aligned}
&\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2 = \\
&= (\underbrace{55\ldots5}_{n}6 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5)(\underbrace{55\ldots5}_{n}6 + \underbrace{44\ldots4}_{n}5) = \\
&= \underbrace{11\ldots1}_{n+1} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n}1 = \\
&= (10^n + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 1) = \\
&= \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1) = \frac{1}{9}((10^{n+1})^2 - 1) = \\
&= \frac{1}{9}(10^{2n+2} - 1) = \\
&= 1 + 10 + \ldots + 10^{2n+1} = \underbrace{11\ldots1}_{2n+2}.
\end{aligned}$$

× × ×

Poskusi s svetlobo – 2. del

Andrej Likar in Nada Razpet

→ V drugem delu poskusov s svetlobo se bomo posvetili preslikavam z lečo, poskusom z laserskim kazalnikom, valovni optiki, polarizaciji svetlobe in optični aktivnosti ter zaključili z doma izdelanimi ukrivljenimi zrcali s folijo.

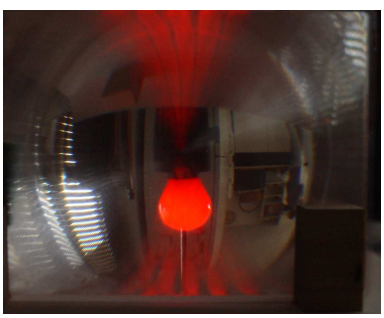
Preslikave z lečo

Realna slika z dvema Fresnelovima lečama

Fresnelova leča ima lahko v primerjavi s premerom zelo kratko goriščno razdaljo. Dve taki leči tvorita realno sliko predmeta, ki jo brez težav opazujemo z obema očesoma. Zdi se nam, da slika lebdi v prostoru.

Pripomočki: Fresnelovi leči (ali dve leči grafoskopa), barvna žarnica, stojali za leče.

Navodilo. Leči postavite drugo za drugo. Sliko žarnice lahko opazujemo z obema očesoma. Slika lebdi v prostoru. Dve leči omogočita večji prostorski vtis, ker vidimo realno sliko že iz manjše oddaljenosti z obema očesoma hkrati.



SLIKA 1.
Lebdeča žarnica

Vodna leča

Tudi z vodo lahko naredimo lečo. Imeti moramo ustrezen model, kamor vodo nalijemo. Z merjenjem krivinskih polmerov modela in goriščne razdalje leče lahko določimo lomni količnik vode.

Pripomočki: vrč z vodo, sestavljivi plastični približno krogelni kapici (dobimo ju pri prodajalcu plastičnih okraskov), zaslon.

Navodilo. Oba dela plastičnega modela ločeno potopite v vodo in ju pod vodo sestavite. Model naj bo na začetku popolnoma napolnjen z vodo. Z vodno lečo preslikajte oddaljen predmet. Slika nastane v goriščni ravnini leče. Izmerite goriščno razdaljo.

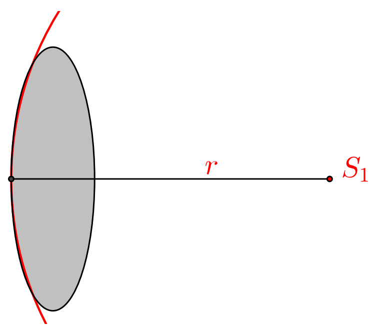
SLIKA 2.
Realna slika na zaslonu z vodno lečo. Spreminjamo količino vode v modelu.

Nato vodo izlijte in model le delno napolnite z vodo. Kaj se zgodi s sliko (goriščno razdaljo)? Kaj vse lahko ob takem poskusu povemo o preslikavah z lečo?

Opomba. Prečni presek modela je elipsa. Ukrivljenost najlaže ugotovimo tako, da opazujemo senco predmeta (slika 3). Poiščemo krožnico, ki se elipsi dobro prilega, in izmerimo polmer. Vstavimo v enačbo

$$\frac{1}{f} = (n-1)\,\frac{2}{r},$$

pri čemer je f goriščna razdalja leče, n lomni količnik vode, r krivinski polmer modela. Pri tem smo vpliv plastike zanemarili.



SLIKA 3.
Senca prečnega preseka modela in prilegajoča se krožnica

Cilindrična leča

Pripomočki: vrč z vodo, valjasta prozorna posoda, pisalo, karton.

Navodilo. Prozorno plastenko, katere en del ima obliko valja, napolnite z vodo in jo zamašite. Na kos kartona napišite dve veliki tiskani črki, ki nista simetrični, npr. FR. Karton postavite za plastenko. Ko pogledamo skozi plastenko, vidimo povečano sliko napisa ne glede na to, ali je os valja navpična ali vodoravna (slika 4).

Zdaj pa napis FIZIKA postavite za cilindrično lečo tako, da boste videli napis preslikan, kot kaže slika 5.

Vse primere ponazorite še grafično.

SLIKA 4.
Napis vidimo povečan. Lega osi ni pomembna.

Izginjajoči napis

Navadno dijakom pokažemo, kako se pojavi kovanec, ko v prazno posodo, na dnu katere je ob robu kovanec, nalijemo dovolj vode. Tokrat naredimo obraten poskus. Poglejmo, kako lahko napis izginja.

Pripomočki: vrč z vodo, večji neprozoren lonček, manjši plastični prozoren lonček, knjižno kazalo.

Navodilo. V večji lonček nalijte vodo, v prozoren lonček ob rob pritisnite knjižno kazalo. Lonček s knjižnim kazalom počasi potapljajte v vodo. Preizkusite prozorne lončke z različno plastiko. Spreminjajte svojo lego in opazujte, kako to vpliva na dolžino vidnega oz. potopljenega dela knjižnega kazala.

V plastično posodo nalijte vodo. V prozoren (manjši) lonček ob rob pritisnite knjižno kazalo. Lonček s knjižnim kazalom počasi potapljajte v vodo. Kaj opazite? Preizkusite prozorne lončke z različno plastiko. Spreminjajte svojo lego in opazujte, kako to vpliva na dolžino vidnega oziroma potopljenega dela knjižnega kazala. Skicirajte potek žarkov.

SLIKA 5.
Preslikava napisa FIZIKA. Os valja je vodoravna (zgoraj), os valja je navpična (spodaj).

Predmet v leči

Vodna cilindrična leča omogoča poskuse, pri katerih je predmet v leči. Spreminjamo lego predmeta v posodi in opazujmo, kaj se dogaja z njegovo sliko.

Plošča v leči

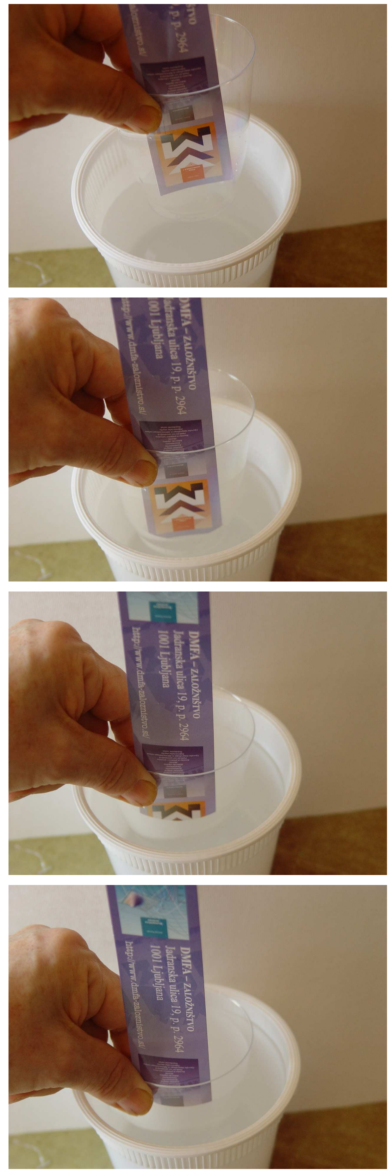
Pripomočki: valjasta posoda, vrč z vodo, trši plastični pravokotnik, svinčnik, karirasti papir, merilo.

Navodilo. V prozorno plastično valjasto posodo nalijte vodo. Pod posodo postavite karirast papir. Plastični pravokotnik postavite navpično v posodo in ga pritisnite ob sprednjo steno. Nato ga počasi oddaljujte od stene. Opazujte, kako se navidezna širina pravokotnika spreminja v odvisnosti od razdalje od prednje ploskve.

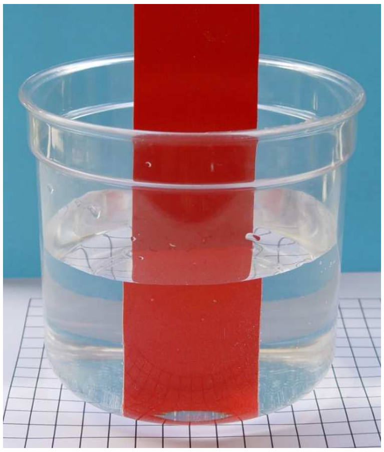
Opazovanje loma svetlobe

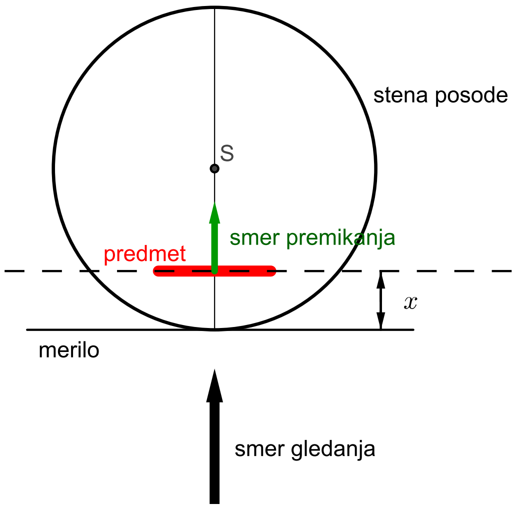
Pripomočki: prozorni kozarci različnih oblik, barva za pirhe, voda.

Navodilo. Kozarec napolnite z vodo in ga postavite na mizo ali okensko polico. Na vodoravni podlagi opazite svetlobne lise, ki nastanejo zaradi loma svetlobe, ki prihajajo od sonca oz. od odboja na oknih in vratih. Oblika svetlobnih lis je odvisna od lastnosti kozarca, kot sta oblika in napake v stenah, pa tudi od kota, pod katerim padajo vzporedni svetlobni žarki na kozarec.



SLIKA 6.
Kazalo pritisnemo ob rob prozornega lončka in ga skupaj z lončkom postopoma potapljamo v lonček z vodo.





SLIKA 7.
Pravokotno ploščo smo postavili navpično v valjasto posodo z vodo (zgoraj). Premikanje plošče (spodaj).

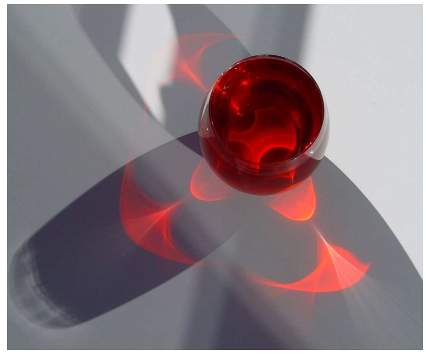
Ponovite poskuse še s *praznimi* kozarci.

Slamica v valjasti posodi z vodo

Pripomočki: slamica, valjasta posoda, vrč z vodo, merilo.

Navodilo. V posodo natočite vodo. Postavite slamico poševno v posodo, kot kaže slika 9. Kaj opazite? Spreminjajte lego glave. Kaj opazite?

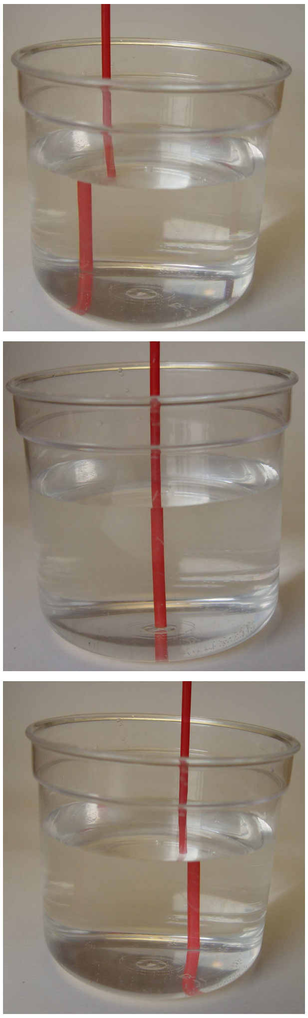
Nato postavite slamico navpično in jo premikajte od leve proti desni, kot kažejo slike 13. Kaj opazite?



SLIKA 8.
Svetloba prihaja iz dveh smeri (zgoraj). Na kozarec pada direktna svetloba s sonca in odbita svetloba od okna in steklenih vrat. Vodo v kozarcu smo obarvali (spodaj).

SLIKA 9.
Slamico postavimo poševno v vodo.

Kje mora stati slamica in kje opazovalec, da bo del slamice, ki je pod vodo, izginil?



SLIKA 10.
Slamico premikamo od leve proti desni.

Literatura

[1] N. Razpet, *Postavimo predmet v lečo*, Naravoslovna solnica, **19**, štev 1 (jesen 2014), str. 36., Modrijan.

[2] D. Ivanov, S. Nikolov, *Optics demonstrations using cylindrical lenses*, Physics Education, **50**, September 2015, str. 578 - 559

[3] N. Razpet, *Polovica leče - polovica slike?*, Presek, **44**, štev. 1, str. 18 - 21, 2016/2017.

SLIKA 11.
Dela slamice, ki je pod vodo, ne vidimo.

Poskusi z laserskim kazalnikom

Laserska pahljača

Ozek curek svetlobe iz laserskega kazalnika lahko razširimo v ravnino, če curek usmerimo na ozko okroglo stekleno paličico. S takim curkom si označimo točke na prostorsko razgibanem predmetu, odbiti žarek pa lahko pokaže drobne odklone od sicer gladke površine predmeta. Tako lahko opazujemo šibke valove na vodni gladini.

Pripomočki: laserski kazalnik, steklena paličica ali cevka, zaslon.

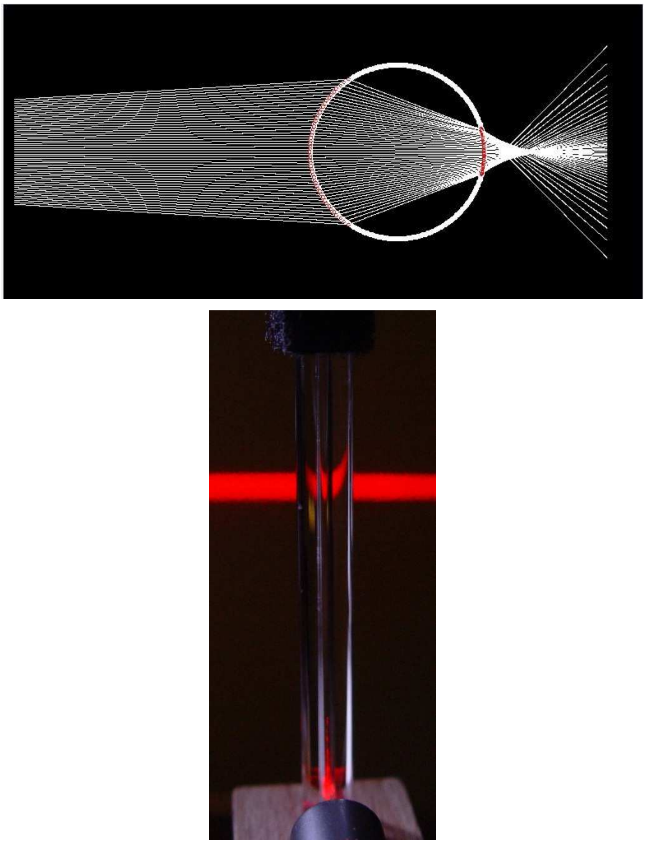
Navodilo. Laser usmerite na sredino cevke. Na zaslonu opazite rdečo črto.

Poskusi z laserskim kazalnikom

Ozek curek svetlobe iz laserskega kazalnika lahko ponazori svetlobne žarke. Tu je nekaj poskusov, kjer to izrabimo.

Pripomočki: laserski kazalnik, podstavek, lepilni trak, lončki, črn zaslon, voda.

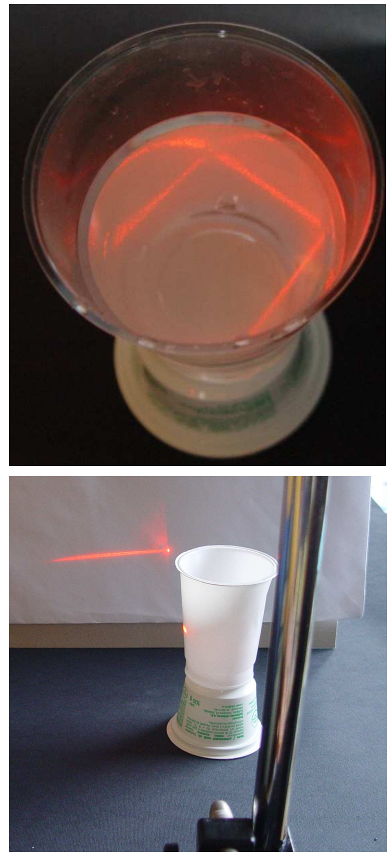
Navodilo. Pritrdite laserski kazalnik na podstavek. Posvetite z njim na rob *praznega lončka*. Potem lonček napolnite z vodo in poskus ponovite. Uporabite različne lončke. Nato v kozarček z vodo dodajte kapljico mleka ali natočite vodo tako, da bo v njej dovolj zračnih mehurčkov (slika 13). Opazujte odboje od sten kozarčka.



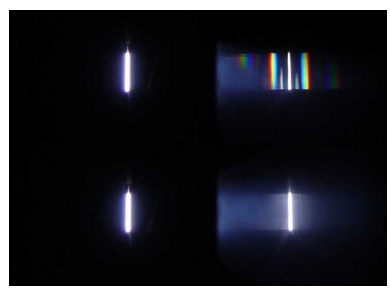
SLIKA 12.
Potek žarkov iz oddaljenega svetila skozi stekleno paličico (zgoraj). Na zaslonu se pojavi črta (spodaj).

Valovna optika

Valovno optiko demonstriramo s standardnimi poskusi, kot je poskus z režama. Z laserjem se taki poskusi prav lepo posrečijo. Kaj pa z belo svetlobo? Ena od možnosti je seveda prikaz oljnih madežev. Drugo omenjamo tu – s pogledom skozi režo mikrometrskega vijaka pri dovolj zaprtem vijaku se pojavijo barve. Tu prikažemo še eno, ne tako pogosto omenjano možnost – interferenčne barve, ki nastanejo na jeklenem merilu z milimetrskimi graviranimi oznakami. Svetloba iz reže pada na ravnilo pod zelo ostrim kotom. Na sliki 14 zgoraj je na levi svetla reža, na desni pa njena odbita svetloba na ravnilu s polmilimetrskimi oznakami. Odboj na delu ravnila brez oznak ne kaže barvnih prog (spodaj).



SLIKA 13.
Dvakratni odboj laserskega žarka na stenah kozarčka z vodo (zgoraj). Laserski žarek usmerimo na rob kozarčka, na zaslonu opazimo pahljačo (spodaj).



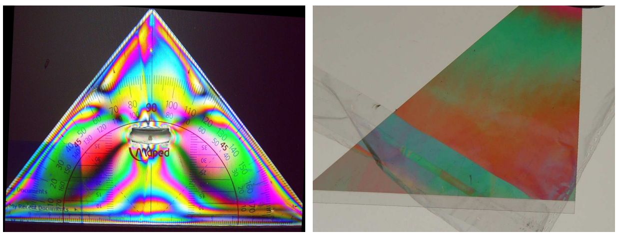
SLIKA 14.
Barvne interferenčne proge po odboju na jeklenem merilu

Pripomočki: jekleno ravnilo z milimetrskimi ali polmilimetrskimi razdelki.

Navodilo. Na ravnilo posvetite skoraj tangencialno z močno belo lučjo in opazite barvne interferenčne proge.

Polarizacija svetlobe in optična aktivnost

Poskusi s polariziranimi curki svetlobe so med najzanimivejšimi. Zakaj se beli curki polarizirane svetlobe čudovito obarvajo, lahko le bežno razložimo. Ker je svetloba iz računalniškega zaslona linearno polarizirana, se taki poskusi vsakomur posrečijo, saj moramo imeti le polarizacijska očala, ki jih ni težko dobiti.



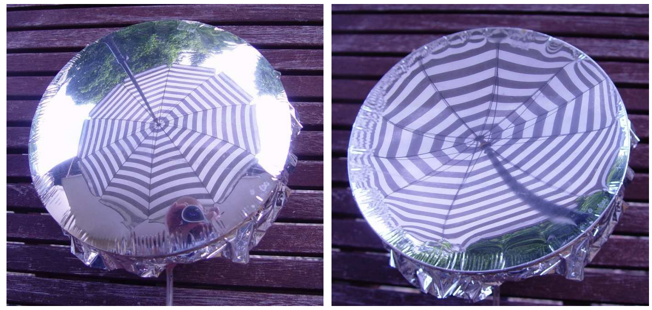
SLIKA 15.
Napetosti v plastičnem trikotniku, kot jih vidimo v svetlobi iz računalniškega zaslona s polarizacijskimi očali (levo). Tudi celofan ali različno debele plasti prozornega lepilnega traku se pravljično obarvajo (desno).

Pripomočki: plastičen trikotnik, celofan, prozorne plastične folije, polarizacijska očala, računalnik.

Navodilo. Trikotnik postavite pred bel zaslon in ga opazujte s polarizacijskimi očali. Nagnite glavo na levo in nato na desno stran. Namesto trikotnika lahko uporabite tudi več plasti prozornega lepilnega traku, prozoren ovojni papir, tanko plastično folijo, ki jo raztegujete in trgate. Kako ugotovite smer polarizacije?

Konkavno zrcalo s folijo

Konkavno ali konveksno zrcalo večjega polmera lahko izdelamo iz elastične aluminizirane folije, ki je na voljo v vsakem kompletu avtomobilske prve pomoči. Ker kompleti zastarajo in jih je potrebno obnoviti, ni težko najti tak zavržen komplet s folijo, ki se je ni nihče niti dotaknil. Primerno posodo žrtvujemo za znanost, saj moramo vanjo izvrtati luknjo, kamor montiramo cevko za zrak. Skrbna izdelava se poplača, zrcalo sicer nima vrhunskih optičnih lastnosti, za prikaz realne slike pa je prav primerno.



SLIKA 16.
Doma izdelano zrcalo s folijo. Če v posodo zrak vpihnemo, dobimo konveksno zrcalo, če ga izsesamo, pa konkavno zrcalo.

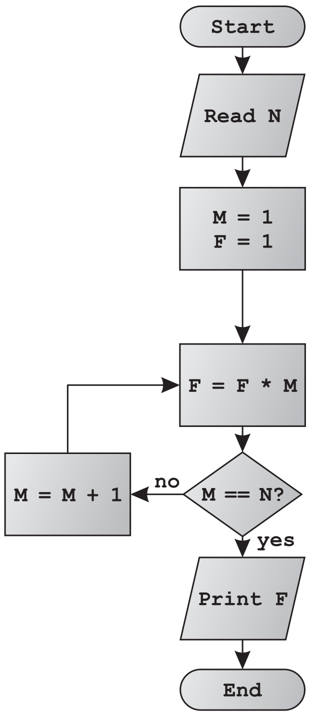
Pripomočki: aluminizirana folija (zaščitna folija), primerna okrogla plastična posoda, plastična cevka.

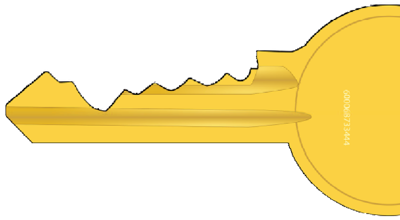
SLIKA 17.
V dno plastične posode izvrtamo luknjo in vanjo vstavimo plastično cev.

Navodilo. Najprej v dno posode ali pri strani izvrtajte luknjo in vanjo vstavite plastično cev, jo pritrdite in poskrbite, da dobro tesni. Zaščitno folijo razprostrite na mizo. Nanjo položite plastično posodo. Posoda naj ima rob in naj bo neupogljiva. Folijo pritrdite na posodo tako, da pod rob tesno navijete vrvico ali pa jo na posodo prilepite z močnim lepilnim trakom. Skozi cev boste izsesali (vpihnili) zrak in tako oblikovali konkavno (konveksno) zrcalo. Takemu zrcalu lahko spreminjamo goriščno razdaljo.

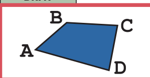
× × ×

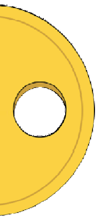
Nagradna križanka



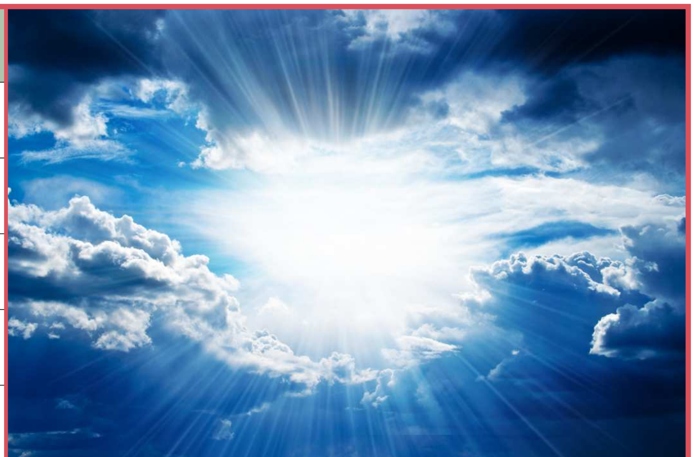


- AVTOR MARKO BOKALIČ
- ANTIČNO POSLOPJE ZA GLASBENE PRIREDITVE
- MOTEČA HLADNEJŠA OBMOČJA V FOTOSFERI SONCA
- TEKOČE TELESNO TKIVO
- NAŠ JEZIKOSLOVEC (JAKOB)
- GLAVNO MESTO MALIJA
- GANSKI DIPLOMAT (KOFI)
- DOBAVA DOBRIN, POTREBNIH ZA ŽIVLJENJE
- WILDOV JUNAK GRAY
- UGANKA
- STARA PREDIVNICA
- IZUM JOHANNA REISA
- "KONEC" POMOČI
- POMANJKANJE APETITA
- STARO NASELJE PRI ZADRU
- NEKDANJI ARGENTINSKI NOGOMETAŠ (JUAN)
- KLINAST PREDMET ZA TRDNO NAMESTITEV
- NAŠ NADŠKOF (STANISLAV)
- KRVNO TELESCE ZA STRJEVANJE KRVI
- REKA V SEVERO-ZAHODNI NEMČIJI
- NEKDANJI FRANCOSKI PREDSEDNIK D'ESTAING
- VZHODNJAKINJA
- VOLT-AMPER
- ZELIŠČE
- POLETNO OZVEZDJE V ZENITU Z ZVEZDO VEGA
- EKSTENZOR (MIŠICA)
- JAVEN POZIV
- STANDARDIZACIJA
- AVSTRIJ. PESNIK (RAINER M.)
- MLEČNI NAPITEK
- JAPONSKI PREMIER (ŠINZO)
- ITALIJAN. MOTORIST (VALENTINO)
- TELO ČETVEREC
- TVOR
- VAS OB MADŽARSKI MEJI PRI LENDAVI
- POGANJEK ZA CEPLJENJE
- RUBIDIJ
- GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ
- PODROČJE MATEMATIKE
- NAGRAJEN UMETNIK ALI ZNANSTVENIK
- ŠAHISTKA PETEK (PROFESORICA MATEMATIKE)
- RAZSTAVA NA VSAKI DVE LETI
- VRHUNEC
- KRAJ POD GRADOM RIHEMBERK NA PRIMORSKEM
- ŠVEDSKI ASTROFIZIK (HANNES)
- MEHKA TEŽKA KOVINA
- SMUČARSKI V TUJIH SESTAVLJENKAH
- KAZIMIR TARMAN
- STEKLAR. MESTO NA NIZOZEM.
- OBMOČJE ZA OBRTNO DEJAVNOST
- ODBITE OBRESTI
- DENARNA ENOTA V GRUZIJI
- ZUNANJI PREIZKUS ZNANJA NA OSNOVNI ŠOLI
- STARA DAVŠČINA
- PLEMENSKI OVEN PO GORENJSKO
- SLIKARSKA TEHNIKA
- SLADEK PRIMORSKI DREVESNI SADEŽ
- MUSLIMAN. MOŠ. IME
- SREDNJEEVROPSKA REKA
- NAŠ PISATELJ (FRAN)
- PRITOK DORDONJE
- REKA IN DVOJNO JEZERO NA SEVERU IRSKE
- SESTAVNI DEL (SNOV) KONDENZATORJEV
- TRENUTEK
- OČE V ARABSKIH IMENIH
- SAMOGLASNIŠKI STIK
- NORTH CAROLINA
- ANGLEŠKI NOGOMETNI ZVEZDNIK (DAVID)
- PEVEC LESKOVAR
- ENAKA SOGLASNIKA
- SOKRATOVA ŽENA
- TITAN
- POLETNO ZODIAKALNO OZVEZDJE
- ŠTORKLJI SORODEN TROPSKI PTIČ
- ŽIVLJENJSKI PROSTOR NA MORSKEM DNU
- SMUČARSKI SKAKALEC PREVC, PETROV BRAT
- OČE
- PRAŠIČ
- KRAJ PRI BREŽICAH





KNJIGA ALI LISTI Z NATIPKANIMI PREDAVANJI ZA ŠTUDIJSKE NAMENE
MRENA, KI OVIJA PLJUČA, POPRSNICA
ROŽEVINAST IZRASTEK NA GLAVI ŽIVALI
SKANDINAVSKI DROBIŽ, OER
KRONOMETER
AMERIŠKI REŽISER (ROBERT)



PRITOK BOSNE PRI DOBOJU
STRUPENA OLJNATA TEKOČINA IZ ETILN. ALKOHOLA
10
KRATEK POVZETEK VSEBINE LISTINE
3
IVAN VIDAV
KNJIŽNI IZRAZ ZA PEKEL
OHM PO NAŠE
PEKOČINA V POŽIRALNIKU
GEOMETR. TELO
RIMENO RJAVA BARVA
13

KOTNA FUNKCIJA
GRŠKO-RIMSKO OBDOBJE
"SREDINA" KOLONE
ENOTA ZA ELEKTRIČNI TOK
SESTAVNI ELEMENT
IGRALKA RINA
SAMEC GOZDNE DIVJADI
BARVILO V PARADIŽNIKU
TEOLOŠKI IN POLITIČNI VODITELJ ŠIITOV
"KONEC" VELJAVE

DUHOVNIK
IME VEČ POLJSKIH KRALJEV
DOMISLEK V FILMU

SOSEDI ČRKE F
DOBA PRVIH RAZVOJNIH STOPENJ V PREDKLASIČNI UMENOSTI
PODROČJE MATEMATIKE
ITALIJAN. DRAMATIK (DARIO)
12

PALESTIN. VODITELJ (JASER)
VOJAŠKA PIVNICA
STRANICA PRI KEGLJ. STEZI
NAŠ ARG. PEVEC
NAJVEČJA REKA V TOSKANI

GORA NAD POSOČJEM
NAČIN DELA, METODA
ČRNO KURIVO IZ LESA
VRTENJE
PRIMORSKA JED IZ ZELJA, KROMPIRJA IN FIŽOLA
Z NJO SE KAJ ZAŠIJE

TRŽ. PISAT. (BORIS)
EVROPSKA VESOLJSKA SONDA
7
MEJNA REKA MED NEMČIJO IN LUKSEMBURGOM
POGLAVJE KORANA
DOBA, EPOHA
NAPREZANJE
MOLIBDEN

ČLOVEK POSAMEZNIK
NAŠ KNJIŽ. (MILOŠ)
INDUSTR. OBLIKOVANJE

MESTO PRI TORINU
DOLŽINSKA MERA ZA BLAGO
PUCCINIJEVA OPERA
IZRAZIT RT NA VZHODNI OBALI ŠPANIJE

VELIKA PAPIGA
IBSENOVA DRAMSKA JUNAKINJA
2. OSEBA MNOŽINE
BLATO NA DNU VODA, MULJ

9
STEZA V SNEGU
BIATLONKA SACHENBACHER
14

OLIMPIJSKE IGRE
KRAJEVNA SKUPNOST
IT. PISATELJICA MORANTE
100 m²

JURČIČEV VAŠKI POSEBNEŽ

FINSKI ARHITEKT (EERO)

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. januarja 2017**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

Razmisli in poskusi

Odgovor na vprašanje iz številke 40/3

Mitja Rosina

51. Kako visok stolp iz kock lahko zgradite?

Zabavno je tekmovanje, kdo bo zgradil višji stolp iz kock ali kamnov, predno se bo podrl. Vzeli smo lesene kocke s stranico a = 3,15 cm iz otroške zlagalnice. Po nekaj poskusih se nam je posrečilo zložiti n = 22 kock (višina stolpa skoraj 70 cm). Omejitev je seveda, koliko vodoravna je miza, koliko vzporedni in gladki sta nasprotni ploskvi kock, koliko je prepiha in treslajev iz okolice in kako mirno roko imamo. Dokler položimo malo kock, je stolp zelo stabilen, potem pa moramo čedalje mirneje in natančneje polagati kocke, ki se hočejo rahlo nagniti ali pozibavati. Potem se nenadoma stolp podre.

Stolp se podre, če se nagne toliko, da seka navpičnica skozi težišče spodnji rob. Višina težišča se poviša z $na/2$ na diagonalo C. Višinska razlika je torej (glej sliko 1)

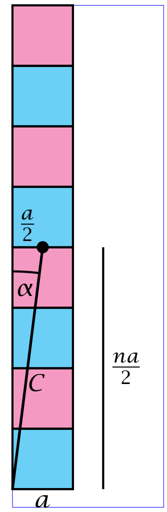
- $$\Delta z = C - na/2 = \sqrt{(na/2)^2 + (a/2)^2} - na/2 \approx a^2/4(na)\,.$$

Potencialna energija se poveča za $\Delta W_{\mathrm{pot}} = nmg\Delta z = mga/4$, torej neodvisno od števila kock. Kritični kot nagiba

- $$\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha = \frac{a/2}{na/2} = \frac{1}{n}$$

in je obratno sorazmeren s številom kock, torej je pri naraščajočem številu kock potrebna čedalje večja natančnost.

Pri našem poskusu je bil kritični kot nagiba $\alpha \approx 1/22 = 4{,}5\ \% = 2{,}6^\circ$. Pri tem nagibu se je povečala potencialna energija samo za $mga/4$ (toliko, kot če bi dvignili eno kocko za 8 mm ali vse kocke za 0,36 mm). In stolp se je prevrnil!



SLIKA 1.

× × ×

Barvni sudoku

V 8×8 kvadratkov morate vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh osem števil.

	3	1				5	2
7	5						
	7				3		6
				8			5
					8		
		3		7		4	
8		5			6		
6			1				

× × ×

36. tekmovanje iz znanja fizike za Stefanova priznanja v šolskem letu 2015/2016

Barbara Rovšek

Tekmovanje je potekalo brez večjih zapletov. Naloge so bile rešljive, eksperimenti so se posrečili, učilnice niso zgorele, priznanja in nagrade so šli v prave roke. Državna tekmovalna komisija pri DMFA Slovenije v sestavi Vesna Harej, Barbara Rovšek, Jelka Sakelšek, Mojca Štembergar in Lucija Željko je z opravljenim delom zadovoljna.

SLIKA 1.
Tekmovalci na državnem tekmovanju v Ljubljani beležijo upogib ravnila. (Foto: Jan Šuntajs)

Šolskega tekmovanja se je udeležilo 7771 učencev 8. in 9. razreda in od teh jih je 2862 prejelo bronasta Stefanova priznanja. Na področno tekmovanje, ki je potekalo v 17-ih regijah po Sloveniji, se je prebilo 1714 učencev, 617 jih je osvojilo srebrno priznanje.

Državno tekmovanje je bilo v soboto 9. aprila 2016 na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, Fakulteti za naravoslovje in matematiko Univerze v Mariboru ter na Osnovni šoli Dušana Bordona Semedela–Koper. Tekmovala sta 302 učenca, od katerih jih je 107 osvojilo zlata priznanja, 195 pa srebrna priznanja, podeljena na državnem tekmovanju. Številčni podatki o udeležencih tekmovanja, mentorjih in podeljenih priznanjih so od leta 2001 naprej javno dostopni in na voljo na spletni strani `https://www.dmfa.si/Tekmovanja/Statistika.aspx`.

Pri eksperimentalnem delu državnega tekmovanja so osmošolci proučevali upogib plastičnega ravnila. Na krajišče ravnila so obešali uteži in merili, kako je odklon ravnila od vodoravne lege odvisen od mase uteži in dolžine ravnila. Seveda so morali narisati tudi nekaj grafov in v grafično predstavljenih rezultatih meritev prepoznati vzorce in pravila.

Merjenje, ki so ga opravili devetošolci, tokrat ni bilo (kljub pričakovanjem mnogih) povezano z elektriko. Pri eksperimentalni nalogi so devetošolci nad plamenom sveče pekli pokovko. Zrna koruze so pred peko in po njej stehtali z enakoročno mikrotehtnico. Večinoma so vsi pravilno ugotovili, da je razpočeno zrno koruze lažje od zrna koruze pred peko. Mikrotehtnico, katere glavni sestavni del je bila slamica, so pred tehtanjem koruze umerili. Graf, ki so ga risali devetošolci, je bila umeritvena krivulja za mikrotehtnico. Pomemben del naloge je obsegal proučevanje občutljivosti mikrotehtnice.

Razpis tekmovanja za novo šolsko leto, v katerem so zapisane vsebine tekmovanja, pravilnik tekmovanja in bilten 36. državnega tekmovanja, kjer najdeš tudi naloge z državnega tekmovanja z obširnimi rešitvami, so objavljeni na prenovljenih spletnih straneh DMFA Slovenije, `https://www.dmfa.si/Tekmovanja/FiOS/Default.aspx`.

Lepo je med nagrajenci videti dekleta – tudi v 9. razredu je nekaj deklet le za las zgrešilo nagrade. Zanimivo pa je tudi to, da je slaba polovica nagrajencev (6 od 13) z Gorenjske.

8. RAZRED

V 8. razredu so prejeli nagrade štirje učenci in tri učenke.

1. nagrada

- Gregor Globevnik, OŠ Stražišče Kranj, mentorica Silva Majcen.

2. nagrada

- Simon Bukovšek, OŠ Škofja Loka-Mesto, mentor Matjaž Pintarič;
- Marjetka Zupan, OŠ Ig, mentorica Martina Brence;
- Jakob Schrader, OŠ Majde Vrhovnik, Ljubljana, mentorica Milena Valentan.

3. nagrada

- Jure Majcen, OŠ Karla Destovnika-Kajuha, Šoštanj, mentorica Irena Rotovnik Aplinc;
- Laura Drašler, OŠ Ivana Cankarja, Vrhnika, mentorica Ana Turk;
- Tjaša Sušnik, OŠ Naklo, mentorica Špela Knez.

9. RAZRED

V 9. razredu je prejelo nagrade šest učencev.

1. nagrada

- Tevž Lotrič, OŠ Predoslje, Kranj, mentorica Erna Fajfar.

2. nagrada

- Martin Šifrar, OŠ Janka Modra, Dol pri Ljubljani, mentorica Tatjana Cvelbar;
- Vladimir Smrkolj, OŠ Toneta Čufarja, Ljubljana, mentorica Sonja Koželj;
- Gašper Košir, OŠ Komenda Moste, mentorica Damijana Ogrinec.

3. nagrada

- Jan Klemenc, OŠ Orehek Kranj, mentor Tomaž Ahčin;
- Tadej Strah, OŠ Ferda Vesela, Šentvid pri Stični, mentorica Anica Vozel.

SLIKA 2.
Nepopolna skupina nagrajencev 36. tekmovanja osnovnošolcev za Stefanova priznanja na prireditvi Bistroumi 2016, ki je potekala 14. maja 2016 v Gallusovi dvorani Cankarjevega doma v Ljubljani, skupaj s podeljevalkama nagrad, Jelko Sakelšek in Barbaro Rovšek. (foto: Jan Šuntajs)

Astronomski izzivi treh dežel

Andrej Guštin

Med 21. in 23. oktobrom je v organizaciji DMFA Slovenije potekalo 2. astronomsko tekmovanje treh dežel. Srednješolske olimpijske ekipe Madžarske, Hrvaške in Slovenije so se zbrale v idilični kraški vasi Avber, kjer so se tekmovalci in tekmovalke soočili z zahtevnimi nalogami v treh olimpijskih kategorijah: astronomska opazovanja, obdelava astronomskih opazovanj, teoretične naloge. Naloge sta sestavila dr. Dunja Fabjan in Andrej Guštin. Zmagovalec tega tekmovanja, ki je nekakšna pripravljalnica za mednarodno olimpijado iz astronomije in astrofizike, je bil Madžar Antal Gémes, drugo mesto je zasedel naš izkušeni tekmovalec Jakob Robnik, hrvaški tekmovalec Ilija Srpak pa je zasedel tretje mesto. V ekipnem tekmovanju so bile ekipe tako izenačene, da smo organizatorji vse tri ekipe razglasili za zmagovalke.

Tudi to tekmovanje je pokazalo, da vsem dijakom največ težav povzročajo opazovalne naloge. Večinoma je to posledica pomanjkanja izkušenj in premalo ob teleskopu preživetih noči. Tako načeloma enostavna astronomska opazovanja postanejo pretežek zalogaj.

Kratki teoretični nalogi

1. Sistem treh zvezd ima skupno navidezno magnitudo $-1{,}0$. Dve izmed teh zvezd imata navidezno magnitudo $m_1 = 0{,}8$ in $m_2 = 3{,}5$. Za najsvetlejši zvezdi trojnega sistema veš, da se v njunem jedru spaja vodik. Kolikšno je razmerje njunih mas?

SLIKA 1. Udeleženci 2. astronomskega tekmovanja treh dežel. Foto: Andrej Guštin

2. Komet Čurjumov-Gerasimenko 67P, ki ga je preučevala sonda Rosetta, je perihelij dosegel 16. avgusta 2015, ko je bil od Sonca oddaljen 1,24 astronomske enote in se je takrat gibal s hitrostjo 34,0 km/s. Katerega leta se bo povrnil v perihelij? Kolikokrat je hitrost kometa v afeliju manjša od hitrosti v periheliju?

Ekipna naloga – Določitev zemljepisne širine opazovališča

Čas izvedbe: 1 ura.

Pripomočki: sekira, kompas, tračni meter, ura.

S priloženimi pripomočki izmerite zemljepisno širino opazovališča. Skicirajte metodo merjenja, zapišite račune, ocenite napako.

Opomba. Okoli lokalnega poldneva postane naloga zelo enostavna, pravi izziv pa je določitev zemljepisne širine opazovališča ob poljubnem času. Tekmovalci so nalogo dobili v dopoldanskem času, nahajali pa so se sredi kraške gmajne. Potrebo po sekirici si lahko razložite sami.

Opazovalna naloga – M 15

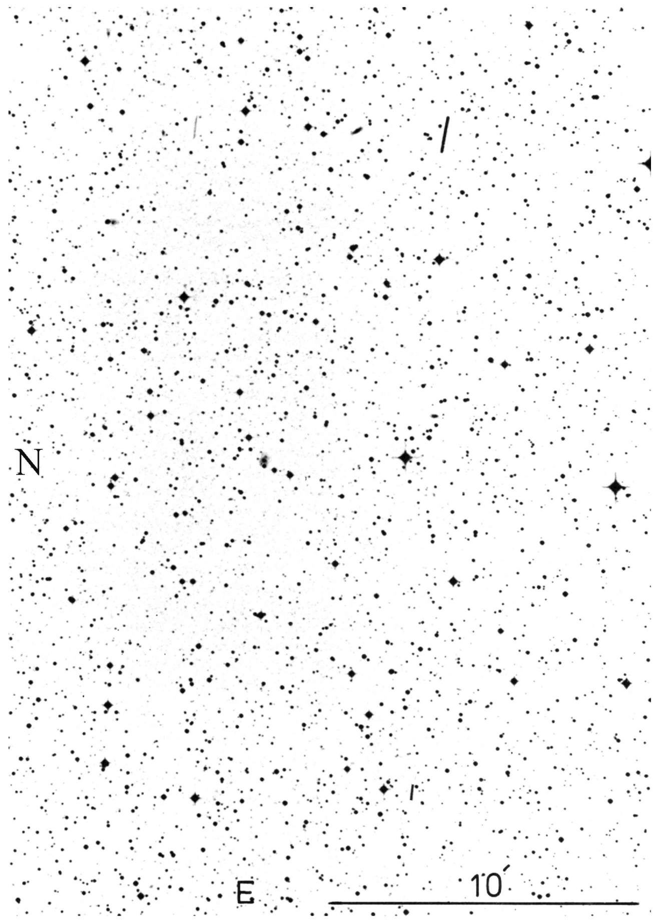
Čas izvedbe: 10 minut.

- S teleskopom poišči Messierjev objekt M 15.
- Kateri tip nebesnega telesa je M 15?
- V krog, ki predstavlja zorno polje teleskopa, nariši M 15 in zvezde, ki jih še vidiš v vidnem polju. Na robu kroga označi smeri neba.
- Oceni kotno velikost M 15.
- Kako se imenuje tip teleskopa, s katerim opazuješ?
- Kako se imenuje tip montaže, na kateri je teleskop?

Obdelava astronomskih opazovanj – Določitev oddaljenosti asteroidov od Sonca

Na fotografiji s časom osvetlitve 70 minut so se zarisale sledi asteroidov, ko so bili ti v opoziciji s Soncem. Orbite asteroidov ležijo v ravnini ekliptike.

- Sledi asteroidov na fotografiji označi z zaporednimi številkami.
- Določi oddaljenost asteroidov od Sonca v astronomskih enotah.



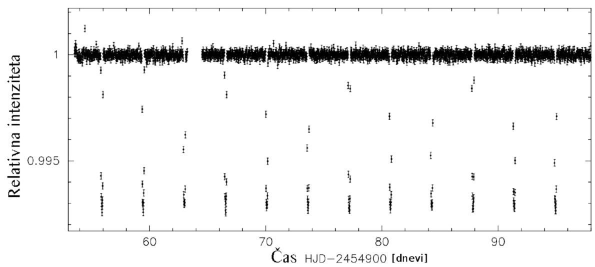
SLIKA 2.
Foto: RAS

Obdelava astronomskih opazovanj – Karakteristike eksoplaneta

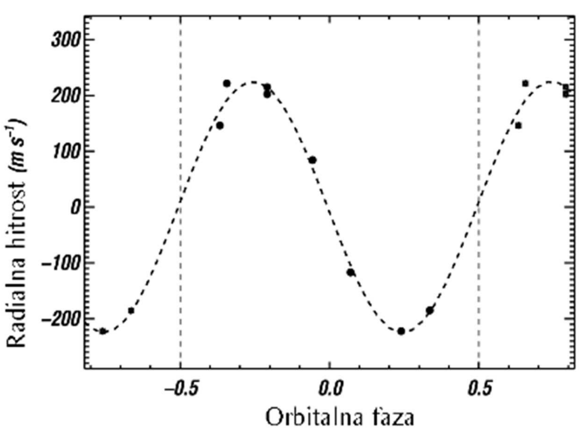
Eksoplanet Kepler-5b je eden prvih planetov, ki jih je odkril vesoljski teleskop Kepler. Grafa 1 in 2 kažeta njegove meritve svetlobne krivulje prehodov planeta preko matične zvezde, na sliki 3 pa so narisane kasnejše meritve radialne hitrosti zvezde z Zemlje. Planet se giblje po krožni orbiti okoli zvezde s temperaturo $T_* = 6300$ K, radijem $R_* = 1{,}79$ R Sonca in maso $M_* = 1{,}37$ M Sonca. Inklinacija orbite je 85,7°.

Ostale podatke, ki jih potrebuješ pri nalogi, razberi iz priloženih grafov in meritve posebej napiši.

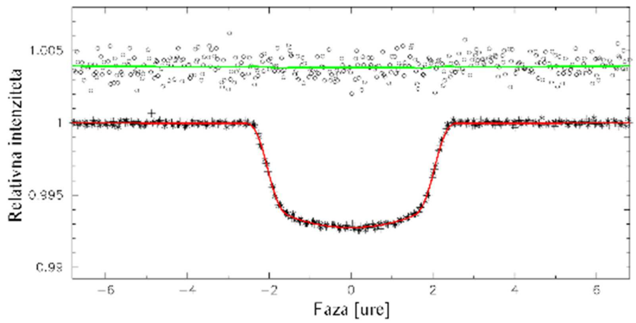
- Izračunaj oddaljenost planeta od zvezde.
- Izračunaj radij planeta in njegovo maso in ju izrazi v enotah Jupitrovega radija in mase.
- Privzemi, da je albedo planeta enak 0 in izračunaj povprečno temperaturo planeta. S primerjavo gostote planeta z gostoto Jupitra in Zemlje oceni, ali bi planet lahko bil kamnit.



GRAF 1.
Svetlobna krivulja z meritvami več zaporednih prehodov planeta Kepler-5b čez matično zvezdo. Na x osi so dnevi, na y osi pa relativna intenziteta. Vir: NASA



GRAF 2.
Detajlni graf svetlobne krivulje prehoda planeta Kepler-5b preko zvezde. Faza je podana na abscisni osi v urah, relativna intenziteta pa na ordinatni osi. Središče faze označuje ničla. Vir: NASA



SLIKA 3.
Meritve radialne hitrosti matične zvezde planeta Kepler-5b, kot so jih izmerili z Zemlje. Orbitalna faza prehoda je podana na x osi, radialna hitrost (m/s) pa na y osi. Vir: NASA

Barvni sudoku

REŠITEV BARVNI SUDOKU

4	3	1	**8**	**6**	**7**	5	2
7	5	**6**	**2**	**1**	**4**	**3**	**8**
1	7	**8**	**5**	**4**	3	**2**	6
3	**6**	**2**	**4**	8	**1**	**7**	5
2	**1**	**4**	**7**	**5**	8	**6**	**3**
5	**8**	3	**6**	7	**2**	4	**1**
8	**4**	5	**3**	**2**	6	**1**	**7**
6	**2**	**7**	1	**3**	**5**	**8**	**4**

www.obzornik.si

www.presek.si

Klasični algoritmi za urejanje v bločnem programiranju

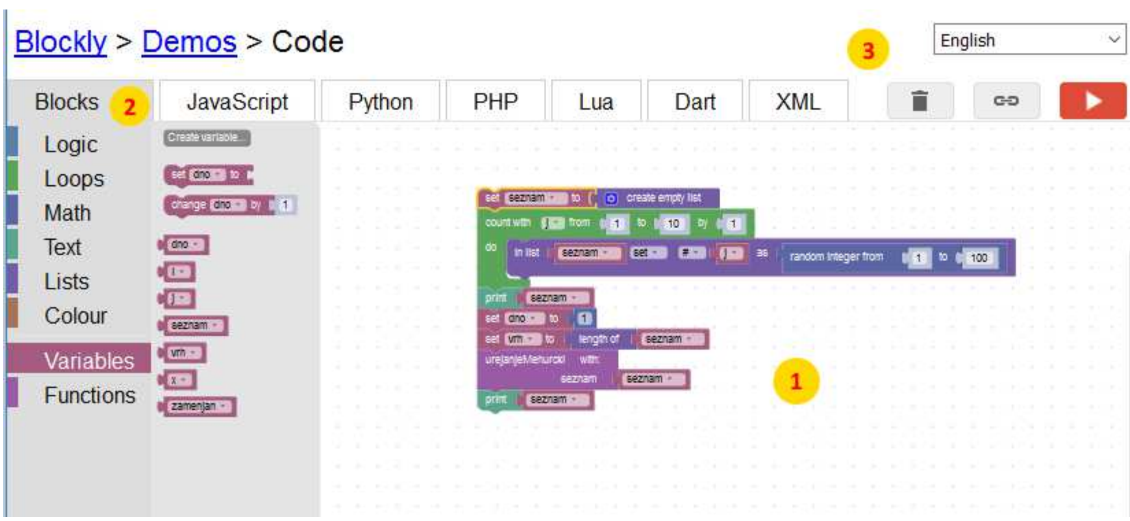
Igor Pesek

V prvi številki letošnjega Preseka smo predstavili program Blockly Games [?], s katerim lahko s pomočjo iger napravite prve korake v programiranje. V današnjem prispevku bomo predstavili spletni program Blockly [?], ki omogoča programiranje v vizualnem okolju s pomočjo blokov. Spletni naslov programa najdete na koncu prispevka med viri. Blockly nima v naprej pripravljenih nalog, kot je to bilo narejeno v Blockly Games, zato bomo delo v okolju Blockly predstavili s pomočjo algoritmov za urejanje.

Priprava seznama za urejanje

Preden se lotimo algoritmov urejanja, potrebujemo seznam naključno izbranih števil, ki jih bomo kasneje uredili. Postopek priprave seznama bomo uporabili tudi za razlago okolja Blockly. Delovno okolje Blockly je prikazano na sliki 1 in je razdeljeno na tri področja. Prvo, označeno s številko 1, je območje, kjer programiramo oz. sestavljamo programe. Območje 2 vsebuje vse bloke, ki jih lahko pri programiranju uporabimo. Bloki so razvrščeni v kategorije po njihovi namembnosti. Ko kakšen blok potrebujemo, ga povlečemo na območje 1. Na območju 3 pa so zavihki, ki prikažejo kodo izbranega programskega jezika; ta je ekvivalentna kodi našega bločnega programa. Skrajno desno je tudi rdeč gumb, ki začne izvajanje našega programa. Če niste reševali Blockly games, si lahko za delo s programom Blockly pomagate s priročnikom, ki ga najdete na `https://github.com/google/blockly/wiki` [?].

Da ustvarimo seznam desetih naključnih števil, moramo najprej ustvariti spremenljivko, ki na začetku predstavlja prazen seznam. Sledi zanka, ki se izvede desetkrat in v vsaki ponovitvi naključno izbere število iz določenega obsega (v našem primeru med 1 in 100). Seznam smo s tem ustvarili, preostane nam še samo klic funkcije za urejanje. Celoten program je prikazan na sliki 2.



SLIKA 1. Delovno okolje programa Blockly

Preden nadaljujemo, bomo predstavili še funkcijo za zamenjavo dveh elementov v seznamu, saj jo pri urejanju večkrat potrebujemo in je zato smiselno, da jo sami sprogramiramo. Na sliki 3 je prikazan postopek za zamenjavo, kjer smo uporabili dodatno spremenljivko. Samostojno razmislite, kako zamenjati dva elementa v seznamu brez uporabe dodatne spremenljivke ali razširitve polja.

Urejanje z mehurčki

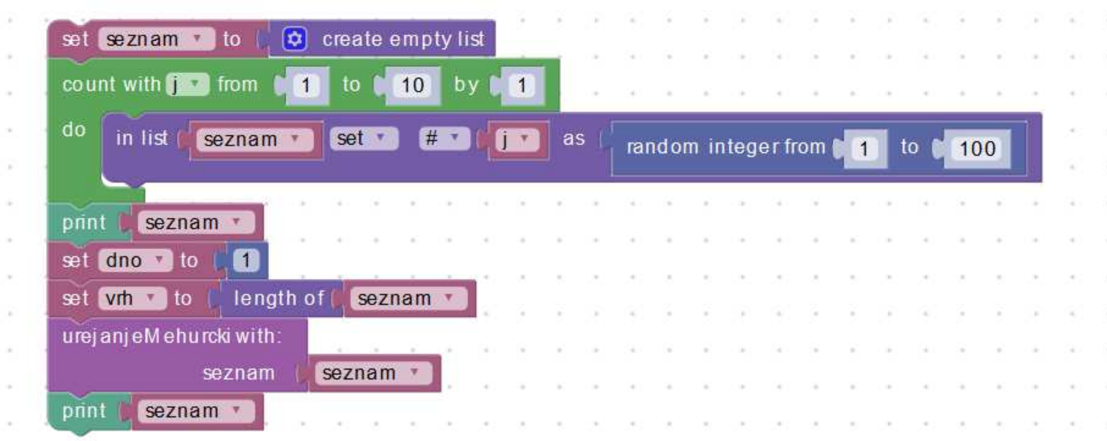
Algoritem urejanja z mehurčki (ang. Bubble sort) je eden najbolj znanih algoritmov za urejanje. Osnovna ideja algoritma je, da pregledujemo seznam od prvega elementa in paroma primerjamo sosedne elemente. Če je levi element para večji od desnega elementa, potem ju zamenjamo. Primerjanje nadaljujemo do konca seznama in postopek ponavljamo, dokler v celotnem seznamu nismo zamenjali nobenega elementa več. Zakaj pa ime urejanje z mehurčki? Ime izhaja iz dejstva, da izgleda tako, kot da levi element para damo v mehurček in ga premikamo desno, dokler je trenutni desni element manjši od elementa v mehurčku. Pomembno je omeniti, da element, ki ga premikamo v mehurčku, ne pride nujno na svoje končno mesto v urejenem seznamu, torej je lahko večkrat v mehurčku. Časovna zahtevnost algoritma je $\mathcal{O}(n^2)$, saj se v najslabšem primeru zunanja zanka izvede n-krat, notranja pa se vedno izvede $n-1$ krat.

```
UrejanjeZMehurcki(A, dno, vrh):
  zamenjan = true
  ponavljaj dokler zamenjan:
    zamenjan = false
    za vsak i = dno+1 do vrh ponavljaj:
      če (A(i-1) > A(i)) potem
        zamenjaj(A, i-1, i)
        zamenjan = true
```

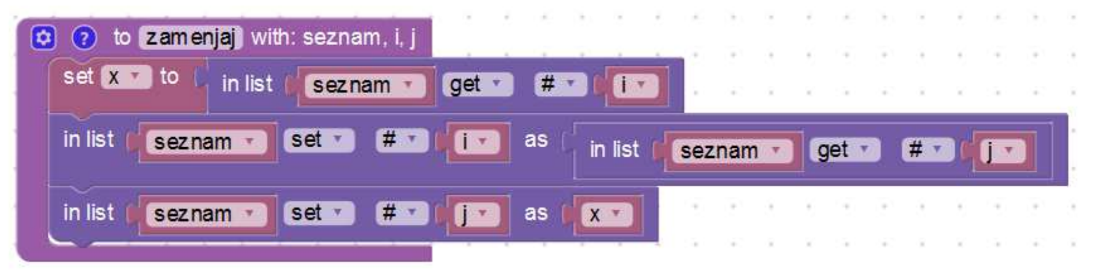
Na sliki 4 je prikazan algoritem *Urejanja z mehurčki* še v Blockly-ju.

Hitro urejanje

Hitro urejanje (ang. QuickSort) [**?**] je predstavnik algoritmov strategije *Deli in vladaj*, o kateri smo v Pre-



SLIKA 2. Priprava seznama



SLIKA 3. Zamenjava dveh elementov seznama

seku že pisali [?]. Algoritem deluje rekurzivno na seznamu A v dveh korakih.

Deli. Preuredimo seznam $A[\text{dno}, \text{vrh}]$ v dva seznama $A[\text{dno}, q-1]$ in $A[q+1, \text{vrh}]$ na takšen način, da so vsi elementi v seznamu $A[\text{dno}, q-1]$ manjši ali enaki od $A[q]$ ter da so vsi elementi $A[q+1, \text{vrh}]$ večji od $A[q]$. Index q določimo med postopkom preurejanja.

Vladaj. Rekurzivno uredimo podseznama $A[\text{dno}, q-1]$ in $A[q+1, \text{vrh}]$.

Pri strategiji deli in vladaj je običajno še tretji korak, kjer delne rešitve, ki smo jih v koraku deli razdelili, združimo. Pri algoritmu hitro urejanje ta korak ni potreben, saj je delna rešitev že urejena in na pravem mestu.

Najprej bomo zapisali algoritem za korak vladaj.

```
HitroUredi(A, dno, vrh):
  če dno < vrh potem
    q = deli(A, dno, vrh)
    HitroUredi(A, dno, q-1)
    HitroUredi(A, q+1, vrh)
```

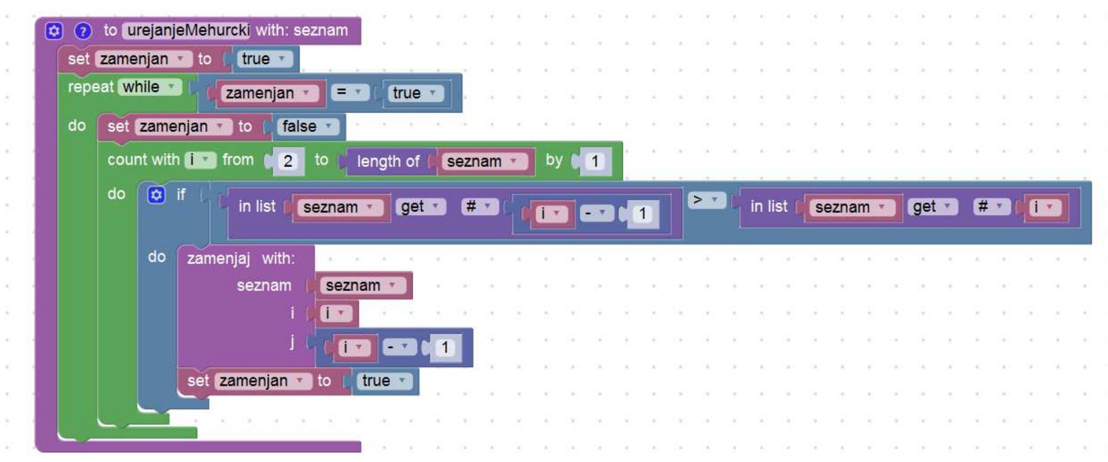
Opazimo, da v rekurzivnih klicih HitroUredi ne urejamo elementa, ki je na q mestu v seznamu A. Zakaj? To je posledica metode deli, ki jo bomo zapisali v nadaljevanju.

```
deli(A, dno, vrh):
  pivot = A[dno]
  i = dno
  j = vrh
  ponavljaj dokler (i < j):
    ponavljaj dokler (A[i] <= pivot):
      i++
    ponavljaj dokler (A[j] > pivot):
      j++
    če (i < j) potem:
      zamenjaj(A,i,j)


  če (i > j) potem:
    zamenjaj(A,dno,j)

  rezultat = j
```

Na začetku metode določimo pivotni element, običajno je to prvi ali zadnji element seznama; v našem primeru je to prvi. S pomočjo pivota bomo seznam A razdelili na dva podseznama. V prvem seznamu bodo elementi, ki so manjši od pivota, v drugem pa elementi seznama A, ki so večji od pivota. Prvi seznam gradimo od indeksa dno proti vrhu (od leve proti desni glede na seznam), drugi seznam pa gradimo od vrha proti dnu (od desne proti levi). Sam algoritem za delovanje ne potrebuje dodatnega pomnilniškega prostora, saj neposredno preureja originalni seznam. Z zankami *ponavljaj* sedaj pregledujemo polje z leve in desne ter iščemo elemente,



SLIKA 4. Urejanje z mehurčki

- ki so večji od pivotnega elementa (prva notranja zanka *ponavljaj*) in
- ki so manjši od pivotnega elementa (druga notranja zanka *ponavljaj*).

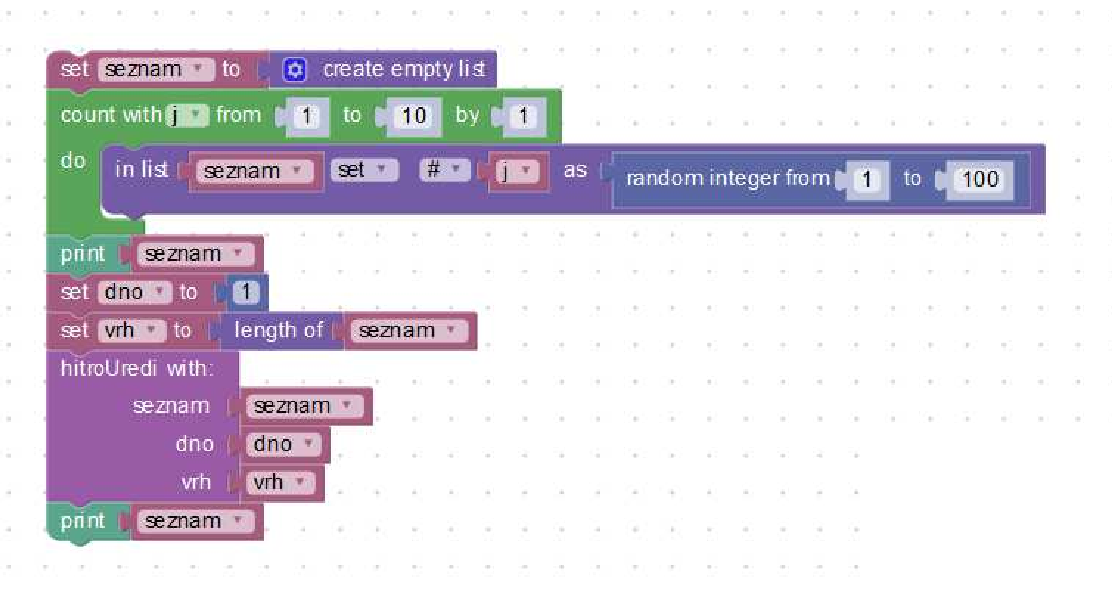
Ko se obe zanki zaključita, sta možni dve situaciji in sicer,

- da je i manjši od j ali
- da je i večji od j.

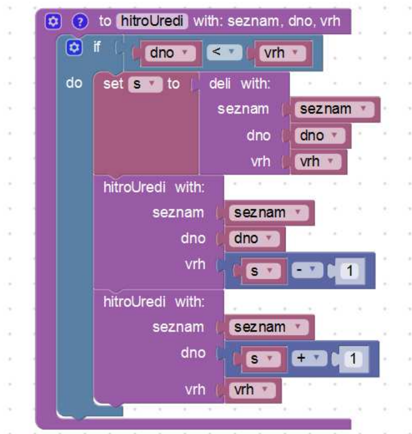
V prvem primeru imamo še vedno dva elementa, kjer je element na i-tem mestu večji od pivota in element na j-tem mestu manjši od pivota. Zato ju lahko takoj zamenjamo, saj na ta način na začetek seznama prestavljamo manjše elemente in na konec večje elemente. V drugem primeru pa se indeksa i in j prekrižata, kar pomeni, da nismo našli več takšnega para elementov, ki bi na obeh indeksih stali na napačnih mestih. Zato menjave ne izvedemo, zaključimo pa zunanjo zanko ponavljaj, saj s trenutnim pivotom ne moremo več deliti seznama. V zadnjem koraku moramo umestiti pivotni element v seznam na tako mesto, da bodo levo od njega manjši elementi in desno od njega večji. Katero mesto v seznamu je to? Razmislek pokaže, da je to lahko ali indeks i ali indeks j. Če bi menjali element na indeksu i, potem bi na indeks dno postavili element, ki je večji od pivota (element na i-tem indeksu namreč to je). Zaradi tega bi prišli v navzkrižje s pravilom, da so v levem podseznama vsi elementi manjši od pivota. Če menjamo pivot z j-tim elementom (ta kaže na element, ki je manjši od pivota), pravila ne kršimo, zato menjamo pivot in j-ti element. Posledično pivotni element sedaj stoji na mestu, ki se do konca urejanja ne bo več spremenilo, saj so v seznamu levo od njega manjši in desno večji elementi in ga zato ni potrebno več urejati niti upoštevati pri rekurzivnih klicih. To je tudi odgovor na prej zastavljeno vprašanje, zakaj elementa na mestu q ne urejamo več.

Časovna zahtevnost algoritma je v najslabšem primeru $\mathcal{O}(n^2)$, vendar se je v testih pokazalo, da je praktična časovna zahtevnost $\mathcal{O}(n \log n)$, kar ga uvršča med najhitrejše algoritme urejanja. Njegova prednost je tudi, da ne zahteva dodatnega prostora, saj celotno urejanje poteka samo znotraj danega seznama. Algoritem Hitro urejanje bomo implementirali tudi v vizualnem okolju Blockly. Kot smo to storili že pri urejanju z mehurčki, najprej z naključnimi števili napolnimo seznam (slika 5).

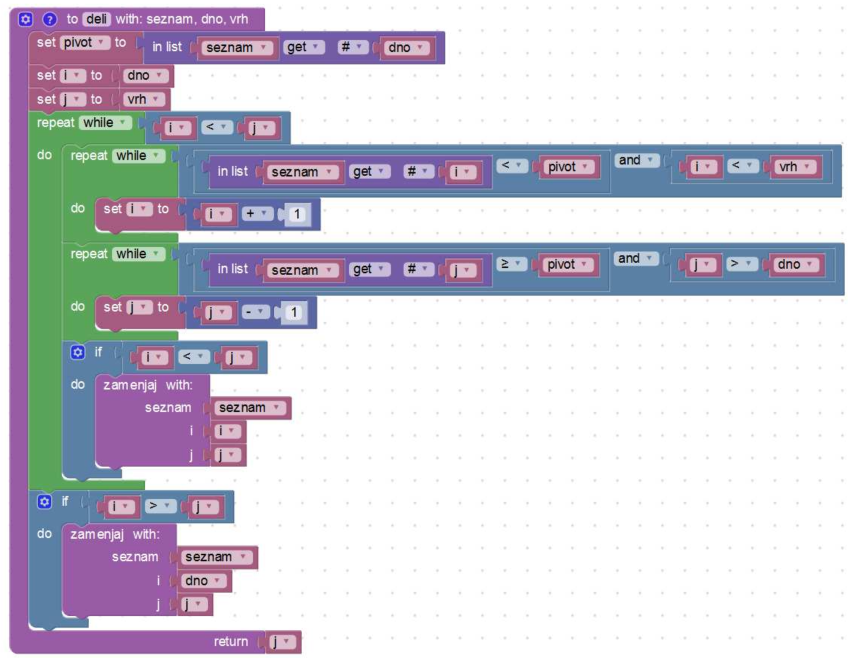
Nato sledi klic funkcije HitroUredi, ki je prikazana na sliki 6. Ker funkcijo uporabljamo rekurzivno, je prisoten zaustavitveni pogoj, kjer preverimo, ali je potrebno urediti še kakšen podseznam. V primeru, da je dno = vrh, bi urejali samo en element, kar pa ni smiselno.



SLIKA 5. Pripravimo seznam



SLIKA 6.
Hitro uredi



SLIKA 7.
Postopek deli

V pogojnem stavku najprej pokličemo funkcijo deli, ki seznam na prej opisan način preuredi in kot rezultat vrne na mesto, kjer je pivotni element. Funkcija deli je prikazana na sliki 7.

Kot smo že uvodoma zapisali, nam okolje Blockly omogoča, da algoritem, ki smo ga bločno sprogramirali, izpišemo tudi v različnih programskih jezikih. V nadaljevanju je na sliki 8 prikaz algoritma Hitro urejanje v programskem jeziku Python. Opazimo, da je sedaj razumevanje kode zapisane v Pythonu lažje, če ga lahko primerjamo z Blockly različico.

Zaključek

V prispevku smo predstavili program Blockly, ki omogoča bločno programiranje tudi bolj zahtevnih algoritmov. Razložili smo delovanje dveh algoritmov za urejanje, urejanje z mehurčki ter hitro urejanje in jih sprogramirali v Blockly-ju. Velika prednost Blockly-ja pri učenju programiranja je, da uporabniku omogoča program, izdelan v bločnem načinu izpisati v različnih programskih jezikih, kar lahko koristi pri učenje izbranega programskega jezika.

Literatura

[1] I. Pesek, *Naučimo se programiti s pomočjo vizualnega programiranja*, Presek 44 (1), 2016/2017.

[2] `https://blockly-demo.appspot.com/static/demos/code/`, ogled 20. 11. 2016.

[3] T. H. Cormen et al., *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2009.

[4] `https://github.com/google/blockly/wiki`, ogled 20. 11. 2016.

[5] A. Taranenko, *Reševanje problemov s pristopom deli in vladaj*, Presek 37 (4), 2009/2010.

```
import random

x = None
j = None
seznam = None
i = None
zamenjan = None
vrh = None
dno = None
pivot = None
s = None
list2 = None

"""Funkcija v seznamu zamenja i-ti in j-ti element
"""
def zamenjaj(seznam, i, j):
  x = seznam[int(i - 1)]
  seznam[int(i - 1)] = seznam[int(j - 1)]
  seznam[int(j - 1)] = x

"""Funkcija z metodo Hitro Uredi uredi dano
  zaporedje"""
def hitroUredi(seznam, dno, vrh):
  if dno < vrh:
    s = deli(seznam, dno, vrh)
    hitroUredi(seznam, dno, s - 1)
    hitroUredi(seznam, s + 1, vrh)

"""Funkcija preuredi seznam v dva manjša seznama,
za katera velja, da so elementi levega seznama
manjši od pivota ter elementi desnega seznama
večji od pivota.vrne mesto na katerem je
postavljen pivotni element."""

def deli(seznam, dno, vrh):
  pivot = seznam[int(dno - 1)]
  i = dno
  j = vrh
  while i < j:
    while seznam[int(i - 1)] <= pivot and i < vrh:
      i = i + 1
    while seznam[int(j - 1)] > pivot and j > dno:
      j = j - 1
    if i < j:
      zamenjaj(seznam, i, j)
  if i > j:
    zamenjaj(seznam, dno, j)
  return j

seznam = []
for j in range(1, 11):
  seznam[int(j - 1)] = random.randint(1, 100)
print(seznam)
dno = 1
vrh = len(seznam)
hitroUredi(seznam, dno, vrh)
print(seznam)
```

SLIKA 8.

Hitro urejanje v Pythonu

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 44/2

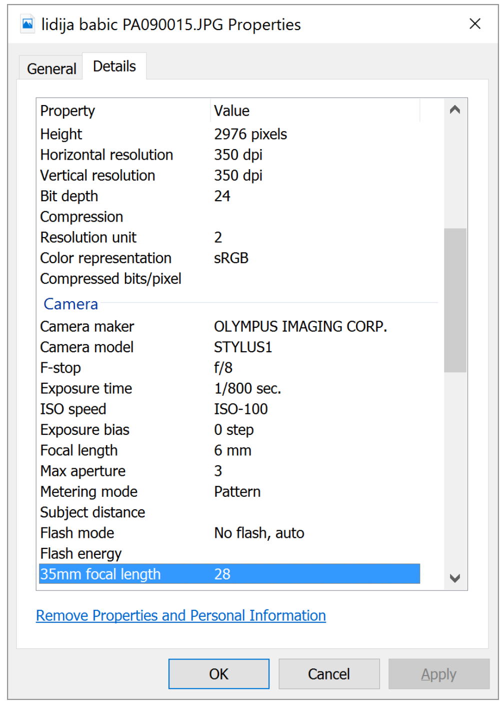
→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz druge številke 44. letnika Preseka je **Holditchev izrek.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Urška Poje iz Ljubljane, Tadina Bence Virag iz Lendave in Lidija Mikec iz Novega mesta, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

Halo

Aleš Mohorič

→ Bralka nam je poslala fotografijo, ki jo najdete na naslovnici te številke Preseka. Fotografija je bila posneta v Piranu na dokaj jasen, jesenski dan. Nebo so prepredale le koprene cirostratusov. Na fotografiji vidimo Sonce in okrog njega tudi obroč svetlobe. Zakaj nastane ta obroč in kako ga imenujemo?

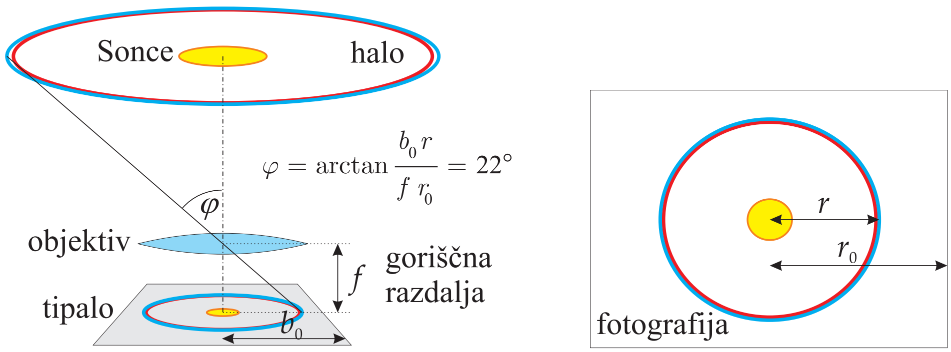
Mavrica to ni. Mavrico vidimo v nasprotni smeri od Sonca, če gledamo v nebo tako, da je Sonce za našim hrbtom. Ta obroč tudi ni korona. Obroč korone je bližje Soncu in ima bolj izrazite barve. Korono smo v tej rubriki že predstavili, v Preseku 40/5. Preden razmišljamo, kaj bi opaženi pojav lahko povzročilo, najprej ocenimo velikost obroča. Z velikostjo v tem primeru mislimo zorni kot, pod katerim obroč opazujemo. Zgolj po fotografiji ne moremo sklepati, kolikšen je ta zorni kot. Obroč bi sicer lahko primerjali s Soncem, ki ga vidimo pod zornim kotom 0,5°, vendar je Sonce na fotografiji delno zastrto z oblaki in njegovega roba ne moremo določiti. Zorni kot obroča lahko poiščemo drugače. Digitalni fotoaparati datoteko, v kateri je shranjena fotografija, opremijo z nekaterimi dodatnimi podatki. Te podatke lahko preberemo tako, da na ime datoteke kliknemo z desnim gumbom na miški in v oknu, ki se odpre, izberemo Lastnosti (Properties). Nekaj lastnosti naše fotografije kaže slika 1. Med drugim lahko preberemo, da je bila fotografija posneta z zaslonskim številom 8 in s časom osvetlitve 1/800 sekunde. Za nas je uporaben podatek, da je bila med posnetkom goriščna razdalja objektiva 6 mm. S tem podatkom bi lahko izračunali velikost slike, če bi poznali velikost slikovnega tipala. Vendar tega podatka nimamo. Tipala se v različnih tipih fotoaparatov med seboj razlikujejo po velikosti. Zato običajno namesto dejanske goriščne razdalje objektiva fotografskega aparata navedemo njegovo ekvivalentno goriščno razdaljo. To je goriščna razdalja objektiva, ki bi naredil na tipalu velikem 36×24 mm^2 fotografijo z enakim zornim kotom. Tako tipalo je standardnega 35-milimetrskega formata. 35 mm ustreza, skupaj s perforacijo, širini nekdaj najbolj pogosto uporabljenega filmskega traku. Pri naši fotografiji je bila ekvivalentna goriščna razdalja (35 mm focal length) enaka 28 mm. Da določimo zorni kot obroča, najprej izmerimo razmerje med premerom obroča na fotografiji in širino fotografije. Nato z nekaj računanja pridemo do zornega kota, pod katerim opazujemo obroč (slika 2). Izkaže se, da je kot med zveznico Sonca in očesa ter zveznico očesa in točke na obodu obroča (zorni kot, pod katerim vidimo polmer obroča) enak 22°. Ta kot je značilen za 22-stopinjski hálo (Presek 24/1).



Property	Value
Height	2976 pixels
Horizontal resolution	350 dpi
Vertical resolution	350 dpi
Bit depth	24
Compression	
Resolution unit	2
Color representation	sRGB
Compressed bits/pixel	
Camera	
Camera maker	OLYMPUS IMAGING CORP.
Camera model	STYLUS1
F-stop	f/8
Exposure time	1/800 sec.
ISO speed	ISO-100
Exposure bias	0 step
Focal length	6 mm
Max aperture	3
Metering mode	Pattern
Subject distance	
Flash mode	No flash, auto
Flash energy	
35mm focal length	28

SLIKA 1.
Nekatere lastnosti fotografije z naslovnice Preseka.

Hálo nastane, ko svetloba s Sonca potuje mimo ledenih kristalčkov, ki lebdijo v ozračju. Halojev je več vrst – nastopajo v obliki obarvanih ali belih obročev, lokov, svetlih peg. Nekateri nastanejo na strani neba, kjer je izvir svetlobe (Sonce), nekateri na nasprotni. Mednje sodijo tudi sončni stebri (Presek 38/6) in sosonca (Presek 43/1).

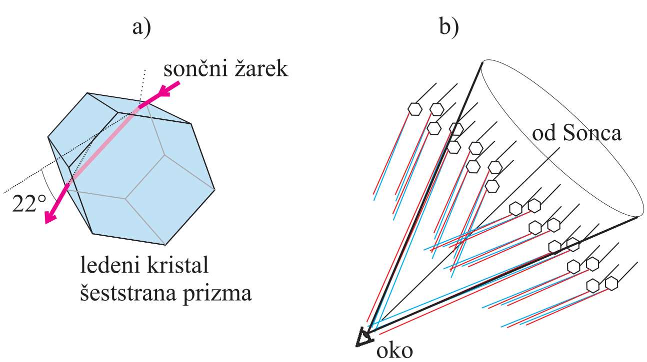


SLIKA 2.
K izpeljavi zornega kota; za b_0 vzamemo 36 mm/2.

Ledeni kristali, ki povzročajo halo, so običajno v cirusih ali cirostratusih. Ti oblaki so visoko v zgornji troposferi, na višini 5–10 km. Kadar je zelo hladno, nastanejo primerni kristali tudi bližje tlom. Katero vrsto haloja bomo opazili, je določeno z obliko kristalov in njihovo orientacijo. Oblika in orientacija kristalov vplivata na lom in odboj na kristalnih ploskvah. Pri 22°-haloju se svetloba lomi na kristalih, ki imajo obliko pravilne heksagonalne (šeststrane) prizme (slika 3a)). K haloju prispevajo prizme, ki so obrnjene tako, da so vpadni žarki pravokotni na geometrijsko os kristala. Žarki, ki vpadajo pravokotno na ploskev ali pod dovolj majhnim vpadnim kotom, po prehodu kristala ne spremenijo smeri. Žarki, ki vpadajo pod dovolj velikim kotom, se odklonijo za najmanj 22°, kot kaže slika 3a).

Natančnejši račun, v katerem upoštevamo disperzijo – odvisnost lomnosti ledu od valovne dolžine svetlobe, pokaže, da se modra svetloba odkloni malenkost bolj (22,37°) kot rdeča (21,54°), in zato je notranji rob haloja, ki je bližje Soncu, rdečkast, zunanji rob pa modrikast. V oblaku je veliko število kristalčkov, ki odklanjajo svetlobo na podoben način. Svetlobo, ki gre skozi oblak skoraj neodklonjena, vidimo v bližnji okolici Sonca. Svetloba se vseeno toliko siplje, da roba Sončeve ploskvice na fotografiji ne moremo natančno opazovati. Del svetlobe, ki opazovalca ne bi dosegel, se lomi na kristalčkih in razprši v vse smeri, največ pod kotom 22° glede na vpadno smer. Pri pojavu haloja igrajo posebno vlogo kristalčki, ki ležijo na plašču stožca. To je stožec, ki ima vršni kot 22° pri očesu ter njegova os teče od očesa proti Soncu. Ti kristali, če so primerno orientirani, odklonijo svetlobo proti očesu, kot kaže slika 3b). Zato v pasu vidnega polja opazimo svetlejši obroč na nebu. Kristalčki, ki ležijo znotraj stožca, ne lomijo svetlobe proti očesu in zato je notranji del obroča videti nekoliko temnejši.

V ljudskem izročilu haloje pogosto povezujejo s pretečimi nevarnostmi in prihajajočimi neurji. Cirusi zares včasih nastanejo kak dan pred nevihtno fronto, vendar pa niso njen zanesljivi znanilec.



SLIKA 3.
a) Žarek svetlobe, ko vstopi v ledeni kristal skozi stransko ploskev, se na njej zlomi prvič in potem še enkrat, ko zapusti kristal. Sprememba smeri žarka je enaka kot pri prehodu skozi trikotno prizmo z vršnim kotom 60°. b) Svetloba s Sonca na poti proti tlom sreča množico ledenih kristalčkov. Kristalčki del svetlobe odklanjajo. Proti očem jo odklonijo tisti, ki ležijo na plašču stožca z vršnim kotom 22°, vrhom pri očesu in osjo usmerjeno od očesa proti Soncu.

× × ×

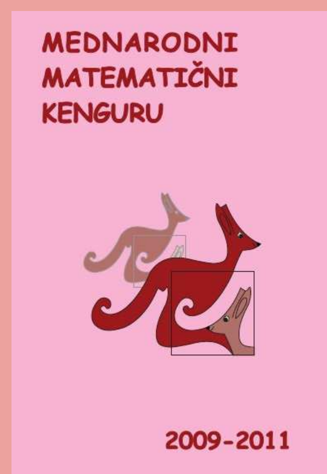
Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru z več kot šest milijoni tekmovalcev iz 47 držav sveta v letu 2011. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Vsaki nalogi je dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

10,99 EUR

18,74 EUR



14,50 EUR

Pri DMFA-založništvo so v Presekovi knjižnici izšle že štiri knjige Matematičnega kenguruja:

- *Evropski matematični kenguru 1996–2001* (pošlo),
- *Evropski matematični kenguru 2002–2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.