Močnik,

Arithmetik

für

Unter-Gymnasien.

Zweite Abtheilung

für die III. und IV. Classe.

Preis gebunden 80 kr.

Wien.
Carl Gerold's Sohn.

Lehrbuch der Arithmetik für Unter-Gymnasien.

Von
Dr. Franz Ritter von Močnik.

Zweite Abtheilung
für die III. und IV. Classe.

Fünfundzwanzigste umgearbeitete Auflage

bearbeitet von
Dr. W. Pscheidl,
k. k. Professor am Staatsgymnasium im IV. Bezirke in Wien.

Laut h. Ministerial-Erlass vom 31. Mai 1894, Z. 11.255, zum Lehrgebrauche an Gymnasien mit deutscher Unterrichtssprache allgemein zugelassen.

Preis geheftet 65 kr., in Leinwand gebunden 80 kr.

Wien.
Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.
1894.

I. Rechnen mit ganzen allgemeinen Zahlen.

1. Allgemeine Zahlen.

§. 1.

Zahlen, welche eine bestimmte Menge von Einheiten ausdrücken, heißen besondere Zahlen. Rechnungen, die man mit besonderen Zahlen ausführt, können darum auch nur für einzelne besondere Fälle gelten und müssen so oft erneuert werden, als nur die mindeste Veränderung in der Angabe gemacht wird. Um nun auch Rechnungen, die für alle ähnlichen Fälle gelten und von den besonderen Werten der in einer Aufgabe vorkommenden Größen ganz unabhängig sind, vornehmen und die dadurch gefundenen Ergebnisse in einer leicht übersichtlichen und allgemeinen Form darstellen zu können, hat man Zahlen eingeführt, welche jede beliebige Menge von Einheiten bedeuten können und darum allgemeine Zahlen genannt werden. Als die zweckmäßigste Bezeichnung für solche allgemeine Zahlen stellen sich die Buchstaben dar. So drückt z. B. a als Zahlzeichen eine allgemeine Zahl aus, unter welcher man sich jede willkürliche Menge von Einheiten oder deren Theilen vorstellen kann; a kann 1, 2, 10, $\frac{3}{5}$, oder jede andere Zahl bedeuten. Nur ist zu bemerken, dass jeder Buchstabe den Wert, den man ihm beim Anfange der Rechnung beigelegt hat, durch die ganze Rechnung beibehalten muss; nimmt man für a in irgend einer Aufgabe einen bestimmten Wert, z. B. 2, an, so muss man in dieser Aufgabe für a durchgängig den Wert 2 beibehalten.

Kommen in einer Rechnung verschiedene Buchstaben vor, so werden dadurch im allgemeinen auch eben so viele verschiedene Zahlen angedeutet; in besonderen Fällen ist es jedoch möglich, dass zwei Buchstaben denselben Wert haben.

Die Wahl der Buchstaben zu allgemeinen Zahlzeichen rührt wahrscheinlich davon her, dass man anfänglich die Wörter selbst in die Rechnung setzte, und später nur die Anfangsbuchstaben beibehielt. Wir haben z. B. in der Proportionsrechnung nachgewiesen, dass der Zinsenertrag eines Capitals berechnet wird, indem man das Product aus dem Capital und den Procenten durch 100 dividiert. Man könnte diesen Satz auf folgende Art allgemein ersichtlich machen:

$$\text{Ertrag} = \frac{\text{Capital} \times \text{Procent}}{100},$$

oder, wenn man statt der Wörter nur ihre Anfangsbuchstaben setzt, und zwar die kleinen lateinischen,

$$e = \frac{c \times p}{100}.$$

Hier kann c jeden willkürlich großen oder kleinen Capitalsbetrag, p jedes beliebige Procent vorstellen; e ist dann die Zahl, welche den zu dem angenommenen Capital und dem angenommenen Procent gehörigen Ertrag anzeigt. Der Ausdruck $e = \frac{c \times p}{100}$ stellt daher den oben angeführten Satz ganz allgemein und doch so klar dar, dass ihn jeder sogleich herauslesen kann, wenn er nur die Bedeutung der Buchstaben e, c, p kennt.

Die Lehre vom Rechnen mit allgemeinen Zahlen heißt die allgemeine Arithmetik, zum Unterschiede von der besonderen Arithmetik, in welcher nur besondere Zahlen angewendet werden.

§. 2.

Die Operationszeichen sind bei allgemeinen Zahlen dieselben wie bei besonderen Zahlen.

Sind a und b zwei allgemeine Zahlen, so drückt

$a + b$ ihre Summe,

$a - b$ ihre Differenz,

$a \times b$ oder $a.b$ ihr Product, und

$a : b$ oder $\frac{a}{b}$ ihren Quotienten

aus. Das Multiplicationszeichen wird bei allgemeinen Zahlen weggelassen; z. B.

statt $a \times b$ oder $a.b$ schreibt man $a\,b$

„ $a \times b \times c$ „ $a.b.c$ „ „ $a\,b\,c$.

§. 3.

In eine Zahlenverbindung an die Stelle der allgemeinen Zahlen (Buchstaben) besondere Zahlenwerte setzen und mit diesen die vorgeschriebenen Rechnungen ausführen, heißt substituieren.

Ist z. B. der Ausdruck $x = a + b - c$ für die besonderen Werte $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ zu berechnen, so hat man

$$x = 2 + 3 - 4 = 5 - 4 = 1.$$

Ein Zahlenausdruck, welcher mehrere durch das Zeichen + oder − verbundene Bestandtheile enthält, heißt ein mehrgliedriger Ausdruck oder ein Polynom. Die einzelnen durch das Zeichen + oder − verbundenen Bestandtheile eines solchen Ausdruckes nennt man seine Glieder. Kommen in einem Ausdrucke zwei Glieder vor, so heißt er insbesondere ein Binom; kommen in demselben drei Glieder vor, so heißt er ein Trinom. So ist z. B. $a + b$ ein Binom, $a - b + c$ ein Trinom, und beide Ausdrücke sind mehrgliedrig.

Ein Zahlenausdruck, welcher nur ein Glied enthält, heißt ein eingliedriger Ausdruck oder ein Monom; z. B. a, x.

Um anzuzeigen, daſs mit einem mehrgliedrigen Ausdrucke wie mit einer Zahl gerechnet werden soll, schließt man denselben in Klammern ein. Soll z. B. $3 + 5$ mit $2 + 4$ multipliciert werden, so schreibt man $(3 + 5)(2 + 4)$ und erhält $8 \times 6 = 48$; würde man die Klammern weglassen und $3 + 5.2 + 4$ schreiben, so würde dieser Ausdruck nicht bedeuten, daſs $3 + 5$ mit $2 + 4$ zu multiplicieren ist, sondern daſs man nur 5 mit 2 zu multiplicieren und zu dem Producte 3 und 4 zu addieren habe. Substituiert man z. B.

$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$ in $(a + b)(c + d)$ beziehungsweise $a + b.c + d$, so ist

$$(a + b).(e + d) = (2 + 3)(4 + 5) = 5.9 = 45;$$
$$a + b.c + d = 2 + 3.4 + 5 = 2 + 12 + 5 = 19.$$

Ist zu einer Summe oder Differenz eine Zahl zu addieren, so wird die Summe beziehungsweise Differenz nicht eingeklammert. Dasselbe ist auch der Fall, wenn von einer Summe oder Differenz eine Zahl subtrahiert wird. Es ist also z. B.

$$4 + 3 + 5 = 7 + 5 = 12$$
$$4 - 3 + 5 = 1 + 5 = 6$$
$$4 + 3 - 5 = 7 - 5 = 2$$
$$9 - 3 - 5 = 6 - 5 = 1.$$

Außerdem werden wir Fälle kennen lernen, in denen auch eingliedrige Ausdrücke eingeklammert werden müssen, um Zweifel bezüglich der Reihenfolge der Operationen zu vermeiden. Von diesen können hier schon zwei Fälle berücksichtigt werden: 1. Soll ein Quotient mit einer Zahl multipliciert werden, wie z. B. $30 : 5$ mit 3, so schreibt man $(30 : 5)\,3$ und erhält 18 als Resultat, während $30 : 5.3 = 30 : 15 = 2$ ist. 2. Soll eine Zahl durch einen Quotienten dividiert werden, wie z. B. 48 durch den Quotienten $6 : 2$, so schreibt man $48 : (6 : 2)$ und erhält $48 : 3 = 16$, während $48 : 6 : 2 = 8 : 2 = 4$ ist.

Aufgaben.

Berechne folgende Ausdrücke, und zwar 6. bis 9. für $a = 12$, $b = 3$, $c = 2$:

1. $5 + 4 + 7$ und $5 + (4 + 7)$; **2.** $3 + 6 + (9 + 2)$;
3. $7 - (5 + 2)$; **4.** $9 + (5 - 2)$; **5.** $7 - (4 - 3)$;
6. $a + (b + c)$; **7.** $a - (b + c)$; **8.** $a + (b - c)$;
9. $a - (b - c)$.

In folgenden Fällen sind die entsprechenden Ausdrücke aufzuschreiben:

10. 27 (a) ist um die Summe von 10 (b) und 5 (c) zu vermindern.

11. 36 (m) ist um die Differenz von 12 (n) und 7 (p) zu vermindern.

Berechne ferner die Ausdrücke, und zwar 15. und 16. für $a = 24$, $b = 6$ und $c = 2$:

12. $(84 : 4)\, 3$ und $84 : 4 . 3$; **13.** $60 : (6 : 2)$ und $60 : 6 : 2$.

14. $2\, (12 : 3)$ und $(12 : 3)\, 2$. Welche bekannte Regel findet man hier bestätigt?

15. $(a : b)\, c$ und $a : bc$; **16.** $a : (b : c)$ und $a : b : c$.

Schreibe für folgende Fälle die entsprechenden Ausdrücke auf:

17. Der Quotient aus 45 (x) und 5 (y) ist mit 3 (z) zu multiplicieren.

18. 45 (x) ist durch das Product aus 5 (y) und 3 (z) zu dividieren.

19. 36 (x) ist durch den Quotienten aus 12 (y) und 3 zu dividieren.

20. Der Quotient aus 36 (x) und 12 (y) ist durch 3 zu dividieren.

Gib ferner die Bedeutung folgender Ausdrücke an:

21. $x - [a - (b + c)]$ und $x + [(a - b) - c]$;

22. $(a - b).(m - n)$ und $a - (bm - n)$;

23. $(x - y) : ab$ und $(x + y).(a : b)$.

24. Substituiere in 21. $x = 7$, $a = 6$, $b = 3$, $c = 2$.

25. Wie unterscheiden sich die Ausdrücke

$$ab - c + d,\; ab - (c + d),\; a\,(b - c) + d?$$

Welche Zahlenwerte erhalten sie für $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$ und $d = 2$?

2. Addieren allgemeiner Zahlen.

§. 4.

Bei besonderen Zahlen erhält man durch die Ausführung der Addition eine Zahl, in welcher die Summanden nicht mehr erkennbar sind; z. B. $8 + 4 = 12$. Bei allgemeinen Zahlen ist die Addition als ausgeführt anzusehen, wenn man die Summanden mit dem Zeichen $+$ nebeneinander setzt; z. B. $a + b$, $m + n + p$.

Rechengesetze der Addition.

1. Die Reihenfolge der Summanden ist für den Wert der Summe gleichgiltig.

Denn die Gesammtheit der in den Summanden enthaltenen Einheiten bleibt dieselbe, mögen diese in was immer für einer Ordnung gezählt werden. Es ist demnach

$$9 + 4 = 4 + 9;\quad a + b = b + a.$$

$$2 + 3 + 5 = 2 + 5 + 3 = 3 + 2 + 5 = 3 + 5 + 2 =$$
$$= 5 + 2 + 3 = 5 + 3 + 2;$$

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a =$$
$$= c + a + b = c + b + a.$$

2. Zu einer Zahl wird eine Summe addiert, indem man zu ihr den einen Summanden und zu diesem Resultate den anderen Summanden addiert.

Ist z. B. zu der Zahl 5 die Summe $4 + 3$ zu addieren, so gelangt man zu derselben Zahl 12, ob man in der natürlichen Zahlenreihe von 5 aus auf einmal um $4 + 3$, d. i. um 7 Einheiten vorwärts schreitet, oder ob man von 5 zuerst um 4 Einheiten, und dann von 9 noch um 3 Einheiten vorwärts schreitet; es ist somit

$$5 + (4 + 3) = 5 + 4 + 3.$$

Allgemein $a + (b + c) = a + b + c$.

Ebenso ist $a + (b + c + d) = a + b + c + d$,

$$(a + b) + (c + d) = a + b + c + d.$$

Hat man daher einen mehrgliedrigen Ausdruck zu einer Zahl zu addieren, so ist es nicht nöthig, den mehrgliedrigen Ausdruck einzuklammern.

§. 5.

$a + a + a + a + a = a.5$. Statt $a.5$, $a.6$, $a.7$ ... schreibt man allgemein $5a$, $6a$, $7a$ ... und nennt den besonderen Factor den Coefficienten und die allgemeine Zahl, vor welcher er steht, die Hauptgröße.

1 wird als Coefficient nicht angeschrieben; es bedeutet daher a soviel als $a.1 = 1a$.

Der Coefficient kann selbst auch eine allgemeine Zahl sein; z. B. ma bedeutet, dass a $m$mal als Summand zu setzen ist, also

$$ma = a + a + a + a + a + \ldots (m\text{mal}).$$

Ausdrücke, welche dieselbe Hauptgröße haben, heißen gleichnamig, z. B. $5a$ und $6a$, $3x$ und x. Ausdrücke, welche verschiedene Hauptgrößen haben, heißen ungleichnamig, z. B. $3a$ und $7b$, $5x$ und $5y$.

Bei gleichnamigen Ausdrücken kann in der Summe eine Abkürzung eintreten.

Gleichnamige Ausdrücke werden addiert, indem man die Summe ihrer Coefficienten als Coefficienten vor die gemeinschaftliche Hauptgröße setzt. Z. B.

$$5a + 2a = 7a.$$

Denn $5a = a + a + a + a + a$

$$2a = a + a$$

$$\overline{5a + 2a = a + a + a + a + a + a + a = 7a.}$$

Aufgaben.

1. $a + a$. **2.** $m + m$. **3.** $x + x + x$.
4. $2b + b$. **5.** $3a + 2a$. **6.** $7c + 3c + c$.
7. $a + 2a + 3a + 4a$. **8.** $9y + 7y + 5y + 3y$.
9. Wenn $n + 1$ eine ganze Zahl darstellt, wie heißen dann die drei nächstfolgenden ganzen Zahlen?
10. Bedeutet $2n$ eine gerade Zahl, wie heißen dann die vier nächstfolgenden geraden Zahlen?
11. $x + 1 + 2$. **12.** $2a + 3 + 4a$.
13. $8a + 3b + 4b$. **14.** $5x + 4y + 3x$.
15. $9a + 12b + 5b + 7a$. **16.** $8x + 3y + 4x + 5y$.
17. $23m + (17m + 20)$. **18.** $35 + (16p + 7)$.
19. $5a + 7b + (8a + 2b)$. **20.** $4p + 6q + (5p + 3q)$.

21. $\begin{array}{l} 8x + 9y \\ 7x + 5y \\ \hline \end{array}$ **22.** $\begin{array}{l} 5a + 7b + 9c \\ 8a + 2b + 6c \\ \hline \end{array}$

Welche Zahlenwerte haben die Summanden und die Summe in der Aufgabe 22. für $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$?

23. $\begin{array}{l} 9m + 5n + 8p \\ 6m + 7n + 5p \\ 4m + 8n + p \\ \hline \end{array}$ **24.** $\begin{array}{r} 2u + 5x + 9y + 6z \\ 15u + 8x + 10y + 7z \\ 9u + 12x + 8y + 15z \\ \hline \end{array}$

Mache in 23. die Probe durch die Substitution $m = 2$, $n = 3$, $p = 4$ und in 24. durch die Substitution $u = 4$, $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

3. Subtrahieren allgemeiner Zahlen.

§. 6.

Ist a der Minuend und b der Subtrahend, so wird die Differenz durch $a - b$ ausgedrückt.

Wenn man zu der Differenz den Subtrahend addiert, so erhält man den Minuend.

$$(7 - 4) + 4 = 7; \quad (a - b) + b = a.$$

Ist der Subtrahend dem Minuend gleich, so ist die Differenz gleich Null.

$$5 - 5 = 0; \quad a - a = 0.$$

Rechengesetze der Subtraction.

1. Zu einer Zahl wird eine Differenz addiert, indem man von der Summe der Zahl und des Minuends den Subtrahend subtrahiert.

Ist z. B. zu der Zahl 9 die Differenz $7 - 3$ zu addieren, so ist es gleichgiltig, ob man in der natürlichen Zahlenreihe von 9 aus auf einmal um 7 — 3, d. i. um 4 Einheiten vorwärts schreitet, oder ob man von 9 zuerst um 7 Einheiten vorwärts und dann um 3 Einheiten rückwärts schreitet; es ist daher

$$9 + (7 - 3) = 9 + 7 - 3.$$

Allgemein $a + (b - c) = a + b - c.$

Ebenso ist $a + (b + c - d) = a + b + c - d.$

2. Von einer Zahl wird eine Summe subtrahiert, indem man von der Differenz aus der Zahl und dem einen Summanden den anderen Summanden subtrahiert. Besteht die Summe aus mehr als zwei Summanden, so subtrahiert man von der Differenz aus der Zahl und dem einen Summanden den zweiten, von der neuen Differenz den dritten u. s. f., bis alle Summanden berücksichtigt sind. Dabei ist es gleichgiltig, welche Reihenfolge die Summanden haben.

Ist z. B. von der Zahl 15 die Summe 5 + 4 zu subtrahieren, so gelangt man zu derselben Zahl 6, ob man in der Zahlenreihe von 15 aus auf einmal um 5 + 4, d. i. um 9 Einheiten rückwärts schreitet, oder ob man von 15 aus zuerst um 5 Einheiten und dann noch um 4 Einheiten rückwärts schreitet; es ist also

$$15 - (5 + 4) = 15 - 5 - 4.$$

Allgemein $a - (b + c) = a - b - c.$

Ebenso ist $a - (b + c + d) = a - b - c - d.$

3. Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahiert, indem man zu der Differenz aus der Zahl und dem Minuend den Subtrahend addiert.

Soll z. B. von der Zahl 13 die Differenz 8 — 5 subtrahiert werden, so ist es gleichgiltig, ob man in der Zahlenreihe von 13 aus auf einmal um 8 — 5, d. i. um 3 Einheiten zurückschreitet, oder ob man von 13 aus zuerst um 8 Einheiten rückwärts und dann noch um 5 Einheiten vorwärts schreitet; es ist demnach

$$13 - (8 - 5) = 13 - 8 + 5.$$

Allgemein $a - (b - c) = a - b + c.$

Ebenso ist $a - (b + c - d) = a - b - c + d.$

Aus den voranstehenden Rechengesetzen ergibt sich:

a) Sind mehrgliedrige Ausdrücke in Klammern eingeschlossen, so kann man die Klammern nach folgendem Gesetze auflösen: Steht vor der Klammer das Zeichen +, so darf man die Klammer ohne alle weitere Veränderung weglassen; steht dagegen vor der Klammer das Zeichen —, so muss beim Weglassen der Klammer jedes + in den Klammern in —, jedes — in den Klammern in + verwandelt werden.

b) Umgekehrt können in jedem mehrgliedrigen Ausdruck mehrere Glieder in eine Klammer gesetzt werden, indem man, wenn die Klammer nach dem Zeichen + beginnt, alle Glieder mit unveränderten Zeichen innerhalb derselben folgen läſst, dagegen, wenn die Klammer nach dem Zeichen — beginnt, jedem der umschlossenen Glieder das entgegengesetzte Zeichen gibt.

§. 7.

Eine Abkürzung kann in der Differenz nur eintreten, wenn in derselben gleichnamige Ausdrücke vorkommen.

Gleichnamige Ausdrücke werden subtrahiert, indem man die Differenz ihrer Coefficienten als Coefficienten vor die gemeinschaftliche Hauptgröße setzt. Z. B.

$$7a - 3a = 4a.$$

Denn $7a = 4a + 3a$, $7a - 3a = 4a + 3a - 3a = 4a$.

Ein mehrgliedriger Ausdruck, welcher mehrere gleichnamige Ausdrücke enthält, wird auf einen einfacheren Ausdruck reduciert, indem man zuerst die Summanden, dann die Subtrahenden addiert, und die zweite Summe von der ersten subtrahiert. Z. B.

$$9x - 3x + 5x - 7x - x = (9x + 5x) - (3x + 7x + x)$$
$$= 14x - 11x = 3x.$$

Aufgaben.

1. $4a - a$. **2.** $7b - 5b$. **3.** $10x - 9x$.

4. $6a + 2a - 5a$. **5.** $15x + 11x - 20x$.

6. $3c + c - 2c + 4c$. **7.** $9y - 4y - 3y - y$.

8. $7a + 9a - 13a + 15a - 6a - 12a$.

9. Wenn $n + 4$ eine ganze Zahl darstellt, wie heißen dann die vier nächstvorhergehenden ganzen Zahlen?

10. $2a + 5 - 3$. **11.** $8x + 1 - 5x$.

12. $6m - 5 + 2m$. **13.** $(3a - 5b) + a$.

14. $(8x - 3) - 4$. **15.** $(15y - 7z) - 6y$.

16. $9 + (7a - 5)$. **17.** $10a + (a - 9b)$.

18. $6x - (3x + 4)$. **19.** $9c - (6b + 7c)$.

20. $12a - (5a - 8)$. **21.** $15 - (5y - 10)$.

22. $3x + (5x - 2y + z)$. **23.** $4a - (3a + 2b - c)$.

24. Stelle den Ausdruck $3a - 4b + 5c$ als Differenz dar, deren Minuend $3a$ ist.

25. Stelle den Ausdruck $5x - 2y - 3z$ als Differenz dar, deren Minuend $5x$ ist.

26. Bestimme für $a = 7$, $b = 3$, $c = 2$ und $d = 1$ die Zahlenwerte folgender Ausdrücke:

a) $a - b - c + d$; b) $a - (b - c) + d$;
c) $a - [b - (c + d)]$; d) $a - (b - c + d)$.

27. $(a - [b + c] - d) - (a - [2b + c - 2d])$.

28. $(x + a) - [x - \{y - (a - x)\}]$. Welchen Wert hat dieser Ausdruck, wenn $x = 12$, $y = 6$ und $a = 14$ ist?

29. $(3a + 4b) - (2a + b)$. **30.** $(8p - 6q) - (3p + 2q)$.

31.
$$\begin{array}{r} 15x - 8y \\ 8x - 10y \\ - \quad + \\ \hline \end{array}$$

32.
$$\begin{array}{r} 12m + 7n \\ 8m - 3n \\ \hline \end{array}$$

33.
$$\begin{array}{r} 14a - 15b + 16c \\ 9a - 15b - \ \ 4c \\ \hline \end{array}$$

34.
$$\begin{array}{r} 20u + 26x - 13y - 15z \\ 12u - \ \ 2x - 18y + \ \ 7z \\ \hline \end{array}$$

Mache in 34. die Probe durch die Substitution $u = 8$, $x = 6$, $y = 4$, $z = 2$.

35. $(3x - 2y - 3z) - (2x + y - 3z) + (8y + z)$.

36. Welche Zahl muſs zu $6x + (4x + 2y) - (x - 3y)$ addiert werden, um $5x + 4y$ zu erhalten?

37. Welche Zahl muſs von $5a + (3a - 6b) - (4a - 2b)$ subtrahiert werden, um $a - b$ zu erhalten?

4. Algebraische Zahlen.

§. 8.

Beim Subtrahieren muſs man in der natürlichen Zahlenreihe von der Zahl, welche als Minuend gegeben ist, um so viele Einheiten, als der Subtrahend anzeigt, rückwärts schreiten, und es ist die Zahl, zu welcher man in der Zahlenreihe dadurch gelangt, die gesuchte Differenz. Dieses ist zunächst nur möglich, wenn der Minuend größer oder eben so groß ist, als der Subtrahend. Ist z. B. von 6 die Zahl 4 zu subtrahieren, so schreitet man in der Zahlenreihe von 6 aus um 4 Einheiten zurück, wodurch man zur Zahl 2 gelangt; also ist $6 - 4 = 2$. Ist ferner von 6 die gleiche Zahl 6 zu subtrahieren, so schreitet man von 6 um 6 Einheiten zurück, und gelangt zur Null, welche der Ausgangspunkt der natürlichen Zahlen ist; man hat also $6 - 6 = 0$.

Ist dagegen von 6 eine größere Zahl, z. B. 8, zu subtrahieren, so müſste man, nachdem man von 6 zuerst um 6 Einheiten zurückgezählt hat und dadurch zur Null gelangt ist, von 0 aus noch um 2 Einheiten weiter zurückschreiten, was jedoch an der natürlichen Zahlenreihe, da dieselbe mit 0 abbricht, nicht möglich ist. Wir können aber jede solche Differenz durch eine Differenz mit dem Minuend Null darstellen. So ist z. B.

$$6 - 8 = 6 - (6 + 2) = 0 - 2 \text{ und}$$
$$a - (a + b) = 0 - b.$$

Soll daher die Subtraction auch dann noch ausführbar sein, wenn der Subtrahend größer ist als der Minuend, so müssen wir statt der bisher gebrauchten natürlichen Zahlenreihe, welche man auch die Reihe der **absoluten** Zahlen nennt, eine neue Zahlenreihe einführen. Diese erhalten wir durch folgende Überlegung: Wir können, von 0 ausgehend, Zahlen bilden, indem wir zu 0 der Reihe nach 1, 2, 3, 4 . . . addieren oder von 0 der Reihe nach 1, 2, 3 . . . subtrahieren. Im ersteren Falle erhält man $0 + 1$, $0 + 2$, $0 + 3$, $0 + 4$, . . ., im letzteren $0 - 1$, $0 - 2$, $0 - 3$, . . . Statt dessen schreibt man kurz $+ 1$, $+ 2$, $+ 3$, . . ., beziehungsweise $- 1$, $- 2$, $- 3$, $- 4$, . . . und nennt solche Zahlen **algebraische** oder **relative** Zahlen, und zwar die mit dem Vorzeichen $+$ versehenen **positive**, die mit dem Vorzeichen $-$ **negative** Zahlen.

Jede absolute Zahl kann auch als eine positive Zahl angesehen werden, da nämlich z. B. $7 = 0 + 7 = + 7$ oder allgemein $a = = 0 + a = + a$ ist.

Da dann umgekehrt auch $+ a = a$ ist, kann man das $+$ vor einer positiven algebraischen Zahl weglassen, wo es ohne Störung des Sinnes und Zusammenhanges der Rechnung geschehen kann.

Hiernach ist die oben gesuchte Differenz $6 - 8 = - 2$, also eine negative Zahl.

Man kann die positiven und negativen Zahlen bildlich darstellen, indem man auf eine gerade Linie von einem Punkte 0 aus nach einer bestimmten Richtung gleiche Strecken aufträgt; die Endpunkte dieser Strecken versinnlichen die auf einander folgenden natürlichen (positiven) Zahlen.

$$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad -0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4$$

—|——|——|——|——|——|——|——|——|—

Um dann an dieser **Zahlenlinie** auch die negativen Zahlen zu veranschaulichen, darf man nur die ursprünglich bloß nach einer Richtung (nach rechts) sich erstreckende gerade Linie über den Anfangspunkt 0 hinaus auch nach der entgegengesetzten Richtung (nach links) verlängern, und auch hier gleich große Strecken auftragen; die Endpunkte der links aufgetragenen Strecken versinnlichen die negativen Zahlen.

§. 9.

An jeder algebraischen Zahl unterscheiden wir deren Vorzeichen und ihren **absoluten Wert**. So ist z. B. 7 der absolute Wert der Zahl $- 7$ und ihr Vorzeichen $-$, a der absolute Wert von $+ a$ und ihr Vorzeichen $+$.

Zwei algebraische Zahlen, welche gleichen absoluten Wert, aber verschiedene Vorzeichen haben, heißen einander entgegengesetzt; z. B. $+ a$ und $- a$.

Die Summe zweier entgegengesetzter Zahlen ist Null.

$$(+ 5) + (- 5) = 0 + 5 + (0 - 5) = 0 + 5 - 5 = 0;$$
$$(+ a) + (- a) = 0 + a + (0 - a) = 0 + a - a = 0.$$

§. 10.

Der Begriff des Gegensatzes, welcher zwischen den positiven und negativen Zahlen besteht, tritt in zahlreichen Fällen des praktischen Lebens hervor, z. B. bei den Richtungen vorwärts und rückwärts, rechts und links, aufwärts und abwärts, bei der Zeit vor und nach Christi Geburt, bei Vermögen und Schulden, Einnahme und Ausgabe, Gewinn und Verlust, u. dgl. Der Gegensatz besteht darin, dass je zwei solche entgegengesetzte Größen, mit einander in Verbindung gebracht, sich gegenseitig entweder ganz oder theilweise aufheben. Z. B. Wenn jemand in einer bestimmten Richtung 20 Schritte vorwärts geht und dann von dem erreichten Punkte 20 Schritte in entgegengesetzter Richtung, also nach rückwärts macht, so ist er, obwohl er 40 Schritte weit gegangen, doch um nichts von seinem anfänglichen Orte entfernt, und es ist in Bezug auf das erreichte Ziel ebensoviel, als wenn er sich gar nicht bewegt hätte; 20 Schritte nach vorwärts und 20 Schritte nach rückwärts heben sich also gegenseitig ganz auf. Ebenso heben sich 20 fl. Vermögen und 20 fl. Schulden ganz auf; dagegen heben sich 20 fl. Vermögen und 8 fl. Schulden nur theilweise auf, indem durch ihre Vereinigung, d. i. nach der Tilgung der Schulden, noch 12 fl. Vermögen übrig bleiben.

Von zwei entgegengesetzten Größen wird die eine, gleichviel welche, als positiv und die ihr entgegengesetzte als negativ angenommen. Betrachtet man z. B. Vermögen als positiv, so muss man Schulden als negativ annehmen.

5. Addition und Subtraction algebraischer Zahlen.

Addieren algebraischer Zahlen.

§. 11.

Zu einer algebraischen Zahl wird eine andere (algebraische Zahl) addiert, indem man letztere zur ersteren mit unverändertem Vorzeichen hinzufügt.

$$(+ 6) + (+ 2) = (0 + 6) + (0 + 2) = 6 + 2,$$
$$(+ 6) + (- 2) = (0 + 6) + (0 - 2) = 6 - 2,$$

$$(-6)+(+2)=(0-6)+(0+2)=-6+2,$$
$$(-6)+(-2)=(0-6)+(0-2)=-6-2;$$

oder allgemein:

$$(+a)+(+b)=(0+a)+(0+b)=a+b,$$
$$(+a)+(-b)=(0+a)+(0-b)=a-b,$$
$$(-a)+(+b)=(0-a)+(0+b)=-a+b,$$
$$(-a)+(-b)=(0-a)+(0-b)=-a-b.$$

Eine Summe algebraischer Zahlen nennt man eine algebraische Summe. Das für zwei algebraische Zahlen begründete Verfahren, dieselben zu addieren, kann auf beliebig viele Summanden ausgedehnt werden. So ist

$$(+2)+(-5)+(+9)=(0+2)+(0-5)+(0+9)=2-5+9$$

und

$$(-a)+(+b)+(-c)=(0-a)+(0+b)+(0-c)=-a+b-c.$$

Man kann also jede Summe algebraischer Zahlen in ein Polynom verwandeln. Das Pluszeichen vor dem ersten Gliede eines Polynoms läßt man gewöhnlich weg.

Umgekehrt kann man jedes Polynom als eine Summe algebraischer Zahlen darstellen, wie man sich überzeugen kann, wenn man die beiden letzten Beispiele von rechts gegen links liest.

Eine algebraische Summe wird daher zu einer algebraischen Zahl addiert, indem man das dieser Summe gleiche Polynom zu der algebraischen Zahl hinzufügt. Ist z. B. zu $(+a)$ die algebraische Summe $(+b)+(-c)+(+d)$ zu addieren, so erhält man $a+(b-c+d)=a+b-c+d$.

Subtrahieren algebraischer Zahlen.

§. 12.

Von einer algebraischen Zahl wird eine andere subtrahiert, indem man den Subtrahend mit entgegengesetztem Vorzeichen zum Minuend addiert.

$$(+a)-(+b)=(0+a)-(0+b)=a-0-b=a-b=a+(-b),$$
$$(+a)-(-b)=(0+a)-(0-b)=a-0+b=a+b=a+(+b).$$

Ist der Subtrahend ein Polynom, so wird die Subtraction ausgeführt, indem man die Vorzeichen sämmtlicher Glieder des Subtrahends ändert und den so erhaltenen Ausdruck zum Minuend addiert.

$$(+9)-(4-2+3)=9-4+2-3,$$

denn es ist $9-4+2-3+(4-2+3)=9.$

Ebenso ist $a-(b+c-d)=a-b-c+d.$

Überzeuge dich von der Richtigkeit dieser Differenz durch die Probe. Ist die Addition beziehungsweise Subtraction ausgeführt, so kann das Resultat, wenn es in besonderen Zahlen ausgedrückt erscheint, stets reduciert werden; ist es allgemein, nur dann, wenn gleichnamige Ausdrücke darin vorkommen.

§. 13.

Aufgaben.

1. $(+5)+(+5)$. **2.** $(+5)+(-5)$.
3. $(+8)+(-3)$. **4.** $(-8)+(-3)$.
5. $(+33)-(+18)$. **6.** $(-68)-(+29)$.
7. $(-293)-(-107)$. **8.** $(+512)-(-248)$.
9. $(+16)+(-9)-(+6)$. **10.** $(-25)-(-28)-(+12)$.
11. Berechne $x-(x-2)+(x-4)-(x-6)+(x-8)$ für $x=3$.
12. Jemand hat 5246 *K* Vermögen und 2758 *K* Schulden; wieviel beträgt sein reines Vermögen?
13. Der erste punische Krieg begann im Jahre 264 v. Chr. und dauerte 23 Jahre; wann hörte er auf?
14. Kaiser Augustus wurde im J. 63 v. Chr. geboren und erreichte ein Alter von 77 Jahren; wann starb er?
15. Das römische Reich wurde vom J. 30 v. Chr. bis zu seinem Untergange im J. 476 n. Chr. von Kaisern regiert; wie lange dauerte in Rom das Kaiserthum?
16. Jemand geht 65 Schritte vorwärts, hierauf 37 Schritte rückwärts, dann wieder 48 Schritte vorwärts; wieviel Schritte ist er von dem Orte entfernt, von dem er ausgieng?
17. Ein Dampfschiff wird durch die Einwirkung des Stromes allein jede Minute 65 *m* abwärts getrieben, durch die Kraft des Dampfes allein legt es jede Minute 412 *m* zurück; wieviel Meter legt es in der Minute a) stromabwärts, b) stromaufwärts zurück?
18. $(5x-3y)+(-2x+5y)$. Berechne diese Summe für $x=7$, $y=3$.
19. $(-6a+7b)-(3a-3b)$. Berechne die Differenz für $a=2$, $b=5$.
20. $(7a-6b+5c)+(-3a+2b-c)+(4a-8b+3c)$. Mache die Probe für $a=1$, $b=2$, $c=3$.
21. $(14x-12y-9z)-(-8x-[15y+3z])$. Mache die Probe für $x=10$, $y=9$, $z=8$.
22. $(x+y-z)-(x-y+z)+(-x+y+z)-(-x-y+z)$. Mache die Probe für $x=12$, $y=7$, $z=9$.

23. $(a + b) - (a - b) + (- a + b) + (a - c) + (a + b - c) - (a - [b + c]) + (a - [b - c]) - (a + [b - c])$. Mache die Probe für $a = - 1$, $b = 2$, $c = - 3$.

6. Multiplicieren absoluter Zahlen.

§. 14.

Das Product $a.b$ oder $a\,b$ zweier Zahlen zeigt an, dass der Multiplicand a so oft als Summand zu setzen ist, als der Multiplicator b Einheiten hat; also

$$a.b = a + a + a + a + \ldots (b \, \text{mal}).$$

Rechengesetze der Multiplication.

1. Die Reihenfolge der Factoren ist für den Wert eines Zahlenproductes gleichgiltig.

Es seien z. B. 5 und 3 die beiden Factoren; zerlegt man 5 in fünf Einheiten, die in einer horizontalen Reihe anschaulich gemacht werden, und bringt 3 solche Reihen unter einander an,

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

so erhält man offenbar gleichviel, ob man die Einheiten aller horizontalen oder jene aller verticalen Reihen zusammenzählt. Zählt man die Einheiten der horizontalen Reihen, so erhält man 5 Einheiten 3 mal, oder 5.3; zählt man die Einheiten der verticalen Reihen, so bekommt man 3 Einheiten 5 mal, oder 3.5. Es ist daher $5.3 = 3.5$.

Allgemein ist $a.b = b.a$.

2. Ein Product wird mit einer Zahl multipliciert, indem man das Product aus dem einen Factor und der Zahl mit dem anderen Factor multipliciert.

Denn $(3.4).5 = (3.5).4 = (4.5).3$; $(ab)\,c = (ac)\,b = (bc)\,a$.

3. Eine Zahl wird mit einem Producte multipliciert, indem man sie mit dem einen Factor und das erhaltene Product mit dem anderen Factor multipliciert.

Denn $7.(6.3) = (7.6).3 = (7.3).6$; $a(bc) = (ab)c = (ac)b$.

Hieraus folgt: Enthält ein Ausdruck bloß Factoren, so kann man in demselben die Klammern ohneweiters weglassen und ebenso nach Belieben wieder anbringen.

§. 15.

Potenzen und ihre Multiplication.

Sollen mehrere gleiche Zahlen als Factoren gesetzt werden, so schreibt man zur Abkürzung einen solchen Factor nur einmal und fügt demselben rechts oben die Zahl an, welche angibt, wie oft dieser Factor vorkommt. Z. B.:

statt aa schreibt man a^2,
„ bbb „ „ b^3,
„ $xxxxx$ „ „ x^5.

Ein Product gleicher Factoren heißt eine **Potenz**; die Zahl der gleichen Factoren heißt der **Potenzexponent**, und der Factor, der so oft vorkommt, als der Exponent Einheiten hat, die **Basis** (Grundzahl oder Wurzel). So ist a^3 eine Potenz, 3 ist der Exponent und a die Basis. Der Exponent 1 wird nicht angeschrieben, so dass a so viel bedeutet als a^1.

Die zweite Potenz a^2 einer Zahl a wird insbesondere auch das **Quadrat**, die dritte Potenz a^3 der **Cubus** von a genannt.

Die Begriffe Coefficient und Exponent müssen von einander wohl unterschieden werden; es ist

$$4a = a + a + a + a,$$
$$a^4 = a \times a \times a \times a,$$

welche Ausdrücke wesentlich verschieden sind; setzt man z. B. $a = 3$, so ist

$$4a = 3 + 3 + 3 + 3 = 12,$$
$$a^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

Wenn in einem mehrgliedrigen Ausdrucke mehrere Potenzen derselben Basis vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Übersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten der gemeinsamen Basis zu ordnen, indem man entweder mit der höchsten Potenz beginnt und dann immer niedrigere Potenzen folgen lässt, oder indem man zuerst jenes Glied setzt, welches keine oder die niedrigste Potenz der gemeinsamen Basis enthält und dann zu immer höheren Potenzen hinaufsteigt. Im ersten Falle heißt das Polynom nach **fallenden**, im zweiten nach **steigenden** Potenzen der gemeinsamen Basis geordnet. So erhält z. B. der Ausdruck

$$5x^2 + 6 + 3x + 4x^3 + x^4$$

fallend geordnet die Form:

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 3x + 6,$$

und steigend geordnet:

$$6 + 3x + 5x^2 + 4x^3 + x^4.$$

Aufgaben.

1. Ordne folgende Ausdrücke nach den fallenden Potenzen von x:
   a) $32x^3 - 32x^2 + 15 - 15x^4 + 8x$;
   b) $21x^2 - 40x^{10} + 65x^6 + 40 - 21x^8 - 65x^4$.

2. Ordne nach den steigenden Potenzen von y:
   a) $10y^3 + 63 - 155y^2 + 10y + 63y^4$;
   b) $20y^3 - 7y^4 - 18y + y^6 + 27 - 2y^5 - 21y^2$.
3. Ordne nach den fallenden Potenzen von x, und dann y:
   a) $12x^2y^2 + 16y^4 + 4x^3y + x^4 + 16xy^3$;
   b) $10x^2y^6 + 24x^8 + 15x^6y^2 + 63y^8 - 155x^4y^4$.

Jede dekadische Zahl kann als ein nach den fallenden Potenzen von 10 geordnetes Polynom dargestellt werden. Z. B.

$$8536 = 8000 + 500 + 30 + 6$$
$$= 8.10^3 + 5.10^2 + 3.10 + 6.$$

Kommen in den Factoren eines Productes Potenzen derselben Basis vor, so läſst die Rechnung eine bedeutende Vereinfachung zu. Es ist

$$a.a^2 = a.aa = aaa = a^3,$$
$$a^5.a^2 = aaaaa.aa = aaaaaaa = a^7,$$

allgemein

$$a^m.a^n = a^{m+n}.$$

Potenzen derselben Basis werden also mit einander **multipliciert**, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten der Factoren potenziert.

§. 16.

Multiplication algebraischer Zahlen.

Bei der **Multiplication** zweier **algebraischer Zahlen** gilt, wenn der **Multiplicator** positiv ist, die für die Multiplication absoluter Zahlen aufgestellte Norm.

Ist der **Multiplicator negativ**, so hat man das **Entgegengesetzte** des **Multiplicands** so oft als Addend zu setzen, als der **absolute Wert** des **Multiplicators Einheiten** hat. Demnach ist

$$+5.+3 = +5+5+5 = +15,$$
$$-5.+3 = -5-5-5 = -15,$$
$$+5.-3 = -5-5-5 = -15,$$
$$-5.-3 = +5+5+5 = +15;$$

allgemein

$$+a.+b = +a+a+a+\ldots b\,\text{mal} = +ab,$$
$$-a.+b = -a-a-a-\ldots b\,\text{mal} = -ab,$$
$$+a.-b = -a-a-a-\ldots b\,\text{mal} = -ab,$$
$$-a.-b = +a+a+a+\ldots b\,\text{mal} = +ab.$$

Zwei algebraische Zahlen werden demnach mit einander **multipliciert**, indem man das Product aus ihren absoluten Werten positiv oder negativ nimmt, je nachdem beide Factoren gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

Man drückt diesen Satz auch so aus: Bei der Multiplication algebraischer Zahlen geben zwei gleichbezeichnete Factoren ein positives, zwei ungleich bezeichnete Factoren ein negatives Product.

§. 17.

Multiplication eingliedriger Ausdrücke.

Eingliedrige Ausdrücke werden mit einander multipliciert, indem man das Product der Coefficienten mit dem entsprechenden Vorzeichen (§. 16) dem Producte der allgemeinen Zahlen voransetzt. Denn es ist z. B.

$$+3a \,.\, +4b = (3a \,.\, 4)b = 12a \,.\, b = 12ab.$$
$$-3a \,.\, +4b = (-3a \,.\, 4)b = -12a \,.\, b = -12ab.$$

Aufgaben.

1. $7a \,.\, 8.$ **2.** $5m \,.\, n.$ **3.** $x \,.\, 3y.$
4. $3ax \,.\, b.$ **5.** $6p \,.\, 7q.$ **6.** $5a \,.\, 8b \,.\, 9c.$
7. $6px \,.\, 8n.$ **8.** $9a \,.\, b \,.\, 5.$ **9.** $2xy \,.\, 4a \,.\, 6b.$
10. $a^4 \,.\, a.$ **11.** $x^3 \,.\, x^5.$ **12.** $p^4 \,.\, p^6.$
13. $6a \,.\, 2a.$ **14.** $5m^3 \,.\, 2m^3.$ **15.** $a^2x \,.\, ax^2.$
16. $2a^2y^3 \,.\, 7a^4y^3.$ Mache die Probe für $a = 2$, $y = -3$.
17. $a^2mx^3 \,.\, am^2x^3.$ Mache die Probe für $a = -2$, $m = 3$, $x = -1$.
18. $x \,.\, x^3 \,.\, x^5.$ **19.** $2a^2 \,.\, 3a^3 \,.\, 4a^4.$
20. $5a^2y^3 \,.\, 3b^2y \,.\, 6a^2b^2.$
21. $3pq^3 \,.\, 6p^3q \,.\, 8p^2q^2.$ Mache die Probe für $p = 2$, $q = 10$.
22. $a^2mx^2 \,.\, 2am^2x^3 \,.\, 3a^3m^2x \,.\, 4ax^4.$
Bestimme den Zahlenwert dieses Ausdruckes für $a = 2$, $m = 2$ und $x = 1$.
23. $+6 \,.\, -5.$ **24.** $-8 \,.\, +6.$
25. $-10 \,.\, -3.$ **26.** $-9 \,.\, +3 \,.\, -4.$
27. $-7 \,.\, -8 \,.\, -9.$ **28.** $-15 \,.\, -4 \,.\, -6 \,.\, -2.$
29. Ein Körper, welcher sich in gerader Linie in jeder Secunde 12 *m* a) nach vorwärts, b) nach rückwärts bewegt, befindet sich gegenwärtig im Punkte A; auf welcher Seite und in welchem Abstande von A wird er sich nach 25 Secunden befinden? Auf welcher Seite und in welchem Abstande von A befand sich derselbe Körper vor 25 Secunden?
30. $3x \,.\, -4x.$ **31.** $-6a^2 \,.\, -2a^3.$
32. $8cx^2 \,.\, -5c^2x^2.$ **33.** $-5m^3y \,.\, 9m^4y^3.$

34. $-6ab^2y^3 . 2b^3y^2 . 5a^2y$. **35.** $5c^2x^2 . -6cxy^2 . 2y^4$.
36. Berechne $x^2 + 2x - 15$ für $x = -5$.

§. 18.

Multiplication mehrgliedriger Ausdrücke.

1. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jedes Glied desselben mit dieser Zahl multipliciert und die erhaltenen Theilproducte addiert.

Ist $a - b + c$ mit 3 zu multiplicieren, so hat man

$$\begin{aligned}(a - b + c) . 3 &= a - b + c + a - b + c + a - b + c \\ &= a + a + a - b - b - b + c + c + c \\ &= a . 3 - b . 3 + c . 3 = 3a - 3b + 3c.\end{aligned}$$

Allgemein

$$(a - b + c) . m = am - bm + cm.$$

Da man die Factoren eines Zahlenproductes vertauschen darf, so ist auch

$$m . (a - b + c) = am - bm + cm.$$

2. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem mehrgliedrigen Ausdruck multipliciert, indem man jedes Glied des Multiplicands mit jedem Gliede des Multiplicators multipliciert und die erhaltenen Theilproducte addiert.

Hat man $a + b - c$ mit $n - p + q$ zu multiplicieren, so ist, wenn man den Multiplicand $a + b - c$ vorläufig durch m bezeichnet,

$$m . (n - p + q) = mn - mp + mq;$$

somit, wenn man statt m wieder seinen Wert setzt,

$$\begin{aligned}(a + b - c) . (n - p + q) = &\ (a + b - c) n \\ &- (a + b - c) p \\ &+ (a + b - c) q\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(a + b - c) . (n - p + q) = &\ an + bn - cn \\ &- ap - bp + cp \\ &+ aq + bq - cq.\end{aligned}$$

Bei mehrgliedrigen Ausdrücken, welche nach den Potenzen derselben Basis fortschreiten, erhält man, wenn dieselben gleichartig geordnet sind, durch die Multiplication des Multiplicands mit den einzelnen Gliedern des Multiplicators Theilproducte, welche ebenso geordnet sind. Man schreibt diese Theilproducte, um sie leichter zu reducieren, so an, dass ihre gleichnamigen Glieder unter einander zu stehen kommen. Z. B.

$$\begin{array}{rl}
5x^2 - 8x - 6 & \text{Multiplicand} \\
4x^2 - 6x + 7 & \text{Multiplicator} \\
\hline
20x^4 - 32x^3 - 24x^2 & \\
- 30x^3 + 48x^2 + 36x & \\
+ 35x^2 - 56x - 42 & \\
\hline
20x^4 - 62x^3 + 59x^2 - 20x - 42 & \text{Product.}
\end{array}$$

Aufgaben.

1. $(6a - 5b) . 3c.$ 2. $(2a - 3b + 4c) . - 1.$
3. $(5a^2 - 3a + 2) . - 6ax.$ 4. $(1 - 5x + 6x^2) . 5x^2.$
5. $4x . (7m - 6n + 5p).$ 6. $5a . (3b + 4c - d).$
7. $a^2xy . (x^2 + y^2 - z^2).$ 8. $- 3x . (1 - 3x^2 - 5x^4).$
9. $3a [(2x + a) - 3x (2a - x)].$
Mache die Probe durch die Substitution $a = 3$, $x = - 2$.
10. $(a + 2) (b + 3).$ 11. $(p - 4) (q + 5).$
12. $(5a - 3b) (4c - 2d).$ 13. $(2a + 3b) (3a - 2b).$
14. $(a + b)^2 = (a + b) (a + b) = a^2 + 2ab + b^2.$
15. $(a - b)^2 = (a - b) (a - b) = a^2 - 2ab + b^2.$
Welche Regel ergibt sich aus 14 und 15 für die Bildung des Quadrates eines Binoms? Prüfe die Richtigkeit für $a = 6$ und $b = 2$, für $a = 10$ und $b = 3$.
16. $(4x + 3)^2.$ 17. $(7 - 5x)^2.$
18. $(2x + 5y)^2.$ 19. $(6a - 7b)^2.$
20. $(x^2 - y^2)^2.$ 21. $(4a^2 - 3b^2)^2.$
22. $(a + 3)^2 - 6a.$ 23. $(2x - 7y)^2 + 28xy.$
24. $(x + y)^2 + (x - y)^2.$ 25. $(x + y)^2 - (x - y)^2.$
Berechne 24. und 25. für $x = 5$ und $y = 3$.
26. $(a + b) (a - b) = a^2 - b^2.$
Drücke diese Formel mit Worten aus und prüfe ihre Richtigkeit für $a = 3$, $b = 1$, für $a = 8$, $b = 5$. Welcher der beiden Ausdrücke $a^2 - b^2$ oder $(a + b) (a - b)$ läſst sich rascher berechnen, wenn $a = 26$ und $b = 24$ ist?
27. $(a + 4) (a - 4).$ 28. $(2x + 3) (2x - 3).$
29. $(5a + 4b) (5a - 4b).$ 30. $(4x - 3y) (4x + 3y).$
31. $(6a + 5x) (6a - 5x).$ 32. $(5ab + 3xy) (5ab - 3xy).$
33. $(4 + 2x) (5 + 3x) - (4 - 3x) (5 - 2x).$
Welchen Zahlenwert hat dieser Ausdruck für $x = 4$?
34. $(3x + 5y + 7z) (2a + 4b).$
35. $(a^3 - 6a^2 + 4a - 2) (3a - 5).$
36. $(2a^2x^2 - 4ax - 9) (7ax + 8).$

37. $(16a^4 + 8a^2b^2 + b^4)(4a^2 - b^2)$.
38. $(x^2 - 2ax + 3a^2)(x + 2a) - (x^2 + 2ax - 3a^2)(x - 2a)$.
39. $(x^5 - x^4 - [x^3 - x^2 - x] + 1)(x - 1)$.
40. $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1)$.
41. $(x - 2y - 3z)(3x + y - z)$.
42. $(x^2 + 2x - 3)(2x^2 - 3x + 4)$.
Mache die Probe durch Vertauschung der Factoren.
43. $(3m^2 - 5mn + 4n^2)(4m^2 + 5mn - 3n^2)$.
44. $(3 + 4x + 5x^2 - 6x^3)(4 - 5x - 6x^2)$.
45. $(3y^3 - 5y^2[z + 7yz^2] - 4z^3)(2y^2 - 5yz + 3z^2)$.
Berechne das Product für $y = 3$ und $z = -2$.
46. $(2p^3 - 3p^2 - 8p + 12)(3p^3 - 4p^2 - 5p + 6)$.
Mache die Probe durch Vertauschung der Factoren.
47. $(x^3 - 2x^2 - 2x + 1)(x^3 + 2x^2 - 2x + 1)$.
48. $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$. **49.** $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
50. $(x + 2)(x - 3)(x + 4)(x - 5)$.
Berechne diesen Ausdruck für $x = 4$.
51. $(9a + 3b)(2a - 5b)(a - 4b)$.
52. $(a^2 - 3a - 6)(a^2 + 4a - 5)(a + 3)$.
53. $(2x - 3)(3x - 4)(4x - 5)(5x - 6)$.

7. Dividieren absoluter Zahlen.

§. 19.

Ist a der Dividend und b der Divisor, so wird der Quotient durch $a : b$ oder $\frac{a}{b}$ ausgedrückt.

Wenn man den Quotienten mit dem Divisor multipliciert, so erhält man den Dividend.

$$(15 : 3) . 3 = 15; \quad (a : b) . b = a.$$

Ist der Divisor dem Dividend gleich, so ist der Quotient gleich 1.

$$6 : 6 = 1; \quad a : a = 1.$$

Ist der Divisor $= 1$, so ist der Quotient gleich dem Dividend.

$$9 : 1 = 9; \quad a : 1 = a.$$

Ist der Dividend 0 und der Divisor eine von 0 verschiedene Zahl, so ist der Quotient gleich Null.

$$0 : 7 = 0; \quad 0 : a = 0.$$

Dividiert man ein Product zweier Factoren durch den einen derselben, so erhält man den anderen Factor als Quotienten.

$$(5 . 4) : 5 = 4 \qquad (ab) : a = b$$
$$(5 . 4) : 4 = 5 \qquad (ab) : b = a.$$

Rechengesetze der Division.

1. Ein Product wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Quotienten aus dem einen Factor und der Zahl mit dem anderen Factor multipliciert.

$$(20 . 3) : 5 = (20 : 5) . 3 = (3 : 5) . 20;$$
$$(a . b) : c = (a : c) b = (b : c) a.$$

Liest man diese Formeln von rechts gegen links, so erhält man den Lehrsatz:

2. Ein Quotient wird mit einer Zahl multipliciert, indem man das Product aus dem Dividend und der Zahl durch den Divisor dividiert.

3. Eine Zahl wird durch ein Product dividiert, indem man den Quotienten aus der Zahl und dem einen Factor durch den anderen Factor dividiert.

$$36 : 2 . 3 = (36 : 2) : 3 = (36 : 3) : 2.$$
$$a : bc = (a : b) : c = (a : c) : b.$$

Von rechts gegen links gelesen geben diese Formeln den Lehrsatz:

4. Ein Quotient wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Dividend durch das Product aus dem Divisor und der Zahl dividiert.

§. 20.

Division der Potenzen.

Einfach gestaltet sich die Division allgemeiner Zahlen, wenn sie Potenzen derselben Basis sind. Man hat

$$a^3 : a = aaa : a = aa = a^2,$$
$$a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3,$$
$$a^7 : a^3 = aaaaaaa : aaa = aaaa = a^4,$$

allgemein

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Potenzen derselben Basis werden also durch einander dividiert, indem man diese Basis mit der Differenz der Exponenten des Dividends und Divisors potenziert.

§. 21.

Division algebraischer Zahlen.

Die Division algebraischer Zahlen beruht auf dem Satze, dass der Quotient mit dem Divisor multipliciert den Dividend geben muss.

a) Ist $+ab$ durch $+b$ zu dividieren, so muſs der Quotient $+a$ sein, weil nur eine positive Zahl $+a$ mit einer positiven $+b$ multipliciert ein positives Product $+ab$ geben kann; also

$$(+ab):(+b) = +a.$$

b) Es sei $+ab$ durch $-b$ zu dividieren; hier muſs man den Quotienten a so bezeichnen, daſs er mit $-b$ multipliciert $+ab$ gibt; nun kann nur eine negative Zahl mit einer negativen multipliciert ein positives Product geben; der Quotient a muſs also negativ sein und man hat

$$(+ab):(-b) = -a.$$

c) Um $-ab$ durch $+b$ zu dividieren, muſs man eine Zahl suchen, welche mit $+b$ multipliciert $-ab$ gibt; diese Zahl kann nur $-a$ sein; somit

$$(-ab):(+b) = -a.$$

d) Durch dieselbe Schluſsfolge erhält man auch

$$(-ab):(-b) = +a.$$

Zwei algebraische Zahlen werden demnach durch einander dividiert, indem man den Quotienten ihrer absoluten Werte positiv oder negativ nimmt, je nachdem Dividend und Divisor gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben.

§. 22.

Division eingliedriger Ausdrücke.

Eingliedrige Ausdrücke werden durch einander dividiert, indem man den Quotienten der Coefficienten mit dem entsprechenden Vorzeichen (§. 21) dem Quotienten der allgemeinen Zahlen voransetzt.

Für die Bildung des Quotienten der allgemeinen Zahlen gelten die in den Paragraphen 19 und 20 entwickelten Regeln.

Aufgaben.

1. $5x:5$.	**2.** $5x:x$.	**3.** $8a:4$.
4. $6bc:6c$.	**5.** $12ax:3a$.	**6.** $15ab:5b$.
7. $9abc:3ab$.	**8.** $8xyz:2xz$.	**9.** $30amx:6am$.
10. $a^5:a$.	**11.** $2a^4:a^2$.	**12.** $6a^6:3a^3$.
13. $12a^4:3a$.	**14.** $ab^2c^3:abc$.	**15.** $m^5p^2x^4:mp^2x^2$.
16. $45m^2y:5my$.	**17.** $42x^3y^2z^4:7xy^2z^2$.	
18. $+28:-7$.	**19.** $-28:+7$.	
20. $-56:+8$.	**21.** $-56:-8$.	
22. $[+548-(-73)]:[-55-(-82)]$.		

23. Das Thermometer zeigte an einem Tage morgens -8^0 R., mittags $+1^0$ R., abends -5^0 R.; wie groß war die mittlere Tagestemperatur?

24. $-8xy : 4y$.   25. $12a^6 : -3a^2$.

26. $27a^3b^3 : -3ab^2$.   27. $-3x^4y^3z^2 : -3x^2y$.

28. $(4a^2bz^3 . 10a^2b^3z) : 5a^3b^2z^2$.

29. $(21x^2y^4z^6 : 3xy^2z^3) . -2x^3y^2z$. Mache die Probe für $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$.

30. $(18a^3b^2c : 2ab) : 3ac$. Mache die Probe für $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

31. $104ab^3x^5 : (91a^5b^5x^6 : 7a^4b^3x)$.

§. 23.

Division mehrgliedriger Ausdrücke.

1. Ein mehrgliedriger Ausdruck wird durch eine Zahl dividiert, indem man jedes Glied desselben durch diese Zahl dividiert und die Theilquotienten addiert.

Es ist

$$(a + b + c) . m = am + bm + cm.$$

Wird das Product zweier Factoren durch den einen Factor dividiert, so erhält man den andern Factor; es ist also

$$(am + bm + cm) : m = a + b + c.$$

a, b, c sind aber die Quotienten, welche man erhält, indem man folgeweise am, bm, cm durch m dividiert.

2. Es seien Dividend und Divisor mehrgliedrige Ausdrücke. Ist

$$\begin{array}{lrrr} \text{der Divisor} & a & + b & + c, \\ \text{der Quotient} & n & + p & + q, \text{ so ist} \\ \hline \text{der Dividend} & an & + bn & + cn \\ & + ap & + bp & + cp \\ & + aq & + bq & + cq. \end{array}$$

Das erste Glied des Dividends ist an, d. i. das Product aus dem ersten Gliede a des Divisors und dem ersten Gliede n des Quotienten; man findet daher das erste Glied n des Quotienten, indem man das erste Glied an des Dividends durch das erste Glied a des Divisors dividiert. — Wenn man nun das Theilproduct, welches n im Dividende hervorbringt, bildet, indem man nämlich den ganzen Divisor mit n multipliciert, so ist, wenn dieses Theilproduct von dem Dividende subtrahiert wird, das erste Glied ap des Restes das Product aus dem ersten Gliede a des Divisors und dem zweiten Gliede p des Quotienten; man erhält also dieses zweite Glied des Quotienten, indem man das erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors dividiert. — Bildet man wieder die Bestandtheile, welche p im Dividende hervorbringt, nämlich das Product aus dem ganzen Divisor und aus p, und subtrahiert dieses Product von dem früheren Reste, so stellt das erste Glied aq des neuen Restes das Product aus dem ersten Gliede a des Divisors und dem dritten Gliede q des Quotienten vor; wird daher dieses erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors dividiert, so erhält man das dritte Glied q des Quotienten; u. s. f.

Hieraus ergibt sich folgendes Verfahren für das Dividieren zweier mehrgliedriger Ausdrücke:

Man dividiere, nachdem die Glieder des Dividends und des Divisors gleichartig geordnet wurden, das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors; dadurch erhält man das erste Glied des Quotienten; mit diesem Theilquotienten multipliciere man den ganzen Divisor und subtrahiere das Product vom ganzen Dividend. Mit dem Reste verfahre man dann ebenso, wie mit dem ursprünglichen Dividend, um das folgende Glied des Quotienten zu erhalten, u. s. f. Z. B.

$$
\begin{array}{l}
(10a^2 - 11ab - 6b^2) : (2a - 3b) = 5a + 2b \\
\underline{\begin{array}{l} 10a^2 - 15ab \\ - \quad\; + \end{array}} \\
\qquad\quad + 4ab - 6b^2 \\
\qquad\quad \underline{\begin{array}{l} + 4ab - 6b^2 \\ - \qquad + \end{array}} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Aufgaben.

1. $(8ab + 12ac) : 4a$.
2. $(15am - 10bm) : 5m$.
3. $(4x^2 - 6xy) : 2x$.
4. $(12a^5 + 9a^3) : 3a^2$.
5. $(18amy - 27bny + 36cpy) : -9y$.
6. $(21a^3 + 18a^2b - 15ab^2) : 3a$.
7. $(12x^5 - 8x^4 + 4x^3) : 4x^3$.
8. Bestimme die Ausdrücke:

a) $(2a^2 - ab - 2a) : a$, b) $(2a^2 - a)(b - 2a) : a$,
c) $[2a^2 - (ab - 2a)] : a$, d) $2a^2 - [(ab - 2a) : a]$,
e) $2a^2 - a(b - 2a) : a$. f) $2a^2 - a[(b - 2a) : a]$,

und berechne ihre Zahlenwerte für $a = 4$ und $b = 7$.

9. $(3x^3 - 6x^5 + 9x^7 - 12x^9) : 3x^3$.
10. $(35a^4y^3 - 28a^3y^4 - 14a^2y^5 + 21ay^6) : 7ay^3$.
11. $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$.
12. $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b)$.

13. $(25x^2 - 30x + 9):(5x + 3)$.
14. $(16a^2 - 40ax + 25x^2):(4a - 5x)$.
15. $(a^2 - b^2):(a + b)$. 16. $(a^2 - b^2):(a - b)$.
Was erhält man, wenn man die Differenz der Quadrate zweier Zahlen a) durch die Summe, b) durch die Differenz dieser Zahlen dividiert? Prüfe die Richtigkeit für $a = 7$, $b = 3$.
17. $(16a^2 - 9):(4a + 3)$. 18. $(9z^2 - 49):(3z - 7)$.
19. $(4x^2 - 81y^2):(2x - 9y)$. 20. $(36a^2 - b^2):(6a + b)$.
21. $(64x^2 - 25):(8x + 5)$. 22. $(9y^2 - 49a^2):(3y - 7a)$.
23. $(24x^4 - 38a^2x^2 + 15a^4):(4x^2 - 3a^2)$.
Mache die Probe durch die Multiplication.
24. $(a^4 - 1):(a + 1)$. 25. $(x^5 - 1):(x - 1)$.
26. $(m^8 - 1):(m + 1)$. 27. $(m^7 - 1):(m - 1)$.
28. $(x^3 + x^2 - 2x - 8):(x - 2)$.
29. $(8x^2 - 22x^2 + 27x - 18):(2x - 3)$.
Mache die Probe für $x = 3$, für $x = -2$.
30. $(9y^2 - 4x^2 - 4x - 1):(3y - 2x - 1)$.
31. $(6a^4 + 9a^3 + 4a^2 + 5a + 4):(a^2 + 2a + 1)$.
Probe durch die Multiplication.
32. $(6x^3 - 15x^2 + 12x - 3):(x^2 - 2x + 1)$.
33. $(6 + 2a - 23a^2 + 49a^3 - 30a^4):(2 + 4a - 5a^2)$.
34. $(9x^4 - 16x^2 + 12x - 5):(3x^2 - 2x + 1)$.
35. $(16m^4 - 8m^2n^2 + n^4):(4m^2 + 4mn + n^2)$.
36. $(2a^4 + a^3b - 5a^2b^2 - ab^3 + 3b^4):(a^2 + 2ab + b^2)$.
37. Bestimme das Product $(5x^2 - 3x - 4)(2x^2 - 4x + 3)$ und mache die Probe durch die Division.
38. $(8p^6 + 27):(4p^4 - 6p^2 + 9)$.
39. $(a^4 + 4b^4):(a^2 - 2ab + 2b^2)$.
40. $(3a^4 - 11a^3 + 29a^2 - 27a + 30):(3a^2 - 2a + 5)$.
41. $(25 + 51a^2 - 6a^4 - 49a^6):(5 - 3a + 6a^2 - 7a^3)$.
Probe durch die Multiplication.
42. $(x^6 - y^6):(x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3)$. Berechne diesen Quotienten für $x = -3$ und $y = -2$.
43. $(1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5):(1 - 3a + 3a^2 - a^3)$.
Welchen Wert hat der Quotient, wenn $a = 2$ ist?

§. 24.

Zerlegung eines allgemeinen Ausdruckes in Factoren.

1. Die Zerlegung eines eingliedrigen Ausdruckes in seine Factoren ergibt sich unmittelbar aus der Bedeutung desselben. Z. B.

$$amx = a \,.\, m \,.\, x. \qquad a^2bc = a^2 \,.\, b \,.\, c^3.$$
$$12mn^2p = 3 \cdot 2^2 \,.\, m \,.\, n^2 \,.\, p.$$
$$14(a - b)(a + b) = 2 \,.\, 7 \,.\, (a - b) \,.\, (a + b).$$
$$6m(x^2 - y^2) = 2 \,.\, 3 \,.\, m \,.\, (x + y) \,.\, (x - y).$$

2. Ein **Polynom**, dessen alle Glieder ein gemeinsames Maß haben, wird in zwei Factoren zerlegt, indem man das gemeinsame Maß als den einen Factor heraushebt und als den andern Factor den Quotienten setzt, welcher aus der Division des gegebenen Polynoms durch jenes gemeinsame Maß hervorgeht. Z. B.

$$4ay - 5az = a(4y - 5z),$$
$$12x^3 - 9x^2 + 6x = 3x(4x^2 - 3x + 2).$$

3. Insbesondere ist

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b),$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b), \text{ und}$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Drücke diese drei Formeln mit Worten aus.

Aufgaben.

Zerlege in Factoren:

1. abc. **2.** $18mn$. **3.** $36xyz$.
4. a^2x^2. **5.** $15ab^2$. **6.** $27a^2y^3$.

Zerlege in zwei Factoren:

7. $15ab - 10ac$. **8.** $6a^2 - 21ab$.
9. $4x^3 - 8x^2 - 2x$. **10.** $15ax^3 + 5a^2x^2 - 20a^2x$.
11. $a^2 + 2a + 1$. **12.** $9x^2 + 12x + 4$.
13. $x^2 - 2x + 1$. **14.** $16a^2 - 24ab + 9b^2$.
15. $9a^2 - 4$. **16.** $4x^2 - 25y^2$.
17. $1 - 16a^2b^2$. **18.** $36a^2 - 9b^2$.

II. Rechnen mit gebrochenen allgemeinen Zahlen.

§. 25.

Für die Bruchrechnung mit allgemeinen Zahlen gelten dieselben Sätze, welche für das Rechnen mit besonderen Brüchen entwickelt wurden; es wird daher hier genügen, die Anwendung jener Sätze an Beispielen mit allgemeinen Bruchzahlen durchzuführen.

Nur eine Bemerkung hinsichtlich der gemischten Zahlen muss hier vorausgeschickt werden. Während bei gemischten besonderen Zahlen die ganze Zahl und der mit ihr verbundene Bruch immer dasselbe Vorzeichen haben, so dass z. B. $5\frac{3}{4} = 5 + \frac{3}{4}$ und $-5\frac{3}{4} = -(5 + \frac{3}{4}) = -5 - \frac{3}{4}$ ist, kann eine gemischte allgemeine Zahl eine der folgenden Formen haben:

$$a + \frac{m}{n},\ a - \frac{m}{n},\ -a + \frac{m}{n},\ -a - \frac{m}{n}.$$

§. 26.

Aufgaben über die Darstellung mehrerer Brüche mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner.

1. Es seien die Brüche $\frac{a}{2}$, $\frac{2a}{3}$, $\frac{3a}{5}$ auf den kleinsten gemeinsamen Nenner zu bringen.

Der kleinste gemeinsame Nenner ist $2.3.5 = 30$; man hat daher

$$30:2 = 15,\quad a \times 15 = 15a,\ \text{also}\ \frac{a}{2} = \frac{15a}{30};$$

$$30:3 = 10,\quad 2a \times 10 = 20a,\ \text{„}\ \frac{2a}{3} = \frac{20a}{30};$$

$$30:5 = 6,\quad 3a \times 6 = 18a,\ \text{„}\ \frac{3a}{5} = \frac{18a}{30}.$$

2. Bringe die Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{bd}$ auf den kleinsten gemeinsamen Nenner.

Da b und d als Factoren in bd erscheinen, so ist bd der kleinste gemeinsame Nenner, und man erhält:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd},\ \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd},\ \frac{e}{bd} = \frac{e}{bd}.$$

Stelle folgende Brüche mit dem kleinsten gemeinsamen Nenner dar:

3. $\frac{1}{a}, \frac{2}{a^2}, \frac{3}{a^3}$. 4. $\frac{1}{3}, \frac{a}{b}, \frac{3x}{4cd}$. 5. $\frac{m}{a+1}, \frac{n}{a-1}$.

6. $\frac{a+1}{a-1}, \frac{a^2+1}{a^2-1}$. 7. $\frac{x-1}{x+1}, \frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$.

8. $\frac{a}{x}, \frac{a+1}{x+1}, \frac{a-1}{x-1}$. 9. $\frac{x-a}{x+a}, \frac{x+a}{x-a}, \frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$.

§. 27.

Aufgaben über das Addieren der Brüche.

1. $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$. 2. $\frac{5x}{4} + \frac{3x}{4}$.

Wie werden Brüche mit gleichen Nennern addiert?

3. $\frac{x}{a} + \frac{y+z}{a}$. 4. $\frac{x+y}{2p} + \frac{x-y}{2p}$.

5. $\frac{3a}{a-1} + \frac{1-2a}{a-1}$. 6. $\frac{n+p}{3} + \frac{n-p+q}{3} + \frac{n-q}{3}$.

7. $a + \frac{m}{n} = \frac{an+m}{n}$. 8. $2a + \frac{3b}{a}$.

9. $y + \frac{x-y}{2}$. 10. $1 + \frac{m}{m+n}$.

Substituiere in 9. $x = -2$, $y = 3$.

11. $2x + \frac{3y^2}{5x}$. 12. $\frac{1-a^2}{a} + a$.

13. $1 + \frac{x-y}{x+y}$. 14. $\frac{a^2+x^2}{a-x} + a - x$.

15. $a - b + \frac{b^2}{a+b}$. 16. $a + \frac{x-a}{a+1} + \frac{ax-a^2}{a+1}$.

Substituiere in 16. $a = 2$, $x = 5$.

17. $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an+bm}{mn}$ 18. $\frac{a}{2} + \frac{a}{3}$.

19. $\frac{x-a}{2} + \frac{2x-a}{4}$. 20. $\frac{2x+3y}{2} + \frac{x-2y}{3}$.

21. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$. 22. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2}$.

23. $\frac{a-b}{b} + \frac{b}{a-b}$. 24. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$.

Mache in 24. die Probe für $a = 3$ und $b = -2$.

25. $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} + \frac{7x}{10}$. 26. $\frac{3m-2n}{m+2n} + \frac{3m+2n}{m-2a}$.

27. $\frac{xy+mn}{mn} + \frac{xy-np}{np}$. 28. $\frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{xz}$.

29. $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2} + \frac{x^2-2xy-y^2}{xy} + \frac{x^2-xy-y^2}{y^2}$.

30. $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} + \frac{x-1}{x+1}$. 31. $\frac{ax}{a^2-x^2} + \frac{a-x}{a+x} + \frac{a+x}{a-x}$.

32. $\left(\frac{a}{2} + \frac{2b}{3} + \frac{3c}{4}\right) + \left(\frac{4a}{5} + \frac{5b}{6} + \frac{6c}{7}\right)$.
Berechne diesen Ausdruck für $a = -5$, $b = 7$ und $c = 6$.

§. 28.

Aufgaben über das Subtrahieren der Brüche.

1. $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$.
2. $\frac{3x}{a} - \frac{2y}{a}$.

Wie werden Brüche mit gleichen Nennern von einander subtrahiert?

3. $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$.
4. $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$.

Drücke diese zwei Formeln mit Worten aus und prüfe ihre Richtigkeit für $a = 6$, $b = 5$; für $a = 15$, $b = 12$; für $a = 3 \cdot 8$, $b = 2 \cdot 7$.

5. $\frac{3m - 2n}{4} - \frac{m+n}{4}$.
6. $\frac{x+y}{2m} - \frac{x-y}{2m}$.
7. $\frac{3x}{x+1} - \frac{2x-1}{x+1}$.
8. $\frac{3x+y}{x-y} - \frac{x+2y}{x-y}$.
9. $a - \frac{m}{n} = \frac{an - m}{n}$.
10. $\frac{m}{n} - a$.
11. $1 - \frac{a+b}{a}$.
12. $a - \frac{a}{a+1}$.
13. $1 - \frac{x+y}{x-y}$.
14. $\frac{1 + 2x^2}{x} - 3x$.

Berechne 13. für $x = 5$ und $y = -4$.

15. $x - y - \frac{x+y}{2}$.
16. $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4ab} - 1$.
17. $\frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an - bm}{mn}$
18. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3}$.
19. $\frac{5b}{6} - \frac{3b}{4}$.
20. $\frac{4a - b}{3} - \frac{3a - 2b}{4}$.
21. $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$.
22. $\frac{x+y}{x-y} - \frac{xy}{x^2 - y^2}$.
23. $\frac{4b - 5x}{3b - 4x} - \frac{2b + 5x}{3b - 4x}$.
24. $\frac{a^2 + 1}{a^2 - 2a + 1} - \frac{a+1}{a-1}$.
25. $\frac{3m}{2x} + \frac{5n}{3y} - \frac{4p}{3xy}$.
26. $\frac{2a}{5} + \frac{4a - 5}{10} - \frac{12 + 20a}{25}$.

Berechne 26. für $a = -3$.

27. $\frac{x}{y^2 z} - \frac{y}{xz^2} + \frac{z}{x^2 y}$.
28. $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.
29. $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} - \frac{a-x}{a+x}$.

Berechne diesen Ausdruck für $a = 5$ und $x = 3$.

30. $\left(\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2x^2}{15} + \frac{x}{5} - \frac{3}{8}\right)$.

§. 29.

Aufgaben über das Multiplicieren der Brüche.

1. $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$. Wie wird ein Bruch mit einer Zahl multipliciert?
2. $\frac{a}{bm} \cdot m = \frac{a}{b}$. Wie lautet der entsprechende Lehrsatz?
3. $\frac{a}{b} \cdot b = a$. In Worten?
4. $\frac{xy}{6z} \cdot 3z$.
5. $\frac{2a^2}{b} \cdot 5b$.
6. $\frac{2abx}{3m} \cdot -5c$.
7. $-\frac{3ab}{4x} \cdot 5x^2$.
8. $\frac{4a^2x^2}{3b^2y^2} \cdot 9y^2$.
9. $5x^2y^2 \cdot \frac{a^2}{x^2y^2}$.
10. $\frac{1}{x-y} \cdot (x^2 - y^2)$.
11. $\left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot 3a$.
12. $\left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right) \cdot 4x^3$.

Berechne 12. für $x = -2$.

13. $\left(x - y + \frac{x^2 + y^2}{x + y}\right) \cdot (x + y)$.

Mache die Probe durch die Substitution $x = 6$ und $y = -4$.

14. $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$. Wie werden zwei Brüche mit einander multipliciert?
15. $\frac{2a}{3} \cdot \frac{9b}{4}$.
16. $\frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{y}$.
17. $\frac{3ab}{4c^2} \cdot \frac{2c}{3a}$.
18. $\frac{2a}{3m} \cdot \frac{2b}{4n} \cdot -\frac{4c}{3p}$.
19. $\frac{5x}{4a} \cdot -\frac{3y}{7b} \cdot \frac{2a}{5c} \cdot -\frac{7z}{8d}$.
20. $\left(1 + \frac{x}{y}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{y}\right)$.
21. $\frac{m+n}{2} \cdot \frac{m-n}{a+b}$.
22. $\left(a + \frac{x}{b}\right)\left(a - \frac{x}{b}\right)$.
23. $\frac{x+a}{y-b} \cdot \frac{x-a}{y+b}$.
24. $\left(2a + \frac{b}{3c}\right)\left(\frac{2b}{5c} - a\right)$
25. $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \frac{a}{a+b}$.
26. $\left(1 + \frac{m}{n}\right)\left(1 - \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m}{n-m}$.
27. $\left(\frac{a+b}{a-b} + 1\right)\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right)$.
28. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a} + \frac{1}{4}\right)$.

Mache die Probe für $x = 3$ und $a = 2$.

29. $\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} + \frac{m^2}{4}\right)\left(1 - \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} - \frac{m^3}{4}\right)$.

Probe durch Vertauschung der Factoren.

§. 30.

Aufgaben über das Dividieren der Brüche.

1. $\frac{am}{b} : m = \frac{a}{b}$.
2. $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}$.

Wie lauten die den Formeln 1. und 2. entsprechenden Lehrsätze.

3. $\frac{a}{b} : a.$ **4.** $\frac{a}{b} : b.$

5. $\frac{6a^2}{b} : 3a.$ **6.** $\frac{15bc}{14ad} : -3c.$

7. $\frac{3ab}{c} : 4d = \frac{3ab}{4cd}.$ **8.** $-\frac{5ax^2}{6y} : 6y.$

9. $\frac{12mpx}{5nq} : -3x.$ **10.** $\frac{3ax^2}{4by^2} : 6b^2y.$

11. $\left(x + \frac{xy}{x-y}\right) : 2x.$ **12.** $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : (x + y).$

13. $a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$ In Worten? **14.** $a : \frac{1}{a}.$

15. $3 : \frac{3x}{y}.$ **16.** $3 : \frac{x}{3y}.$

17. $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}.$ **18.** $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m:n}{n:q}.$

Welche Regeln ergeben sich aus 17. und 18.?

19. $\frac{4ax^2}{b^2} : \frac{x}{b}.$ **20.** $\frac{1-a^2}{2} : \frac{1+a}{3}.$

21. $\frac{2ax}{3by} : -\frac{5mx}{6ny}.$ **22.** $\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2} : \frac{x+y}{a-b}.$

Berechne 22. für $x = -2$, $y = 3$, $a = 4$ und $b = -5$.

23. $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \left(1 - \frac{b}{a}\right).$ **24.** $\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) : \frac{a^2-b^2}{ab}.$

25. $\left[(x^2 - y^2) : \frac{x+y}{a}\right] + \left[(x^2 - y^2) : \frac{x-y}{a}\right].$

Mache die Probe für $x = 5$, $y = 4$, $a = 2$.

26. $\frac{6(x-1)}{5(x+1)} \cdot \frac{3(n-x)}{5(x-1)} : \frac{9(n-x)}{25(x+1)}.$

27. $\left(\frac{a^2}{3} + \frac{a}{10} - \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{2a}{3} - \frac{4}{5}\right).$

28. $\left(\frac{6x^3}{m^3} - \frac{7x^2}{m^2} - \frac{6x}{m} - 1\right) : \left(\frac{2x^2}{m^2} - \frac{3x}{m} - 1\right).$

Probe durch die Multiplication.

III. Quadrieren und Ausziehen der Quadratwurzel.

1. Quadrieren dekadischer Zahlen.

§. 31.

Eine Zahl quadrieren oder zum Quadrat erheben heißt, sie mit sich selbst multiplicieren.

Z. B. $305^2 = 305 \times 305 = 93025,$

$$1 \cdot 25^2 = 1 \cdot 25 \times 1 \cdot 25 = 1 \cdot 5625,$$

$$(\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{9}.$$

Die Quadrate der einziffrigen Zahlen sind:

$1^2 = 1,$ $4^2 = 16,$ $7^2 = 49,$
$2^2 = 4,$ $5^2 = 25,$ $8^2 = 64,$
$3^2 = 9,$ $6^2 = 36,$ $9^2 = 81.$

Um später das Ausziehen der Quadratwurzel (§. 35) leichter begründen zu können, soll hier für das Quadrieren einer Zahl noch ein zweites Verfahren aufgestellt werden.

§. 32.

Quadrieren einer dekadischen ganzen Zahl.

Jede dekadische ganze Zahl kann als eine Summe von Zehnern und Einern betrachtet werden; z. B.

$$24 = 20 + 4 = 2.10 + 4,$$

$$358 = 350 + 8 = 35.10 + 8 \text{ u. s. w.}$$

Ist nun eine aus Zehnern und Einern bestehende Zahl $a.10 + b$, wo a die Zahl der Zehner, b die Zahl der Einer bedeutet, zum Quadrat zu erheben, so hat man (Siehe §. 18. Beispiel 14.)

$$(a.10 + b)^2 = a^2.100 + 2ab.10 + b^2.$$

Z. B. $37^2 = 3^2.100 + 2.3.7.10 + 7^2.$

Das Quadrat einer aus Zehnern und Einern bestehenden Zahl enthält das Quadrat der Zehner, das doppelte Product aus den Zehnern und Einern, und das Quadrat der Einer.

Beachtet man, daſs das Quadrat der Zehner Hunderter und das doppelte Product aus den Zehnern und Einern Zehner bedeutet, so kann man die drei Bestandtheile des Quadrates mit Weglassung der Nullen untereinander schreiben, indem man jeden folgenden Bestandtheil um eine Stelle weiter nach rechts hinausrückt; also

$$\begin{array}{rl} \underline{37^2 =} & \\ 3^2 \;.\;.\;. & 9 \\ 2.3.7 \;.\;.\;. & 42 \\ 7^2 \;.\;.\;. & \underline{49} \\ & = 1369. \end{array}$$

Beim Kopfrechnen beginnt man die Rechnung bei den Einern und schreibt das Quadrat unmittelbar hin, als

$$37^2 = 1369,$$

indem man spricht: 7mal 7 ist 49 (9 angeschrieben, bleibt 4), 3mal 7 ist 21, doppelt genommen ist 42, und 4 ist 46 (6 angeschrieben, bleibt 4), 3mal 3 ist 9, und 4 ist 13.

Kürzer gestaltet sich die Entwicklung des Quadrates, wenn man, anstatt das doppelte Product der Zehner und Einer und das Quadrat der Einer zu bilden, die Einer mit der aus dem Doppelten der Zehner und den diesem rechts angefügten Einern gebildeten Zahl multipliciert, und das erhaltene Product mit Beachtung des Stellenwertes unter dem Quadrate der Zehner um zwei Stellen nach rechts hinausrückt. Das frühere Beispiel würde sich hiernach so stellen:

$$\begin{array}{rl} \underline{37^2 =} & \\ 3^2 \;.\;.\;. & 9 \\ 67.7 \;.\;.\;. & \underline{469} \\ & = 1369. \end{array}$$

Ist eine dreiziffrige Zahl 418 zum Quadrat zu erheben, so erhält man, da $418 = 410 + 8$ und $41 = 40 + 1$ ist,

für 418^2 die Bestandtheile 41^2 und $828 . 8$,
" 41^2 " " 4^2 und $81 . 1$,
somit " 418^2 " " 4^2, $81 . 1$ und $828 . 8$;

man hat also, wenn die Bestandtheile mit Rücksichtnahme auf den Stellenwert untereinander gesetzt werden,

$$\begin{array}{rl} \underline{418^2 =} & \\ 4^2 \;.\;.\;. & 16 \\ 81.1 \;.\;.\;. & 81 \\ 828.8 \;.\;.\;. & \underline{6624} \\ & = 174724. \end{array}$$

Auf gleiche Weise erhält man

$2593^2 =$

2^2 . . .	4			
45 . 5 . . .	2	25		
509 . 9 . . .		45	81	
5183 . 3 . . .		1	55	49
	= 6	72	36	49

Hieraus ergibt sich für das Quadrat einer dekadischen Zahl folgendes Bildungsgesetz:

Die höchste Ziffer der Wurzel gibt ihr eigenes Quadrat; jede folgende Ziffer liefert ein Partialproduct, welches erhalten wird, indem man die Ziffer mit der Zahl multipliciert, welche aus dem Doppelten der vorangehenden Zahl und der diesem rechts angehängten Ziffer besteht. Dieses Theilproduct wird um zwei Stellen nach rechts hinausgerückt.

Da die höchste Ziffer ihr eigenes Quadrat, das ein- oder zweiziffrig ist, gibt, und jede folgende Ziffer einen Zuwachs von zwei niedrigeren Stellen hervorbringt, so enthält das Quadrat einer Zahl entweder doppelt so viele Ziffern als die Zahl oder um eine Ziffer weniger. Theilt man daher das Quadrat einer Zahl von den Einern angefangen in Abtheilungen von je zwei Ziffern, wobei die erste Abtheilung links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die Zahl Ziffern enthält.

Aufgaben.

1. Quadriere folgende zweiziffrige Zahlen so, dass du das jedesmalige Quadrat unmittelbar hinschreibst:

a)	b)	c)	d)	e)
13	31	45	64	81
21	36	48	67	84
23	39	52	73	95
29	41	56	79	98.

2. 516^2. **3.** 721^2. **4.** 298^2. **5.** 807^2.
6. 275^2. **7.** 860^2. **8.** 333^2. **9.** 545^2.
10. 2345^2. **11.** 8132^2. **12.** 7906^2.
13. 6793^2. **14.** 5084^2. **15.** 3008^2.
16. 52195^2. **17.** 19776^2. **18.** 83052^2.

§. 33.

Quadrieren eines Decimal- und eines gemeinen Bruches.

1. Decimalbrüche werden ebenso quadriert wie ganze Zahlen; nur muss dabei beachtet werden, dass jede Decimalziffer der gegebenen

Zahl im Quadrate einen Zuwachs von zwei Decimalstellen hervorbringt, und dass daher das Quadrat eines Decimalbruches doppelt so viel Decimalziffern enthalten muss, als die quadrierte Zahl. Z. B.

$5\cdot4^2 =$	$1\cdot78^2 =$
5^2 . . . 25	1^2 . . . 1
104.4. . . 416	27.7. . . 189
$= 29\cdot16$	348.8. . . 2784
	$3\cdot1684$

2. Ein gemeiner Bruch wird zum Quadrat erhoben, indem man das Quadrat des Zählers durch das Quadrat des Nenners dividiert. Z. B.

$$\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7^2}{8^3}.$$

Aufgaben.

1. Bilde durch unmittelbares Anschreiben die Quadrate folgender Zahlen:

a)	b)	c)	d)
$1\cdot7$	$4\cdot2$	$5\cdot9$	$0\cdot82$
$3\cdot2$	$0\cdot47$	$6\cdot6$	$0\cdot87$
$0\cdot35$	$0\cdot51$	$0\cdot74$	$0\cdot093$.

2. $25\cdot8^2$. **3.** $45\cdot2^2$. **4.** $1\cdot39^2$. **5.** $6\cdot07^2$.
6. $9\cdot24^2$. **7.** $0\cdot815^2$. **8.** $0\cdot603^2$. **9.** $0\cdot0514^2$.
10. $714\cdot8^2$. **11.** $56\cdot39^2$. **12.** $3\cdot751^2$. **13.** $1\cdot308^2$.
14. $0\cdot4226^2$. **15.** $723\cdot75^2$. **16.** $69\cdot084^2$. **17.** $3\cdot4567^2$.
18. $\left(\frac{25}{43}\right)^2$. **19.** $\left(5\frac{19}{63}\right)^2$. **20.** $\left(\frac{271}{382}\right)^2$. **21.** $\left(13\frac{504}{575}\right)^2$.

2. Ausziehen der Quadratwurzel aus dekadischen Zahlen.

§. 34.

Aus einer Zahl die Quadratwurzel ausziehen heißt, eine Zahl suchen, welche mit sich selbst multipliciert die gegebene Zahl zum Producte gibt. Die Quadratwurzel aus einer Zahl wird durch das vorgesetzte Wurzelzeichen $\sqrt{}$ angezeigt.

Z. B. Aus 64 die Quadratwurzel ausziehen heißt, eine Zahl suchen, welche mit sich selbst multipliciert 64 gibt; diese Zahl ist 8, denn $8 \times 8 = 64$. Man schreibt $\sqrt{64} = 8$ und liest: Quadratwurzel aus 64 ist gleich 8.

Die einziffrigen Quadratwurzeln sind:

$\sqrt{1} = 1$,	$\sqrt{16} = 4$,	$\sqrt{49} = 7$,
$\sqrt{4} = 2$,	$\sqrt{25} = 5$,	$\sqrt{64} = 8$,
$\sqrt{9} = 3$,	$\sqrt{36} = 6$,	$\sqrt{81} = 9$.

§. 35.

Ausziehen der Quadratwurzel aus dekadischen ganzen Zahlen.

Das Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel ist die Umkehrung der oben in §. 32 dargestellten Erhebung zum Quadrate. So wie beim Quadrieren die aus den Wurzelziffern gebildeten Bestandtheile des Quadrates in diesem zusammengesetzt wurden, ebenso müssen dieselben beim Ausziehen der Quadratwurzel wieder auseinander genommen werden.

Beispiele und Aufgaben.

1. Quadriere die Zahl 53 und ziehe dann aus dem erhaltenen Quadrate die Quadratwurzel aus.

53^2		$\sqrt{28\vert 09} = 53$
5^2 . . .	25	25
		309 : 103
103.3. . .	309	309
	2809	0

Beim Ausziehen der Quadratwurzel aus 2809 ist zu beachten, dass die Hunderter im Quadrate das Quadrat der Zehner der Wurzel enthalten; zieht man also aus 28 die Quadratwurzel aus, so erhält man die Ziffer 5 dieser Zehner. Wird dann das Quadrat 25 der Zehner von der gegebenen Quadratzahl subtrahiert, so enthalten die Zehner des Restes 309 das Product aus dem Doppelten der Zehner der Wurzel und den Einern; dividiert man daher die Zehner 30 des Restes durch das Doppelte 10 der Zehner der Wurzel, so erhält man die Ziffer 3 der Einer der Wurzel. Wird nun der durch die Einer der Wurzel im Quadrate entstandene Zuwachs, d. i. das Product aus den Einern 3 mit sich selbst und mit dem Doppelten 10 der Zehner der Wurzel subtrahiert, so bleibt kein Rest übrig. Die Quadratwurzel aus 2809 ist also 53.

Quadriere ebenso die folgenden Zahlen und ziehe aus dem jedesmaligen Quadrate die Quadratwurzel aus:

2. 28. **3.** 37. **4.** 46. **5.** 58.
6. 61. **7.** 65. **8.** 75. **9.** 94.

Suche folgende Quadratwurzeln und mache jedesmal die Probe, indem du die gefundene Wurzel zum Quadrate erhebst und zu demselben den beim Wurzelausziehen etwa gebliebenen Rest addierst:

10. $\sqrt{324}$. **11.** $\sqrt{676}$. **12.** $\sqrt{3025}$.
13. $\sqrt{3844}$. **14.** $\sqrt{1849}$. **15.** $\sqrt{484}$.

16. $\sqrt{8281}$. **17.** $\sqrt{9409}$. **18.** $\sqrt{2427}$.
19. $\sqrt{3555}$. **20.** $\sqrt{7021}$. **21.** $\sqrt{8903}$.

22. Quadriere die dreiziffrige Zahl 719 und ziehe aus dem Quadrate die Quadratwurzel aus.

719^2		$\sqrt{51\vert 69\vert 61} = 719$	
7^2 . . .	49	49	
		269	: 141
141.1 . . .	141	141	
		12861	: 1429
1429.9 . . .	12861	12861	
	516961	0	

Auch hier erhält man die Zehner der Wurzel, indem man aus den Hunderten im Quadrate die Quadratwurzel auszieht; man bestimmt also zuerst die Quadratwurzel aus der vierziffrigen Zahl 5169 der Hunderter nach dem in den früheren Aufgaben angewendeten Verfahren; dadurch ergeben sich in der Wurzel 71 Zehner und als Rest bleibt 12861 übrig. Die Einer der Wurzel werden, wie früher, gefunden, indem man die Zehner des Restes durch das Doppelte der Zehner der Wurzel, d. i. 1286 durch 142, dividiert.

Bei größerer Übung kann man das Product aus der jedesmaligen Ziffer der Wurzel mit sich selbst und dem Doppelten der ihr vorangehenden Zahl, ohne es anzuschreiben, sogleich während des Multiplicierens selbst subtrahieren. Die frühere Rechnung würde dann so stehen:

$$\sqrt{51|69|61} = 719$$
269 : 141
12861 : 1429
0

Quadriere folgende Zahlen und ziehe aus dem jedesmaligen Quadrate die Quadratwurzel aus:

23. 325. **24.** 291. **25.** 449. **26.** 537.
27. 184. **28.** 673. **29.** 952. **30.** 706.

Suche folgende Quadratwurzeln und mache die Probe durch das Quadrieren der jedesmaligen Wurzel:

31. $\sqrt{80089}$. **32.** $\sqrt{37636}$. **33.** $\sqrt{94864}$.
34. $\sqrt{502681}$. **35.** $\sqrt{820836}$. **36.** $\sqrt{116281}$.
37. $\sqrt{404496}$. **38.** $\sqrt{561001}$. **39.** $\sqrt{781456}$.
40. $\sqrt{5943844}$. **41.** $\sqrt{11943936}$.
42. $\sqrt{1971216}$. **43.** $\sqrt{63250209}$.
44. $\sqrt{1655025124}$. **45.** $\sqrt{6449053636}$.

§. 36.

Ausziehen der Quadratwurzel aus Decimal- und gemeinen Brüchen.

1. Aus einem Decimalbruche wird die Quadratwurzel auf gleiche Weise wie aus einer ganzen Zahl ausgezogen; nur muss man rücksichtlich des Stellenwertes der Wurzelziffern beachten, dass die Abtheilungen des Quadrates, welche Decimalen enthalten, auch in der Wurzel Decimalziffern liefern. Z. B.

$\sqrt{38\cdot44} = 6\cdot2$
244 : 122

$\sqrt{6\cdot40|09} = 2\cdot53$
240 : 45
1509 : 503
0

2. Um aus einem gemeinen Bruche die Quadratwurzel auszuziehen, zieht man sie aus Zähler und Nenner aus, nachdem man vorher, wenn der Nenner des Bruches kein Quadrat ist, den Bruch derart erweitert hat, dass der Nenner ein Quadrat ist; oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch und zieht aus diesem die Quadratwurzel aus. Z. B.

$$\sqrt{\frac{81}{25}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}, \text{ oder } \frac{81}{25} = 81 : 25 = 3\cdot24$$

$\sqrt{3\cdot24} = 1\cdot8$
224 : 28
0

Aufgaben.

Erhebe folgende Zahlen zum Quadrat und ziehe aus diesem die Quadratwurzel aus:

1. 8·3. **2.** 7·1. **3.** 0·19. **4.** 0·055.
5. 41·8. **6.** 5·26. **7.** 0·387. **8.** 0·904.

Bestimme folgende Quadratwurzeln und mache die Probe durch das Quadrieren der Wurzel:

9. $\sqrt{8\cdot41}$. **10.** $\sqrt{0\cdot4761}$. **11.** $\sqrt{50\cdot41}$.
12. $\sqrt{2\cdot1904}$. **13.** $\sqrt{948\cdot64}$. **14.** $\sqrt{55\cdot6516}$.
15. $\sqrt{0\cdot037636}$. **16.** $\sqrt{1776\cdot6225}$.
17. $\sqrt{32\cdot524209}$. **18.** $\sqrt{144\cdot144036}$.
19. $\sqrt{0\cdot5478220225}$. **20.** $\sqrt{0\cdot0100020001}$.
21. $\sqrt{7\cdot38} = 2\cdot716\ldots$
338 : 47
900 : 541
35900 : 5426
3344

Bleibt beim Wurzelausziehen am Ende ein Rest, so ist die vorgelegte Zahl kein vollständiges Quadrat; die Wurzel ist in diesem Falle nicht genau, sie kann jedoch näherungsweise mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, indem man sich nämlich der vorgelegten Zahl beliebig viele Decimalabtheilungen von Nullen beigefügt denkt und dem jedesmaligen Reste eine Abtheilung von zwei Nullen anhängt, übrigens aber wie vorher verfährt.

Dasselbe Verfahren kann auch bei ganzen Zahlen angewendet werden, wenn beim Wurzelausziehen ein Rest übrig bleibt.

Wenn aus einem Decimalbruche, welcher eine ungerade Anzahl Decimalen enthält, die Quadratwurzel auszuziehen ist, muss man dem Decimalbruche zunächst eine Null anhängen.

22. $\sqrt{10}$. **23.** $\sqrt{321}$. **24.** $\sqrt{4{\cdot}52}$.
25. $\sqrt{0{\cdot}00025}$. **26.** $\sqrt{0{\cdot}35824}$. **27.** $\sqrt{57{\cdot}43178}$.

28. Bestimme $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ für $b = 1{\cdot}34$ und $c = 1{\cdot}85$.

29. Bestimme $f = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$ für $a = 38{\cdot}3$, $b = 32{\cdot}5$, $c = 49{\cdot}4$ und $s = \frac{a + b + c}{2}$.

30. $\sqrt{\frac{169}{225}}$. **31.** $\sqrt{4\frac{177}{376}}$. **32.** $\sqrt{355\frac{214}{225}}$.
33. $\sqrt{\frac{7}{8}}$. **34.** $\sqrt{\frac{19}{24}}$. **35.** $\sqrt{57\frac{119}{235}}$.

3. Quadrieren algebraischer Ausdrücke und Ausziehen der Quadratwurzel aus denselben.

§. 37.

1. a) Es ist

$$(ab)^2 = ab.ab = a^2b^2; \text{ d. h.}$$

Ein Product wird zum Quadrat erhoben, indem man jeden Factor zum Quadrat erhebt und die Resultate mit einander multipliciert.

b) Ferner ist

$$(a^2)^2 = a^2.a^2 = a^4,$$
$$(a^3)^2 = a^3.a^3 = a^6; \text{ d. h.}$$

Eine Potenz wird zum Quadrat erhoben, indem man die Basis mit dem doppelten Exponenten potenziert.

c) Um das Quadrat des Binoms $a + b$ zu erhalten, muss man dieses mit $a + b$ multiplicieren; man findet dadurch

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \text{ d. h.}$$

Das Quadrat eines Binoms ist gleich der Summe aus dem Quadrate des ersten Gliedes, dem doppelten Producte beider Glieder und dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Die beiden Quadrate sind immer positiv, das Zeichen des doppelten Productes ist $+$ oder $-$, je nachdem die beiden Glieder des gegebenen Binoms gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Um ein Trinom $a + b + c$ zum Quadrate zu erheben, sehe man dasselbe als ein Binom an, indem man $a + b$ als das erste und c als das zweite Glied annimmt; es ist also

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b).c + c^2.$$

Ebenso erhält man

$$(a + b + c + d)^2 = [(a + b + c) + d]^2$$
$$= (a + b + c)^2 + 2(a + b + c).d + d^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b).c + c^2$$
$$+ 2(a + b + c).d + d^2.$$

Hieraus ergibt sich für die **Bildung des Quadrates eines mehrgliedrigen Ausdruckes** folgendes Gesetz:

Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes liefert sein eigenes Quadrat; jedes folgende Glied gibt zwei Bestandtheile, das Product aus der doppelten Summe der ihm vorangehenden Glieder mit diesem Gliede und das eigene Quadrat. Alle diese Bestandtheile werden addiert.

2. a) Es ist

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}; \text{ denn } (\sqrt{a}.\sqrt{b})^2 = a.b.$$

Aus einem Producte wird die Quadratwurzel ausgezogen, indem man sie aus jedem Factor auszieht und die Resultate mit einander multipliciert.

b) Ferner ist

$$\sqrt{a^2} = a, \text{ denn } (a)^2 = a^2;$$
$$\sqrt{a^4} = a^2, \text{ denn } (a^2)^2 = a^4.$$

Aus einer Potenz wird die Quadratwurzel ausgezogen, indem man die Basis mit dem halben Exponenten potenziert.

c) Nach §. 36. 2 ist

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$
$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{2},$$
$$\sqrt{\frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \quad \sqrt{\frac{f}{\pi}} = \sqrt{\frac{f\pi}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{f\pi}}{\pi}.$$

d) **Das Ausziehen der Quadratwurzel aus einem geordneten mehrgliedrigen Ausdrucke** beruht auf der Umkehrung des beim Quadrieren angewendeten Verfahrens. Z. B.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{4a^2 + 12ab + 9b^2} = 2a + 3b \\
-4a^2 \\
\hline
\qquad\quad + 12ab + 9b^2 \\
\qquad\quad + 12ab + 9b^2 \\
\qquad\quad\ \ - \qquad\ - \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes ist das Quadrat des ersten Gliedes der Wurzel; man erhält also das erste Glied der Wurzel, indem man aus dem ersten Gliede im Quadrate die Quadratwurzel auszieht; $\sqrt{4a^2} = 2a$. Das Quadrat des ersten Wurzelgliedes $2a$, nämlich $4a^2$, wird subtrahiert.

Das erste Glied des Restes $+ 12ab + 9b^2$ enthält das Product aus dem doppelten ersten Wurzelgliede und dem zweiten Gliede der Wurzel. Dividiert man daher das erste Glied des Restes durch die doppelte bereits gefundene Wurzel, so erhält man das zweite Glied der Wurzel: $12ab : 4a = 3b$. Die durch dieses Glied $3b$ der Wurzel gelieferten Bestandtheile des Quadrates, nämlich $12ab + 9b^2$, werden gebildet und subtrahiert.

Aufgaben.

1. $\sqrt{36a^2b^2}$. 2. $2\sqrt{75} + 7\sqrt{48} - 5\sqrt{12}$. 3. $\sqrt{\frac{25b^2}{a}}$.

Berechne

4. $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ für $a = 10$ auf 2 Decimalstellen.

5. $\sqrt{\frac{16a^2}{3}}$. 6. $\sqrt{25a^3b} - \sqrt{16ab^3}$.

7. Erhebe $5x - 2y$ zum Quadrate und ziehe dann aus diesem die Quadratwurzel aus.

Entwickle folgende Quadrate und ziehe aus dem jedesmaligen Resultate die Quadratwurzel aus:

8. $(4x - y)^2$. 9. $(a^2 + b^2)^2$. 10. $(x^2 - 2y^2)^2$.

11. $(x + 2y - 3z)^2$. 12. $(a - 2b + 3c - d)^2$.

Bestimme folgende Quadratwurzeln und mache die Probe, indem du die gefundene Wurzel zum Quadrate erhebst:

13. $\sqrt{x^2 - 6xy + 9y^2}$. 14. $\sqrt{16a^4 - 8a^2b^2 + b^4}$.

15. $\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2 + 6ac - 12bc + 9c^2}$.

16. $\sqrt{x^4 + 6x^3 - x^2 - 30x + 25}$.

17. $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2 - 2a + 2b - 2c + 1}$.

IV. Rechnen mit unvollständigen Zahlen.

§. 38.

Eine ganze Zahl oder ein Decimalbruch heißen vollständig, wenn alle Ziffern derselben genau gegeben sind; dagegen unvollständig, wenn nur die Ziffern an den höheren Stellen in Betracht gezogen werden und die folgenden Ziffern entweder unbekannt sind, oder als entbehrlich mit Absicht unbeachtet bleiben. Alle durch Messung gewonnenen Zahlen müssen theils wegen der Unvollkommenheit unserer Sinne und der Messinstrumente, theils wegen der oft unvermeidlichen Ungenauigkeit der Messung selbst als unvollständige angesehen werden. Dass ein Decimalbruch unvollständig ist, wird durch angehängte Punkte angezeigt, z. B. 3·14..; bei unvollständigen ganzen Zahlen können die unbekannten Stellen durch kleine Nullen ersichtlich gemacht werden, z. B. 1283ooo.

Einem vollständigen Decimalbruche kann man rechts Nullen anhängen, bei einem unvollständigen darf dies nicht geschehen.

Bei jeder unvollständigen, durch Messung gewonnenen Zahl wird angenommen, dass der Fehler kleiner ist als eine halbe Einheit der niedrigsten angegebenen Stelle.

Wollte man z. B. die Länge einer Schulbank mit einem in Centimeter getheilten Maßstabe messen und fände man diese gleich 1 *m* 92 *cm* und einem kleinen Stückchen, so wird man, wenn letzteres kleiner als $\frac{1}{2}$ *cm* ist, es vernachlässigen, wenn es aber größer als $\frac{1}{2}$ *cm* ist, als 1 *cm* annehmen, so dass man im ersteren Falle 1·92.. *m*, im letzteren 1·93.. *m* als Maßzahl für die Länge der Bank erhält. In beiden Fällen ist also der Fehler der gewonnenen Zahl kleiner als 0·005 *m* und zwar im ersteren Falle positiv, im letzteren negativ.

Sowohl eine vollständige als eine unvollständige Zahl kann, wenn eine geringere Genauigkeit genügt, abgekürzt werden, indem man von ihr nur soviel höhere Stellen behält, als das Bedürfnis der Rechnung erfordert. Jede abgekürzte Zahl ist eine unvollständige Zahl und wird wie diese bezeichnet. Damit auch bei der abgekürzten Zahl der Fehler kleiner sei als eine halbe Einheit der niedrigsten beibehaltenen Stelle, muss man beim Abkürzen die letzte beibehaltene Ziffer corrigieren, d. h. um 1 erhöhen, wenn die erste wegzulassende Ziffer 5 oder größer als 5 ist, dagegen **ungeändert** lassen, wenn die erste wegzulassende Ziffer kleiner als 5 ist. So setzt man, wenn auf 3 Decimalstellen abgekürzt wird, 9·873.. statt 9·87294, und 4·016.. statt 4·01647.

Von zwei unvollständigen Decimalzahlen heißt diejenige die **genauere**, welche in Einheiten ihrer niedrigsten Stelle ausgedrückt eine größere Gesammtzahl dieser Einheiten darstellt. So sind z. B. die Zahlen 12·7.. und 0·127.. gleich genau, da jede 127 Einheiten ihrer niedrigsten Stelle enthält; dagegen ist 4·238.. genauer als 8·79.., da 4238 größer als 879 ist. Eine vollständige Decimalzahl ist genauer als jede unvollständige.

Aufgaben.

1. Welcher Unterschied findet zwischen den Angaben a) 5·324 und 5·324.., b) zwischen 580000 und 580ooo statt?
2. Wie groß ist der Fehler, wenn man statt 0·236782 a) 0·2367.., b) 0·2368.. setzt? Welcher Fehler ist kleiner?
3. Kürze folgende Decimalzahlen:
   a) 0·6034, 3·49712, 2·88747, 12·317162;
   b) 5·0468, 2·17392, 9·25866, 0·0735
   auf 3 Decimalstellen unter Vornahme der eventuell nothwendigen Correctur ab und gib jedesmal auch den Fehler an.
4. Ebenso folgende Decimalzahlen:
   a) 6·3854, 39·7328, 5·3406, $0.\dot{6}$, $0{\cdot}\dot{6}\dot{3}$;
   b) 1·1977, 5·08276, 3·81549, 0·999995.
5. Kürze die Ludolphische Zahl $\pi = 3{\cdot}14159265$ auf 2, 3, 4, 5, 6 Decimalstellen ab.
6. Bestimme folgende Brüche auf 5 Decimalstellen möglichst genau:
   $\frac{15}{28}$, $\frac{382}{207}$, $\frac{41}{129}$, $\frac{293}{563}$.
7. Kürze die Zahl 3·15784 *km* so weit ab, dass der Fehler a) kleiner als $^1/_2$ *m*, b) kleiner als $^1/_2$ *dm* wird.
8. Ordne nach dem Grade der Genauigkeit folgende unvollständige Zahlen:
   0·0372.., 2·578.., 4·23.., 6·635.., 57·48, 81·50.., 509ooo.

1. Abgekürzte Addition und Subtraction unvollständiger Zahlen.

§. 39.

Beim Rechnen mit unvollständigen Zahlen kann auch im Resultate nur ein bestimmter Grad von Genauigkeit erreicht werden. Man zieht daher, um dabei jede überflüssige Arbeit zu vermeiden, nur solche

Ziffern in Rechnung, welche auf das angestrebte Resultat einen Einfluss haben.

Kommen periodische Decimalbrüche vor, so werden so viele Ziffern der Periode in Anspruch genommen, als die Genauigkeit der Rechnung verlangt.

1. Um die Summe mehrerer unvollständiger Decimalbrüche mit erreichbarer Genauigkeit zu erhalten, kürze man alle Summanden, wenn sie nicht schon mit derselben Stelle abbrechen, auf so viele Stellen ab, als ihrer in jedem Summanden verbürgt vorkommen, und verrichte dann die Addition. Der Fehler der Summe ist kleiner als so viele halbe Einheiten der niedrigsten Stelle, als Summanden sind; es ist sonach, wenn nicht mehr als 10 Summanden vorkommen, höchstens die niedrigste Stelle nicht verbürgt. Hätte man z. B.

0·46728..
+ 14·63..
+ 239·768..

zu berechnen, so wäre es zwecklos, diese Summe auf mehr als zwei Decimalstellen zu entwickeln, da die 3. Decimalstelle des 2. Summanden nicht mehr bekannt ist. In diesem Falle wird man also addieren:

0·47..
14·63..
239·77..
254·87..

und der Fehler dieser Summe ist kleiner als 0·03, oder die Fehlergrenze dieser Summe beträgt 0·03.

Z. B. Bestimme mit erreichbarer Genauigkeit

a) 5·315.. + 3·096.. + 0·844.. + 12·367..

b) 3·142.. + 6·1378.. + 5·24183 + $0{\cdot}\dot{3}\dot{6}$..

Bestimme die Fehlergrenze der Summen:

a)	b)
5·315	3·142
3·096	6·138
0·844	5·242
12·367	0·364
21·622	14·886

2. Um die Differenz zweier unvollständiger Decimalbrüche mit erreichbarer Genauigkeit zu bestimmen, kürze man beide auf so viele Decimalstellen ab, als in jedem verbürgt vorkommen, und subtrahiere sie sodann. Der Fehler der Differenz ist kleiner als eine Einheit der niedrigsten Stelle. Folgendes Beispiel möge dieses beleuchten:

$$\text{vollständig}\left\{\begin{array}{l}3\cdot468499\\0\cdot593501\\\hline 2\cdot874998\end{array}\right.\qquad\text{abgekürzt}\left\{\begin{array}{l}3\cdot468..\\0\cdot594..\\\hline 2\cdot874..\end{array}\right.$$

Z. B. Bestimme mit erreichbarer Genauigkeit

a) 8·105.. — 3·643.., b) 7·49.. — 0·875.., c) 3·0816.. — $2\frac{7}{9}$.

$$\text{a)}\ \begin{array}{r}8\cdot105\\3\cdot643\\\hline 4\cdot46\underline{2}\end{array}\qquad\text{b)}\ \begin{array}{r}7\cdot49\\0\cdot88\\\hline 6\cdot6\underline{1}\end{array}\qquad\text{c)}\ \begin{array}{r}3\cdot0816\\2\cdot7778\\\hline 0\cdot303\underline{8}\end{array}$$

Aufgaben.

$$\textbf{1.}\ \begin{array}{r}7\cdot93..\\6\cdot09..\\4\cdot58..\\0\cdot29..\\\hline\end{array}\qquad\textbf{2.}\ \begin{array}{r}13\cdot582..\\7\cdot6045..\\10\cdot8591..\\8\cdot446..\\\hline\end{array}\qquad\textbf{3.}\ \begin{array}{r}0\cdot3578..\\0\cdot206..\\0\cdot9323..\\0\cdot66..\\\hline\end{array}$$

Gib in 1. 2. 3. die Fehlergrenze der Summe an.

4. 19·308.. + 25·3617.. + 3·5 + 2·8136.. + 0·753..

Der vollständigen Zahl 3·5 kann man sich rechts Nullen angehängt denken.

5. 6·426.. + 2·075.. + 3·1416.. + 5·2348 + 1·27..

6. 8·3958 + 2·776.. + $0\cdot7\dot{6}$ + 4·0923.. + $5\cdot\dot{3}$.

7. Verwandle die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.., $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ in Decimalbrüche und bestimme ihre Summe bis auf eine halbe Einheit der 6. Decimalstelle genau.

8. 15·605.. — 8·096.. **9.** 7·4278.. — 4·379..

10. 9·45.. — 5·2341.. **11.** 0·85 — 0·2362..

12. 23·209.. — 16·8. **13.** 4·673.. — 2·3.

2. Abgekürzte Multiplication unvollständiger Zahlen.

§. 40.

1. Will man das Product zweier Decimalzahlen nur bis zu einer bestimmten Decimalzahl entwickeln und dabei jede überflüssige Rechnung vermeiden, so bedient man sich der **abgekürzten Multiplication.**

Es sei z. B. das Product 328·47156 × 0·09 auf 3 Decimalstellen, d. i. so zu bestimmen, dass Tausendtel die niedrigste Stelle des Productes bilden.

$$\begin{array}{l}328\cdot47156\times0\cdot09\\\hline 29\cdot562\end{array}$$

Mit h muss man z multiplicieren, um t zu erhalten: die Berechnung des Productes beginnt also bei 4 z; die übrigen niedrigeren Stellen des Multiplicands werden weggelassen. Nur die nächste rechts folgende Ziffer 7 wird noch multipliciert, da die Zehner ihres Productes mit 9 schon Tausendtel geben; denn 7 h × 9 h =

63 zt = 6 t 3 zt. Die Zehner 6 dieses Productes werden zu dem Producte 4 z × 9 h = 36 t als Correctur dazu gezählt und dann die weiter folgenden höheren Stellen des Multiplicands multipliciert.

Man spricht: 63, 6 als Correctur; 36, 42, 4;
72, 76, 7; 18, 25, 2; 27,, 29.

Multipliciere ebenso auf 3 Decimalen mit Vermeidung jeder unnöthigen Rechnung 51·67834 a) mit 800, b) mit 5, c mit 0·006.

Schreibe unter dem Multiplicand 30·7915 die Ziffern des Multiplicators 24·678 in umgekehrter Reihenfolge so an, dass die Ziffer der Einer des Multiplicators unter die a) Zehntel, b) Hundertel, c) Tausendtel des Multiplicands zu stehen kommt, und bestimme dann den Stellenwert des Productes je zweier übereinander stehender Ziffern.

a)	b)	c)
35·7915	35·7915	35·7915
876 42	87 642	8 7642

Schreibt man den Multiplicator in umgekehrter Ordnung unter den Multiplicand, so hat das Product je zweier übereinander stehender Ziffern immer mit derjenigen Ziffer des Multiplicands, unter welcher die Einer des Multiplicators stehen, gleichen Stellenwert.

Es soll nun das Product 8·5432 × 7·916 bis auf die Tausendtel herab bestimmt werden.

a)			b)
8·543	2 × 7·916		8·5432
59 802	4		6 197
7 688	88		59 802
85	432		7 689
51	2592		85
67·627	9712		51
			67·627

Da hier nur die drei ersten Decimalen des Productes verlangt werden, so ist in der vorstehenden vollständigen Multiplication a) die Rechnung rechts des Striches überflüssig; sie kann dadurch erspart werden, dass man mit jeder Ziffer des Multiplicators zunächst jene Ziffer des Multiplicands, welche im Producte Tausendtel hervorbringt, und dann nur die weiter folgenden höheren Ziffern desselben multipliciert. Man erhält nun im Producte Tausendtel, wenn man

mit	7 E	des Multiplicators	3 t	des Multiplicands,	
„	9 z	„ „	4 h	„	„
„	1 h	„ „	5 z	„	„
„	6 t	„ „	8 E	„	„ multipliciert.

Am einfachsten erscheint es, die Ziffern des Multiplicators in einer solchen Aufeinanderfolge unter den Multiplicand zu schreiben, dass das Product je zweier untereinander stehender Ziffern Tausendtel bedeutet.

Zu diesem Zwecke braucht man nur die Einer 7 des Multiplicators unter die Tausendtel 3 des Multiplicands zu setzen und die übrigen Ziffern des Multiplicators in umgekehrter Reihenfolge zu schreiben, wie oben in der Rechnung b). Multipliciert man dann mit jeder Ziffer des Multiplicators die darüber stehende und die höheren Stellen des Multiplicands, so bedeuten die niedrigsten Stellen aller Theilproducte Tausendtel; man schreibt daher die Theilproducte so an, dass ihre niedrigsten Stellen gerade untereinander stehen. Wegen der größeren Genauigkeit multipliciert man mit jeder Ziffer des Multiplicators auch die um eine Stelle weiter rechts stehende Ziffer des Multiplicands, behält aber von diesem Producte nur die nächsten Zehner, welche Tausendtel bedeuten und zählt diese als Correctur zu dem ersten anzuschreibenden Producte hinzu.

In dem obigen Beispiele b) rechnet und spricht man:
14, 1 als Correctur; 21, **22**, 2; 28, **30**, 3; 35, 38, 3; 56, **59**;
27, 3 als Correctur; 36, **39**, 3; 45, 48, 4; 72, **76**;
4, 0 als Correctur; **5**; **8**;
30, 3 als Correctur; 48, **51**.
Die so erhaltenen Theilproducte werden addiert.

In der Rechnung b) sind zwar die einzelnen Theilproducte in ihrer niedrigsten Stelle wegen der Correctur näherungsweise genau, allein durch ihre Addition kann sich der Fehler vergrößern und ist daher die niedrigste Stelle des Hauptproductes nicht verlässlich. Will man daher das Product zweier Zahlen bis auf irgend eine innerhalb der Grenze der Möglichkeit liegende Stelle genau haben, so entwickelt man durch abgekürztes Multiplicieren noch die Ziffer der nächst niedereren Stelle und streicht diese schließlich im Resultate als unverlässlich ab.

Das hier für Decimalzahlen begründete abgekürzte Multiplicationsverfahren kann auch bei der Multiplication ganzer Zahlen, wenn man im Producte nur einige höchste Stellen erhalten will, angewendet werden.

2. Schreibt man unter dem Multiplicand 2·5384... die Ziffern des Multiplicators 42·5627.. in umgekehrter Reihenfolge so an, dass die Ziffer der Einer des Multiplicators unter die a) Zehntel, b) Hundertel, c) Tausendtel des Multiplicands zu stehen kommt,

a)	b)	c)
2·5384..	2·5384..	2·5384..
7265 24	726 524	72 6254

so erhält man das Product im Falle a) auf die Zehntel, b) die Hundertel und c) die Tausendtel herab. Es sind aber im letzten Falle die Tausendtel des ersten Theilproductes schon unrichtig, weil im Multiplicand die Ziffer der fünften Decimalstelle, welche zur Bildung der Correctur benöthigt wird, fehlt.

Um daher das Product zweier unvollständiger Decimalzahlen mit erreichbarer Genauigkeit zu bestimmen, nehme man den ungenaueren Factor zum Multiplicand, setze unter seine vorletzte Ziffer die höchste geltende Ziffer des andern Factors, die übrigen Ziffern desselben aber in umgekehrter Ordnung, und multipliciere sodann abgekürzt.

4·962.. × 0·1482..	2·487.. × 4·23
2 694	3 24
593	9 95
133	50
8	7
0·734..	10·52..

Aufgaben.

Bestimme nach der abgekürzten Multiplication:

	a)	b)	
1.	a) 7·0572 × 3·885	b) 128·7654 × 0·813	in 3 Dec.
2.	a) 17·4315 × 3·1416	b) 157·34 × 0·0763	
3.	a) 2·057 × 4·867	b) 0·56104 × 0·7	
4.	a) 5·902 × 2·468	b) 9·1347 × 8·35	in 2 Dec.
5.	a) 36·41 × 0·0207	b) 0·895 × 1·07	
6.	a) 35·239 × 78	b) 41·506 × 9·43	in 1 Dec.
7.	a) 58·36 × 5·39	b) 2·791 × 0·982	
8.	a) 9·0256 × 4·325	b) 69·2345 × 0·1576	in 4 Dec.
9.	4·05672 × 9·16035 × 0·08783		

10. 1·045 × 1·045 × 1·045 × 1·045 × 1·045 in 6 Dec.

11. Suche die Ganzen des Productes 128·975 × 602·736 × 71·068.

12. Bestimme das Product 310786 × 45067 bis auf die Millionen herab.

13. Wie viel kosten 37·3456 *ha*, wenn 1 *ha* 1941·34 *K* kostet? (3 Dec.)

14. Ein Capital gibt jährlich 43·578 *K* Zinsen; wie viel in 2·862 Jahren? (3 Dec.)

Bestimme folgende Producte mit erreichbarer Genauigkeit:

15. 1·273.. × 0·247.. **16.** 4·0624.. × 2·7172..

17. 18·93.. × 5·634.. **18.** 0·5872.. × 9·043..

19. 8·27 × 0·4672.. **20.** 13·491.. × 2·765..

21. 3·14159.. × 3687.. **22.** 9·046 × 37·552..

23. $3\frac{3}{4}$ × 2·576.. **24.** $19\frac{2}{3}$ × 8·06..

25. $0\cdot\dot{8}1$ × 6·375.. **26.** $31\cdot2056..\times 0\cdot5\dot{6}$

27. 4·832.. × 4·832.. **28.** 0·6057.. × 0·6057..

29. Ein Grad des Erdäquators hat 15 geogr. Meilen, eine geogr. Meile 7·41893.. *km*; welche Länge in *km* hat der Äquator?

3. Abgekürzte Division unvollständiger Zahlen.

§. 41.

1. Will man im Quotienten nur eine bestimmte Anzahl Decimalen erhalten, so bedient man sich der abgekürzten Division. Diese ist die Umkehrung der abgekürzten Multiplication, wobei der Multiplicand nach und nach um eine Stelle verkürzt wird. Das Wesen der abgekürzten Division besteht in Folgendem:

Aus dem Stellenwerte der ersten Ziffer des Quotienten und aus der Anzahl der in demselben verlangten Decimalen ergibt sich, wie viele Ziffern des Quotienten man im ganzen zu bestimmen hat. Man nehme nur so viele höchste Ziffern des Divisors, als ihrer der gesuchte Quotient enthalten soll, als abgekürzten Divisor, und behalte von den Ziffern des Dividends nur den zu dem abgekürzten Divisor zugehörigen ersten Theildividend bei. Sodann multipliciert man mit der ersten Ziffer des Quotienten zunächst die höchste im Divisor weggelassene Ziffer, und addiert die aus diesem Producte erhaltene Correctur zu dem Producte aus dem abgekürzten Divisor und der ersten Ziffer des Quotienten, welches man von dem Dividend subtrahiert. Zu dem übrig gebliebenen Reste wird keine neue Ziffer dazu gesetzt, sondern man läſst im Divisor rechts eine Ziffer weg, dividiert dann und setzt dieses Verfahren fort, bis sich im Divisor keine Ziffer mehr vorfindet.

Hat der Divisor weniger Ziffern, als der Quotient enthalten soll, so tritt das abgekürzte Verfahren erst später im Verlaufe der Rechnung ein.

Das abgekürzte Divisionsverfahren kann auch bei der Division ganzer Zahlen, wenn man im Quotienten nur einige höchste Stellen erhalten will, angewendet werden.

2. Der Quotient zweier unvollständiger Decimalzahlen kann nicht genauer sein als die ungenauere dieser Zahlen.

Um daher den Quotienten zweier unvollständiger Decimalzahlen mit erreichbarer Genauigkeit zu bestimmen, nimmt man im Dividend und im Divisor nur so viele Stellen in Betracht, als die ungenauere der Zahlen gestattet, und dividiert abgekürzt. Z. B.

237·84.. : 4·961.. = 47·94..	21·459.. : 6·81425 = 3·149..
39 40	1 016
4 67	335
21	62
1	1

Aufgaben.

1. Führe folgende Divisionen abgekürzt aus, so dass bei der ersten Theildivision der ganze gegebene Divisor verwendet wird.

a) 19·339 : 8·153 = 2·372
   3 033
     587
      16

b) 37·086 : 3·267.
c) 0·3678 : 1·0634.
d) 15·894 : 0·8635.

2. Ebenso

a) 52·92478 : 6·239 b) 5·79 : 0·873.

3. Bestimme folgenden Quotienten bis auf die Tausendtel.

876·54|38 : 18·957|9 = 46·236
118 22
  4 48
    69
    12
     1

Da die erste Ziffer 4 des Quotienten Zehner bedeutet, so ist der Quotient im ganzen mit 5 Stellen zu bestimmen; man nimmt daher 18·957 als abgekürzten Divisor und 876·54 als Dividend an.

Bestimme abgekürzt folgende Quotienten:

4. a) 43·534 : 31·607 b) 0·8463 : 0·001581 } mit 4 Stellen
5. a) 100 : 3·1416 b) 0·00257 : 2·97416 } mit 4 Stellen
6. a) 0·9275 : 0·3702 b) 3·49358 : 23·86 } in 3 Dec.
7. a) 0·78432 : 0·8932 b) 284·069 : 27·523 } in 3 Dec.
8. a) 5·49825 : 1·3219 b) 791·5046 : 876·189 (5 Stellen).
9. Bestimme 2345·21 : 9·18 in 6 Stellen.

Hier tritt das abgekürzte Verfahren erst im Verlaufe der Rechnung ein.

Bestimme mit erreichbarer Genauigkeit die Quotienten:

10. 0·8193.. : 0·2536.. **11.** 41·0357.. : 0·924..
12. 12·374.. : 3·0945.. **13.** 309·27.. : 0·0987..
14. 42·948 : 11·89.. **15.** 7·9903 : 25·05..
16. 285·7748.. : 3865·1.. **17.** 0·0973.. : 58.
18. $37\frac{4}{25}$: 3·156.. **19.** 3·8662.. : $5\frac{3}{7}$.
20. $6{\cdot}\dot{5}\dot{4}$: 1·0367.. **21.** 48·3013.. : $8{\cdot}2\dot{7}$.

Bestimme folgende Ausdrücke mit erreichbarer Genauigkeit:

22. $\frac{5{\cdot}134.. \times 8{\cdot}2}{3{\cdot}453}$ **23.** $\frac{3{\cdot}14159.. \times 6{\cdot}7 \times 2{\cdot}4503..}{9{\cdot}782 \times 0{\cdot}2581..}$.

4. Abgekürztes Verfahren beim Quadratwurzelausziehen.

§. 42.

Soll die Quadratwurzel sehr viele Decimalstellen enthalten, so kann die Rechnung bedeutend abgekürzt werden.

Beim Ausziehen der Quadratwurzel werden die zweite und die späteren Ziffern durch die Division gefunden, wobei jeder folgende Divisor durch die neugewonnene Ziffer verändert wird; je weiter man jedoch fortschreitet, um so weniger werden die höchsten Stellen des Divisors durch diese Änderungen berührt. Man kann daher, nachdem man mehrere Ziffern der Wurzel nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden hat, anstatt dem Reste eine neue Abtheilung anzuhängen, in dem neuen Divisor die letzte Ziffer weglassen und die folgenden Wurzelziffern mittelst der abgekürzten Division entwickeln. Die Anzahl der richtigen Ziffern, die man dabei erhält, ist um 1 kleiner als die Anzahl der Ziffern in der Wurzel, welche bereits durch das gewöhnliche Verfahren gefunden wurden. Z. B.

Es sei $\sqrt{17\cdot478}$ in 6 Decimalen zu bestimmen.

a) nach dem gewöhnlichen Verfahren:

$$\begin{array}{rrl}
\sqrt{17\cdot47|8_0} & = 4\cdot180669 & \\
1\;47 & & :81 \\
6680 & & :828 \\
5600\,00 & & :83606 \\
583|6400 & & :836126 \\
81|964400 & & :8361329 \\
6|712439 & &
\end{array}$$

b) abgekürzt:

$$\begin{array}{rrl}
\sqrt{17\cdot47|8_0} & = 4\cdot180669 & \\
1\;47 & & :81 \\
6680 & & :828 \\
5600 & & :8360 \\
584 & & \\
82 & & \\
7 & &
\end{array}$$

Das hier angegebene abgekürzte Verfahren wird insbesondere auch beim Ausziehen der Quadratwurzel aus einem unvollständigen Decimalbruche angewendet. Die Anzahl verläßlicher Ziffern in der Quadratwurzel ist um 1 kleiner als die doppelte Anzahl der Abtheilungen in der vorgelegten Zahl, deren jede mit Ausnahme etwa der ersten links zwei Ziffern enthält.

Aufgaben.

Entwickle folgende Wurzeln mit der angegebenen Zahl von Ziffern und mache jedesmal die Probe, indem du die erhaltene Wurzel abgekürzt mit sich selbst multiplicierst.

1. $\sqrt{80}$ mit 6 Decimalen. **2.** $\sqrt{222}$ mit 5 Decim.

3. $\sqrt{0\cdot3582}$ mit 5 Decim. **4.** $\sqrt{28\cdot25}$ mit 6 Decim.

5. $\sqrt{30\cdot009}$ mit 6 Decim. **6.** $\sqrt{123456}$ mit 4 Decim.

7. $\sqrt{3\cdot333}$ mit 6 Decim. **8.** $\sqrt{2578\cdot13}$ mit 5 Decim.

9. $\sqrt{0\cdot079}$ mit 7 Decim. **10.** $\sqrt{0\cdot788531}$ mit 5 Decim.

11. Bestimme $x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$ und $X = \frac{2s}{\sqrt{4 - s^2}}$ für $s = 1$ in 7 Decimalen.

Bestimme mit erreichbarer Genauigkeit folgende Quadratwurzeln:

12. $\sqrt{2 \cdot 3476\ldots}$ **13.** $\sqrt{412 \cdot 601\ldots}$ **14.** $\sqrt{0 \cdot 552612\ldots}$

Berechne mit erreichbarer Genauigkeit folgende Ausdrücke:

15. $\sqrt{2a^2}$ für $a = 2 \cdot 468\ldots$ **16.** $\sqrt{\frac{d^2}{2}}$ für $d = 13 \cdot 47\ldots$

17. $\sqrt{\frac{3a^2}{4}}$ für $a = 5 \cdot 603\ldots$ **18.** $\sqrt{\frac{f}{\pi}}$ für $f = 264 \cdot 76\ldots$

19. $\sqrt{\frac{4f}{\sqrt{3}}}$ für $f = 66\ 4327\ldots$

V. Gleichungen des ersten Grades.

§. 43.

Die Gleichstellung zweier Ausdrücke, welche denselben Wert haben, wird eine Gleichung genannt; z. B.

$$a = a;\ (a + b)(a - b) = a^2 - b^2;\ 3x - 5 = 2x + 3.$$

Die Ausdrücke zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens heißen Theile der Gleichung und können einzeln wieder aus mehreren Gliedern bestehen. In der Gleichung $3x - 5 = 2x + 3$ ist $3x - 5$ der erste, $2x + 3$ der zweite Theil; jeder dieser beiden Theile besteht aus zwei Gliedern.

Man unterscheidet zweierlei Gleichungen, identische und Bestimmungsgleichungen. Eine identische Gleichung gilt für jeden Wert der darin vorkommenden noch unbestimmten Größen; diese Eigenschaft haben die obigen Gleichungen $a = a$ und $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, welche richtig bleiben, man mag für a und b was immer für Werte setzen. Bestimmungsgleichungen dagegen sind solche, welche nicht für alle, sondern nur für bestimmte Werte der darin vorkommenden Unbekannten giltig sind. So ist $3x - 5 = 2x + 3$ eine Bestimmungsgleichung, da ihr nur der Wert $x = 8$ genüge leistet.

Die Werte der Unbekannten finden, welche einer Bestimmungsgleichung genüge leisten, heißt diese Gleichung auflösen.

Nach der Anzahl der Unbekannten, welche in einer Gleichung vorkommen, unterscheidet man Gleichungen mit einer, mit zwei oder mit mehreren Unbekannten. Z. B. $7x - 3 = 4x$ ist eine Gleichung mit einer, $5x - 3y = 8$ eine Gleichung mit zwei, $7x = 3y - 5z + 5$ eine Gleichung mit drei Unbekannten.

Nach der höchsten Summe der Potenzexponenten, welche die in einem Gliede der geordneten Gleichung vorkommenden Unbekannten haben, werden die Gleichungen in jene des ersten, zweiten, dritten,... Grades eingetheilt. So sind

$$\left.\begin{aligned} 3x &= 20 \\ 2x - 3y &= 7 \end{aligned}\right\} \text{ Gleichungen des ersten Grades,}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 5x = 9 \\ x^2 + y^2 = 2xy \\ xy + x = 8 \end{array}\right\} \text{Gleichungen des zweiten Grades.}$$

Eine Gleichung ist **geordnet**, wenn die Glieder derselben nach Potenzen einer darin vorkommenden Unbekannten fallend geordnet sind, keine Unbekannte im Nenner eines Gliedes oder unter einem Wurzelzeichen vorkommt und auf der anderen Seite der Gleichung Null steht.

1. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. 44.

Eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten ist als aufgelöst zu betrachten, wenn die Unbekannte für sich allein vor dem Gleichheitszeichen steht und nach demselben nur bekannte Zahlen vorkommen. Wenn man z. B. aus der Gleichung $6x + 4x = 780 - 3x$ das Resultat $x = 60$ findet, so ist die Gleichung aufgelöst.

Das Auflösen der Gleichungen des ersten Grades beruht auf dem Grundsatze:

Wenn man mit gleichen Ausdrücken gleiche Veränderungen vornimmt, so müssen wieder gleiche Ausdrücke zum Vorschein kommen.

Aus diesem allgemeinen Grundsatze ergeben sich folgende besondere Sätze:

1. **Gleiches zu Gleichem addiert, gibt gleiche Summen.**

Ist $a = b$ und $c = d$, so muss auch $a + c = b + d$ sein.

2. **Gleiches von Gleichem subtrahiert, gibt gleiche Differenzen.**

Ist $a = b$ und $c = d$, so muss auch $a - c = b - d$ sein.

Zufolge dieser beiden Sätze kann jedes Glied in einem Theile der Gleichung weggelassen und in dem andern Theile mit dem entgegengesetzten Zeichen übertragen, **transponiert** werden. Hat man z. B. $x + a = b$, so ist $x = b - a$; durch diese Versetzung ist nichts anderes geschehen, als dass von beiden Theilen der Gleichung $+ a$ subtrahiert wurde. Aus $5x = 16 - 3x$ folgt $5x + 3x = 16$; hier wurde auf beiden Seiten $3x$ addiert, oder, was gleichviel ist, $- 3x$ subtrahiert.

3. **Gleiches mit Gleichem multipliciert, gibt gleiche Producte.**

Ist $a = b$ und $c = d$, so muss auch $ac = bd$ sein.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Brüche in einer Gleichung wegschaffen, indem man beide Theile der Gleichung mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner multipliciert. Z. B. aus $\frac{x}{a} - b = c$ folgt, wenn man mit a multipliciert, $x - ab = ac$.

Ebenso gibt $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{3}$, wenn beide Theile mit $2 \times 3 = 6$ multipliciert werden, $3x - 12 = 2x$.

4. Gleiches durch Gleiches dividiert, gibt gleiche Quotienten.

Ist $a = b$ und $c = d$, so muss auch $a : c = b : d$ sein.

Es ist daher erlaubt, beide Theile einer Gleichung durch dieselbe Zahl zu dividieren, wodurch die Gleichung häufig auf eine einfachere Gestalt gebracht wird. So gibt $6x = 24$ die Gleichung $x = 4$.

Um durch Anwendung der vorhergehenden Sätze eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten aufzulösen, verfährt man auf folgende Art.

1. Wenn die Gleichung Brüche enthält, so werden diese weggeschafft, indem man beide Theile der Gleichung mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller Nenner multipliciert. (Wegschaffung der Brüche.)

2. Kommen in der Gleichung zusammengesetzte, durch Klammern verbundene Ausdrücke vor, so werden die durch die Klammern angezeigten Operationen wirklich ausgeführt. (Auflösung der Klammern.)

3. Es werden alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, in den ersten Theil der Gleichung gebracht und zusammengezogen; die bekannten Glieder dagegen werden in den zweiten Theil übertragen und ebenfalls reduciert. (Transponieren und Reducieren.)

4. Man befreit die Unbekannte von ihrem Coefficienten, indem man beide Theile der Gleichung durch denselben dividiert. (Division durch den Coefficienten der Unbekannten.)

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, darf man nur den gefundenen Wert, welchen man auch die Wurzel der Gleichung nennt, für die Unbekannte in die gegebene Gleichung substituieren und die Ausdrücke auf beiden Seiten auf die einfachste Gestalt bringen. Erhält man beiderseits dasselbe Resultat, so ist die Auflösung richtig; im entgegengesetzten Falle ist sie unrichtig.

§. 45.

1. Führt eine Gleichung, nachdem man sie auf die einfachste Form gebracht hat, nicht auf die Unbekannte selbst, sondern auf deren Quadrat oder Cubus, so darf man nur, um die Unbekannte selbst zu erhalten, aus beiden Theilen der Gleichung bezüglich die Quadrat- oder die Cubikwurzel ausziehen. Z. B.

$$2x^2 = 18,$$
$$x^2 = 9,$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}, \text{ also}$$
$$x = 3.$$

2. Kommt in einer Gleichung die Quadrat- oder die Cubikwurzel der Unbekannten vor, so kann die Wurzel weggeschafft werden, indem man beide Theile der Gleichung bezüglich zum Quadrat oder zum Cubus erhebt. Z. B.

$$\sqrt{x + 4} = 3$$
$$(\sqrt{x + 4})^2 = 3^2$$
$$x + 4 = 9$$
$$x = 9 - 4$$
$$x = 5.$$

§. 46.

Auflösungs-Aufgaben.

1. $3x - 8 = 13.$

Auflösung. $3x = 13 + 8$ Probe. $3 \times 7 - 8 = 13$

$3x = 21$ $21 - 8 = 13$

$x = 7$ $13 = 13$

2. $7x - 23 = 40.$ **3.** $2x - 11 = 23.$

4. $9 - x = 7.$ **5.** $5y + 14 = 49.$

6. $2x + 15 = 31.$ **7.** $14 = 5z - 16.$

8. $234 = 272 - 2x.$ **9.** $93 = 121 - 4y.$

10. $50 = 8 - 6y.$ **11.** $17 - (3x + 1) = 0.$

12. $8 = 8(16 - x).$ **13.** $4[26 - (121 - x)] = 0.$

14. $a + x = b.$ **15.** $a - x = b.$

16. $a + b - y = c.$ **17.** $a - b = c - y.$

18. $7x + 2 = 9x - 2.$ **19.** $3x - 4 = 48 - x.$

20. $9y + 7y + 5y = 0.$ **21.** $5z - 7 = 2z - 8.$

22. $9x + 100 = 14x + 95.$ **23.** $36 - 5x = 3x - 12.$

24. $2y - 3 + 5y = 2y + 2.$ **25.** $144 - 7x = 19x - 350.$

26. $2a + 6b - 5y = 3a - 4y + 5b.$

27. $3a - 4x = 9a + 6b - 6x.$

28. $8x + (9a + 10b - 13c) = 4x + (5a + 6b + 7c).$

29. $2x - [11 + 2x - (5x + 7)] = x - 7.$

30. $138 - [13x + (35 - 17x)] = 155 - (3x - 36).$

31. Löse die Gleichung $2f = ur$ nach allen drei in ihr vorkommenden allgemeinen Zahlen f, u, r auf, indem du zuerst f, dann u, endlich r als die Unbekannte annimmst und jedesmal die beiden anderen allgemeinen Zahlen als bekannt voraussetzest.

32. Löse ebenso die Gleichung $100z = cpt$ nach allen in ihr vorkommenden allgemeinen Zahlen auf.

33. $12(x - 1) = 3(x + 8)$.

Aufl. $12x - 12 = 3x + 24$ Probe. $12(4 - 1) = 3.(4 + 8)$

$12x - 3x = 24 + 12$ $12.3 = 3.12$

$9x = 36$ $36 = 36$.

$x = 4$.

34. $20 - 2(x - 4) = 2x$. **35.** $9 - 3(2 - y) = 2(1 - 2y)$.

36. $ax + b(x - c) = ac$. **37.** $3(x + a) = 5(x - a)$.

38. $14x = 3(650 - 3[150 - x])$.

39. $18(x + 35) = 10(2x + 45)$.

40. $a(x - b) = c(dx + e)$.

41. $(m - x)(n + x) = (n - x)x$.

42. $7(x - 4) + 3(x + 1) = 20x - 32$.

43. $4(z - 2) + 3z = 5(z - 3) + 19$.

44. $22(x + 1) - 8(x + 7) = 5(x + 5) - 32$.

45. $7y - 4(2y - 4) = 20y - 1 - 4(4y + 2)$.

46. $3(x + 15) + 5 = 2(2x + 19) + 4(x + 13)$.

47. $16 - 3(2x + 65) = 9(x + 43) - 4(x + 37)$.

48. $6(x - 2) - 2(3x + 1) = 1 - 4(2x + 3)$.

49. $3(x + 4) - 4(x - 1) = 8(2x - 15)$.

50. $55(60 - 2y) - 3(y + 2) = 22y + 9(3y + 6)$.

51. $5(4z + 5) - 4(z + 5) = 7(5z + 9) - 15 - 8(4 + z)$.

52. $7(2y + 28) - 3(y + 21) = 5(2y + 25) - 4(5y + 40)$.

53. $8x - 2x(1 - 3x) = (3x - 2)(2x - 3) + 32$.

54. $(y + 2)(3 - y) = (4 - y)(5 + y) - 22$.

55. $20 + 5[5 - (8 - 2x)] = 7x + 2(3x - 5)$.

56. $7(x + 5) - 3[x - 4(3 - x)] - 1 = 5[3 + (2x - 7)] + 60$.

57. Löse die Gleichung $2f = (a + b)h$ nach allen in ihr vorkommenden allgemeinen Zahlen auf.

58. $\frac{x}{2} = x - 5$.

Aufl. $x = 2x - 10$. Probe. $\frac{10}{2} = 10 - 5$.

$x - 2x = -10$ $5 = 5$.

$-x = -10$

$x = 10$.

59. $\frac{y}{16} = \frac{3}{4}$. **60.** $\frac{3}{5}y - 36 = 0$.

61. $\frac{3x}{5} + 7 = 16.$ **62.** $13 + \frac{z}{9} = 11.$

63. $\frac{4}{3}x + 15 = 3.$ **64.** $7 = \frac{5}{6}x - 3.$

65. $\frac{24}{x + 1} = 6.$ **66.** $\frac{8}{x - 1} = 2.$

67. $\frac{5}{3x + 2} = 1.$ **68.** $\frac{6 + y}{6 - y} = 2.$

69. $\frac{2x + 4}{x + 15} = 1.$ **70.** $z - \frac{5z}{6} = 2.$

71. $5y - 28 = \frac{8y}{3}.$ **72.** $-\frac{2x}{3} + 8 = 0.$

73. $2x - \frac{3x}{5} = 3(x - 2).$ **74.** $\frac{34 - 7x}{5} = 22 - 9x.$

75. $7x - \frac{4x}{7} + 2(x - 1) = 8x + 1.$

76. $3(4x + 5) - 6x = 4(2x + 5) - \frac{1}{3}(2x - 5).$

77. $\frac{x + 3}{5} - \frac{x - 3}{9} = 2.$

Aufl.
$$\begin{aligned} 9(x + 3) - 5(x - 3) &= 90 \\ 9x + 27 - 5x + 15 &= 90 \\ 9x - 5x &= 90 - 27 - 15 \\ 4x &= 48 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Probe.
$$\begin{aligned} \frac{12 + 3}{5} - \frac{12 - 3}{9} &= 2 \\ \frac{15}{5} - \frac{9}{9} &= 2 \\ 3 - 1 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

78. $x + \frac{ax}{b} = \frac{a^2 - b^2}{b}.$ **79.** $\frac{x}{a + b} + \frac{x}{a - b} = 2a.$

80. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 39 = 3x.$ **81.** $4 . \frac{11 - x}{2} + 5x = 19.$

82. $\frac{4x - 5}{3} + \frac{5x + 2}{12} = x.$ **83.** $\frac{45 - x}{3} = x + \frac{21 - x}{4}.$

84. $\frac{9 + x}{14} - 1 = \frac{x + 7}{5} - 2.$ **85.** $\frac{7(26 - 2x)}{15} = \frac{4(39 - 3x)}{11}.$

86. $10\left(\frac{9x}{4} + 13\right) = 60 + \frac{85x}{3}.$ **87.** $\frac{19 - y}{2} + y = \frac{26 - y}{3}.$

88. $\frac{2x - 1}{3} - \frac{x - 3}{5} = \frac{3x + 7}{10}.$

89. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13.$ **90.** $\frac{z}{2} + \frac{z - 4}{3} - \frac{z - 6}{4} = z + 1.$

91. $\frac{6x + 3}{3x - 4} = \frac{10x + 1}{5x - 8}.$ **92.** $\frac{5x + 3}{4} + \frac{3 - 5x}{4} = 1 - \frac{x}{6}.$

93. $\frac{8x - 1}{3} - 12 = \frac{7 - 6x}{2} + 10x.$

94. $\frac{7 + x}{5} - \frac{10 + x}{13} = \frac{4 + x}{7}.$ **95.** $\frac{z - 1}{2} - \frac{3z}{5} = \frac{6z - 8}{9}.$

96. $\frac{7x-13}{6}+\frac{9-3x}{8}=\frac{5x-11}{12}-2.$

97. $\frac{4x-2}{3}-\frac{1+3x}{5}=7-\frac{x-4}{2}.$

98. $\frac{x+2}{3}-\frac{4x+5}{6}+\frac{7x-8}{9}=x+2.$

99. $\frac{9+x}{9}-\frac{x-6}{6}-7=10-\frac{8+4x}{5}.$

100. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+\frac{x}{4}=x+17.$

101. $x+\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}=\frac{7x}{8}+49.$

102. $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}+\frac{4x}{5}=\frac{5x}{6}+678.$

103. $\frac{x}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x-2}{4}=\frac{2x}{11}-\frac{2-3x}{4}-3.$

104. $(x-1)(x+1)=x^2+x+1.$

105. $3x+\frac{7x-9}{2}=28-\frac{2x-7}{3}+\frac{2x-3}{7}.$

106. $\frac{x+a}{a}-\frac{x+a^2}{a^2}+\frac{x+a^3}{a^3}-\frac{x+a^4}{a^4}-1=a^4$

107. $\frac{24}{5x-3}-2+\frac{96}{7(5x-3)}=\frac{8}{7}.$

108. $\frac{5ax}{2(3b-4x)}+\frac{4bx}{3b-4x}=\frac{4b-5a}{2}.$

109. $\frac{m^2+nx}{m-x}-m=\frac{n^2}{m}.$

110. $\frac{17x-5}{5(3x+1)}-\frac{7x-3}{3x+1}=1-\frac{13x-1}{2(3x+1)}.$

111. $3a(x-2a)-\frac{19ab}{2}=\frac{5b(x-4b)}{4}.$

112. $\frac{3a(2a-3b)}{2(5a-x)}=\frac{6a+15b}{8}-\frac{2b(5a+x)}{5a-x}.$

113. $\frac{x^2}{x^2-a^2}-\frac{x+a}{x-a}+\frac{1}{x+a}=0.$

---

114. $3x^2-5=43.$ **115.** $3:x=x:12.$

116. $5x^2-24=4x^2+25.$ **117.** $\frac{x}{2}=\frac{12}{x}-\frac{4}{x}.$

118. $x^2\pi=f.$ **119.** $4x^2\pi=s.$

120. Löse die Gleichung $a^2+b^2=c^2$ nach allen in ihr vorkommenden allgemeinen Zahlen auf.

121. Löse ebenso die Gleichung $\frac{a^2}{4}=b^2-h^2$ auf.

122. $x^2\pi h=v.$ **123.** $4x^3\pi=3v.$

124. $6x^2=0.$ **125.** $3x^2\pi=0.$

126. $v = r^2 \pi \sqrt{x^2 - r^2}$. **127.** $3v = x^3 \pi \sqrt{3}$.

128. $\sqrt{x^2 + a^2} = c$. **129.** $\sqrt{x^2 - a^2} = b$.

2. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

§. 47.

Zur Bestimmung von zwei oder mehreren Unbekannten sind eben so viele Gleichungen erforderlich, als Unbekannte vorhanden sind.

Um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, muſs aus denselben eine Unbekannte eliminiert, d. i. eine neue Gleichung gebildet werden, welche diese Unbekannte nicht enthält. Diese Gleichung hat dann nur eine einzige Unbekannte, welche daraus bestimmt und durch deren Substitution in eine der gegebenen Gleichungen auch der Wert der andern Unbekannten gefunden wird.

Für das Eliminieren einer unbekannten Gröſse hat man vorzugsweise drei Methoden:

1. Man bestimmt den Wert der einen Unbekannten aus beiden Gleichungen und setzt die erhaltenen Ausdrücke gleich. (Comparationsmethode.) Z. B.

$$2x + 5y = 26 \ldots 1. \text{ und } 3x - 2y = 1 \ldots 2.$$

Aus 1. folgt $x = \frac{26 - 5y}{2}$, aus 2. folgt $x = \frac{1 + 2y}{3}$;

$$\text{daher } \frac{26 - 5y}{2} = \frac{1 + 2y}{3},$$

woraus man $y = 4$ erhält. Wird dieser Wert in 1. substituiert, so hat man $2x + 5.4 = 26$, woraus $x = 3$ folgt.

2. Man sucht den Wert einer Unbekannten aus einer Gleichung und substituiert denselben in die andere Gleichung. (Substitutionsmethode.) Z. B.

$$x + 2y = 8 \ldots 1. \text{ und } 6x - 5y = 14 \ldots 2.$$

Aus 1. folgt $x = 8 - 2y$. Wird dieser Wert in 2. substituiert, so erhält man

$$6(8 - 2y) - 5y = 14,$$

woraus $y = 2$ hervorgeht. Durch Substitution dieses Wertes in 1. bekommt man sodann $x = 4$.

3. Man macht in beiden Gleichungen die Coefficienten der zu eliminierenden Unbekannten dadurch einander gleich, daſs man die Gleichungen mit entsprechenden Factoren multipliciert, und addiert oder subtrahiert sodann die neuen Gleichungen, je nachdem diese Coefficienten

ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben. (Methode der gleichen Coefficienten.) Z. B.

$$4x - 3y = 9 \ldots 1. \text{ und } 6x + 5y = 61 \ldots 2.$$

Multipliciert man die erste Gleichung mit 3 und die zweite mit 2, so erhält man

$$12x - 9y = 27.$$
$$12x + 10y = 122.$$

Wird nun die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert, so erhält man

$$19y = 95,$$

woraus $y = 5$ folgt. Wenn man diesen Wert in die Gleichung 1. substituiert, so findet man daraus $x = 6$.

Nach denselben Methoden können auch Gleichungen mit drei oder mehreren Unbekannten aufgelöst werden.

Es seien z. B. die Gleichungen gegeben

$$2x - 3y + 4z = 4 \ldots 1.$$
$$3x + y - 5z = 6 \ldots 2.$$
$$4x - 2y + 3z = 11 \ldots 3.$$

Nach der Comparationsmethode erhält man

$$x = \frac{4 + 3y - 4z}{2} \ldots 4.$$

$$x = \frac{6 - y + 5z}{3} \ldots 5.$$

$$x = \frac{11 + 2y - 3z}{4} \ldots 6.$$

Aus 4. und 5. folgt $\frac{4 + 3y - 4z}{2} = \frac{6 - y + 5z}{3} \ldots 7.$

Aus 4. und 6. folgt $\frac{4 + 3y - 4z}{2} = \frac{11 + 2y - 3z}{4} \ldots 8.$

Ferner erhält man aus 7. $y = 2z \ldots 9$

und aus 8. $y = \frac{3 + 5z}{4} \ldots 10,$

daher $2z = \frac{3 + 5z}{4}$, woraus $z = 1$ folgt.

Wird dieser Wert in 9. substituiert, so ergibt sich $y = 2$, und wenn man endlich die beiden Werte von z und y in 4. substituiert, so erhält man $x = 3$.

Man nehme hier die Elimination auch nach der Substitutionsmethode und nach der Methode der gleichen Coefficienten vor.

§. 48.

Auflösungs-Aufgaben.

1. $x + y = a,$
$x - y = b,$

2. $7x - 2y = 12,$
$3x + 2y = 8.$

3. $5x + y = 44,$
$x + 3y = 34.$

4. $7x + 3y = 56,$
$12x - 7y = 11.$

5. $7x + 5y = 41,$
$12x + 7y = 64.$

6. $5x - 3y = 33,$
$2x + 3y = 51.$

7. $15x + 8y = 2,$
$5x + 2y = 23.$

8. $ax + by = c,$
$a_1 x + b_1 y = c_1.$

9. $3x - 4y = 10,$
$2x + 5y = 22.$

10. $ax - by = c,$
$a_1 x + b_1 y = c_1.$

Bestimme die Wurzeln der Gleichungen 8. und 10. nach jeder der drei Methoden.

11. $mx + ny = s,$
$ax + by = c.$

12. $50x - 7y = 44,$
$76x - 13y = 48.$

13. $27x + 16y = 452,$
$18x = 88 + 16y.$

14. $20(x - 3) + 5y = y + 4,$
$2(y - 3) = 3(y - x - 2).$

15. $(a + b)x + cy = m,$
$(a - b)x + dy = n.$

16. $mx + (a - b)y = a^2 + b^2,$
$nx + (a + b)y = a^2 - b^2.$

17. $(a + b)x + (a - b)y = a^2 + b^2,$
$(a - b)x + (a + b)y = a^2 - b^2.$

18. $x + y = 20,$
$\frac{x}{9} = y.$

19. $3x - 33 = y,$
$-\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 8.$

20. $x - y = 12,$
$\frac{x}{9} - \frac{y}{8} = 1.$

21. $x - y = c,$
$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$

22. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = c + d,$
$\frac{x}{c} + \frac{y}{a} = a + b.$

23. $\frac{x - 1}{a} = \frac{1 - y}{b},$
$\frac{x + y}{a^2 + b^2} = \frac{x - y}{a^2 - b^2}.$

24. $\frac{5}{8}x - \frac{4}{9}y = 19,$
$\frac{1}{7}x + \frac{1}{4}y = 17.$

25. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{3}{4},$
$\frac{4}{5}x + \frac{5}{6}y = \frac{6}{7}.$

26. $\frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = 17,$
$\frac{5x}{4} + \frac{5y}{8} = -10.$

27. $\frac{x + y}{2} - \frac{x + y}{3} = 4,$
$\frac{x - y}{2} - \frac{x - y}{3} = 1.$

28. $$\begin{aligned} x + y &= 7, \\ x + z &= 10, \\ y + z &= 13. \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} x + y &= 30, \\ 3y - 2z &= 25 \\ x - 2z &= 3. \end{aligned}$$

30. $$\begin{aligned} 4x + 3y - 5z &= 13, \\ 3x - 4y + z &= 2, \\ -2x + 7y + 3z &= 11. \end{aligned}$$

31. $$\begin{aligned} 6x - 2y + 4z &= 60, \\ 3x + 4y + z &= 60, \\ 5x - 8y - 3z + 26 &= 0. \end{aligned}$$

32. $$\begin{aligned} 4x - 2y + 3z &= 8, \\ 7x + 8y - z &= 59, \\ 10x + 3y + 2z &= 49. \end{aligned}$$

33. $$\begin{aligned} x - 3y + z &= 2, \\ 20x - y - 2z &= 7, \\ 7x + 9y - 4z &= 3. \end{aligned}$$

34. $$\begin{aligned} \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{3} &= 6, \\ \frac{x+z}{3} + \frac{y+z}{2} &= 5, \\ 2x + 2y - 5z &= 6. \end{aligned}$$

35. $$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} &= 13, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{8} + \frac{z}{5} &= 10, \\ 3x - y - z &= 10. \end{aligned}$$

36. $$\begin{aligned} \frac{3x+y}{z+1} &= 2, \\ \frac{3y+z}{x+1} &= 2, \\ \frac{3z+x}{y+1} &= 2. \end{aligned}$$

37. $$\begin{aligned} \frac{x+y}{x-3} &= 6, \\ \frac{x+z}{y-4} &= 4, \\ \frac{y+z}{x-3} &= 2. \end{aligned}$$

38. $$\begin{aligned} x + y + z - u &= 8, \\ x - y + z + u &= 12, \\ 2x + 3y + 4z + 5u &= 82, \\ 12x - 5y - 2z + 2u &= 25. \end{aligned}$$

39. $$\begin{aligned} 3u + 5x + 4y + 2z &= 53, \\ u + 3x + 3y + 4z &= 47, \\ 4u + 3x + y + z &= 29, \\ 2u + 4x + 2y + 3z &= 41. \end{aligned}$$

3. Anwendung der Gleichungen auf die Auflösung von Aufgaben.

§. 49.

Die Lösung von Aufgaben mit Hilfe der Gleichungen heißt die **algebraische Auflösung** derselben.

In jeder Aufgabe werden gewisse Bedingungen angegeben, denen die zu suchenden Zahlen genüge leisten sollen. Das erste Geschäft bei der aglebraischen Auflösung einer Aufgabe besteht darin, dass man die gegebenen Bedingungen in die algebraische Zeichensprache überträgt, d. i. die Gleichungen **ansetzt**. Dafür gibt es keine allgemeinen Regeln; Scharfsinn und eine durch Lösung vieler Aufgaben erworbene Übung werden in jedem einzelnen Falle angeben, wie die zu bestimmenden Unbekannten nach den Bedingungen der Aufgabe zu behandeln und in Gleichungen zu bringen sind.

Sind die Gleichungen angesetzt, so gibt die **Auflösung** derselben die gesuchten Werte für die Unbekannten.

Es ist Anfängern sehr anzurathen, dass sie die verschiedenen Aufgaben auch ohne Ansatz einer Gleichung durch bloße Verstandesschlüsse im Kopfe aufzulösen versuchen. Bei den ersteren Aufgaben erscheint in dieser Anleitung nebst der algebraischen Lösung auch jene im Kopfe angegeben, bei den weiteren Aufgaben wird diese dem eigenen Nachdenken der Schüler überlassen.

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung einer Aufgabe zu überzeugen, untersucht man, ob durch den gefundenen Wert der Unbekannten auch wirklich die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

§. 50.

Aufgaben mit beigefügter Auflösung.

1. Man suche eine Zahl, deren 5faches und 7faches zusammen 96 beträgt.

Im Kopfe. Das 5fache und 7fache macht das 12fache; 96 ist also das 12fache von der gesuchten Zahl, oder diese Zahl ist der zwölfte Theil von 96, mithin 8.

Algebraisch. Es sei x die gesuchte Zahl; ihr 5faches ist 5x, das 7fache 7x. Nach der Bedingung der Aufgabe muss also

$$5x + 7x = 96$$

ein; löst man die Gleichung auf, so ergibt sich $x = 8$.

Probe. $5 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 40 + 56 = 96$

2. Welches ist die Zahl, deren 5faches um 42 vermehrt ihr 8faches gibt?

Im Kopfe. Um aus dem 5fachen das 8fache zu erhalten, muss man das 3fache dazu setzen. Wenn man nun aus dem 5fachen auch durch Hinzusetzung von 42 das achtfache bekommt, so muss 42 gleich dem 3fachen der Zahl, und daher die gesuchte Zahl der dritte Theil von 42, d. i. 14 sein.

Algebraisch. Ist x die gesuchte Zahl, so ist 5x ihr fünffaches, 8x ihr 8faches. Nun muss ersteres um 42 vermehrt werden, um das letztere zu geben, somit hat man

$$5x + 42 = 8x, \text{ und daraus } x = 14.$$

Probe. $5 \times 14 + 42 = 70 + 42 = 112$

$$8 \times 14 = 112.$$

3. Die Hälfte und der dritte Theil einer Zahl betragen 25; wie groß ist die Zahl?

Im Kopfe. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind $\frac{5}{6}$; wenn nun $\frac{5}{6}$ von der gesuchten Zahl 25 beträgt, so beträgt $\frac{1}{6}$ nur den fünften Theil von 25, also 5; die Zahl selbst ist daher 6mal 5, d. i. 30.

Algebraisch. Heißt x die gesuchte Zahl, so ist ihre Hälfte $\frac{x}{2}$ und der dritte Theil $\frac{x}{3}$, daher nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25.$$

folglich $x = 30$.

Probe. $\frac{30}{2} + \frac{30}{3} = 15 + 10 = 25.$

4. Welches Capital wächst mit Zurechnung der Zinsen à 5% in einem Jahre auf 2520 *K* an?

Ist x *K* das Capital, so sind $\frac{5x}{100}$ *K* die 5% Zinsen für 1 Jahr; das Capital wächst also sammt Zinsen in 1 Jahr auf $\left(x + \frac{5x}{100}\right)$ *K* an; somit muss

$$x + \frac{5x}{100} = 2520, \text{ also } x = 2400\ K \text{ sein.}$$

5. Jemand hat 2000 *K* nach 2 Monaten, 2500 *K* nach 4 Monaten, und 1500 *K* nach 8 Monaten unverzinslich zu bezahlen; wann wird die Zahlung erfolgen müssen, wenn er die ganze Summe auf einmal bezahlen will? (Terminrechnung).

Bei Aufgaben dieser Art rechnet man den Discont von Hundert, d. i. die Zinsen vom Endwerte. Es muss daher, damit weder dem Schuldner noch dem Gläubiger ein Nachtheil erwachse, die Summe der Zinsen der einzelnen Theilzahlungen gleich sein den auf den mittleren Zahlungstermin entfallenden Zinsen der ganzen Summe. Bezeichnet man den mittleren Zahlungstermin mit x und nimmt z. B. 5% Discont an, so hat man

$$\frac{(2000 + 2500 + 1500) . 5x}{12 \cdot 100} = \frac{2000.5.2}{12 \cdot 100} + \frac{2500.5.4}{12.100} + \frac{1500.5.8}{12.100},$$

oder wenn man durch $\frac{5}{12.100}$ abkürzt,

$$(2000 + 2500 + 1500)\ x = 2000.2 + 2500.4 + 1500.8,$$

daher $$x = \frac{2000.2 + 2500.4 + 1500.8}{2000 + 2500 + 1500} = 4\tfrac{1}{3} \text{ Mon.}$$

Man sieht, dass der mittlere Zahlungstermin von dem Discontprocent völlig unabhängig ist.

6. Ein Reisender wird gefragt, wie viel *km* er zurückgelegt hat. Er gibt zur Antwort: wenn ich 48 *km* mehr zurückgelegt hätte, so würde ich 3mal so weit gekommen sein als jetzt. Wie viel *km* hat er zurückgelegt?

Es sei x die Anzahl der zurückgelegten *km*. Hätte der Reisende 48 *km* mehr zurückgelegt, so würde er x + 48 *km* gemacht haben, und da er in diesem Falle 3mal so weit, also 3x *km* weit gekommen wäre, so ist x + 48 = 3x, daher x = 24.

Probe. $24 + 48 = 72;\ 3 \times 24 = 72.$

7. Ein Kaufmann kauft ein Stück Tuch, das *m* zu $3\frac{3}{4}$ *K*; hierauf verkauft er dasselbe zu $4\frac{1}{2}$ *K* das *m*. Wenn er nun dabei 27 *K* gewonnen hat, wie viel *m* enthielt das Stück?

Bei dieser Aufgabe wird als stillschweigende Bedingung vorausgesetzt, dass der Gewinn gleich ist der Verkaufssumme weniger der Einkaufssumme.

Es sei x die Anzahl *m*, dann ist

die Verkaufssumme für x *m* : $4\frac{1}{2}.x = \frac{9x}{2}$, die Einkaufssumme für x $m = 3\frac{3}{4} . x : \frac{15x}{4}$, daher

$$\frac{9x}{2} - \frac{15x}{4} = 27,$$

woraus x = 36 folgt.

Probe. 36 *m* zu $4\frac{1}{2}$ *K* geben 162 *K* beim Verkaufe,
36 *m* „ $3\frac{3}{4}$ „ „ 135 „ „ Einkaufe,
27 *K* Gewinn.

8. Jemand wurde um sein Alter gefragt und sagte: mein Alter nach 10 Jahren wird doppelt so groß sein, als mein Alter vor 4 Jahren war. Wie alt war er?

Setzt man die Anzahl seiner Jahre = x, so ist
sein Alter nach 10 Jahren = x + 10,
sein Alter vor 4 Jahren = x — 4 Jahre.

Da nun nach der Bedingung der Aufgabe die erste Zahl doppelt so groß sein soll als die zweite, so ist

$$x + 10 = 2 (x - 4),$$

woraus x = 18 folgt.

Probe. Alter nach 10 Jahren = 28 Jahre,
Alter vor 4 Jahren = 14 Jahre,
und wirklich ist 28 = 2.14.

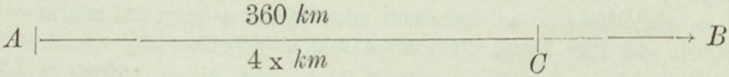
9. Ein Herr versprach seinem Diener jährlich ein Kleid und 180 Kronen. Nach 3 Monaten wird der Diener entlassen und erhält das Kleid. Wie hoch wurde ihm dieses angerechnet?

Es sei der Wert des Kleides = x *K*. Der ganzjährige Lohn beträgt also x + 180 Kronen, folglich der Lohn für 3 Monate $\frac{x + 180}{4}$ *K*; da nun der Diener für diese Zeit das Kleid, also x *K* im Wert, erhalten hat, so muss

$$x = \frac{x + 180}{4},$$

daher x = 60 *K* sein.

10. Ein Courier geht von A nach B und macht täglich 72 *km*; einen Tag später wird ihm von A ein zweiter Courier nachgeschickt; wie viel *km* muss dieser täglich zurücklegen, damit er den ersten Courier in 4 Tagen einhole? (Bewegungsaufgabe.)



Bedeutet x die Anzahl der *km*, welche der zweite Courier täglich zurücklegen muss, so werden von ihm in 4 Tagen 4 x *km* gemacht; der erste Courier, welcher einen Tag länger auf dem Wege ist, wird in diesen Tagen 72 × 5 = 360 *km* machen. Da nun die von den beiden Courieren zurückgelegten Wege, wenn sie zusammenkommen, gleich sein müssen, so hat man 4 x = 360, somit x = 90 *km*.

11. Um 12 Uhr stehen der Minuten- und der Stundenzeiger einer Uhr übereinander; wann werden sich die zwei Zeiger wieder decken?

Die Zahl der Minuten, die von 12 Uhr angefangen verfließen, bis die beiden Zeiger wieder übereinander stehen, sei x, und p eine volle Umdrehung der Zeiger. Der Stundenzeiger beschreibt in 1 Stunde $\frac{1}{12}$, in 1 Minute $\frac{1}{720}$, daher in x Minuten $\frac{x}{720}$ der vollen Umdrehung p. Der Minutenzeiger beschreibt in einer Minute $\frac{1}{60}$, also in x Minuten $\frac{x}{60}$ der vollen Umdrehung p. Wenn nun die beiden Zeiger nach 12 Uhr wieder übereinander zu stehen kommen, hat der Minutenzeiger einen Weg beschrieben, welcher um eine volle Umdrehung größer ist als der von dem Stundenzeiger beschriebene Weg. Es ist daher $\frac{x}{60} \cdot p = \frac{x}{720} \cdot p + p$, oder

$$\frac{x}{60} = \frac{x}{720} + 1,$$

woraus $x = 65\frac{5}{11}$ folgt. Die zwei Zeiger werden sich also um 1 Uhr $5\frac{5}{11}$ Minuten wieder decken.

§. 51.

Werden durch eine Aufgabe zwei Zahlen als unbekannt bezeichnet, so müssen, damit die Aufgabe eine bestimmte Lösung zulasse, in derselben ausdrücklich oder stillschweigend zwei Bedingungen enthalten sein. Jede dieser Bedingungen gibt in die algebraische Zeichensprache übertragen eine Gleichung zwischen den zwei Unbekannten. Läßt sich eine dieser Unbekannten durch die andere unmittelbar bestimmen, so kann die Aufgabe auch durch eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten aufgelöst werden.

Ähnliches gilt von den Aufgaben mit drei oder mehreren Unbekannten.

12. Ich denke mir zwei Zahlen, von denen die erste um 3 kleiner ist als die zweite; multipliciere ich die erste mit 4 und subtrahiere vom Producte 18, so erhalte ich die zweite. Welches sind die zwei Zahlen?

a) Mittelst zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es seien x und y die beiden Zahlen. Da die erste um 3 kleiner ist als die zweite, so hat man die Gleichung

$$x = y - 3.$$

Nach der zweiten Bedingung der Aufgabe muss das 4fache der ersten Zahl um 18 vermindert die zweite Zahl geben, also die Gleichung

$$4x - 18 = y$$

stattfinden. Durch die Auflösung dieser zwei Gleichungen erhält man $x = 7$ und $y = 10$.

b) Mittelst einer einzigen Gleichung mit einer Unbekannten. Nennt man x die erste Zahl, so ist $x + 3$ die zweite. Man hat daher nach den Bedingungen der Aufgabe

$$4x - 18 = x + 3,$$

woraus $x = 7$, und daher $x + 3 = 10$ hervorgeht.

Probe. Die zweite Zahl 10 ist wirklich um 3 größer als die erste 7; ferner gibt das 4fache von 7 weniger 18 zur Differenz 10, d. i. die zweite Zahl.

13. Man theile 50 so in zwei Theile, dass der eine Theil um 6 kleiner sei als der andere.

a) Wenn man die zwei gesuchten Theile durch x und y ausdrückt, so ist erstlich

$$x + y = 50.$$

Da ferner der erste Theil um 6 vermehrt werden muss, um den zweiten zu erhalten, so hat man auch die Gleichung

$$x + 6 = y.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun $x = 22$ und $y = 28$.

b) Heißt der kleinere Theil x, so ist $50 - x$ der größere und man muss nach den Bedingungen der Aufgabe zu dem kleineren Theile x noch 6 addieren, um den größeren $50 - x$ zu erhalten; es ist daher $x + 6 = 50 - x$, woraus $x = 22$ und $50 - x = 28$ hervorgeht.

14. In welche zwei Theile muss man 60 zerlegen, damit der größere Theil durch den kleineren dividiert 2 zum Quotienten und 3 zum Rest gebe?

Ist x der größere und y der kleinere Theil, so hat man nach den Bedingungen der Aufgabe

$$x + y = 60, \text{ und}$$
$$\frac{x}{y} = 2 + \frac{3}{y},$$

woraus sich $x = 41$ und $y = 19$ ergibt.

15. Die Zahl 117 in zwei Theile zu theilen, welche sich wie $5 : 8$ verhalten.

Bezeichnet man die zwei gesuchten Theile mit x und y, so ist

$$x + y = 117, \text{ und } x : y = 5 : 8, \text{ oder } 8x = 5y,$$

aus welchen Gleichungen sich $x = 45$ und $y = 72$ ergibt.

16. Ein Kaufmann hat zwei Sorten Reis, das *kg* zu 56 *h* und zu 70 *h*; er will durch Mischung beider 126 *kg* einer dritten Sorte erhalten, von welcher das *kg* 64 *h* kosten soll; wie viel von jeder Sorte muss er zur Mischung nehmen? (Mischungsrechnung.)

Hier wird stillschweigend vorausgesetzt, dass der Wert der Mischung gleich ist der Summe der Werte der Bestandtheile.

Ist x die Anzahl *kg* der Sorte à 56 *h* und y die Anzahl *kg* der Sorte à 70 *h*, so ist erstlich

$$x + y = 126 \ldots 1.$$

Ferner ist in Hellern ausgedrückt

der Wert von x *kg* à 56 *h* . . . . $56x$,
" " " y " à 70 " . . . . $70y$,
der Wert beider Bestandtheile zusammen $56x + 70y$,
und der Wert der Mischung $64 (x + y)$,

daher

$$64x + 64y = 56x + 70y \ldots 2.$$

Aus den Gleichungen 1. und 2. folgt

$$x = 54,\ y = 72.$$

Probe.	54 *kg* à 56 *h*	3024 *h*
	72 „ à 35 „	5040 „
	126 *kg* der Mischung . .	8064 *h*
	1 „ „ „ . .	64 „

17. Ein Vater ist gegenwärtig 2mal so alt als sein Sohn; vor 15 Jahren war er 5mal so alt als der Sohn. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

Der Sohn sei x Jahre alt, dann ist das Alter des Vaters 2x Jahre; vor 15 Jahren war der Vater 2x — 15, der Sohn x — 15 Jahre alt. Man hat daher die Gleichung

$$2x - 15 = 5\,(x - 15),$$

woraus man x = 20 und 2x = 40 erhält. Der Vater ist also 40, der Sohn 20 Jahre alt.

Löse diese Aufgabe auch mit Hilfe zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten auf.

18. Unter drei Knaben wurden 100 Zehner so vertheilt, dass der zweite doppelt so viel als der erste und der dritte um 10 Zehner mehr als die Hälfte dessen bekommt, was der erste und zweite zusammen erhalten. Wie viel Zehner bekommt jeder der drei Knaben?

a) Mittelst dreier Gleichungen. Es seien x, y, z die Zahlen der Zehner, welche folgeweise A, B und C bekommen, so ist erstlich

$$x + y + z = 100.$$

Da B doppelt so viel als A bekommt, so ist ferner

$$y = 2x.$$

Da endlich C um 10 Zehner mehr als die Hälfte dessen bekommt, was A und B zusammen erhalten, so hat man auch

$$z = \frac{x + y}{2} + 10.$$

Durch Auflösung dieser drei Gleichungen erhält man nun x = 20, y = 40 und z = 40.

b) Mittelst einer einzigen Gleichung.

Es sei x die Anzahl Zehner, welche A bekommt,
so ist 2x „ „ „ „ B „
$\frac{x + 2x}{2} + 10$ „ „ „ C „

daher

$$x + 2x + \frac{3x}{2} + 10 = 100,$$

welche Gleichung x = 20 gibt.

A bekommt also x = 20 Zehner,
B „ 2x = 40 „
C „ $\frac{3x}{2} + 10 = 40$ „

§. 52.

Aufgaben zur Selbstlösung.

Gleichungen mit einer Unbekannten:

19. Wenn ich eine gewisse Zahl mit 3 multipliciere, so erhalte ich dasselbe, als wenn ich 24 zu ihr addiere; welches ist die Zahl?

20. Welche Zahl liefert durch 4 dividiert dasselbe Resultat, als wenn man von ihr 30 subtrahiert?

21. Welche Zahl ist um 23 größer als die Summe aus ihrem vierten, fünften und sechsten Theile?

22. Von welcher Zahl ist das 4fache ebenso groß als das 6fache der um 8 verminderten Zahl?

23. Wenn ich zu einer gewissen Zahl 8 addiere und diese Summe durch 5 dividiere, so erhalte ich denselben Quotienten, als wenn ich von der Zahl 4 subtrahiere und die Differenz durch 3 dividiere; welches ist die Zahl?

24. Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich dieselbe mit 3 multipliciere, zu dem Producte 8 addiere, die Summe durch 8 dividiere und von dem Quotienten 4 subtrahiere, so erhalte ich 0; welche Zahl habe ich mir gedacht?

25. Wenn man eine um 3 verminderte unbekannte Zahl durch 4 dividiert, zum Quotienten 17 addiert, so kommt eine Zahl heraus, die um 3 kleiner ist, als das 3fache der Unbekannten; welches ist die Unbekannte?

26. Welche Zahl muss zum Zähler und Nenner des Bruches $\frac{20}{27}$ addiert werden, damit man den Bruch $\frac{3}{4}$ erhalte?

27. Welche Zahl muss man vom Zähler und Nenner des Bruches $\frac{17}{20}$ subtrahieren, um den Bruch $\frac{5}{6}$ zu erhalten?

28. Welche Zahl muss man vom Zähler des Bruches $\frac{13}{32}$ subtrahieren, und zugleich zum Nenner desselben addieren, damit man den Bruch $\frac{1}{8}$ erhalte?

29. Welche Zahl muss man zu 32 addieren und von 32 subtrahieren, damit sich die Summe zur Differenz wie 11 : 5 verhalte?

30. Durch welche Zahl muss man 230 dividieren, damit man 13 zum Quotienten und 9 zum Reste erhalte?

31. Eine zweiziffrige Zahl enthält 3 Zehner; vertauscht man die Ziffern derselben, so erhält man eine um 36 größere Zahl.

32. Das 4fache einer Zahl gibt mit dem 6fachen derselben multipliciert 3456; wie heißt die Zahl?

33. Ein Kaufmann verkauft eine Ware für 924 *K* mit 12% Gewinn; wie theuer hat er die Ware eingekauft?
34. Hätte ein Kaufmann eine Ware um 30 *K* billiger gekauft und sie für 392 *K* verkauft, so würde er 12% gewonnen haben; wie viel kostete die Ware?
35. Für eine Ware werden bei 2% Sconto sogleich $563\frac{1}{2}$ *K* gezahlt; wie viel kostet die Ware ohne Abrechnung des Sconto?
36. Ein Capital ist sammt den Zinsen zu 5% in $1\frac{1}{2}$ Jahren auf 3827 *K* angewachsen; wie groß ist das Capital?
37. Wie groß ist ein Capital, welches mit den Zinsen zu p% nach t Jahren e *K* beträgt?
38. Wie lange muss ein Capital zu 4% angelegt bleiben, damit es sich mit den einfachen Zinsen verdoppelt?
39. Zu wie viel % muss ein Capital angelegt werden, damit die Zinsen in 10 Jahren die Hälfte des Capitals betragen?
40. Wie lange muss ein Capital ausstehen, damit es zu $4\frac{1}{2}$% eben so viel Zinsen bringt, als es bisher zu 6% in 3 Jahren gab?
41. Welches Capital trägt zu 6% jährlich 85 *K* mehr Zinsen, als früher zu 5%?
42. Um wie viel fl. muss ein Capital von 2700 fl. vermindert werden, wenn es zu $4^1/_2$% so viel Zinsen tragen soll, wie früher zu 4%?
43. Ein zu $4^1/_2$% ausgeliehenes Capital wurde nach 2 Jahren sammt den Zinsen zurückgezogen und dann die ganze Summe zu 5% angelegt; wie groß war das ursprüngliche Capital, wenn die jährlichen Zinsen des gegenwärtigen Capitals 293·3 fl. betragen?
44. Ein Capital ist zu 4% ausgeliehen. Dividiert man den 5ten Theil des Capitals durch die Zinsen des ganzen Capitals und addiert zum Quotienten 75, so erhält man so viel, als die Zinsen des Capitals betragen. Wie groß ist das Capital?
45. A leiht an B 1800 *K* und an C 3000 *K*; B zahlt um $\frac{1}{2}$% höhere Zinsen als C. Zu wie viel % ist jedes Capital ausgeliehen, wenn A von beiden zusammen jährlich 225 *K* Zinsen erhält?
46. Für eine nach einem Jahre fällige Summe zahlt jemand bei $4\frac{1}{2}$% Discont sogleich 1500 *K*; wie viel war er zu zahlen schuldig?
47. Jemand ist nach einer gewissen Zeit 2915 *K* schuldig; er bezahlt bei 6% jährlichem Discont bar 2650 *K*; nach welcher Zeit hätte er zahlen müssen?
48. Jemand bezahlte für ein Capital, das nach 4 Jahren fällig war, bar 1600 *K*; der Discont betrug 288 *K*; wie viel % Discont jährlich sind gerechnet worden?

49. Bei $4^3/_4$% jährlichem Discont werden von einer nach $6^2/_3$ Monaten zahlbaren Schuldsumme $47^1/_2$ *K* abgezogen; wie groß ist die Schuldsumme?

50. Jemand ist 500 *K* nach 2 Monaten, 600 *K* nach 3 Monaten, 700 *K* nach 4 Monaten zu zahlen schuldig; mit welcher Summe kann er bei 5% Discont diese drei Schulden sofort begleichen?

51. Jemand hat 200 *K* nach 3 Monaten und 500 *K* nach 10 Monaten unverzinslich zu zahlen; wann kann er beide Summen auf einmal zahlen, so dass weder der Gläubiger noch der Schuldner dabei zu Schaden kommt?

52. Eine Summe von 10000 *K* ist in 4 Raten zu bezahlen, und zwar: 3000 *K* nach 4 Monaten, 2500 *K* nach 6 Monaten, 2000 *K* nach 8 Monaten und der Rest nach 1 Jahre; wenn nun die ganze Summe auf einmal erlegt wird, wann soll dies geschehen?

53. A hat nach 2 Jahren 2000 *K* zu zahlen; er zahlt nun 800 *K* nach 1 Jahre; wie lange darf er den Rest behalten?

54. Jemand ist 300 *K* nach 4, und 500 *K* nach 5 Jahren zu zahlen schuldig; er zahlt 300 *K* schon nach 2 Jahren; wann werden dann die 500 *K* fällig sein?

55. Jemand soll 500 *K* nach 2 Monaten und 600 *K* nach 3 Monaten bezahlen; er bezahlt aber 500 *K* sogleich; wann hat er die 600 *K* zu entrichten?

56. A hat 600 fl. sogleich und 400 fl. nach 6 Monaten zu entrichten; er zahlt jedoch die 600 fl. nicht, dagegen nach 2 Monaten 800 fl.; wann ist der Rest fällig?

57. Der gemeinschaftliche Gewinn zweier Geschäftsfreunde beträgt 505 *K*; derselbe soll so getheilt werden, dass A um 25 *K* weniger bekommt als B; wie viel erhält jeder?

58. A hat in zwei Rollen zusammen 206 fl., in der ersten 44 fl. mehr als in der zweiten; wie viel in jeder?

59. Zerlege 96 in drei Theile, von denen der erste 3mal, der zweite doppelt so groß ist als der dritte.

60. Drei Personen sollen 360 *K* so unter einander theilen, dass A doppelt so viel als B, und C dreimal so viel als A erhält; wie viel bekommt jede Person?

61. Theile 64 in vier Theile, so dass jeder folgende um $^1/_2$ größer ist als der vorhergehende.

62. 600 *K* sind unter vier Personen zu theilen, so dass jede folgende doppelt so viel erhält als die vorhergehende.

63. Wie viel l à 72 h muſs man mit 30 l à 96 h mischen, damit das l der Mischung 80 h wert ist?

64. Wie viel Wasser muſs man einem Hektoliter zu scharfen Essig, der 56 K kostet, zugießen, damit das l um 6 h billiger zu stehen kommt?

65. Jemand mischt 50 kg einer Ware, wovon das kg 60 h kostet, mit 40 kg einer geringeren Sorte, und nun kommt das kg der Mischung auf 54 h; wie viel kostet 1 kg der zweiten Sorte?

66. Ein Silberarbeiter hat 6 kg feines Silber; wie viel Kupfer muſs er damit legieren, um Silber von $812\frac{1}{2}$ Tausendtheilen Feingehalt zu erhalten?

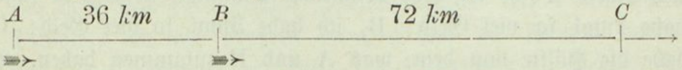
67. Ein Wanderer legt täglich 48 km zurück; ein anderer tritt 2 Tage später dieselbe Reise an; wie viel km muſs dieser täglich zurücklegen, um den ersten in 8 Tagen einzuholen?

68. Zwei Couriere gehen von A nach B ab; der erste legt täglich 70 km, der zweite 105 km zurück. Wenn nun der zweite um 4 Tage später von A abgegangen ist als der erste, in wie viel Tagen wird er den ersten einholen?

69. Um 7 Uhr vormittags fährt von Wien auf der Westbahn ein Personenzug, um 9 Uhr vormittags ein Schnellzug ab; wann wird der Schnellzug den Personenzug einholen, wenn der erstere in jeder Stunde 42 km, der letztere 26 km zurücklegt?

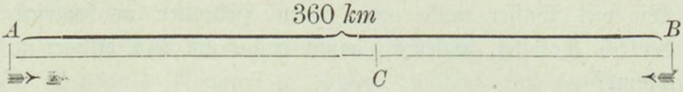
70. Zwei Couriere gehen von A aus in entgegengesetzter Richtung, und zwar legt der eine täglich 15 km mehr als der andere zurück; welchen Weg hat jeder zurückgelegt, wenn sie nach 6 Tagen 690 km von einander entfernt sind?

71. Von B aus fährt in der Richtung gegen C ein Postzug, welcher in jeder Stunde 24 km zurücklegt; zu gleicher Zeit fährt von A aus, welcher Ort 36 km hinter B liegt, in derselben Richtung ein Schnellzug, welcher den Postzug in 3 Stunden erreicht; wie viel km legt der Schnellzug in einer Stunde zurück?



72. Einem Boten, der von A aus vor 6 Tagen abgieng und täglich 6 Meilen macht, wird von B aus, welchen Ort er berührte, ein zweiter Bote nachgesendet, welcher täglich 10 Meilen macht; in wie viel Tagen wird er den ersten einholen, wenn die Entfernung zwischen A und B 8 Meilen beträgt?

73. Von A geht ein Bote, welcher täglich 56 km macht, nach dem 360 km entfernten Orte B; zu gleicher Zeit geht ein zweiter Bote, welcher täglich 48 *km* zurücklegt, von B nach A; wann und in welcher Entfernung von A werden beide zusammentreffen?



Die Summe der von beiden zur Zeit des Zusammentreffens zurückgelegten Strecken ist gleich der Entfernung der zwei Orte.

74. Um 6 Uhr befinden sich die beiden Zeiger einer Uhr in entgegengesetzter Richtung. Wann wird der Minutenzeiger den Stundenzeiger zum erstenmale nach 6 Uhr einholen?

75. Jemand war vor 8 Jahren 4mal so alt als der 5te Theil seines gegenwärtigen Alters beträgt; wie alt ist er jetzt?

76. Ein Vater sagt: ich bin jetzt 40 Jahre alt, mein älterer Sohn 16, mein jüngerer 3; nach wie viel Jahren werden meine Söhne zusammen so viele Lebensjahre zählen als ich?

77. Jemand ist 60 Jahre und sein Sohn 24 Jahre alt; a) vor wie viel Jahren war der Vater 4mal so alt als der Sohn? b) nach wie viel Jahren wird er doppelt so alt als der Sohn sein?

78. Ein Lehrer gab auf die Frage, wie viel Schüler er habe, folgende Antwort: die Hälfte meiner Schüler beträgt 16 mehr als der sechste und der neunte Theil derselben. Wie viele Schüler hat er?

79. Ein Bauernmädchen wurde nach der Anzahl Eier gefragt, die sie im Korbe trug. $\frac{3}{4}$ davon, erwiderte sie, betragen 5 mehr, als $\frac{5}{8}$ davon machen. Wie viel Eier waren im Korbe?

80. Jemand hat zwei goldene Dosen, die eine ist nur $\frac{5}{8}$ von der andern wert und kostet deshalb um 30 *K* weniger; wie theuer ist jede Dose?

81. Um eine Uhr zu kaufen, hat A nur $\frac{1}{4}$, B $\frac{1}{7}$ des geforderten Preises bei sich; beide zusammen haben 33 Kronen. Wie groß ist der Preis der Uhr?

82. Auf einem Tische lag eine bestimmte Summe Geldes. A sagt: ich habe 2mal so viel Geld; B, ich habe 3mal so viel Geld; C, ich habe die Hälfte von dem, was A und B zusammen haben. Wenn nun alle zusammen 240 fl. hatten; wie viel Geld lag auf dem Tische und wie viel besaß jeder?

83. Zu einer Arbeit bieten sich 2 Personen an; A würde die verlangte Arbeit in 18, B in 15 Tagen liefern. In wie viel Tagen würde die Arbeit durch A und B zusammen geleistet werden?

84. Wenn man von einer Summe die Hälfte wegnimmt, von dem Reste wieder die Hälfte und von dem neuen Reste nochmals die

Hälfte, so bleiben 74 *K* übrig; wie groß war die anfängliche Summe?

85. Ein Knabe gibt seinem ältesten Bruder die Hälfte seiner Nüsse weniger 8, dem zweiten die Hälfte des Restes weniger 8, dem dritten wieder 8 weniger als die Hälfte des jetzigen Restes, und so auch dem vierten 8 weniger als die Hälfte des neuen Restes, die noch übrigen 20 Stücke behält er selbst. Wie viel Nüsse hatte er anfänglich und wie viele gab er jedem Bruder?

86. Der Halbmesser eines Kreises beträgt 1·45 *dm*; wie groß ist der Halbmesser eines 6mal so großen Kreises.

87. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Höhe 18 *cm* beträgt?

§. 53.

Gleichungen mit zwei und mehreren Unbekannten.

88. Welche zwei Zahlen geben 81 zur Summe und 35 zur Differenz?

89. Die halbe Summe zweier Zahlen ist 90 und die doppelte Differenz 100; welches sind die beiden Zahlen?

90. Zwei Zahlen, deren Differenz 12 ist, sind so beschaffen, dass das 3fache der ersten gleich ist dem 5fachen der zweiten; welches sind diese Zahlen?

91. Vermehre ich eine zweiziffrige Zahl um das 4fache ihrer Einer, so erhalte ich 60; vermehre ich aber die Zahl um 54, so erscheinen in der Summe ihre zwei Ziffern in umgekehrter Ordnung; wie heißt die zweiziffrige Zahl?

92. Zwei Zahlen verhalten sich wie 4 : 5. Vermehrt man die kleinere um 12 und vermindert die größere um 12, so verhalten sich die Resultate wie 5 : 4; wie heißen die Zahlen?

93. Man soll drei Zahlen finden, die so beschaffen sind, dass die erste und zweite 38, die erste und dritte 43, die zweite und dritte 31 zur Summe geben.

94. Ich habe mir zwei Zahlen gedacht, welche um 1 verschieden sind. Dividiere ich die größere durch 4 und die kleinere durch 5, so sind die Quotienten ebenfalls um 1 verschieden; welches sind die zwei Zahlen?

95. Die Differenz zweier Zahlen ist 10; subtrahiere ich die kleinere von 105, die größere von 135, so verhalten sich die Differenzen wie 7 : 9; welches sind die zwei Zahlen?

96. Ein Kaufmann gewinnt 15%, wenn er den Centner einer Ware zu 46 *K* verkauft; wie viel % gewinnt er, wenn er den Centner zu 48 *K* verkauft?

97. Beim Verkaufe einer Ware für 120 *K* hatte der Kaufmann 4% Verlust; wie groß war der Einkaufspreis und wie theuer hätte er die Ware verkaufen müssen, um 8% zu gewinnen?

98. Zwei Capitalien, die zusammen 3600 *K* betragen, bringen jährlich 168 *K* Zinsen ein; wie groß ist jedes Capital, wenn das eine zu 5%, das andere zu 4% ausgeliehen ist?

99. Von zwei Capitalien, deren Unterschied 1500 *K* beträgt, ist das erste zu $4\frac{3}{4}$%, das zweite zu $5\frac{1}{2}$% angelegt. Wie groß ist jedes, wenn beide gleich viel Zinsen tragen?

100. Jemand hat ein Capital von 7400 *K* zu gleichem Zinsfuß an drei verschiedene Schuldner ausgeliehen; er erhält von dem ersten in 4 Jahren so viel Zinsen, als von dem zweiten in 5 und von dem dritten in 6 Jahren. Wie viel hat er jedem ausgeliehen?

101. Die Zahl 85 ist in zwei Theile zu theilen, die sich wie 8 : 9 verhalten.

102. In einer Gesellschaft befinden sich 88 Personen, und zwar verhält sich die Anzahl der Männer zu jener der Damen wie 5 : 6. Wie viel Männer und wie viel Damen zählt die Gesellschaft?

103. Die Zahl 80 soll in zwei Theile so getheilt werden, dass das Doppelte des einen Theiles der Hälfte des andern gleich ist.

104. Zerlege die Zahl 56 in zwei Theile so, daß der um 20 verminderte erste Theil dem doppelten zweiten Theile gleich ist.

105. 1200 *K* sollen unter drei Personen so vertheilt werden, dass die zweite 3mal so viel als die erste weniger 20 *K*, die dritte 4mal so viel als die zweite und noch 20 *K* erhält; wie viel bekommt jede Person?

106. Die Summe dreier Zahlen beträgt 423; die erste gibt durch die zweite, und ebenso die zweite durch die dritte dividiert 4 zum Quotienten und 4 zum Reste; wie heißen die drei Zahlen?

107. Ein Wirt hat zweierlei Weine, das *hl* zu 80 *K* und zu 96 *K*; er will durch Mischung dieser beiden Gattungen 10 *hl* zu 84 *K* erhalten; wie viel muss er von jeder Gattung dazu verwenden?

108. Ein Kaufmann will aus Kaffee im Preise zu 160 kr. und zu 180 kr. 25 *kg* à 172 kr. mischen; wie viel *kg* muss er von jeder Sorte nehmen?

109. Wie viel feines Silber und wie viel Kupfer muss man nehmen, um $8\frac{3}{4}$ *kg* Silber, das 520 Tausendtheile fein ist, zu bekommen?

110. Aus 40- und 68gradigem Spiritus sollen 84 *l* 52gradigen Spiritus gemischt werden; wie viel von jeder Sorte wird man zur Mischung verwenden?

111. Mischt man 4 *kg* Kaffee der einen Sorte mit 12 *kg* einer zweiten Sorte, so ist das *kg* der Mischung 3·52 *K* wert; mischt man aber 6 *kg* der ersten Sorte mit 10 *kg* der zweiten, so ist das *kg* der Mischung 3·48 *K* wert; wie viel ist das *kg* jeder Sorte wert?

112. Um eine gewisse Strecke zurückzulegen, brauchte ein Eisenbahnzug $4\frac{1}{2}$ Stunden; er würde jedoch nur $3\frac{1}{3}$ Stunden gebraucht haben, wenn er in jeder Stunde $9\frac{4}{5}$ *km* mehr zurückgelegt hätte; wie viel *km* hat der Zug stündlich zurückgelegt und wie lang war die Strecke?

113. Zwei Brüder zählen gegenwärtig zusammen 47 Lebensjahre. Vor 10 Jahren war der ältere Bruder gerade doppelt so alt als der jüngere; wie alt ist jeder?

114. Mitten im Mai ist der Tag an einem Orte um 6 Stunden 15 Minuten länger als die Nacht; wie lang ist da der Tag und wie lang die Nacht?

115. Zwei Personen besitzen zusammen 3500 *K*; gäbe B dem A 150 *K* von seinem Vermögen, so hätten beide gleichviel; wie viel besitzt jeder?

116. Von zwei Personen besitzt jede eine Summe Geldes. Gibt A an B 4 *K* ab, so haben beide gleich viel; gibt aber B an A 5 *K* ab, so hat A doppelt so viel als B; wie viel Geld hat A, wie viel B?

117. In einer Gesellschaft waren 3mal so viel Herren als Damen; da später 3 Herren mit 4 Damen dazu kamen, waren 2mal so viel Herren als Damen; wie viel Herren und Damen waren anfangs da?

118. In einer Gesellschaft waren 2mal so viel Männer als Frauen; als 6 Männer mit ihren Frauen fortgegangen waren, blieben 5mal so viel Männer als Frauen; wie viel Männer und wie viel Frauen waren anfangs in der Gesellschaft?

119. Jemand zahlt für 8 *kg* Kaffee und 15 *kg* Zucker zusammen 41 *K* 80 *h*, und für 5 *kg* Kaffee und 9 *kg* Zucker 25 *K* 84 *h*; wie viel kostet das *kg* einer jeden Ware?

120. Von 62 *m* Tuch wird ein Theil verkauft und dabei an jedem *m* $\frac{4}{5}$ *K* gewonnen; beim Verkaufe des Restes werden an jedem *m* $\frac{3}{8}$ *K* verloren. Wenn nun der reine Gewinn 30 *K* beträgt, wie viele *m* wurden mit Gewinn und wie viele mit Verlust verkauft?

121. Jemand hat zwei volle Weinfässer; nimmt er aus dem ersten 40 *l* und aus dem andern 80 *l*, so enthalten beide gleich viel; nimmt er aber aus dem ersten 80 *l* und aus dem zweiten 40 *l*, so enthält das zweite 3mal so viel als der erste; wie viel Wein ist in jedem Fasse?

122. Jemand hat drei Fässer, von denen das erste 98 *l* weniger als das Doppelte des Inhaltes des dritten hält. Füllt man das zweite leere Faß aus dem ersten vollen, so bleibt in diesem noch $\frac{1}{5}$ seines Inhaltes zurück; füllt man das dritte leere aus dem zweiten vollen, so bleibt im zweiten noch $\frac{1}{5}$ seines Inhaltes; wie viel *l* hält jedes Faß?

123. Ein Winkel ist um 62^0 kleiner als sein Nebenwinkel; wie groß ist er?

124. In einem rechtwinkligen Dreiecke verhalten sich die beiden spitzen Winkel wie 2 : 7; wie groß ist jeder?

125. Ein Dreieckswinkel ist doppelt so groß als die Summe der beiden anderen; wie groß ist derselbe?

126. Wie groß sind die Winkel eines Dreieckes, wenn sich dieselben wie 2 : 3 : 4 verhalten?

127. Die Seiten eines Dreieckes betragen 5 *m*, 6 *m* und 9 *m*; wie groß sind die Seiten eines ähnlichen Dreieckes, dessen Umfang 12 *dm* beträgt?

128. In einem Dreiecke ABC ist $AB + AC = 42$ *m*, $AB + BC = 38$ *m*, $AC + BC = 30$ *m*; wie groß ist jede Seite?

129. In einem gleichschenkligen Dreiecke, dessen Umfang 27 *dm* beträgt, ist die Grundlinie um 5 *dm* kleiner als ein Schenkel; wie groß sind die Seiten?

130. Der Umfang eines Rechteckes beträgt 32 *cm*; wie lang sind die Seiten, wenn die größere Seite 3mal so groß ist als die kleinere?

131. In einem Dreiecke ist ein Winkel um 24^0 größer als der zweite, und dieser um 12^0 kleiner als der dritte; wie groß sind die Winkel?

132. Wenn man in einem Rechtecke, dessen Umfang 128 *cm* beträgt, die längere Seite um 2 verkürzt und die kürzere um 2 verlängert, so vergrößert sich der Flächeninhalt des Rechteckes um 12 cm^2; wie groß sind die Seiten?

133. Eine Seite eines Rechteckes beträgt 35 *dm*, die Summe der zweiten Seite und der Diagonale ist 49 *dm*; wie groß ist die zweite Seite?

134. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete 25 *cm*, die andere Kathete um 5 kleiner als die Hypotenuse; wie groß ist die Hypotenuse und die zweite Kathete?

135. In einem Rechtecke, dessen Flächeninhalt 735 cm^2 beträgt, verhalten sich die zwei Seiten wie 5 : 3; wie groß sind diese?

136. In einem Rechtecke verhält sich die Länge zur Breite wie 35 : 12, die Diagonale beträgt 74 *cm*; wie groß sind die Länge und die Breite?

VI. Cubieren und Ausziehen der Cubikwurzel.

1. Cubieren dekadischer Zahlen.

§. 54.

Eine Zahl cubieren oder zum Cubus erheben heißt, die Zahl dreimal als Factor setzen.

Z. B. $738^3 = 738 \times 738 \times 738 = 401947272$,

$7{\cdot}02^3 = 7{\cdot}02 \times 7{\cdot}02 \times 7{\cdot}02 = 345{\cdot}948408$,

$(\frac{9}{16})^3 = \frac{9}{16} \times \frac{9}{16} \times \frac{9}{16} = \frac{729}{4096}$.

Die dritten Potenzen der einziffrigen Zahlen sind:

$$\begin{array}{lll} 1^3 = 1, & 4^3 = 64, & 7^3 = 343, \\ 2^3 = 8, & 5^3 = 125, & 8^3 = 512, \\ 3^3 = 27, & 6^3 = 216, & 9^3 = 729. \end{array}$$

Zur leichteren Begründung der Lehre vom Ausziehen der Cubikwurzel soll hier ein zweites Verfahren, eine Zahl zum Cubus zu erheben, abgeleitet werden.

§. 55.

Cubieren einer ganzen dekadischen Zahl

Um eine aus Zehnern und Einern bestehende Zahl $a.10 + b$ zum Cubus zu erheben, wird man ihr Quadrat $a^2.100 + 2ab.10 + b^2$ noch mit $a.10 + b$ multiplicieren; man erhält

$$\begin{array}{rl} & a^2.\,100 + 2ab.10 + b^2 \\ & a\,.\;\;10 + b \\ \hline & a^3.1000 + 2a^2b.100 + ab^2.10 \\ & \qquad\qquad + a^2b.100 + 2ab^2.10 + b^3 \\ \hline (a.10 + b)^3 = & a^3.1000 + 3a^2b.100 + 3ab^2.10 + b^3 \end{array}$$

z. B. $59^3 = 5^3.1000 + 3.5^2.9.100 + 3.5.9^2.10 + 9^3$.

Der Cubus einer aus Zehnern und Einern bestehenden Zahl enthält also den Cubus der Zehner, das Product aus dem dreifachen Quadrate der Zehner mit den Einern, das Product aus dem Dreifachen der Zehner mit dem Quadrate der Einer und den Cubus der Einer.

Dabei bedeutet der Cubus der Zehner Tausender, das Product aus dem dreifachen Quadrate der Zehner mit den Einern Hunderter, und das Product aus dem Dreifachen der Zehner mit dem Quadrate der Einer Zehner.

Mit Beachtung dieses Stellenwertes der Bestandtheile kann man dieselben als Summanden so untereinander setzen, dass jeder folgende um eine Stelle weiter nach rechts hinausrückt. Man hat dann

$59^3 =$

5^3 . . . 125
$3.5^2.9$. . . 675
$3.5.9^2$. . . 1215
9^3 . . . 729

$= 205379$

Ist eine dreiziffrige Zahl 248 zu cubieren, so besteht, da $248 = 240 + 8$ und $24 = 20 + 4$ ist, mit entsprechender Beachtung des Stellenwertes

248^3 aus 24^3, $3.24^2.8$, $3.24.8^2$ und 8^3,
24^3 „ 2^3, $3 . 2^2.4$, $3 . 2.4^2$ und 4^3,
somit 248^3 „ 2^3, $3.2^2.4$, $3.2.4^2$, 4^3, $3.24^2.8$, $3.24.8^2$ und 8^3;

man hat also, wenn diese Bestandtheile gehörig untereinander geschrieben werden,

$248^3 =$

2^2 . . . 8
$3.2^2.4$. . . 48
$3.2.4^2$. . . 96
4^3 . . . 64
$3.24^2.8$. . . 13824
$3.24.8^2$. . . 4608
8^3 . . . 512

$= 15252992$

Auf gleiche Weise erhält man

3915^3

3^3 . .	27			
$3.3^2.9$ . .	24	3		
$3.3.9^2$ . .	7	29		
9^3 . .		729		
$3.39^2.1$ . .		456	3	
$3.39.1^2$ . .		1	17	
1^3 . .			1	
$3.391^2.5$ . .		229	321	5
$3.391.5^2$ . .			293	25
5^3 . .				125
	60	006	085	875.

Aus diesen Beispielen ergibt sich für die Bildung des Cubus einer mehrziffrigen Zahl folgendes Verfahren:

1. Man nehme den Cubus der ersten Ziffer der Wurzel.

2. Von jeder folgenden Wurzelziffer bilde man drei Bestandtheile: das Product aus dem dreifachen Quadrate der ihr vorangehenden Zahl mit dieser Ziffer, das Product aus dem Dreifachen der vorangehenden Zahl mit dem Quadrate dieser Ziffer, und ihren Cubus.

3. Diese Bestandtheile werden in der Ordnung so untereinander geschrieben, dass jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann addiert.

Da die erste Wurzelziffer im Cubus eine, zwei oder drei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Wurzelziffer aber im Cubus immer drei Stellen zuwachsen, so enthält der Cubus einer Zahl entweder dreimal so viel Ziffern, als deren die Cubikwurzel hat, oder um zwei oder eine weniger. Theilt man daher den Cubus von der Rechten gegen die Linke in Abtheilungen zu drei Ziffern, wobei die erste Abtheilung links auch nur zwei oder eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Abtheilungen, als die Wurzel Ziffern enthält.

Aufgaben.

1. 48^3. **2.** 61^3. **3.** 29^3. **4.** 85^3.
5. 17^3. **6.** 36^3. **7.** 74^3. **8.** 93^3.
9. 234^3. **10.** 526^3. **11.** 719^3.
12. 165^3. **13.** 854^3. **14.** 308^3.
15. 259^3. **16.** 701^3. **17.** 572^3.
18. 4321^3. **19.** 5887^3. **20.** 7902^3.

21. 2935^3. **22.** 6078^3. **23.** 8006^3.
24. 48196^3. **25.** 13097^3. **26.** 61613^3.

§. 56.

Cubieren eines Decimal- und eines gemeinen Bruches.

1. Das Cubieren eines Decimalbruches geschieht auf gleiche Weise wie das Cubieren einer ganzen Zahl; dabei liefert jede Decimalziffer der gegebenen Zahl im Cubus einen Zuwachs von drei Decimalstellen und enthält daher der Cubus eines Decimalbruches immer dreimal so viel Decimalziffern als der cubierte Decimalbruch. Z. B.

$$\begin{array}{lr} 3{\cdot}4^3 = & \\ \hline 3^3 \ \ldots & 27 \\ 3.3^2.4. \ \ldots & 108 \\ 3.3.4^2. \ \ldots & 144 \\ 4^3 \ \ldots & 64 \\ \hline & = 39{\cdot}304 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} 2{\cdot}65^3 = & \\ \hline 2^3 \ \ldots & 8 \\ 3.2^2.6 \ \ldots & 72 \\ 3.2.6^2 \ \ldots & 216 \\ 6^3 \ \ldots & 216 \\ 3.26^2.5. \ \ldots & 10140 \\ 3.26.5^2. \ \ldots & 1950 \\ 5^3 \ \ldots & 125 \\ \hline & = 18{\cdot}609625 \end{array}$$

2. Ein gemeiner Bruch wird cubiert, indem man den Cubus des Zählers als Zähler und den Cubus des Nenners als Nenner setzt. Z. B.

$$\left(\frac{13}{15}\right)^3 = \frac{13}{15} \cdot \frac{13}{15} \cdot \frac{13}{15} = \frac{13^3}{15^3}.$$

Aufgaben.

1. $3{\cdot}2^3$. **2.** $5{\cdot}1^3$. **3.** $0{\cdot}69^3$. **4.** $0{\cdot}83^3$.
5. $7{\cdot}6^3$. **6.** $0{\cdot}15^3$. **7.** $9{\cdot}4^3$. **8.** $0{\cdot}89^3$.
9. $0{\cdot}064^3$. **10.** $48{\cdot}2^3$. **11.** $3{\cdot}14^3$.
12. $5{\cdot}79^3$. **13.** $0{\cdot}813^3$. **14.** $1{\cdot}08^3$.
15. $0{\cdot}0667^3$. **16.** $654{\cdot}5^3$. **17.** $49{\cdot}52^3$.
18. $3{\cdot}086^3$. **19.** $0{\cdot}7719^3$. **20.** $7{\cdot}4807^3$.
21. $(\frac{27}{53})^3$. **22.** $(\frac{641}{807})^3$. **23.** $(35\frac{109}{315})^3$.

2. Ausziehen der Cubikwurzel aus einer dekadischen Zahl.

§. 57.

Aus einer Zahl die Cubikwurzel ausziehen heißt, eine Zahl finden, welche dreimal als Factor gesetzt die gegebene Zahl gibt. Um die Cubikwurzel aus einer Zahl anzuzeigen, setzt man vor diese das Wurzelzeichen und in dessen Öffnung die Ziffer 3.

z. B. aus 216 die Cubikwurzel ausziehen heißt, eine Zahl suchen, welche dreimal als Factor gesetzt 216 zum Producte gibt; diese Zahl ist 6, denn $6 \times 6 \times 6 = 216$. Man schreibt $\sqrt[3]{216} = 6$ und liest: Cubikwurzel aus 216 ist gleich 6.

Die einziffrigen Cubikwurzeln sind:

$$\sqrt[3]{1} = 1, \quad \sqrt[3]{64} = 4, \quad \sqrt[3]{343} = 7,$$
$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[3]{125} = 5, \quad \sqrt[3]{512} = 8,$$
$$\sqrt[3]{27} = 3, \quad \sqrt[3]{216} = 6, \quad \sqrt[3]{729} = 9.$$

§. 58.

Ausziehen der Cubikwurzel aus dekadischen ganzen Zahlen.

Das Ausziehen der Cubikwurzel beruht auf dem Verfahren, eine Zahl zu cubieren.

Beispiele und Aufgaben.

1. Erhebe die Zahl 70 zum Cubus und ziehe dann aus diesem die Cubikwurzel aus.

$$\begin{array}{lrl}
75^3 = & & \sqrt[3]{421|875} = 75 \\
7^3 \;\ldots & 343 \;\ldots & 343 \\
 & & 78\,875 : 147 \ldots 3.7^2 \\
3.7^2.5 \;\ldots & 735 \;\ldots & 73\,5 \\
3.7.5^2 \;\ldots & 525 \;\ldots & 5\,25 \\
5^3 \;\ldots & 125 \;\ldots & 125 \\
 & = 421875 & 0
\end{array}$$

Um aus 421875 die Cubikwurzel auszuziehen, beachte man, dass die Tausender 421 im Cubus den Cubus der Zehner enthalten; man erhält also die Zahl dieser Zehner, indem man aus 421 die Cubikwurzel auszieht; $\sqrt[3]{421}$ gibt 7 Zehner. Bildet man den Cubus 343 der Zehner und subtrahiert diesen von der gegebenen Cubikzahl, so enthalten die Hunderter des Restes 78875 das Product aus dem dreifachen Quadrate 147 der Zehner mit den Einern. Wird daher 788 durch 147 dividiert, so erhält man 5 als die Ziffer der Einer. Sodann bildet man die Bestandtheile, welche die 5 Einer im Cubus bilden und subtrahiert sie von dem früheren Reste.

Cubiere die Zahlen

2. 24, **3.** 47, **4.** 58, **5.** 63, **6.** 81,

und ziehe aus dem jedesmal erhaltenen Cubus die Cubikwurzel aus.

Bestimme folgende Cubikwurzeln und mache die Probe durch das Cubieren der erhaltenen Wurzeln:

7. $\sqrt[3]{6859}$. **8.** $\sqrt[3]{79507}$. **9.** $\sqrt[3]{140608}$.

10. $\sqrt[3]{373248}$. **11.** $\sqrt[3]{474552}$. **12.** $\sqrt[3]{884736}$.

13. Erhebe 456 zum Cubus und ziehe dann aus diesem die Cubikwurzel aus.

$456^3 =$		$\sqrt[3]{94\vert 818\vert 816} = 456$	
4^3	. . 64 . .	64	
		30818	: 48...3.4^2
$3.4^2.5$	. . 240 . .	240	
$3.4.5^2$	. . 300 . .	300	
5^3	. . 125 . .	125	
		3693816	: 6075....3.45^2
$3.45^2.6$	. . 36450 . .	36450	
$3.45.6^2$	. . 4860 . .	4860	
6^3	. . 216 . .	216	
	94818816	0	

Da im Cubus 94818816 die Tausender den Cubus der Zehner der Cubikwurzel enthalten, wird man, um diese Zehner zu bestimmen, aus den Tausendern die Cubikwurzel ausziehen; dies geschieht, da 94818 als eine fünfziffrige Zahl eine zweiziffrige Cubikwurzel gibt, nach dem in den vorhergehenden Aufgaben befolgten Verfahren; man erhält dadurch 45 Zehner. Die Einer der Cubikwurzel werden erhalten, indem man, wie früher, die Hunderter des Restes 3693816 durch das dreifache Quadrat 6075 der Zehner dividiert.

Cubiere folgende Zahlen und ziehe dann die Cubikwurzel aus:

14. 267. **15.** 608. **16.** 455. **17.** 913.

Suche folgende Cubikwurzeln und mache die Probe durch das Cubieren:

18. $\sqrt[3]{78953589}$. **19.** $\sqrt[3]{13144256}$.

20. $\sqrt[3]{96702579}$. **21.** $\sqrt[3]{17173512}$.

22. $\sqrt[3]{171879616}$. **23.** $\sqrt[3]{318611987}$.

24. $\sqrt[3]{481890304}$. 25. $\sqrt[3]{2116874304}$.

26. $\sqrt[3]{897236011125}$. 27. $\sqrt[3]{10368788674616}$.

§. 59.

Ausziehen der Cubikwurzel aus Decimal- und gemeinen Brüchen.

1. Aus einem Decimalbruche wird die Cubikwurzel nach demselben Verfahren ausgezogen, wie aus einer ganzen Zahl; nur muſs man in der Wurzel den Decimalpunkt setzen, bevor die erste Abtheilung von Decimalen in der vorgelegten Zahl in Rechnung gezogen wird. Z. B.

$$\sqrt[3]{389 \cdot 017} = 7 \cdot 3$$

$$\begin{array}{l} 343 \\ \hline 46017 : 147 \\ 441 \\ \quad 189 \\ \quad\quad 27 \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

2. Aus einem gemeinen Bruche zieht man die Cubikwurzel aus, indem man die Cubikwurzel aus dem Zähler durch jene aus dem Nenner dividiert, nachdem man den Bruch derart erweitert hat, daſs der Nenner ein Cubus ist, wenn es nicht schon der Fall war, oder indem man den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt und aus diesem die Cubikwurzel auszieht. Z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}, \text{ oder } \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \sqrt[3]{0 \cdot 421875} = 0 \cdot 75.$$

Aufgaben.

Cubiere folgende Zahlen und ziehe aus dem jedesmaligen Resultate die Cubikwurzel aus:

1. 2·7. **2.** 4·6. **3.** 0·54. **4.** 0·98.
5. 18·5. **6.** 3·57. **7.** 5·02. **8.** 0·933.

Bestimme folgende Cubikwurzeln und mache die Probe durch Cubieren der jedesmaligen Wurzel:

9. $\sqrt[3]{5 \cdot 832}$. **10.** $\sqrt[3]{592 \cdot 704}$.

11. $\sqrt[3]{0 \cdot 046656}$. **12.** $\sqrt[3]{0 \cdot 000097336}$.

13. $\sqrt[3]{1 \cdot 191016}$. **14.** $\sqrt[3]{268 \cdot 336125}$.

15. $\sqrt[3]{340068\cdot392}$.
16. $\sqrt[3]{0\cdot876467493}$.

17. $\sqrt[3]{6321\cdot363049}$.
18. $\sqrt[3]{22164361\cdot129}$.

19. $\sqrt[3]{1\cdot029383182673}$.
20. $\sqrt[3]{0\cdot750494663741376}$.

21. $\sqrt[3]{9\cdot295} = 21\cdot025\ldots$

Hier läßt sich die Cubikwurzel nur annäherungsweise bestimmen, indem man dem letzten Reste 34, sowie später jedem folgenden Reste eine Abtheilung von drei Nullen anhängt und übrigens wie vorhin verfährt.

22. $\sqrt[3]{25\cdot387}$.
23. $\sqrt[3]{100}$.

24. $\sqrt[3]{2}$.
25. $\sqrt[3]{0\cdot00007}$.

26. $\sqrt[3]{0\cdot0011}$.
27. $\sqrt[3]{70815}$.

28. $\sqrt[3]{12\cdot3456}$.
29. $\sqrt[3]{0\cdot246813}$.

30. $\sqrt[3]{\frac{343}{3375}}$.
31. $\sqrt[3]{134\frac{313}{512}}$.

32. $\sqrt[3]{\frac{17}{40}}$.
33. $\sqrt[3]{2\frac{35}{54}}$.

34. Bestimme $r = \sqrt[3]{\frac{3\,v}{4\,\pi}}$ für $v = 9\cdot576$ und $\pi = 3\cdot14159$.

§. 60.

Abgekürztes Verfahren beim Ausziehen der Cubikwurzel.

Sowie beim Ausziehen der Quadratwurzel, kann auch beim Ausziehen der Cubikwurzel, wenn sehr viele Ziffern zu bestimmen sind, ein abgekürztes Verfahren angewendet werden. Nachdem man nämlich mehr als die Hälfte der Wurzelziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden hat, entwickelt man die folgenden Ziffern mittelst der abgekürzten Division, in welcher man den letzten Rest als Dividend und das dreifache Quadrat der bereits gefundenen Wurzel nach Weglassung der letzten Ziffer als Divisor annimmt. Man erhält durch die abgekürzte Division eine verläßliche Ziffer weniger, als ihrer bereits nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden wurden.

Bei einem unvollständigen Decimalbruche ist die Anzahl der in der Cubikwurzel entwickelbaren verläßlichen Ziffern um 1 kleiner als die doppelte Anzahl der Abtheilungen in der vorgelegten Zahl, jede Abtheilung mit Ausnahme der ersten links zu drei Ziffern gerechnet.

Aufgaben.

1. Entwickle $\sqrt[3]{8{\cdot}4313527}$ mit 7 Ziffern.

$$\sqrt[3]{8{\cdot}431|352|700} = 2{\cdot}035319$$

```
 8
 ———
  431 352      : 1200
  360 0
    5 40
      27
  ———————
  65 925700  : 123627
  61 8135
     15225
        125
  ———————————
   3 959825  : 12423675
     23
     11
```

Bestimme in 2. — 10. auf 6 Decimalen:

2. $\sqrt[3]{5}$.

3. $\sqrt[3]{20}$.

4. $\sqrt[3]{1028}$.

5. $\sqrt[3]{78{\cdot}24}$.

6. $\sqrt[3]{1{\cdot}91016}$.

7. $\sqrt[3]{13{\cdot}0835}$.

8. $\sqrt[3]{0{\cdot}812357}$.

9. $\sqrt[3]{\frac{17}{75}}$.

10. $\sqrt[3]{\frac{1357}{8756}}$.

Bestimme mit erreichbarer Genauigkeit:

11. $\sqrt[3]{7{\cdot}356041..}$

12. $\sqrt[3]{18{\cdot}0924..}$

3. Cubieren algebraischer Ausdrücke und Ausziehen der Cubikwurzel aus denselben.

§. 61.

1. a) Es ist

$$(ab)^3 = ab.ab.ab = a^3b^3;\ \text{d. h.}$$

Ein Product wird zum Cubus erhoben, indem man jeden Factor zum Cubus erhebt und die so erhaltenen Resultate mit einander multipliciert.

b) Ferner ist

$$(a^2)^3 = a^2.a^2.a^2 = a^6,$$
$$(a^3)^3 = a^3.a^3.a^3 = a^9;\ \text{d. h.}$$

Eine Potenz wird zum Cubus erhoben, indem man die Basis derselben mit dem Dreifachen ihres Exponenten potenziert.

c) Ist ein Binom $a + b$ zum Cubus zu erheben, so braucht man nur das Quadrat $(a + b)^2$ noch mit $a + b$ zu multiplicieren. Es ist also

$$(a + b)^3 = (a + b)^2\,(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)\,(a + b),$$

somit

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;\ \text{d. i.}$$

der Cubus eines Binoms besteht aus dem Cubus des ersten Gliedes, dem Producte aus dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes mit dem zweiten Gliede, dem Producte aus dem dreifachen ersten Gliede mit dem Quadrate des zweiten Gliedes, und dem Cubus des zweiten Gliedes.

Um nach diesem Satze den Cubus eines Trinoms $a + b + c$ zu erhalten, betrachtet man $a + b$ als das erste und c als das zweite Glied eines Binoms und findet

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= [(a + b) + c]^3 \\ &= (a + b)^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3 \\ &= a + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ &\quad + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$\begin{aligned} (a + b + c + d)^3 &= [(a + b + c) + d]^3 \\ &= (a + b + c)^3 + 3\,(a + b + c)^2\,d + 3\,(a + b + c)\,d^2 + d^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,(a + b)^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3 \\ &\quad + 3\,(a + b + c)^2\,d + 3\,(a + b + c)\,d^2 + d^3; \end{aligned}$$

u. s. w.

Hieraus ergibt sich für das **Cubieren eines mehrgliedrigen Ausdruckes** folgendes **Bildungsgesetz**:

Das erste Glied des gegebenen Ausdruckes liefert seinen eigenen Cubus; jedes folgende Glied gibt drei Bestandtheile: das Product aus dem dreifachen Quadrate des aus den vorangehenden Gliedern gebildeten Ausdruckes mit diesem Gliede, das Product aus der dreifachen Summe aller vorangehenden Glieder mit seinem Quadrate, und seinen eigenen Cubus. Die Summe aller so gebildeten Bestandtheile ist der verlangte Cubus.

2. a) Es ist

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{b};\ \text{denn}\ (\sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{b})^3 = ab.$$

Aus einem Producte wird die Cubikwurzel ausgezogen, indem man sie aus jedem Factor auszieht und die so erhaltenen Resultate mit einander multipliciert.

b) Ferner ist

$$\sqrt[3]{a^3} = a,\ \text{denn}\ (a)^3 = a^3;$$

$$\sqrt[3]{a^6} = a^2,\ \text{denn}\ (a^2)^3 = a^6.$$

Aus einer Potenz wird die Cubikwurzel ausgezogen, indem man die Basis derselben mit dem Drittel ihres Exponenten potenziert.

c) Aus dem Gesetze, nach welchem die Bestandtheile eines mehrgliedrigen Ausdruckes in seinem Cubus zusammengestellt erscheinen, ergibt sich durch Umkehrung auch das Verfahren für das Ausziehen der Cubikwurzel aus einem geordneten Polynom.

Es sei z. B. $\sqrt[3]{27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3}$ zu bestimmen.

$$\sqrt[3]{27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3} = 3x + 2y.$$

$$\begin{array}{l} 27x^3 \\ - \\ \hline \quad + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 : 27x^2 \ldots 3(3x)^2 \\ \quad + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 \\ \quad - \qquad - \qquad - \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Das erste Glied im gegebenen Cubus ist der Cubus des ersten Gliedes der Wurzel; wird daher aus $27x^3$ die Cubikwurzel ausgezogen, so erhält man das erste Glied $3x$ der Cubikwurzel. Das erste Glied des Restes $54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$ enthält das Product aus dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes der Wurzel mit dem zweiten Gliede; dividiert man daher $54x^2y$ durch das dreifache Quadrat von $3x$, d. i. durch $27x^2$, so erhält man das zweite Glied $2y$ der Cubikwurzel. Sodann werden die drei Bestandtheile, welche dieses Wurzelglied im Cubus liefert, gebildet und von dem früheren Reste subtrahiert.

Aufgaben.

1. Cubiere $2a - 1$ und ziehe dann aus dem Cubus die Cubikwurzel aus.

Bilde folgende Cubusausdrücke

2. $(a + 2b)^3$, 3. $(4x - 3y)^3$,
4. $(x - 2y + z)^3$, 5. $(a^2 - b^2 + c^2)^3$,

und ziehe dann aus dem jedesmal erhaltenen Cubus die Cubikwurzel aus.

Bestimme folgende Cubikwurzeln und mache die Probe, indem du die gefundene Wurzel zum Cubus erhebst:

6. $\sqrt[3]{1 - 9p + 27p^2 - 27p^3}$.
7. $\sqrt[3]{8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3}$
8. $\sqrt[3]{a^6 - 6a^4b^2 + 12a^2b^4 - 8b^6}$.
9. $\sqrt[3]{x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1}$.
10. $\sqrt[3]{\{8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 - 36a^2c - 36abc - 9b^2c + 54ac^2 + 27bc^2 - 27c^3\}}$.

VII. Zusammengesetzte Regeldetri.

§. 62.

Steht eine Art von Zahlen mit zwei oder mehreren anderen Arten einzeln genommen in geradem oder verkehrtem Verhältnisse, und ist eine Reihe zusammengehöriger Zahlen aller dieser Arten bekannt, von einer andern Reihe zusammengehöriger Zahlen aber eine derselben unbekannt und zu suchen, so heißt die Rechnung, durch welche man diese unbekannte Zahl findet, die *zusammengesetzte Regeldetri.*

§. 63.

Auflösung durch Schlüsse. (Schlussrechnung.)

Die Aufgaben der zusammengesetzten Regeldetri können nach der Schlussrechnung aufgelöst werden. Z. B.

16 Arbeiter, welche täglich 9 Stunden arbeiten, bringen eine Arbeit in 15 Tagen zustande; wie viele Tage brauchen dazu 27 Arbeiter, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten?

Bedingungssatz:	16 Arbeiter	zu	9 Stunden	täglich	15	Tage
Fragesatz:	27 "		8 "	"	x	"

16	Arb.	zu	9	St.	tägl.	....	15	Tage
1	"	"	9	"	"	16mal so viel.	15.16	"
27	"	"	9	"	"	den 27. Theil.	$\frac{15.16}{27}$	"
27	"	"	1	"	"	9mal so viel..	$\frac{15.16.9}{27}$	"
27	"	"	8	"	"	den 8. Theil..	$\frac{15.16.9}{27.8}$	"
							= 10	Tage.

Bei der Schlussrechnung bringt man, um die Schlüsse leichter bilden zu können, diejenige Art von Zahlen, zu welcher die unbekannte Zahl gehört, auf die letzte Stelle.

Anfänglich werden wegen des besseren Überblickes der Schlussfolgerungen alle Zwischenresultate vollständig angeschrieben; bei vorgerückter Übung setzt man unmittelbar zu der mit x gleichnamigen Zahl nach und nach diejenigen Zahlen, mit denen multipliciert werden soll, in den Zähler, diejenigen aber, durch welche dividiert werden soll, in den Nenner als Factoren dazu, so dass am Schlusse nur das Endresultat da steht, an welchem dann die Ausrechnung vollzogen wird.

Hiernach würde sich die Lösung der früheren Aufgabe so darstellen:

$$\left.\begin{array}{llll} 16 \text{ Arbeiter zu} & 9 \text{ Stunden} & \text{täglich} \\ 1 \quad " \quad " & 9 \quad " & " \\ 27 \quad " \quad " & 9 \quad " & " \\ 27 \quad " \quad " & 1 \quad " & " \\ 27 \quad " \quad " & 8 \quad " & " \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \frac{15.16.9}{27.8} \text{ Tage.} \\ \quad = 10 \text{ Tage.} \end{array}$$

Einfachere Aufgaben können durch leichte Schlüsse sogleich im Kopfe gelöst werden.

§. 64.

Aufgaben.

1. 12 Arbeiter bekommen für 3 Arbeitstage 90 *K*; wie viel werden 16 Arbeiter für 5 Tage bekommen?

$$\begin{array}{llll} 12 \text{ Arb. in} & 3 \text{ Tag.} & 90\ K \\ 1 \quad " \quad " & 3 \quad " & \frac{90}{12}\ K \\ 16 \quad " \quad " & 3 \quad " & \frac{90.16}{12}\ K \\ 16 \quad " \quad " & 1 \quad " & \frac{90.16}{12.3}\ K \\ 16 \quad " \quad " & 5 \quad " & \frac{90.16.5}{12.3}\ K = 200\ K. \end{array}$$

2. 9 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit bei täglich 8stündiger Arbeitszeit 15 Tage; in wie viel Tagen werden dieselbe Arbeit 16 Arbeiter bei täglich 9stündiger Arbeitszeit vollenden?

3. 16 Arbeiter brauchen zur Herstellung eines Dammes von 150 *m* Länge 15 Tage; wie viele Arbeiter werden einen Damm von 180 *m* Länge in 24 Tagen vollenden?

4. Wenn man für einen Mann in 4 Wochen $12\frac{1}{2}$ *kg* Brot rechnet, wie viel Brot werden 120 Mann in 18 Wochen brauchen?

5. Wenn 6 Mann in 5 Tagen 57 *K* verdienen, in wie viel Tagen werden unter übrigens gleichen Umständen 16 Mann 532 *K* verdienen?

6. Von zwei in einander greifenden Zahnrädern hat A 60 Zähne, B 120 Zähne; wenn sich A in 12 Secunden 10mal umdreht, wie oft wird sich B in 36 Secunden umdrehen?

7. Um 35 Laternen 105 Stunden lang brennen zu lassen, braucht man 238 *kg* Öl; wie viel Öl ist erforderlich, wenn 50 solche Laternen 245 Stunden lang brennen lassen?

8. Ein Fuhrmann erhält, um $143\frac{3}{4}$ Centner $46\frac{1}{2}$ *km* weit zu führen, 137 *K* als Bezahlung; wie viel muſs man ihm zahlen, damit er $177\frac{1}{2}$ Centner 40 *km* weit führe?
9. Zu einem Fußboden braucht man 28 Bretter, deren jedes 35 *dm* lang und 6 *dm* breit ist; wie viele Bretter werden zu demselben Fußboden erforderlich sein, wenn jedes 28 *dm* lang und 5 *dm* breit ist?
10. Eine Maschine hebt in 88 Secunden 4928 *kg* auf eine Höhe von 3 *m*; auf welche Höhe kann sie 2352 *kg* in 98 Secunden heben?
11. Ein Weber verfertigt aus 11·5 *kg* Garn 75 *m* Leinwand von 1·2 *m* Breite; wie viel *m* Leinwand von 1·5 *m* Breite macht er aus 14·72 *kg* Garn?
12. Ein Fuhrmann verspricht 28 Centner 125 *km* weit um 92 *K* zu führen. Nachdem er 40 *km* weit gefahren, kommt ihm der Auftrag zu, eine andere Straße einzuschlagen, 10 Centner mehr aufzuladen und 60 *km* weiter zu fahren, als anfänglich bedungen war. Wie viel Frachtlohn wird ihm gebüren?

   Hier muſs man zuerst die Fracht für 28 Centner, welche 30 *km* weit, dann für $28 + 10 = 38$ Centner, welche $125 - 40 + 60 = 145$ *km* weit geführt werden, berechnen, und beide Beträge addieren.
13. Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 8 Stunden arbeiten, in 5 Wochen einen Canal von 250 *m* Länge zustande bringen, in wie viel Wochen werden 12 Arbeiter, welche täglich 9 Stunden arbeiten, einen eben solchen Canal von 300 *m* Länge vollenden?
14. Eine Mühle mahlt auf 3 Gängen bei 126 Umdrehungen per Minute in 22 Stunden 16 *hl* Getreide; auf wie viel Gängen können bei 99 Umdrehungen per Minute in 42 Stunden 32 *hl* geliefert werden?
15. Von einer Wiese, welche 512 *m* lang und 72 *m* breit ist, werden 10 Wagen Heu gewonnen, von welchen jeder 9 Centner Ladung hat; wie viel Wagen Heu, jeder zu 10 Centner, wird man verhältnismäßig von einer Wiese gewinnen, die 320 *m* lang und 192 *m* breit ist?
16. A verpachtet das Heu einer Wiese, die 240 *m* lang und 105 *m* breit ist, an B für 70 *K*; B überläſst davon dem C ein Stück von 180 *m* Länge und 60 *m* Breite, nimmt aber 16% Gewinn; wie viel muſs C an B zahlen?
17. In einer Fabrik belaufen sich die jährlichen Kosten für 220 Gasflammen, welche einzeln in jeder Stunde 144 dm^3 Gas verzehren und 1500 Stunden brennen, auf 3024 *K*; wie hoch kommt hier-

nach die Gasbeleuchtung in einer andern Fabrik, in welcher 250 Flammen brennen, jede stündlich 160 dm^3 Gas verzehrt und die Beleuchtungszeit 1440 Stunden beträgt?

18. An einem Graben, welcher 80 *m* lang, 5 *m* breit und 2 *m* tief wird, arbeiten 20 Arbeiter 18 Tage; wie viele Arbeiter werden einen 120 *m* langen, 6 *m* breiten und 3 *m* tiefen Graben in 36 Tagen vollenden?

---

19. Wie viel Zins geben 2520 *K* Capital in 3 Jahren zu 5%, d. i. wenn 100 *K* Capital in 1 Jahr 5 *K* Zins geben?

20. Wie viel (z) *K* Zins geben c *K* Capital in t Jahren zu p%?

100 *K*	Cap.	in	1	Jahr	p	*K*	Zins
1	"	"	" 1	"	$\frac{p}{100}$	"	"
c	"	"	" 1	"	$\frac{cp}{100}$	"	"
c	"	"	" t	"	$\frac{cpt}{100}$	"	"

also

$$z = \frac{cpt}{100},$$ d. h.

der Zins ist gleich dem 100sten Theile des Productes aus dem Capital, dem Procent und der Zeit in Jahren.

21. Aus der vorhergehenden Formel folgt umgekehrt:

$$c = \frac{100z}{pt}, \qquad p = \frac{100z}{ct}, \qquad t = \frac{100z}{cp}.$$

Drücke auch diese Formeln in Worten aus.

22. Wie viel Zins geben

a) $712\frac{1}{2}$ *K* Cap. in $3\frac{1}{3}$ Jahren zu 4%?
b) 2556 " " " $3\frac{3}{4}$ " " $4\frac{3}{4}$%?
c) $1208\frac{2}{5}$ " " " $2\frac{1}{6}$ " " $4\frac{1}{2}$%?

23. Berechne die Capitalien, welche folgende Zinsen bringen:

a) zu 4% in 2 Jahren 70 *K* Zins;
b) " $4\frac{1}{2}$% " 3 " $60\frac{4}{5}$ " " ;
c) " $5\frac{1}{4}$% " $2\frac{7}{12}$ " 398·58 " " .

24. Zu wie viel % geben

a) 1250 *K* Cap. in 4 Jahren 175 *K* Zins?
b) 4240 " " " $3\frac{1}{2}$ " 848 " " ?
c) 1440 " " " 2 " 158·4 " " ?

25. In wie viel Jahren geben

a) 3124 K Cap. zu 5% $390\frac{1}{2}$ K Zins?
b) 5460 „ „ „ $5\frac{1}{2}$% 365 „ „ ?
c) 650 „ „ „ 6% $63\frac{3}{4}$ „ „ ?

26. Ein Capital von 3600 fl. bringt in $4\frac{1}{2}$ Jahren 891 fl. Zins; wie viel Zins erhält man zu dem gleichen Zinsfuße von 5650 fl. Capital in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

27. Wie viel Zins tragen 1284 K Cap. zu $4\frac{1}{2}$% in derselben Zeit, in welcher 832 K zu $3\frac{1}{2}$% 100 K Zins bringen?

28. Wie groß muss das Capital sein, das zu $4\frac{1}{2}$% in 3 Jahren eben so viel Zins gibt, als 5480 K Capital zu 5% in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

29. Wenn 1450 K Capital in 2 Jahren 116 K Zins tragen, wie groß muss das Capital sein, das bei gleichem Zinsfuße in $1\frac{1}{2}$ Jahren $124\frac{4}{5}$ K Zins bringt?

30. Zu wie viel % müssen 2205 K Capital angelegt werden, damit sie in 2 Jahren eben so viel Zins geben, als 1600 K Capital zu $4\frac{1}{5}$% in $3\frac{1}{2}$ Jahren?

31. 5240 K Capital geben zu 5% 786 K Zins; zu wie viel % bringen in derselben Zeit 2600 K Capital 351 K Zins?

32. In welcher Zeit geben 720 K Capital zu 5% eben so viel Zins, als 2400 K Capital zu 6% in 6 Monaten?

33. Ein Capital gibt in 3 Jahren zu $4\frac{1}{2}$% $438\frac{3}{4}$ fl. Zins; in welcher Zeit gibt dasselbe Capital zu 5% 390 fl. Zins?

VIII. Theilregel (Gesellschaftsrechnung).

§. 65.

Die Theilregel oder Gesellschaftsrechnung wird angewendet, wenn eine Zahl in mehrere Theile so getheilt werden soll, dass dieselben in einem bestimmten Verhältnisse stehen. Die Zahlen, durch welche dieses Verhältnis ausgedrückt wird, heißen die Verhältniszahlen.

Kommt in einer Aufgabe nur eine Reihe von Verhältniszahlen vor, so nennt man die Theilregel eine einfache; werden aber mehrere Reihen von Verhältniszahlen gegeben, so heißt das Rechnungsverfahren die zusammengesetzte Theilregel.

§. 66.

Es sei folgende Aufgabe der einfachen Theilregel zu lösen:

640 *K* sind unter 3 Personen A, B, C nach dem Verhältnisse der Zahlen 9, 7 und 4 zu theilen; wie viel entfällt auf jede Person?

Im Kopfe. Auf A kommen 9, auf B 7 und auf C 4, also auf alle zusammen 20 gleiche Theile; der 20. Theil von 640 *K* sind 32 *K*;

A 9mal 32 *K* = 288 *K*
B 7mal 32 „ = 224 „
C 4mal 32 „ = 128 „

Auf denselben Schlüssen beruht die schriftliche Rechnung. Heißt x der auf die Einheit der Verhältniszahlen entfallende Theil, so sind 9x, 7x und 4x die gesuchten Theile, und man hat

$$9x + 7x + 4x = 640, \text{ somit } x = \frac{640}{9+7+4} = 32\ K.$$

Es erhält also

A...32 *K* × 9 = 288 *K*
B...32 „ × 7 = 224 „
C...32 „ × 4 = 128 „

Bei der einfachen Gesellschaftsrechnung dividiert man daher die zu vertheilende Zahl durch die Summe der Verhältniszahlen und multipliciert den erhaltenen Quotienten nach und nach mit jeder Verhältniszahl; die Producte sind die gesuchten Theile.

Aufgaben.

1. Theile die Zahl 112 in zwei Theile, welche sich wie 3 : 5 verhalten.
2. Theile die Zahl 333 in drei Theile so, dass sich diese wie 2 : 3 : 4 verhalten, d. i. dass sich der erste Theil zum zweiten wie 2 : 3, und der zweite zum dritten wie 3 : 4 verhält.
3. Drei Personen treten zu einem Handelsgeschäfte zusammen, und zwar gibt A 2800 *K*, B 3600 *K* und C 4000 *K*; sie gewinnen damit 1300 *K*, wie viel von diesem Gewinne entfällt auf jede der drei Personen?

2800	7	50 *K* × 7 = 350 *K*	gewinnt A
3600	9	50 „ × 9 = 450 „	„ B
4000	10	50 „ × 10 = 500 „	„ C
1300 *K* : 26 = 50 *K*		1300 *K*	ganzer Gewinn.

4. Ein Vermögen von 1400 fl. soll unter 4 Gläubiger nach Verhältnis ihrer Forderungen vertheilt werden; wenn nun A 300 fl. B 400 fl., C 430 fl. und D 470 fl. zu fordern hat, wie viel bekommt jeder?
5. Zum Ankaufe eines Loses gibt A 60 fl., B 55 fl. und C 45 fl.; das Los macht einen Treffer von 2000 fl.; wie viel erhält jeder?
6. Ein Bezirk hat 4 Gemeinden, von denen A 2845 fl. 47 kr., B 1748 fl. 62 kr., C 2106 fl. 48 kr., D 3019 fl. 88 kr. Steuer zahlt; wenn nun dieser Bezirk eine besondere Zahlung von 548 fl. zu leisten hat, wie viel wird jede Gemeinde im Verhältnisse der Steuerquote zu entrichten haben?
7. Jemand ist schuldig: an A 3000 fl., an B 3200 fl., an C 1200 fl., an D 2800 fl., an E 4600 fl.; sein Vermögen besteht aber nur in 8625 fl.; wie viel wird jeder Gläubiger bei der Theilung erhalten und wie viel % verliert jeder?
8. Wie viel Silber und Kupfer enthält ein Silberbarren, welcher 7 *kg* wiegt und 750 Tausendtheile fein ist?
9. Die neuen Bronzemünzen enthalten eine Legierung von 95 Theilen Kupfer, 4 Theilen Zinn und 1 Theil Zink; wie viel von jedem dieser Metalle ist zu einer Legierung von 65 *kg* erforderlich?
10. Zu Porzellan nimmt man 25 Theile Thon, 2 Theile Kies, 1 Theil Gips; wie viel von jedem dieser Stoffe braucht man zu einer Masse von 105 *kg*?

11. Drei Personen kaufen ein Grundstück von 240 a; A gibt dazu 480 K, B 500 K und C 620 K; wie viel a erhält jeder auf seinen Antheil?

12. Für die Versendung von 2133 kg Kaffee, 1735 kg Zucker und 923 kg Pfeffer werden 65 fl. 30 kr. Fracht bezahlt; wie viel kommt auf jeden dieser Artikel?

13. Es sollen 5610 K nach dem Verhältnisse der Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ unter A, B, C, D vertheilt werden.

14. Ein Schnittwarenhändler hat 6 Stück Tuch von derselben Güte gekauft und für sämmtliche Stücke $1020\frac{3}{4}$ fl. bezahlt. Das erste hält 40 m, das zweite $36\frac{1}{2}$ m, das dritte $41\frac{1}{4}$ m, das vierte $38\frac{3}{4}$ m, das fünfte 44 m und das sechste $42\frac{1}{2}$ m; wie viel kostet jedes Stück?

15. Jemand hinterläſst ein Vermögen von 15845 K, welches unter seine drei Erben so vertheilt werden soll, daſs A 2mal so viel als B und B 3mal so viel als C bekommt; wie viel bekommt jeder Erbe?

So oft C 1 fl. erhält, bekommt B 3 fl. und A 6 fl.; die Erbtheile von A, B und C verhalten sich also wie 6 : 3 : 1.

16. Drei Personen sollen 2050 K so untereinander theilen, daſs A so oft 3 K, als B 4 K, C aber so oft 5 K als B 3 K erhält; wie viel bekommt jede Person?

17. Zu einem Geschäfte gibt A 1250 K, B 2000 K, C 2750 K, D 3000 K. Wenn 1260 K gewonnen werden, und A außer seinem verhältnismäßigen Antheile wegen seiner besonderen Dienstleistung noch 15% des Gewinnes erhält, wie viel kommt auf jeden?

18. A, B und C gewannen bei einem Geschäfte 960 K; B hatte 3000 K, C 5000 K eingelegt; wie viel betrug die Einlage des A, da er vom Gewinne 320 K erhielt?

19. Eine Erbschaft von 9000 K soll unter 4 Personen so vertheilt werden, daſs A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{5}$ und D den Rest erhält. Vor der Theilung stirbt jedoch B und die übrigen drei theilen nun noch den Antheil des B im Verhältnisse ihrer Antheile. Wie viel erhält jeder?

20. Zu Neusilber nimmt man 55·4 Theile Kupfer, 29·1 Theile Zink und 17·5 Theile Nickel; wie viel von jedem dieser Metalle ist nöthig, um 600 kg Neusilber darzustellen, wenn beim Zusammenschmelzen 2% verloren gehen?

21. Drei Kaufleute kaufen eine Partie Ware und verkaufen dieselbe mit 15% Gewinn, den sie nach Verhältnis ihrer Einlagen unter sich theilen; A erhielt vom Gewinn 210 K, B 350 K und C 280 K; wie viel hat jeder eingelegt?

22. Die atmosphärische Luft besteht aus 20·9 Volumtheilen Sauerstoff und 79·1 Theilen Stickstoff; wie viel ist von jedem dieser Bestandtheile in 85 m^3 Luft enthalten?

23. Die Schwefelsäure besteht aus einem Gewichtstheile Wasserstoff, 16 Theilen Schwefel und 32 Theilen Sauerstoff; wie viel ist von jedem dieser Bestandtheile in 10 kg Schwefelsäure enthalten?

24. Die Salpetersäure besteht aus 1 Theil Wasserstoff, 14 Theilen Stickstoff und 48 Theilen Sauerstoff; wie viel ist von jedem dieser Bestandtheile in 15 kg Salpetersäure enthalten?

25. Schwefeleisen besteht aus 7 Theilen Eisen und 4 Theilen Schwefel; wie viel ist von jedem dieser Bestandtheile in 22 g Schwefeleisen enthalten?

26. Kupfervitriol besteht aus 7·9 Theilen Kupfer, 4 Theilen Schwefel und 8 Theilen Sauerstoff; wie viel ist von jedem dieser Bestandtheile in 1 kg Kupfervitriol enthalten?

27. Eisenvitriol besteht aus 7 Theilen Eisen, 4 Theilen Schwefel und 8 Theilen Sauerstoff; wie viel ist von jedem dieser Bestandtheile in 5 kg Eisenvitriol enthalten?

28. Zinkvitriol besteht aus 65 Theilen Zink, 32 Theilen Schwefel und 64 Theilen Sauerstoff; wie viel ist von jedem dieser Bestandtheile in 2 kg Zinkvitriol enthalten?

29. Glaubersalz besteht aus 23 Theilen Natrium, 16 Theilen Schwefel und 32 Theilen Sauerstoff; wie viel ist von jedem dieser Bestandtheile in 18 kg Glaubersalz enthalten?

30. Salpeter besteht aus 39·1 Theilen Kalium, 14 Theilen Stickstoff und 48 Theilen Sauerstoff; wie viel ist von jedem dieser Bestandtheile in 3 kg Salpeter enthalten?

§. 67.

Die zusammengesetzte Theilregel, in welcher mehrere Reihen von Verhältniszahlen angegeben werden, kann durch Zusammensetzung der auf denselben Theil bezugnehmenden Verhältniszahlen immer auf eine einfache zurückgeführt werden.

Wenn z. B. zu einem Handelsfonde A 13000 K durch 4 Monate, B aber 10000 K durch 6 Monate hergibt, und dabei ein Gewinn von 5000 K erzielt wird, so ist dieser Gewinn nach Verhältnis der Einlagen und zugleich nach Verhältnis der Zeit zu theilen. Allein da es gleich viel ist,

ob A 13000 *K* durch 4 Monate, oder 52000 *K* durch 1 Monat,
„ B 10000 „ „ 6 „ „ 60000 „ „ 1 „
zur Benützung überlässt, so müssen auch in beiden Fällen auf A und B dieselben Antheile am Gewinne entfallen. Da nun im zweiten Falle die Zeit der Benützung dieselbe ist, so wird der Gewinn nur nach Verhältnis der bezüglichen Einlagen, d. i. der Producte 52000 und 60000 unter A und B zu vertheilen sein; diese Zahlen bilden sonach die Verhältniszahlen zu einer einfachen Gesellschaftsrechnung.

Aufgaben.

1. Zu einem Geschäfte vereinigen sich drei Personen: A gibt 8200 *K* auf 5 Monate, B 10500 *K* auf 4 Monate, C 12000 *K* auf 3 Monate her; das Geschäft bringt einen Gewinn von 4522 *K*; wie viel wird davon jede der drei Personen erhalten?

A	8200 × 5	410	38 *K* × 41 = 1558 *K* erhält A
B	10500 × 4	420	38 „ × 42 = 1596 „ „ B
C	12000 × 3	360	38 „ × 36 = 1368 „ „ C
		4522 *K* : 119 = 38 *K*.	4522 *K*.

2. Ein Fuhrmann verpflichtet sich, für $122^1/_2$ fl. drei Ladungen, und zwar 16 Centner 105 *km* weit, 15 Centner 140 *km* weit und 14 Centner 175 *km* weit zu führen; wie viel gebürt ihm für jede einzelne Ladung?

3. A, B und C übernehmen die Ausbesserung einer Bezirksstraße, und zwar schickt A 4 Arbeiter durch 6 Tage, B 3 Arbeiter durch 9 Tage und C 4 Arbeiter durch 8 Tage zur Arbeit; wenn sie nun für diese Arbeit eine Vergütung von 207 *K* 50 *h* erhalten, wie viel gebürt davon einem jeden?

4. Eine Arbeit wurde durch drei Abtheilungen zu 24, 40 und 30 Mann für die Accordsumme von 1688 *K* übernommen; wenn nun die Abtheilung A 14, die Abtheilung B 12, die Abtheilung C 15 Tage gearbeitet hatte, wie viel erhielt jede von obiger Summe?

5. Es sollen in möglichst kurzer Zeit 1278 *hl* Getreide auf 3 Mühlen gemahlen werden, von denen A in 5 Stunden 12 *hl*, B in 4 Stunden 15 *hl*, C in 2 Stunden 9 *hl* mahlt; wie viel *hl* sind jeder dieser Mühlen zuzutheilen?

   Bestimme zuerst, wie viel *hl* jede Mühle in 1 Stunde mahlt.

6. A beginnt am 1. Jänner ein Geschäft mit 8000 *K* Capital, am 1. Mai tritt B mit 5000 *K* und am 1. Juli C mit 6000 *K* bei; wenn sich nun am Ende December ein Gewinn von 1180 *K* 78 *h* ergibt, wie viel gebürt davon jedem der Theilnehmer?

7. Jemand hat von A 3750 fl. zu 5% vor 4 Jahren, von B 2700 fl. zu 4% vor $6\frac{1}{4}$ Jahren, von C 1800 fl. zu $4\frac{3}{4}$% vor $6\frac{2}{3}$ Jahren ausgeliehen und ist allen das Capital sammt Zinsen schuldig. Er stellt seine Zahlungen ein und hat nur noch 3375 fl. Vermögen; wie viel erhält dann jeder der drei Gläubiger?
8. Drei Personen beschließen auf zwei Jahre ein Geschäft in Gemeinschaft zu führen; A legt dazu 4800 *K*, B ebenfalls 4800 *K* und C 6000 *K* ein. Nach 4 Monaten nimmt A 800 *K*, nach 8 Monaten B 300 *K* und nach 10 Monaten C 1000 *K* zurück; am Schlusse theilen sie einen Gewinn von 1415 *K*; wie viel gebürt jedem?

IX. Zinseszinsrechnung.

§. 68.

Bei der Verzinsung von Capitalien geschieht es häufig, dass die Zinsen am Ende einer jeden Zeitperiode (gewöhnlich am Ende eines jeden ganzen oder halben Jahres) zum Capitale geschlagen und mit diesem zugleich wieder verzinst werden; man sagt in diesem Falle: das Capital ist auf Zinseszinsen angelegt.

1. Berechnung des Wertes eines Geldbetrages nach einer bestimmten Zeit.

Um den Betrag, zu welchem ein Capital mittelst Zinseszinsen in einer bestimmten Zeit anwächst, zu berechnen, könnte man den Zins für jede einzelne Verzinsungsperiode suchen und jedesmal zu dem Anfangscapitale jener Periode addieren.

Ein kürzeres Verfahren, den Endwert eines auf Zinseszinsen angelegten Capitals zu berechnen, lässt sich aus folgenden Erwägungen herleiten.

Ist ein Capital z. B. zu 4% angelegt, so wachsen 100 Einheiten des Capitals (Kronen, Gulden) in einem Jahre sammt den Zinsen auf 104 an; somit hat 1 Capitalseinheit nach einjähriger Verzinsung den Wert 1·04. Werden diese 1·04 Capitalseinheiten als Anfangscapital des zweiten Jahres betrachtet und ein weiteres Jahr verzinst, so ist ihr Wert am Ende dieses Jahres $1·04 \times 1·04 = (1·04)^2$.

Der Endwert einer Capitalseinheit nach 2 Jahren ist also $(1·04)^2$.

Ebenso ergibt sich als Endwert einer Capitalseinheit

nach 3 Jahren... $1·04^2 \times 1·04 = 1·04^3$;

„ 4 „ ... $1·04^3 \times 1·04 = 1·04^4$;

„ 5 „ ... $1·04^4 \times 1·04 = 1·04^5$;

u. s. w.

Der Endwert einer auf Zinseszinsen angelegten Capitalseinheit nach einer bestimmten Zeit wird also gefunden, indem man die Summe aus 1 und dem 100sten Theil des Procentes zur sovielten Potenz erhebt, als die Zahl der Zeitperioden Einheiten hat.

Um dann den **Endwert** irgend **eines auf** Zinseszinsen **angelegten Capitals nach einer bestimmten** Zeit zu erhalten, multipliciert man den **Endwert** einer Capitalseinheit nach dieser Zeit mit der Zahl der Capitalseinheiten.

Z. B. Ein Anfangscapital von 5000 Kronen wird bei der angegebenen Verzinsungsweise nach 5 Jahren auf 5000mal $1\cdot04^5$ Kronen anwachsen; sein Endwert beträgt also, da $1\cdot04^5 = 1\cdot216653\ldots$ ist,

$$1\cdot216653\ldots K \times 5000 = 6083\cdot27\ldots K.$$

Werden die Zinsen nicht ganzjährig, sondern am Ende eines jeden halben Jahres zum Capitale geschlagen, so nimmt man doppelt so viele Zeitperioden als Jahre gegeben sind, somit für das obige Beispiel 10 Halbjahre, dagegen für eine Zeitperiode nur die Hälfte des Procentes, also für das frühere Beispiel 2%. Bei halbjähriger Verzinsung ist demnach der Endwert einer Capitalseinheit nach 5 Jahren

$$1\cdot02^{10} = 1\cdot218994\ldots,$$

und daher der Endwert eines durch 5 Jahre auf Zinseszinsen angelegten Capitals von 5000 Kronen

$$1\cdot218994\ldots K \times 5000 = 6094\cdot97\ldots K.$$

Die folgende Tabelle enthält die bereits ausgerechneten Endwerte, zu denen eine Capitalseinheit mittelst Zinsenzinsen à 2, $2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5% nach 1, 2, 3,...30 Zeitperioden anwächst.

Endwert

einer auf Zinseszinsen angelegten Capitalseinheit nach 1, 2, 3,...30 Zeitperioden.

Zeitperioden	2%	$2\frac{1}{2}$%	3%	4%	5%
1	1·02	1·025	1·03	1·04	1·05
2	1·0404	1·050625	1·0609	1·0816	1·1025
3	1·061208	1·076891	1·092727	1·124864	1·157625
4	1·082432	1·103813	1·125509	1·169859	1·215506
5	1·104081	1·131408	1·159274	1·216653	1·276282
6	1·126162	1·159693	1·194052	1·265319	1·340096
7	1·148686	1·188686	1·229874	1·315932	1·407100
8	1·171659	1·218403	1·266770	1·368569	1·477455
9	1·195093	1·248863	1·304773	1·423312	1·551328
10	1·218994	1·280085	1·343916	1·480244	1·628895

Zeitperioden	2%	2½%	3%	4%	5%
11	1·243374	1·312087	1·384234	1·539454	1·710339
12	1·268242	1·344889	1·425761	1·601032	1·795856
13	1·293607	1·378511	1·468534	1·665074	1·885649
14	1·319479	1·412974	1·512590	1·731676	1.979932
15	1.345868	1·448298	1·557967	1·800944	2·078928
16	1·372786	1·484506	1·604706	1·872981	2·182875
17	1·400241	1·521618	1·652848	1·947901	2·292018
18	1·428246	1·559659	1·702433	2·025817	2·406619
19	1·456811	1·598650	1·753506	2·106849	2·526950
20	1·485947	1·638616	1·806111	2·191123	2·653298
21	1·515666	1·679582	1·860295	2·278768	2·785963
22	1·545980	1·721571	1·916103	2·369919	2·925261
23	1·576899	1·764611	1·973587	2·464716	3·071524
24	1·608437	1·808726	2·032794	2·563304	3·225100
25	1·640606	1·853944	2·093738	2·665836	3·386355
26	1·673418	1·900293	2·156591	2·772470	3·555673
27	1·706886	1·947800	2·221289	2.883369	3·733456
28	1·741024	1·996495	2·287928	2.998703	3·920129
29	1·775845	2·046407	2·356566	3·118651	3·116136
30	1·811362	2·097568	2·427262	3·243398	3·321942

Die Rechnung, die in dem Vorangehenden für Capitalien, die auf Zinseszinsen angelegt werden, abgeleitet wurde, kann auch auf andere Größen, die in einem beständigen Verhältnisse anwachsen, z. B. auf die Zunahme der Bevölkerung eines Landes, des Holzstandes einer Waldung u. dgl., angewendet werden.

§. 69.

Aufgaben.

1. Ein Capital von 5000 K ist zu 5% Zinseszins angelegt; wie hoch wird es bei ganzjähriger Capitalisirung in 6 Jahren anwachsen?

   1 K ist nach 6 Jahren bei 5% Zinseszins 1·340096. . K wert; man hat daher
   1.340096... K × 5000
   6700·480 K = 6700 K 48 h.

2. Welches ist der Unterschied zwischen den einfachen und den Zinseszinsen von 4000 K in 5 Jahren zu 4% ?

3. Zu welcher Summe wachsen 5800 K zu 3% Zinseszins bei ganzjähriger Capitalisirung nach 20 Jahren an?

4. Wie viel betragen mit Zinseszinsen
a) 2390 K à $2\frac{1}{2}\%$ nach 16 Zeitperioden?
b) 7500 K à 3% nach 21 Zeitperioden?
c) 4365 K à 5% nach 25 Zeitperioden?

5. Jemand legt 3560 K zu 4% unter der Bedingung an, dass die Zinsen halbjährig zum Capitale geschlagen werden; wie hoch wird das Capital in 10 Jahren anwachsen?

Hier muss der Endwert für 20 Zeitperioden (halbe Jahre) zu 2% genommen werden; man erhält daher

$$1{\cdot}485047\ldots K \times 3560 = 5289{\cdot}97\ldots K.$$

6. Ein Capital von 2800 K ist zu 4% Zinseszins angelegt; wie hoch wird es a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisirung in 8 Jahren anwachsen?

7. Wie viel betragen die Zinseszinsen zu 5% von 5200 K in 12 Jahren a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisierung?

8. Wenn A dem B 3845 fl. schuldig ist und 10 Jahre lang keine Zinsen bezahlte, B aber die Zinsen jedes Jahr zum Capitale rechnet; wie viel beträgt die ganze Schuld bei 5%?

9. Jemand legt in eine Sparcasse ein Capital von 3580 K; wenn nun die Sparcasse mit 4% jährlich verzinst und die Zinsen halbjährig zum Capitale schlägt, welchen Wert wird jenes Capital nach 8 Jahren haben?

10. Ein Vater legt zu Gunsten seines jetzt 13jährigen Sohnes 2300 K in eine Sparcasse ein, welche mit 5% jährlich verzinst und die Interessen halbjährig zum Capital schlägt. Welchen Betrag wird der Sohn, wenn er das 24ste Jahr erreicht hat, aus der Sparcasse beziehen?

11. Jemand hatte vor 12 Jahren 4850 fl. angelegt; wie viel hat er jetzt zu bekommen, wenn die Zinsen à 4% am Ende jedes Jahres zum Capital geschlagen wurden?

12. Ein Kaufmann eröffnete sein Geschäft mit einem Fonds von 22500 fl.; wenn er nun durch 10 Jahre jährlich 5% gewann und diesen Gewinn im Geschäfte ließ, wie groß war der Handelsfonds am Ende des 10. Jahres?

13. Jemand ist verpflichtet, 3000 K nach 1 Jahre, 2000 K nach 2 Jahren, 1000 K nach 3 Jahren und 4000 K nach 4 Jahren zu bezahlen; wie viel werden alle diese Beträge nach 4 Jahren wert sein, wenn man 5% Zinseszins rechnet und wenn die Capitalisierung ganzjährig geschieht?

3000 *K*	nach 1 Jahre zahlbar,	sind nach	4 Jahren	3472·875	*K*	wert,
2000 „	„ 2 Jahren „	„ „	4 „	2205·000	„	„
1000 „	„ 3 „ „	„ „	4 „	1050·000	„	„
4000 „	„ 4 „ „	„ „	4 „	4000·000	„	„
	ganzer Betrag	nach	4 Jahren	10727·875	*K*	
				= 10727 *K* 88 *h*.		

14. Jemand legt durch 6 Jahre zu Anfang eines jeden derselben 325 *K* auf Zins von Zins an; wie hoch wird das Capital bei ganzjähriger Capitalisation zu 4% in jener Zeit anwachsen?

Da die erste Summe durch 6, die zweite durch 5, . . . die sechste durch 1 Jahr anliegt, so hat man

1. Summe nach 6 Jahren	1·265319 *K*	× 325		
2. „ „ 6 „	1·216653 „	× 325		
3. „ „ 6 „	1·169859 „	× 325		
4. „ „ 6 „	1·124864 „	× 325		
5. „ „ 6 „	1·081600 „	× 325		
6. „ „ 6 „	1·040000 „	× 325		
Gesammtbetrag nach 6 Jahren	6·898295 *K*	× 325	= 2241·946 *K*	
			= 2241 *K* 95 *h*.	

15. Jemand erspart jährlich 450 *K* und legt diese am Ende eines jeden Jahres auf 5% Zinseszinsen an; zu welchem Betrage wachsen diese Ersparnisse in 8 Jahren an?

16. Jemand hat in der Sparcasse 2345 fl. 30 kr.; er legt zu Anfang eines jeden halben Jahres 50 fl. dazu; wie groß wird das Capital nach $4\frac{1}{2}$ Jahren bei 4% halbjähriger Verzinsung sein?

17. Bei einer Lebensversicherungsanstalt hat eine 32jährige Person für 100 *K* Versicherungssumme jährlich 2 *K* 78 *h* zu bezahlen. Wenn nun jemand, der sich im Alter von 32 Jahren bei dieser Anstalt mit 4000 *K* versichert, nach vollendetem 47sten Lebensjahre stirbt, wie hochbelaufen sich alle seine Beiträge bei 5% Zinseszins?

18. Eine Sparcasse verzinst die Einlagen mit 4% und leiht die Gelder gegen 5% aus; wie groß ist bei halbjähriger Verzinsung der Gewinn für einen Betrag von 10000 *K* in 10 Jahren, wenn man von den Verwaltungskosten absieht?

19. Die Seelenzahl einer Stadt betrug vor 8 Jahren 25360; wie groß ist sie gegenwärtig, wenn die Zunahme der Bevölkerung jährlich im Durchschnitte 2% betrug?

20. Der Bestand eines Waldes ist gegenwärtig 90000 m^3; wie groß wird derselbe bei einem jährlichen Zuwachs von 3% nach 10 Jahren sein?

2. Berechnung des Wertes eines Geldbetrages vor einer bestimmten Zeit.

§. 70.

Die Aufgabe, den Wert eines Geldbetrages vor einer gewissen Zeit, oder was dasselbe ist, den gegenwärtigen oder Barwert eines nach einer bestimmten Zeit zahlbaren Capitals mit Rücksicht auf Zinseszinsen zu bestimmen, ist die Umkehrung der Aufgabe in §. 68.

Heißt x der Barwert einer z. B. nach 5 Jahren fälligen Capitalseinheit, die Zinseszinsen zu 4% gerechnet, so muss, da x als Anfangscapital und 1 als dessen Endwert nach 5 Jahren anzusehen ist, $1 \cdot 04^5 . x = 1$ sein; daraus folgt dann

$$x = \frac{1}{1 \cdot 04^5}.$$

Der Barwert einer nach einer bestimmten Zeit fälligen Capitalseinheit bei Anrechnung von Zinseszinsen ist also der reciproke Wert der Zahl, welche den Endwert einer Capitalseinheit nach dieser Zeit (§. 68) ausdrückt.

Da $1 \cdot 04^5 = 1 \cdot 216653..$ ist, so ist der Barwert einer nach 5 Jahren fälligen Capitalseinheit bei 4% Zinseszins

$$1 : 1 \cdot 216653.. = 0 \cdot 821927..$$

Um dann den Barwert irgend eines nach einer bestimmten Zeit fälligen Capitals mit Rücksicht auf Zinseszinsen zu erhalten, multipliciert man den Barwert einer nach dieser Zeit fälligen Capitalseinheit mit der Zahl der Capitalseinheiten.

Z. B. Der Barwert eines nach 5 Jahren fälligen Capitals von 2000 *K* bei 4% Zinseszins ist 2000mal 0·821927 *K*, also 1643·85 *K*.

Findet die Capitalisierung halbjährig statt, so nimmt man doppelt so viele Zeitperioden, als Jahre gegeben sind, dagegen für eine Periode nur das halbe Procent, also für das frühere Beispiel 10 Zeitperioden und 2%. Bei halbjähriger Verzinsung ist demnach der Barwert einer nach 5 Jahren fälligen Capitalseinheit

$$\frac{1}{1 \cdot 02^{10}} = 1 : 1 \cdot 218994.. = 0 \cdot 820384..,$$

daher eines nach 5 Jahren fälligen Capitals von 2000 *K*

$$0 \cdot 820384..\ K \times 2000 = 1640 \cdot 77..\ K.$$

In der folgenden Tabelle erscheinen die Barwerte einer nach 1, 2, 3, . . . 29, 30 Zeitperioden fälligen Capitalseinheit bei 2, 2½, 3, 4, 5% Zinseszins bereits ausgerechnet.

Barwert
einer nach 1, 2, 3, . . . 30 Zeitperioden fälligen Capitalseinheit mit Rücksicht auf Zinseszinsen.

Zeitperioden	2%	$2\frac{1}{2}$%	3%	4%	5%
1	0·980392	0·975610	0·970874	0·961538	0·952381
2	0·961169	0·951814	0·942596	0·924556	0·907029
3	0·942322	0·928599	0·915142	0·888996	0·863838
4	0·923845	0·905951	0·888487	0·854804	0·822702
5	0·905731	0·883854	0·862609	0·821927	0·783526
6	0·887976	0·862297	0·837484	0·790315	0·746215
7	0·870560	0·841265	0·813092	0·759918	0·710681
8	0·853490	0·820747	0·789409	0·730690	0·676839
9	0·836755	0·800728	0·766417	0·702587	0.644607
10	0·820384	0·781198	0·744094	0·675564	0·613913
11	0·804263	0·762145	0·722421	0·649581	0·584679
12	0·788493	0·743556	0·701380	0.624597	0·556837
13	0·773033	0·725420	0·680951	0·600574	0·530321
14	0·757875	0·707727	0·661118	0·577475	0·505068
15	0·743015	0·690466	0·641862	0·555265	0·481017
16	0·728446	0·673625	0·623167	0·533908	0·458112
17	0·714163	0·657195	0·605016	0·513373	0·436297
18	0·700159	0·641166	0·587395	0·493628	0·415521
19	0·686431	0·625528	0·570286	0·474642	0·395734
20	0·672971	0·610271	0·553676	0·456387	0·376889
21	0·659776	0·595386	0·537549	0·438834	0·358942
22	0·646839	0·580865	0·521893	0·421955	0·341850
23	0·634156	0·566697	0·506692	0·405726	0·325571
24	0·621721	0·552875	0·491934	0·390121	0·310068
25	0·609531	0·539391	0·477606	0·375117	0.295308
26	0·597579	0·526235	0·463695	0·360689	0·281241
27	0·585862	0·513400	0·450189	0·346817	0·267848
28	0·574375	0·500878	0·437077	0·333477	0·255094
29	0·563112	0·488661	0·424346	0·320651	0·242946
30	0·552071	0·476743	0·411987	0·308319	0·231377

§. 71.

Aufgaben.

1. Wie viel sind 4000 *K*, nach 5 Jahren zahlbar, bei ganzjähriger Capitalisation zu 4% Zinseszins gegenwärtig, d. i. um 5 Jahre früher, wert?

Für 5 Zeitperioden und 4% hat 1 K den Barwert von 0·821927 K; daher 0·821927.. $K \times 4000 = 3287·708\ldots\ K = 3287\ K\ 71\ h$.

2. Welchen Wert haben 7310·75 K vor 15 Jahren, 5% Zinseszins und ganzjährige Capitalisierung vorausgesetzt?

3. Welchen Barwert haben bei Berechnung von Zinseszinsen
a) 5540 K à 4 %, zahlbar nach 15 Zeitperioden?
b) 3059 K à 5 %, „ „ 30 „
c) 8480 K à $2\frac{1}{2}$%, „ „ 28 „

4. Welches Capital wird zu 4% Zinseszins bei ganzjähriger Capitalisierung nach 9 Jahren auf 5000 K anwachsen?

5. Welches Capital muss man zu 4% Zins von Zins anlegen, damit es bei halbjähriger Verzinsung in 12 Jahren auf 5200 K anwachse?

1 K, zahlbar nach 24 Halbjahren, hat bei 2 % den Barwert von 0·621721... K; man hat daher
0·621721... $K \times 5200 = 3232·949\ldots\ K = 3232\ K\ 95\ h$.

6. Welchen Barwert haben 5360 K, fällig nach 12 Jahren, 5% Zinseszins und a) ganzjährige, b) halbjährige Capitalisierung vorausgesetzt?

7. Wie viel wurde vor 15 Jahren angelegt, wenn das durch Zinseszinsen à 5% vermehrte Capital gegenwärtig 6756·52 fl. beträgt?

8. Jemand will nach 15 Jahren 8000 K erhalten; a) wie viel muss er gegenwärtig bei 4% Zinseszins und ganzjähriger Verzinsung anlegen, um diesen Zweck zu erreichen; b) wie viel bei halbjähriger Capitalisation?

9. Welches Capital muss ein Vater für seine Tochter bei einer Versicherungsgesellschaft einzahlen, wenn die Tochter nach 20 Jahren bei 5% Zinseszins 6000 K erhalten soll?

10. Ein 60jähriger Mann will bei seinem Absterben seinem treuen Diener einen Betrag von 1600 K versichern. Welche Einlage muss er in die Versorgungsanstalt machen, wenn diese ganzjährig zu 4% capitalisiert?

Da die mittlere Lebensdauer eines 60jährigen Mannes 12 Jahre ist, so ist diese Aufgabe mit der folgenden gleichbedeutend: welchen gegenwärtigen Wert haben 1600 K, nach 12 Jahren fällig, bei 4% Zins von Zins?

11. Jemand bietet für ein Gut 85000 K unter der Bedingung, dass dieser Kaufschilling erst nach 8 Jahren zu bezahlen sei; wie hoch ist, den Zinseszins zu 5% gerechnet, dieses Anbot für den Augenblick anzuschlagen?

12. Jemand hat die Obliegenheit, durch 4 Jahre am Schlusse eines jeden Jahres 500 K zu bezahlen; wie viel muss er bei 4% Zinses-

zins und ganzjähriger Capitalisierung sogleich zahlen, um sich dieser ganzen Verpflichtung zu entledigen?

Die ersten 500 *K* sind hier um 1 Jahr früher, die zweiten um 2 Jahre früher, die dritten um 3, die vierten um 4 Jahre früher zu entrichten; man hat also

$$\begin{array}{r} 0\cdot961\ 538 \times 500 \\ 0\cdot924\ 556 \times 500 \\ 0\cdot888\ 996 \times 500 \\ \underline{0\cdot854\ 804} \times 500 \\ 3\cdot629\ 894 \times 500 = 1814\cdot95\ K. \end{array}$$

13. Jemand will durch 5 Jahre eine jährliche Summe (Jahresrente) von 1000 *K* beziehen; wie viel Capital muss er zu diesem Ende anlegen, wenn die Zinseszinsen ganzjährig zu 5% angelegt werden?

14. Eine durch 6 Jahre nachschussweise zahlbare jährliche Rente von 400 *K* wird sogleich bar gegen ganzjährige 5% Zinseszinsen abgelöst; wie viel beträgt die Ablösung?

15. Welchen Barwert hat eine durch 8 Jahre am Ende eines jeden Jahres mit 250 *K* zu leistende Rente bei 4% Zinseszins?

16. Welches Capital gewährt zu 4% Zinseszins auf 6 Jahre eine jährliche Rente von 620 fl.?

17. A nimmt ein Capital von 12000 *K* auf und zahlt für Rechnung der 5% Zinsen und der Capitaltilgung am Schlusse eines jeden Jahres 800 *K*; a) wie groß wird noch der Schuldrest nach 10 Jahren sein, b) welchen gegenwärtigen Wert hat dieser Schuldrest?

18. Eine Stadt hat gegenwärtig 18350 Einwohner; wie groß war die Bevölkerung vor 12 Jahren bei einer jährlichen Zunahme von 2%?

Inhalt.

Buchbinderei
Hermann Scheibe Wien.