Nashevo ravnovesje

Gašper in Mateja Mrmolja

→ **Svet, v katerem živimo, je zelo nepredvidljiv in včasih bi rekli, da je celo kaotičen. Velikokrat imamo morda občutek, da se ne bomo znašli ali pravilno odločili, ko bo to potrebno. Pa lahko v dani situaciji kaj predvidimo?**

Del odgovora na to vprašanje se skriva v matematični disciplini, ki ji pravimo teorija iger. Gre za relativno mlado matematično smer, katere prvi večji premik sta leta 1944 naredila John von Neumann in Oskar Morgenstern z izdajo knjige Theory of Games and Economic Behavior. V knjigi je podan matematični pristop k ekonomskim problemom skozi teorijo iger, ki se nanaša na von Neumannove raziskave v teoriji iger, objavljene v letu 1928.

Osnove

Eden bolj zanimivih sklopov teorije iger se osredotoča na preproste modele, s katerimi lahko na matematični način interpretiramo konfliktne situacije med udeleženci igre in njihovimi odločitvami glede na podana pravila. V tem pogledu z besedo igra označujemo kakršne koli interakcije (situacije) med udeleženci, katere korist posameznika ni odvisna samo od njega, ampak tudi od odločitev vseh vpletenih. V prvi vrsti torej ne gre za igre, povezane s srečo, ampak za igre, pri katerih je ob več ponovitvah pomembna strategija.

Strateško igro sestavljajo udeleženci igre (igralci), ki se odločajo istočasno, brez kakršnih koli informacij o že izvedenih odločitvah (potezah). Na koncu pa je rezultat igre vselej odvisen od vseh odločitev hkrati.

Za ilustracijo vzemimo primer igre boja med dvema spoloma, ki jo včasih najdemo tudi pod imenom Bach – Stravinsky. Igro igrata dva igralca – mož in žena, ki si želita skupaj preživeti zanimiv večer, vendar si ga predstavljata vsak po svoje. Mož si želi, da bi si skupaj ogledala nogometno tekmo, žena pa si želi, da bi skupaj nakupovala. Igro enostavno ponazorimo s spodnjo tabelo oziroma matriko.

Mož/Žena	Nogometna tekma	Nakupovanje
Nogometna tekma	2, 1	0, 0
Nakupovanje	0, 0	1, 2

TABELA 1.

Zadovoljstvo posameznika smo z vrednostmi v tabeli opisali na sledeči način:

- Če se oba odločita, da gresta na nogometno tekmo, potem bo to možu prineslo zadovoljstvo v vrednosti 2, ženi pa v vrednosti 1. Njemu se bo izpolnila želja, njej pa tudi ne bo povsem odveč, četudi ne gresta tja, kamor bi želela ona, saj bosta večer vseeno preživela skupaj. To označimo z vnosom (2, 1).
- Če se oba odločita, da gresta nakupovati, potem bo to ženi prineslo zadovoljstvo v vrednosti 2, možu pa v vrednosti 1. Njej se bo izpolnila želja, njemu pa tudi ne bo povsem odveč, četudi ne gresta tja, kamor bi želel on, saj bosta večer vseeno preživela skupaj.
- Če se nikakor ne moreta dogovoriti, potem seveda ne bosta zadovoljna, zato njunemu zadovoljstvu pripišemo vrednosti 0.

Ravnovesje

John Forbes Nash, matematik ameriškega rodu, o katerem govorita tudi roman in film z naslovom *A Bea-*

utiful Mind, je leta 1950 v svoji doktorski dizertaciji opisal primer izida igre, ki mu dandanes pravimo Nashevo ravnovesje. Gre za stanje, v katerem se nobeden od igralcev ne bi odločil za zamenjavo svoje poteze, četudi bi predhodno poznal poteze vseh ostalih.

Tako ravnovesje ne obstaja vedno. Oglejmo si primer igre kamen–škarje–papir. To je igra, kjer tekmujeta dva igralca. V vsakem krogu igre izbereta eno od treh figur (kamen, škarje ali papir), ne da bi vedela, kaj bo izbral drugi izmed njiju. V primeru, da oba izbereta enako figuro, je ta krog igre neodločen, če pa izbereta različni figuri, eden od njiju zmaga, drugi pa izgubi. Pravila so, da kamen premaga škarje, škarje premagajo papir, papir pa premaga kamen.

Tudi to igro lahko ponazorimo s tabelo (glej tabelo 2). Za poenostavitev bomo prvega igralca poimenovali oče, drugega pa sin.

Oče/Sin	Kamen	Papir	Škarje
Kamen	$0, 0$	$-1, 1$	$1, -1$
Papir	$1, -1$	$0, 0$	$-1, 1$
Škarje	$-1, 1$	$1, -1$	$0, 0$

TABELA 2.

V tabeli 2 smo za posamezni izid igre zmagovalcu dodelili vrednost 1, poražencu pa -1. Če je prišlo do neodločenega izida, smo obema dodelili vrednost 0.

Enostavno lahko vidimo, da ta igra nima Nashevega ravnovesja, saj za oba igralca velja, da bi, v primeru poraza, želela spremeniti svojo figuro. Recimo, da oče izbere papir, sin pa kamen. Izid igre bi imel vrednost $(1, -1)$. Vendar pa bi, če bi imel to možnost, sin svojo figuro raje spremenil v škarje in zmagal. Podobno velja tudi za vse neodločene izide, zato lahko vsak od njiju vedno izboljša svojo odločitev, kar potrdi, da ravnovesja ni.

Poglejmo si še en primer znane igre, ki se imenuje Zapornikova dilema. Tu imamo dva zapornika (poimenujmo ju Milan in Janez), ki ju je policija aretirala, saj sta osumljena ropa. Zaprli so ju v dve ločeni celici in jima tako preprečili, da bi na kakršen koli način komunicirala drug z drugim. Rop sta resnično zagrešila, vendar jima policija tega ne more dokazati. Policija ima sicer dovolj dokazov (posedovanje orožja, neprimerno vedenje) za dveletno zaporno kazen, vendar želijo primer zaključiti s priznanjem vsaj enega od njiju, da bi na ta način drugega lahko poslali v ječo za dlje časa.

Oba pa vesta:

- Zločin lahko priznata ali pa ne.
- Če eden od njiju prizna, drugi pa molči, potem bo tisti, ki je priznal, oproščen, drugi, ki je molčal, pa bo šel v zapor za štiri leta.
- Če oba priznata, bosta šla v zapor za tri leta.
- Če oba molčita, potem imajo policisti dovolj dokazov, da gresta oba v zapor za dve leti.

Milan/Janez	Prizna	Molči
Prizna	$3, 3$	$0, 4$
Molči	$4, 0$	$2, 2$

TABELA 3.

V razpredelnici 3 imamo zapisane vse možne izide igre. Recimo, da Janez prizna. Potem bo za Milana najbolje, če tudi on prizna, in tako dobi samo tri leta zapora – izid igre bo (3, 3). Če pa Janez molči, je bolje, če Milan prizna, saj bo v tem primeru oproščen – izid igre bo (0, 4). Enak premislek velja tudi v obratni situaciji. Nashevo ravnovesje je torej situacija, ko oba priznata, da sta zagrešila rop, in tako dobita vsak po tri leta zapora. Če bi si namreč eden od njiju premislil, drugi pa bi vztrajal pri isti odločitvi, potem bi bil igralec, ki se je odločil spremeniti odločitev, na slabšem.

Podoben razmislek o obstoju Nashevega ravnovesja lahko naredimo tudi pri igri boja med dvema spoloma, ki je bila predstavljena v prejšnjem razdelku (glej *tabelo 1*). Ugotovili bi, da za to igro obstajata celo dve ravnovesji, ko gresta oba bodisi na tekmo bodisi na nakupovanje.

Interpretacija obstoja ravnovesij

V tem razdelku si oglejmo, kaj lahko o interakcijah sklepamo glede na obstoj oziroma neobstoj ravnovesij. V igri kamen–škarje–papir ravnovesja ni, kar je tudi razlog, zakaj je ta igra zanimiva. Ne glede na racionalnost obeh igralcev namreč ni strahu, da bi se igra po nekem času stabilizirala in da bi oba igralca začela v nedogled ponavljati svojo figuro. Po drugi strani obstoj dveh ravnovesij pri primeru mož–žena nakazuje na večen konflikt med spoloma. Četudi se zakonca znajdeta v izidu, ki obema prinaša pozitiven rezultat, pa je nekdo od njiju prikrajšan, saj ve, da se je moral za ugodno situacijo žrtvovati on. Vendar pa za spremembo tega dejstva ni dovolj zgolj bojkot dogodka. Če se želi ponovno znajti v pozitivnem stanju, mora ne le odpovedati udeležbo, ampak v svojo interesno sfero prepričati tudi soigralca, kar je v vsakodnevnem življenju težko in od nas zahteva kompromise. Nazadnje je zelo zanimiva tudi dilema dveh zapornikov, ki ima eno samo ravnovesje. Več empiričnih preizkusov je pokazalo, da bodo igralci, če igrajo racionalno, v večkratni ponovitvi začeli izbirati zgolj možnost ›priznam‹, kar pa privede do zanimivega konflikta. Namreč, za oba igralca bi bilo najugodneje, da bi molčala in sprejela vsak svojo dvoletno kazen. Ker pa ju vodi pragmatičnost in želja po maksimizaciji osebnega ugodja, na koncu oba prestaneta pri triletni kazni. To lepo ilustrira dejstvo, ki ga je zelo dobro opisal tudi J. F. Nash, in sicer, da stremenje k maksimalni zadovoljitvi osebnih potreb ni nujno tudi pot k družbenemu optimumu.

Literatura

[1] J. Baez, *Game Theory*, 2015.

[2] M. Dean, *Game Theory*, Lecture Notes for Fall 2009 Introductory Microeconomics, Brown University, 2009.

[3] E. Pertovt, T. J., *Uporaba teorije iger za optimizacijo delovanja brezžičnih omrežij*, Elektronski vestnik, **78** 2011, 287–292.

[4] H. Hotz, *A Short introduction to Game Theory*.

[5] Tekmovanje ACM iz računalništva in informatike, dostopno na `rtk-info@ijs.si`, ogled 10. 4. 2019.

[6] Zapornikova dilema, dostopno na `sl.wikipedia.org/wiki/Zapornikova_dilema`, ogled 10. 4. 2019.

× × ×

Paposovi šestkotniki

Marko Razpet

→ Papos Aleksandrijski, grško Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς**, na kratko Papos, tudi Papus iz polatinjene oblike Pappus, je bil zadnji pomembnejši antični matematik. O njem vemo le, da je bil učitelj v Aleksandriji in da je 18. oktobra 320 tam opazoval Sončev mrk. Rodil se je okoli leta 290, umrl pa okoli leta 350 našega štetja. Njegovo najbolj znano delo je** ***Zbirka*****, grško** Συναγωγή**, ki je nastalo okoli leta 340. Papos je pisal v grščini. V obdobju renesanse so ga prevajali v latinščino.**

V svoji *Zbirki* se Papos pretežno ukvarja z geometrijskimi problemi. Oglejmo si pobliže enega, ki je vzet iz [1] oziroma [2].

Včrtaj v dano krožnico sedem skladnih pravilnih šestkotnikov tako, da je eden okoli njenega središča, na njegovih stranicah pa sloni vsak od preostalih šestih z eno stranico, katere nasprotna stranica je tetiva krožnice.

Včrtati šestkotnike pa je dovoljeno na klasični način, to se pravi s šestilom in neoznačenim ravnilom. Predpostavimo, da je naloga že rešena. Dana krožnica naj ima središče v točki O in polmer r (slika 1). Na sliki smo označili točke A, B in C ter polmer r in stranico a. Poiščimo aritmetično zvezo med a in r. V ta namen podaljšamo daljico OA in na podaljšek skozi B postavimo pravokotnico, ki ga seka v točki C. Trikotnik OCB je pravokotni. Zanj je $|OB| = r$, $|AC| = a/2$, $|OC| = 2a + a/2 = 5a/2$, $|CB| = a\sqrt{3}/2$. Po Pitagorovem izreku velja:

- $r^2 = (5a/2)^2 + (a\sqrt{3}/2)^2 = 28a^2/4 = 7a^2$.