Vaje iz teorije iger

Sergio Cabello

9. november 2010

naslov: Vaje iz teorije iger

avtorske pravice: Sergio Cabello

izdaja: prva izdaja

založnik: samozaložba

avtor: Sergio Cabello

leto izida: 2010 (v Ljubljani)

natis: elektronsko gradivo
http://www.fmf.uni-lj.si/~cabello/gradiva/vajeteorijaiger.pdf

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

519.83(075.8)(076.1)

CABELLO, Sergio
Vaje iz teorije iger [Elektronski vir] / Sergio Cabello. - 1. izd. - El. knjiga. - V Ljubljani : samozal., 2010

Način dostopa (URL): http://www.fmf.uni-lj.si/~cabello/gradiva/vajeteorijaiger.pdf

ISBN 978-961-276-044-1

253229312

Kazalo

Za študiranje priporočam naslednje knjige:

- Martin J. Osborne. Introduction to Game Theory. Oxford University Press, 2002.
- Thomas S. Ferguson. Game Theory. Elektronska knjiga dostopna na http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/Contents.html
- Bernhard von Stengel. Game Theory Basics. Osnutek knjige dostopen na http://www.maths.lse.ac.uk/Courses/MA301/lectnotes.pdf

Na svetovnem spletu je moč najti zelo dobre skripte in prosojnice, ki so včasih lažje za razumevanje in bolj neformalne. Poišči! V najslabšem primeru boš našel druge zanimive stvari.

Zahvala. Zahvaljujem se Martinu Juvanu za številne popravke. Seveda pa je avtor odgovoren za vse preostale napake.

1 Strateške igre

1.1 Strateške igre s funkcijami preferenc

Vse igre v tem razdelku so igre s funkcijami preferenc in igralci lahko izberejo samo čiste strategije.

1.1. Študenti boste igrali naslednjo igro. Vsak študent bo napisal eno celo število med 0 in 100. Učitelj bo izračunal povprečno vrednost vaših števil, ki jo označimo z m. Študenti, ki bodo izbrali najmanjše število nad $2m/3$, si bodo razdelili eno točko pri končni oceni vaj.

Na primer, če studenti izberejo 0, 20, 20, 30, 30, 45, potem je $m = 145/6 = 24.166\ldots$, in $2m/3$ je $16.111\ldots$. Tako bo vsak študent, ki je izbral 20, dobil $1/2$ točke pri končni oceni vaj.

Katero število boš izbral?

1.2. Ali sta naslednja strateška igra in zapornikova dilema ekvivalentni?

	X	Y
W	3, 3	1, 5
Z	4, 1	0, 0

Zapiši naključno 2×2 strateško igro za dva igralca. Ali je igra ekvivalentna zapornikovi dilemi?

1.3. Določi smiselno definicijo ekvivalentnosti med strateškimi igrami. Dokaži, da ima definicija naslednje lastnosti[1]:

(a) Definicija ekvivalentnosti je ekvivalenčna relacija: refleksivna, simetrična in tranzitivna.

(b) Če sta igri Γ in Γ' ekvivalentni in ima igra Γ k Nashevih ravnovesij, potem ima igra Γ' tudi k Nashevih ravnovesij.

1.4. Določi diskretno strateško igro za 3 igralce, ki nima nobenih Nashevih ravnovesij. Igra naj ima naslednjo lastnost: $u_i(a) \neq u_i(a')$ za poljubne profile $a \neq a'$ in poljubnega igralca P_i.

1.5. Opazujemo naslednjo igro za 3 igralce, kjer ima vsak igralec P_i množico akciji $A_i = \{T_i, B_i\}$.

	T_2	B_2
T_1	3, 4, 4	1, 3, 3
B_2	8, 1, 4	2, 0, 6

če $a_3 = T_3$

	T_2	B_2
T_1	4, 0, 5	0, 1, 6
B_2	5, 1, 3	1, 2, 5

če $a_3 = B_3$

[1] Če definicija nima takih lastnosti, najverjetneje ni smiselna.

(a) Določi Nasheva ravnovesja igre.

(b) Določi vse pare akcij, kjer prva akcija dominira drugo akcijo.

1.6. Zanima nas strateška igra, kjer imamo 3 igralce in $A_1 = \{A, B\}$, $A_2 = \{X, Y\}$ in $A_3 = \{L, M, R\}$. Funkcije preferenc so določene s spodnjimi tabelami,

	X	Y
A	2, 0, 6	b, 1, 6
B	8, b, 4	4, 2, a

če $a_3 = L$

	X	Y
A	4, 0, 5	1, 3, 3
B	5, 1, 3	1, 2, 5

če $a_3 = M$

	X	Y
A	8, 5, 4	1, 6, 4
B	3, 4, 4	2, 5, 3

če $a_3 = R$

(a) Kakšna so čista Nasheva ravnovesja? Odgovor je odvisen od parametrov $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Ali kaka čista akcija dominira drugo čisto akcijo? Odgovor mora biti tudi odvisen od parametrov a, b.

1.7. Zanima nas strateška igra, določena s spodnjo tabelo. Prvi igralec ima zvezno množico akcij, drugi igralec pa ima samo dve možni akciji. Določi Nasheva ravnovesja igre.

	ℓ	r
$a_1 \in [0, 1]$	$2 - 2a_1, a_1$	$a_1, 1 - a_1$

1.8. Opazujemo naslednjo strateško igro za dva igralca. Množica akcij vsakega igralca je $(0, \infty)$. Funkciji preferenc igralcev sta $u_1(a_1, a_2) = a_1(a_2 - a_1)$ in $u_2(a_1, a_2) = a_2(1 - a_1 - a_2)$. Določi Nasheva ravnovesja igre.

1.9. Zanima nas naslednja modifikacija Cournotovega modela duopola. Vsak igralec P_i določi količino $q_i \geq 0$ produkta, ki ga proizvaja. Cena produkta je odvisna od skupne količine Q, ki jo proizvajajo, po formuli

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q, & \text{če } 0 \leq Q \leq a; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Funkcija preferenc igralca P_i je enaka dobičku, ki ga dobi. Gledamo primer, kjer ima vsak igralec P_i različen strošek c_i za eno enoto produkcije. Predpostavimo, da je $a > c_1 > c_2$. Potem je dobiček igralca P_i podan z

$$u_i(q_1, q_2) = q_i \cdot (P(q_1, q_2) - c_i).$$

Določi vsa Nasheva ravnovesja igre.

1.10. Uporabimo notacijo iz vaje 1.9, vendar predpostavimo, da so stroški za produkcijo količine q_i enaki q_i^2. Določi funkcijo, ki pove dobiček vsakega igralca, in določi vsa Nasheva ravnovesja igre.

1.11. Določi Nasheva ravnovesja modifikacije Cournotovega modela oligopola za n igralcev, kjer imajo vsi igralci enake stroške za produkcijo ene enote proizvoda.

1.12. Opazujemo modifikacijo Cournotovega modela duopola, kjer ima vsak igralec začetne stroške c_{start}. Torej so stroski proizvodnje količine q_i enaki $c_{\text{start}} + cq_i$. Določi vsa Nasheva ravnovesja igre.

1.13. Uporabimo notacijo iz vaje 1.9, vendar je cena produkta določena po

$$P(Q) = \begin{cases} Q^2/4 - 5Q + 26, & \text{če } 0 \leq Q \leq 10; \\ 1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Predpostavimo, da so stroški proizvodnje ene enote $c = 1$.

(a) Če je igra monopol, kakšna je optimalna rešitev igre?

(b) Določi vsa Nasheva ravnovesja duopola. Treba je razmišljati samo o primeru $0 \leq q_1 + q_2 \leq 10$.

1.14. Gledali bomo modifikacijo Cournotovega modela duopola. Dve firmi (P_1 in P_2) sta na trgu in proizvajata isti produkt. Vsaka firma P_i mora določiti količino $q_i \geq 0$ produkta, ki ga naredi. Cena produkta je potem podana s formulo

$$P(q_1, q_2) = \begin{cases} 20 - 2q_1 - 3q_2, & \text{če } 20 - 2q_1 - 3q_2 \geq 0; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Dobiček firme P_i je $u_i(q_1, q_2) = q_i(P(q_1, q_2) - 2)$. Dobiček uporabljamo kot funkcijo preferenc. Zaradi nekih drugih pogojev pri firmi P_2 velja tudi $q_2 \in \{0, 2, 4, 6\}$. Določi Nasheva ravnovesja igre.

1.15. Opazujemo modifikacijo Bertrandovega modela duopola, kjer je cena celo število. Ali je (c, c) Nashevo ravnovesje? Ali obstajajo še druga Nasheva ravnovesja?

1.16. Opazujemo modifikacijo Bertrandovega modela duopola, kjer del kupcev trga vedno kupi izdelek iste firme. Predpostavimo, da je povpraševanja za izdelek firme P_i podano s formulo

$$q_i(p_1, p_2) = \begin{cases} a - p_i + p_j/4, & \text{če je vrednost pozitivna;} \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Določi vsa Nasheva ravnovesja igre.

1.17. Zanima nas igra $\Gamma = (2, ([0, 10]^2, [0, 10]), (u_1, u_2))$, pri čemer je

$$\begin{aligned} u_1(a, b, c) &= a(10 - b - c) + b(10 - a - c), \\ u_2(a, b, c) &= c(10 - a - b - c). \end{aligned}$$

Taka igra je variacija modela duopola, kjer igralec P_1 izbere par (a, b).

(a) Opiši najboljši odgovor $B_1(c)$ in $B_2(a, b)$.

(b) Kakšna so Nasheva ravnovesja igre?

(c) Ali obstajata akciji c, c' igralca P_2, kjer c dominira c'?

1.18. Predpostavimo, da predavaš predmet teorija iger in da pripravljaš izpit iz vaj. Poiskati želiš novo strateško igro Γ za dva igralca, kjer je množica akcij A_i igralca P_i enaka $\mathbb{R}$. Ker bo kasneje treba nekaj izračunati, želiš, da sta najboljša odgovora $B_1(a_2) = \{a_2 + 3\}$ in $B_2(a_1) = \{3a_1 - 2\}$. Ali lahko najdeš prave funkcije preferenc u_i za igro Γ?

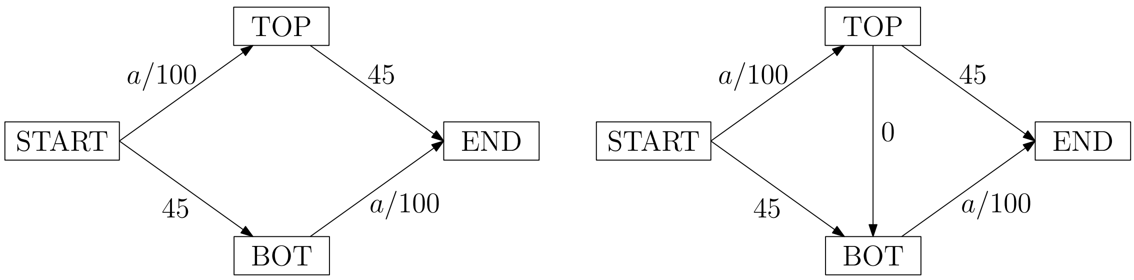
1.19. Zanima nas naslednja strateška igra s funkcijami preferenc. V igri sta 2 igralca. Igralec P_i izbere število $t_i \geq 0$. Funkcija preferenc igralca P_i je

$$u_i(t_1, t_2) = \begin{cases} -t_i, & \text{če } t_i < t_j; \\ v_i/2 - t_i, & \text{če } t_i = t_j; \\ v_i - t_j, & \text{če } t_i > t_j, \end{cases}$$

kjer je $P_j \neq P_i$ drugi igralec. V opisu igre imamo parametra v_1 in v_2. Predpostavimo, da velja $v_1 > v_2 > 0$.

Določi najboljši odgovor vsakega igralca in vsa Nasheva ravnovesja igre.

1.20. Opazujemo mrežo cest, ki je na levi strani naslednje slike.



Pri vsaki usmerjeni povezavi je napisan čas za potovanje po povezavi, kjer je a število avtomobilov na povezavi. Predpostavimo, da je 4000 avtomobilov, ki potujejo hkrati po omrežju[2]. Vsak avto je igralec, ki mora določiti svojo pot od START do END.

(a) Ali obstaja Nashevo ravnovesje? Ali jih je več? Koliko časa porabi posamezni avto za potovanje od START do END pri vsakem Nashevem ravnovesju?

(b) Neverjetno hitra cesta, ki povezuje TOP in BOT, je končno dokončana. Glej desno stran slike. Čas potovanja po novi cesti je enak nič. Ali obstajajo Nasheva ravnovesja v novem cestnem omrežju? Koliko časa porabi posamezni avto v novem omrežju za potovanje od START do END pri Nashevem ravnovesju?

(c) Primerjaj (a) in (b).

Ta fenomen je poznan kot **Braessov paradoks**. Preberi članek v Wikipediji.

1.21. V skupini je deset oseb. Vsaka oseba ima dve možnosti: sodelovanje pri skupnem velikem projektu (BIG) ali narediti svoj majhen samostojen projekt (SMALL). Projekt BIG bo uspešen samo, če bodo pri njem sodelovale vse osebe. Če igralec P_i izbere SMALL, je uspešen v svojem majhnem projektu. Preference vsakega igralca so naslednje: izbira BIG, ko je projekt BIG uspešen, je najboljši izid; izbira SMALL je naslednji izid; najslabši izid je izbira BIG, ko projekt BIG ni uspešen.

[2] Mogoče je bolj primerno upoštevati, da je stalen dotok avtomobilov z gostoto 4000. Ali če razmišljamo o internetu, da je stalen dotok bitov.

(a) Opiši ta scenarij kot strateško igro.

(b) Določi Nasheva ravnovesja igre.

(c) Posploši scenarij na n igralcev.

(d) Spremenimo scenarij na naslednji način. V skupini je n oseb in projekt BIG bo uspešen, če ga izbere vsaj k oseb. Vsak majhen projekt ima isti dobiček s. Projekt BIG ima večji dobiček b. Dobiček uspešnega projekta bo razdeljen med osebe, ki so sodelovale na projektu. Določi Nasheva ravnovesja igre v odvisnosti od parametrov n, k, s, b.

1.22. Opazujemo strateško igro, ki smo jo spoznali na predavanju in modelira dražbo tipa druge cene z zaprtimi ponudbami (second-price sealed-bid). Ali je naslednja trditev pravilna: za vsakega igralca P_i obstaja Nashevo ravnovesje, pri katerem igralec P_i dobi predmet dražbe.

1.23. Zanima nas dražba tipa prve cene z zaprtimi ponudbami (first-price sealed-bid). Podobne dražbe so uporabili za cvetje na Nizozemskem ali ribe v Španiji. Števec pokaže trenutno ceno, ki se zmanjšuje, dokler neki igralec ne reče, da bo plačal prikazano ceno. Modeliraj tak scenarij kot strateško igro in določi vsa Nasheva ravnovesja. Lahko predpostaviš, da imajo vrednosti igralcev lastnost $v_1 > v_2 > \cdots > v_n$.

1.2 Strateške igre s funkcijami koristnosti

Vse igre v tem razdelku so igre s funkcijami koristnosti in igralci lahko izberejo mešane strategije.

1.24. Pokaži naslednjo trditev: funkciji koristnosti $u, u' : A \to \mathbb{R}$ določata iste preference na $\Pi(A)$ natanko tedaj, ko velja $u' = \alpha u + \beta$ za neki konstanti $\alpha > 0$ in β.

1.25. Naj bo Γ igra za n igralcev, pri čemer velja $|A_i| = 2$ za vsako množico akcij A_i. Naj bo $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ profil mešanih strategij, ki zadošča

$$U_i(\pi_1, \ldots, \pi_n \mid \delta(a)) = U_i(\pi_1, \ldots, \pi_n \mid \delta(b)) \quad \forall i, \forall a, b \in A_i.$$

Pokaži, da je $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ Nashevo ravnovesje.

1.26. Opazujemo igro, določeno s spodnjo tabelo.

	A	B
X	a, b	2, 4
Y	1, 3	a, b

Kakšna so (mešana) Nasheva ravnovesja igre? Odgovor je odvisen od parametrov a, b.

1.27. Opazujemo strateško igro, določeno s spodnjo tabelo, kjer ima prvi igralec zvezno množico akcij, drugi igralec pa ima samo dve možni akciji.

	ℓ	r
$a_1 \in [0, 1]$	$2 - 2a_1, a_1$	$a_1, 1 - a_1$

(a) Če vsak igralec izbere akcijo enakomerno naključno, kakšna je pričakovana koristnost vsakega igralca?

(b) Če prvi igralec izbere akcijo enakomerno naključno, kakšen je najboljši odgovor drugega igralca?

1.28. Določi Nasheva ravnovesja iger, določenih s spodnjimi tabelami.

	B	S
B	2, 1	0, 0
S	0, 0	1, 2

	A	B
X	5, 1	0, 2
Y	1, 0	2, 3

	A	B	C
X	5, 1	0, 2	3, 1
Y	1, 0	2, 3	2, 4
Z	0, 0	1, 3	1, 5

1.29. Opazujemo izvajanje enajstmetrovk pri nogometu. Igralec se mora odločiti, ali bo streljal levo ali desno, in vratar se mora odločiti, ali bo skočil levo ali desno. Predpostavimo, da igralec in vratar vnaprej odločita, kaj bosta storila. Za vsako kombinacijo je v spodnji tabeli verjetnost gola, ki jo je s pregledom velikega števila izvajanj poklicnih nogometašev določil Palacios-Huerta (Professionals Play Minimax; *Review of Economic Studies* 70, str. 395–415). Poišči Nasheva ravnovesja.

		Vratar	
		L	D
Igralec	L	.90	.60
	D	.75	.95

1.30. Z uporabo strogih dominacij določi Nasheva ravnovesja igre, določene s spodnjo tabelo.

	L	C	R
T	4, 2	3, 3	1, 5
M	0, 4	4, 1	2, 0
B	1, 4	3, 1	1, 7

1.31. Opazujemo igro, določeno s spodnjo tabelo. Ali je profil mešanih strategij

$$(3/4, 0, 1/4), (0, 1/3, 2/3)$$

Nashevo ravnovesje?

	L	C	R
T	1, 2	3, 3	1, 1
M	?, ?	0, 3	2, 4
B	?, 4	5, 1	0, 7

1.32. Opazujemo strateško igro za 3 igralce, določeno s spodnjo tabelo. Množica akcij igralca P_3 je $A_3 = \{A, B, C\}$.

	L	R
T	1, 2, 1	1, 1, 4
M	0, 0, 4	3, 2, 4

če $a_3 = A$

	L	R
T	2, 4 ,0	5, 2, 0
M	0, 3, 1	0, 1, 3

če $a_3 = B$

	L	R
T	4, 4, 0	0, 0, 2
M	3, 0, 3	2, 2, 4

če $a_3 = C$

Ali je profil mešanih strategij $(3/4, 1/4), (1/3, 2/3), (1/2, 0, 1/2)$ Nashevo ravnovesje? Ali je profil mešanih strategij $(0, 1), (1/3, 2/3), (1/2, 0, 1/2)$ Nashevo ravnovesje?

1.33. Opazujemo naslednjo igro. Igralca P_1 in P_2 hkrati izbereta celo število med 1 in K. Če izbereta isto število, potem plača igralec P_2 en evro igralcu P_1; sicer nihče ne plača nič.

(a) Dokaži, da je Nashevo ravnovesje profil strategij, pri katerih vsak igralec izbere število enakomerno naključno.

(b) Dokaži, da je profil strategij iz točke (a) edino Nashevo ravnovesje.

(c) Če si igralec P_2 in se moraš odločiti, koliko naj ti vnaprej plača igralec P_1 za igranje igre, kakšne cene so smiselne?

(d) Opazujemo varianto, kjer je $K = 2$ ali $K = 3$ in kjer v primeru, da izbereta isto število a, igralec P_2 plača igralcu P_1 a evrov. Kakšna so Nasheva ravnovesja?

1.34. Pokaži, da je vsaka predpostavka Brouwerjevega ireka o negibni točki potrebna. (Dovolj je, da pogledaš dimenzijo ena.)

1.35. Dokaži Brouwerjev izrek o negibni točki za eno dimenzijo, to je za $\mathbb{R}$.

1.36. Poišči varnostne nivoje (safety levels) in maxmin strategije vsakega igralca v naslednji bimatrični igri.

$$\begin{pmatrix} 2,1 & 5,0 \\ 0,8 & 4,6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2,3 & 4,2 \\ 3,2 & 2,4 \end{pmatrix}$$

1.37. Zapiši linearni program, ki določi varnostni nivo v_1 naslednje matrične igre:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Če nekdo reče, da je $(1/2, 1/2, 0)^T$ maxmin strategija igralca P_1 in $v_1 = 3.5$, ali imamo dovolj podatkov, da hitro odločimo, ali je to res?
Kakšno dodatno informacijo bi potreboval, da bi lahko hitro odločil, ali je res?

1.38. Določi vrednost in eno Nashevo ravnovesje v naslednji matrični igri:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

1.39. Določi vrednost in vsa Nasheva ravnovesja v naslednji matrični igri v odvisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

1.40. Določi vrednost in vsa Nasheva ravnovesja naslednje matrične igre v odvisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 4-a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

1.41. Opazujemo naslednjo matrično igro:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ali obstaja Nashevo ravnovesje oblike $(a, b, 0), (a', b', 0)$?

1.42. Opazujemo naslednjo matrično igro:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Ali obstaja Nashevo ravnovesje oblike $(a, b, 1/4), (a', b', 1/4, 0)$?

(b) Ali obstaja Nashevo ravnovesje oblike $(8/33, a, b), (a', b', 1/11, 0)$?

1.43. Opazujemo naslednjo matrično igro, kjer je a parameter:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & a \\ 3 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Določi, za katere vrednosti parametra a obstaja strategija $\pi_1 = (p, 1-p, 0) \in \Pi_1$ igralca P_1, ki dominira strategijo $(0, 0, 1)$.

(b) Predpostavimo, da parameter a zadošča $a \geq 0$. Kakšna je vrednost igre glede na parameter $a \geq 0$?

(c) Določi vse maxmin strategije za igralca P_1 in P_2, ko je $a = 3$.

1.44. Opazujemo naslednjo matrično igro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Določi vrednost igre in eno Nashevo ravnovesje. (Namig: računanje skoraj ni potrebno.)

(b) Ali lahko ugotoviš kako splošno pravilo?

(c) Ali obstaja samo eno Nashevo ravnovesje?

1.45. Opazujemo naslednji matrični igri:

$$\begin{pmatrix} 2 & a & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & a \\ 3 & -2 \\ 0 & 3-a \end{pmatrix}$$

Za vsako določi vrednost igre in vsa Nasheva ravnovesja.

1.46. Določi vrednost in eno Nashevo ravnovesje naslednje matrične igre:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.47. Določi vrednost in eno Nashevo ravnovesje za naslednje matrične igre. Uporabi trditve, ki zmanjšajo število računov.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.48. Ali lahko določiš a, b tako, da bo profil $(1/4, 1/2, 1/4), (1/2, 1/4, 1/4)$ Nashevo ravnovesje naslednje matrične igre:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}?$$

1.49. Poišči matrično igro, kjer ima prvi igralec 5 čistih akcij, drugi igralec 6 čistih akcij, igra pa izpolnjuje vse naslednje pogoje:

- vsak koeficient matrike je pozitiven;
- vrednost igre je 2;
- nima sedla.

Kako si konstruiral tako igro?

1.50. Ali je naslednja trditev pravilna: če sta matriki A in B iste velikosti, velja $v(A) + v(B) = v(A + B)$.

1.51. Poišči Nasheva ravnovesja iger, določenih s spodnjima tabelama.

	A	B	C
X	4, 2	0, 0	0, 1
Y	0, 0	2, 4	1, 3

	A	B	C
X	1, 0	0, 2	3, 3
Y	0, 6	2, 5	4, 3

1.52. Poišči vsa Nasheva ravnovesja naslednje bimatrične igre:

$$\begin{pmatrix} 6,0 & 0,5 & 3,a \\ 0,6 & 4,1 & 2,2 \end{pmatrix}.$$

1.53. Opazujemo naslednjo bimatrično igro:

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 2,0 & 1,7 & 3,3 \\ 2,4 & a,b & 2,0 & 4,c \\ 1,3 & 2,4 & 0,3 & 1,3 \end{pmatrix}.$$

(a) Določi trojke $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, za katere je profil strategij $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}),(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7},0)$ Nashevo ravnovesje.

(b) Izberemo $a = c = 3$. Določi vsa mešana Nasheva ravnovesja v odvisnosti od vrednosti parametra b.

1.54. Opazujemo naslednjo igro. Igralca P_1 in P_2 hkrati izbereta naravno število iz množice $\{1,2,\ldots,n\}$. Če izbereta isto število x, potem igralec P_2 plača $2^x - 1$ evrov igralcu P_1. Če izbereta različni števili, potem igralec P_1 plača 1 evro igralcu P_2. Določi (kako) optimalno strategijo za vsakega igralca. Ali bi bil raje igralec P_1 ali P_2?

1.55. Opazujemo naslednjo bimatrično igro:

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 5,a & b,b+1 \\ 3,1 & 4,4 \end{pmatrix}.$$

(a) Za vsak par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ določi vsa čista Nasheva ravnovesja.

(b) Določi pare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, za katere je profil $(\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ mešano Nashevo ravnovesje.

(c) Izberemo $b = 1$. Določi vsa mešana Nasheva ravnovesja v odvisnosti od vrednosti parametra a.

1.56. Opazujemo strateško igro, določeno s spodnjo tabelo, kjer imamo parameter $a \in \mathbb{R}$.

	A	B	C
X	0, 4	1, 3	1, $a+1$
Y	2, 1	a, $6-a$	2, a

(a) Za katere vrednosti parametra a obstaja čisto Nashevo ravnovesje?

(b) Ali obstaja vrednost parametra a, za katero je profil strategij $(p, 1-p), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ Nashevo ravnovesje?

(c) Izberemo $a = 0$. Določi vsa Nasheva ravnovesja.

1.57. Določi vsa mešana Nasheva ravnovesja naslednje bimatrične igre:

$$\begin{pmatrix} 8,12 & 10,12 & 6,8 & 12,16 \\ 8,6 & 8,10 & 10,14 & 10,4 \end{pmatrix}.$$

1.58. Opazujemo naslednjo bimatrično igro

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1,5 & 2,4 & 0,3 & 3,2 \\ 3,2 & a,3 & 4,5 & 4,6 \end{pmatrix}.$$

Določi Nasheva ravnovesja v odvisnosti od vrednosti parametra a.

1.3 Bayesove igre

1.59. Anita želi prodati svojo avto in Bojan želi kupiti avto. Avto je lahko v dobrem ali v slabem stanju. Anita pozna njegovo stanje, Bojan pa ga ne pozna, vendar misli, da je v dobrem stanju z verjetnostjo p. Če je avto v dobrem stanju, ima vrednost 2000 za Anito in 3000 za Bojana. Če pa je v slabem stanju, ima vrednost 0 za Anito in 1000 za Bojana. Če Bojan kupi avto, bo plačal K evrov Aniti. Igralca hkrati in neodvisno izbereta akcijo "trgovanje"ali "ne trgovanje". Anita proda avto Bojanu, če oba izbereta "trgovanje".

Modeliraj tako situacijo kot Bayesovo igro. Za katere vrednosti parametra K je Bojan indiferenten med akcijama "trgovanje"in "ne trgovanje". Določi vsa mešana Bayesova ravnovesja igre.

1.60. Opazujemo Bayesovo igro za dva igralca, ki ima dve možni stanji: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Funkciji koristnosti za obe stanji sta določeni s spodnjima tabelama:

		P_2	
		L	D
P_1	A	2, 4	3, 3
	B	1, 3	3, 1

stanje ω_1

		P_2	
		L	D
P_1	A	1, 3	2, 2
	B	0, 2	4, 3

stanje ω_2

Igralec P_1 dobi isti signal od stanj ω_1, ω_2. Igralec P_2 dobi različna signala od stanj ω_1 in ω_2. Igralca verjameta, da je $\Pr[\omega_1] = \mu \in (0, 1)$ in $\Pr[\omega_2] = 1 - \mu$.

(a) Določi vsa čista Bayesova ravnovesja igre.

(b) Določi vsa mešana Bayesova ravnovesja igre.

(c) Za kakšne vrednosti parametra μ akcija A dominira akcijo B?

1.61. Opazujemo Bayesovo igro za dva igralca, ki ima tri možna stanja: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Funkciji koristnosti za vsako stanje sta določeni s spodnjimi tabelami:

	L	D
A	4, 0	0, 4
B	0, 4	4, 0

stanje ω_1

	L	D
A	1, 0	0, 2
B	0, 2	1, 0

stanje ω_2

	L	D
A	0, 2	2, 0
B	4, 0	0, 4

stanje ω_3

Igralec P_1 dobi isti signal a od stanj ω_1, ω_2 in signal b od ω_3. Igralec P_2 dobi isti signal d od stanj ω_2, ω_3 in signal c od ω_1. Igralca mislita, da velja $\Pr[w_1] = \Pr[w_2] = \Pr[w_3] = 1/3$.

- Nariši diagram situacije.
- Ko P_1 dobi signal a, kakšna je verjetnost, da prihaja iz stanja ω_1?
- Ali obstaja *čisto* Bayesovo ravnovesje, kjer je $a_{(1,a)} = A$ in $a_{2,d} = L$?
- Ali obstaja *čisto* Bayesovo ravnovesje, kjer je $a_{(1,a)} = A$?
- Izberemo naslednje mešane strategije: $a_{(1,a)} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, $a_{(1,b)} = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B$, $a_{(2,c)} = \frac{13}{24}L + \frac{11}{24}D$, $a_{(2,d)} = \frac{1}{3}L + \frac{2}{3}D$. Pokaži, da je profil $(a_{(1,a)}, a_{(1,b)}, a_{(2,c)}, a_{(2,c)})$ Bayesovo ravnovesje.

1.62. Opazujemo Bayesovo igro za dva igralca, ki ima tri možna stanja: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Funkciji koristnosti za vsako stanje sta določeni z naslednjimi tabelami:

P_1 \ P_2	L	D
A	2, 4	3, 3
B	1, 3	3, 1

stanje ω_1

P_1 \ P_2	L	D
A	1, 3	2, 2
B	0, 2	4, 3

stanje ω_2

P_1 \ P_2	L	D
A	0, 2	−1, 3
B	4, 2	2, 4

stanje ω_3

Igralec P_1 dobi isti signal od stanj $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Igralec P_2 dobi različne signale od stanj $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Igralca verjameta, da je $\Pr[\omega_1] = 1/2$ in $\Pr[\omega_2] = \mu \in (0, 1/2)$ ter $\Pr[\omega_3] = 1/2 - \mu$.

(a) Določi vsa čista Bayesova ravnovesja igre.

(b) Določi vsa mešana Bayesova ravnovesja igre.

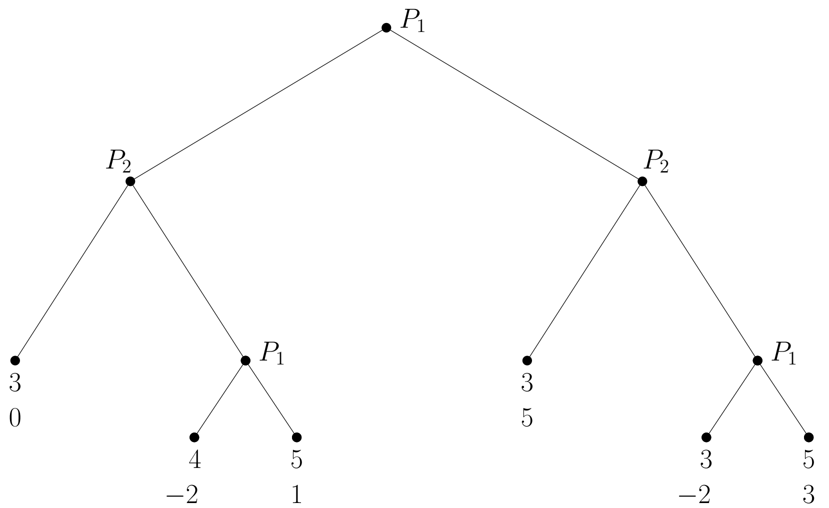
1.63. Opazujemo naslednjo igro za dva igralca. Vsak igralec dobi nagrado, ki ima naključno vrednost enakomerno porazdeljeno na $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Igralec ne ve, kakšno nagrado je dobil drugi igralec. Igralca hkrati in neodvisno odločita, ali bi izmenjala nagrado z drugim igralcem ali ne. Če oba izbereta izmenjavo, potem izmenjata nagradi. Vsak igralec želi maksimizirati pričakovano vrednost nagrade, ki jo ima na koncu.

Modeliraj tako situacijo kot Bayesovo igro. Določi čista Bayesova ravnovesja igre.

2 Ekstenzivne igre

2.1. Ali lahko v ekstenzivni igri predpostavimo, da za vsako povezavo $uv \in T - L(T)$ velja $P(u) \neq P(v)$?

2.2. Opazujemo ekstenzivno igro na sliki:

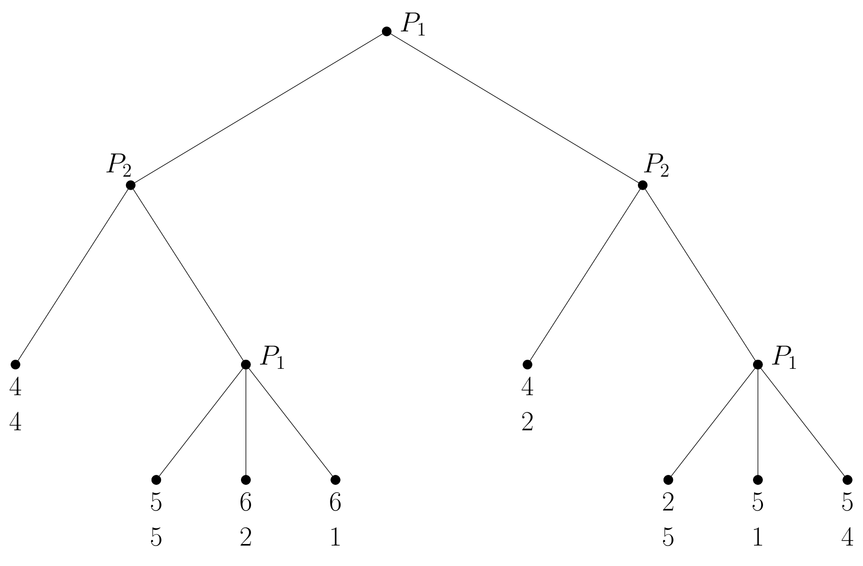


(a) Koliko strategij ima vsak igralec?

(b) Določi vgnezdena ravnovesja igre.

(c) Ali obstaja kako Nashevo ravnovesje, ki ni vgnezdeno ravnovesje?

2.3. Opazujemo ekstenzivno igro na sliki:

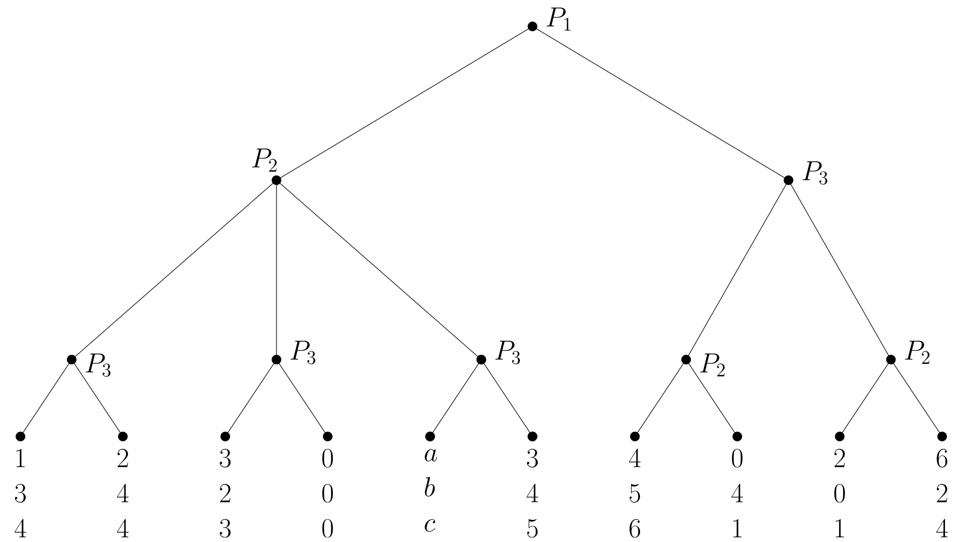


(a) Koliko strategij ima vsak igralec?

(b) Določi vgnezdena ravnovesja igre.

(c) Ali obstaja kako Nashevo ravnovesje, ki ni vgnezdeno ravnovesje?

2.4. Zanima nas ekstenzivna igra na sliki, kjer parametri a, b, c **niso** cela števila. To je, predpostavimo, da $a, b, c \notin \mathbb{Z}$. Opiši vgnezdena ravnovesja igre v odvisnosti od vrednosti parametrov a, b, c. Ali obstajajo Nasheva ravnovesja, ki niso vgnezdena ravnovesja?



2.5. Hierarhično urejeno pleme n kanibalov je ujelo misionarja. Hierahija plemena je linearna: na čelu plemena je glavni kanibal, sledi mu drugi kanibal, potem tretji kanibal in tako naprej do n-tega kanibala. Glavni kanibal ima možnost, da poje misionarja, in samo on ima tako možnost. Če ga ne poje, potem je konec igre. Če pa glavni kanibal poje misionarja, potem bo odšel spati in mogoče bo drugi kanibal med spanjem pojedel njega. V splošnem, če i-ti kanibal poje $(i-1)$-tega kanibala, potem bo oššel spati in mogoče bo $(i+1)$-vi kanibal pojedel tega med spanjem. Vsak kanibal bi raje jedel kot bite lačen, ampak še rajši pa bi bil živ.

Nariši drevo igre in določi vgnezdena ravnovesja.

2.6. Opazujemo problem razdelitve torte, kjer je torta predstavljena kot interval $[0, 1]$. Iščemo postopek, ki bo sestavljen iz več korakov. Postopek na vsakem koraku določi, ali mora igralec na potezi razrezati ali izbrati kos. Vsak igralec bi rad dobil čim večji kos.

(a) Opazujemo primer, kjer sta dva igralca, postopek pa je naslednji: prvi igralec razreže torto na dva kosa in drugi igralec izbere kos. Modeliraj tak postopek kot ekstenzivno igro. Kakšna je razdelitev pri vgnezdenem ravnovesju?

(b) Tokrat imamo tri igralce. Ali lahko oblikuješ postopek za razdelitev torte, pri čemer dobi vsak igralec 1/3 torte v vgnezdenem ravnovesju?

(c) Ali lahko dosežeš isto kot v točki (b) tudi za n igralcev?

2.7. Opazujemo naslednjo variacijo Stackelbergovega modela duopola. Prva firma P_1 mora določiti količino $q_i \geq 0$ produkta, ki ga proizvaja. Druga firma P_2 opazuje trg in potem določi količino $q_2 \geq 0$ produkta, ki ga proizvaja. Stroški produkcije so $c(q_i) = 4q_i$ in cena produkta je $P(q_1, q_2) = (160 - 4(q_1 - q_2))^+$.

(a) Določi vgnezdena ravnovesja igre.

(b) Kakšen dobiček dobi vsaka firma pri vgnezdenem ravnovesju? Ali bi bil rajši firma P_1 ali P_2?

(c) Poišči Nashevo ravnovesje igre, kjer prva firma P_1 dobi cel trg kupcev.

2.8. Zanima nas variacija Stackelbergovega modela duopola, kjer je cena $P(Q) = (a-Q)^+$ in so stroški $c_i(q_i) = q_i^2$. Določi vgnezdena ravnovesja igre.

2.9. Gledali bomo modifikacijo Stackelbergovega modela duopola. Štiri firme (P_1 do P_4) bodo proizvajale isti produkt. Vsaka firma P_i mora določiti količino $q_i \geq 0$ produkta, ki ga proizvaja. Cena produkta je podana s formulo

$$P(q_1, q_2, q_3, q_4) = \begin{cases} a - q_1 - q_2 - q_3 - q_4, & \text{če je pozitivno;} \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Dobiček firme P_i je $u_i = q_i(P(q_1, q_2, q_3, q_4) - c)$. Dobiček uporabljamo kot funkcijo preferenc. Tukaj sza a in c konstanti in zadoščata $a > c > 0$.

Modeliramo situacijo kot ekstenzivno igro, ki ima tri korake. V prvem koraku igre določi firma P_1 svojo količino q_1. V drugem koraku igre določi firma P_2 svojo količino q_2. V tretjem koraku igre hkrati in neodvisno določita firmi P_3 in P_4 svoji količini q_3, q_4. Določi vgnezdena ravnovesja igre.

2.10. Gledali bomo modifikacijo Stackelbergovega modela duopola. Dve firmi (P_1 in P_2) bosta na trgu in bosta proizvajali isti produkt. Vsaka firma P_i mora določiti količino $q_i \geq 0$ produkta, ki ga naredi. Cena produkta je potem podana s

$$P(q_1, q_2) = \begin{cases} 33 - 3q_1 - 5q_2, & \text{če } 33 - 3q_1 - 5q_2 \geq 0; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Dobiček firme P_i je $u_i(q_1, q_2) = q_i(P(q_1, q_2) - 3)$. Dobiček uporabljamo kot funkcijo preferenc. Zaradi nekih drugih pogojev pri firmi P_2 velja tudi $q_2 \in \{0, 3, 6\}$. Zanima nas naslednja ekstenzivna igra: firma P_1 izbere količino q_1, potem pa firma P_2 določi količino q_2. Ko firma P_2 določi svojo količino, že pozna količino q_1, ki jo je izbrala firma P_1.

(a) Določi vgnezdena ravnovesja igre.

(b) Ali obstaja Nashevo ravnovesje igre, ki ni vgnezdeno ravnovesje?

2.11. Gledali bomo modifikacijo Stackelbergovega modela duopola. Dve firmi (P_1 in P_2) bosta proizvajali isti produkt. Vsaka firma P_i mora določiti količino $q_i \geq 0$ produkta, ki ga naredi. Cena produkta je potem podana s

$$P(q_1, q_2) = \begin{cases} 20 - q_1 - 2q_2, & \text{če } 20 - q_1 - 2q_2 \geq 0; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Dobiček firme P_i je $u_i(q_1, q_2) = q_i(P(q_1, q_2) - 1)$. Dobiček uporabljamo kot funkcijo preferenc. Zaradi nekih drugih pogojev pri firmi P_2 velja tudi $q_2 \in \{0, 3, 6, 9\}$.

Modeliramo situacijo kot ekstenzivno igro. Imamo dve variaciji odvisno od tega, katera firma prej izbere količino:

(i) V prvi variaciji firma P_1 določi količino q_1, potem pa firma P_2 določi q_2, ko je količina q_1 že znana.

(ii) V drugi variaciji firma P_2 določi količino q_2, potem pa firma P_1 določi q_1, ko je količina q_2 že znana.

Določi vgnezdena ravnovesja igre za vsako variacijo.

2.12. Dve firmi (P_1 in P_2) prodajata isti produkt. Firma P_1 ima na zalogi 4 enote produkta in firma P_2 ima na zalogi 5 enot produkta. Imamo dva različna trga: L (za Ljubljana) in M (za Maribor). Vsaka firma mora določiti količino produkta, ki jo da na posamezni trg. Za vsak $N \in \{L, M\}$ naj bo x_N količina, ki jo da firma P_1 na trg N. Podobno, za vsak $N \in \{L, M\}$ naj bo y_N količina, ki jo da firma P_2 na trg N. Obe firmi želita dati na trg celotno količino produkta. Velja torej $x_L + x_M = 4$ in $y_L + y_M = 5$.

Cena produkta na trgu $N \in \{L, M\}$ je podana s

$$P_N(x_N, y_N) = 10 - x_N - y_N.$$

Dobiček firme P_1 je $x_L \cdot P_L(x_L, y_L) + x_M \cdot P_M(x_M, y_M)$. Dobiček firme P_2 pa je $y_L \cdot P_L(x_L, y_L) + y_M \cdot P_M(x_M, y_M)$. Dobiček uporabljamo kot funkcijo preferenc. Zanima nas naslednja ekstenzivna igra: firma P_1 izbere količini x_L, x_M, potem pa firma P_2 določi y_L, y_M. Ko firma P_2 določa svoji količini, že pozna količini x_L, x_M, ki jih je izbrala firma P_1.

(a) Določi vgnezdena ravnovesja igre.

(b) Poišči Nashevo ravnovesje igre, ki ni vgnezdeno ravnovesje.

2.13. Opazujemo modifikacijo igre ultimata, kjer je evro lahko razdeljen na cente. Določi vgnezdena ravnovesja igre.

2.14. Opazujemo naslednjo igro za dva igralca. Na začetku igralec P_2 izbere kos (število) k_L ali k_H. Velja $k_H > k_L$. Če izbere kos k_i, potem plača igralec P_2 ceno c_i, kjer je $c_H > c_L$. To je, kos k_H je dražji kot k_L. Nato igralca P_1 in P_2 igrata igro ultimata, kjer razdelita kos k_i, ki ga je izbral P_2. Določi vgnezdena ravnovesja igre v odvisnosti od vrednosti parametrov k_H, k_L, c_H, c_L.

2.15. Opazujemo modifikacijo igre ultimata, za katero velja $u_i(x_1, x_2) = x_i - (1/10)|x_1 - x_2|$, kjer je x_i del igralca P_i. Določi vgnezdena ravnovesja igre.

2.16. Opazujemo modifikacijo igre ultimata, kjer sta dva kroga. Igralec P_1 izbere število $x_1 \in [0, 1]$. Nato igralec P_2 sprejme ali zavrne ponudbo. Če P_2 sprejme ponudbo, dobi $1 - x_1$ in igralec P_1 dobi x_1. Če P_2 zavrne ponudbo, potem on ponudi drugo razdelitev s število x_2, ki jo igralec P_1 sprejme ali zavrne. Če igralec P_1 sprejme protiponudbo, dobi $\delta(1 - x_2)$ in igralec P_2 dobi δx_2. Če igralec P_1 zavrne protiponudbo, potem oba igralca dobita 0. Tukaj je $\delta < 1$ parameter za to, da igralca plačata za porabljen čas (število krogev). Lahko razmišljamo, da v drugem krogu razdelita δ evrov, ker sta že izgubila $(1 - \delta)$ evrov zaradi porabljenega časa. Določi vgnezdena ravnovesja igre.

Ali lahko razširiš igro tako, da bodo 3 krogi ponudb? (V zadnjem krogu razdelita δ^2 evrov.)

2.17. Določi vgnezdena ravnovesja naslednje ekstenzivne igre za dva igralca. Igralec P_1 izbere realno število $a \geq 0$, nato igralec P_2 izbere realno število $b \geq 0$. Ko igralec P_2 izbira b, že pozna število a, ki ga je izbral igralec P_1. Funkcija preferenc igralca P_1 je $u_1(a,b) = 3a(10 - 3b^2 - 5a)$. Funkcija preferenc igralca P_2 je $u_2(a,b) = b((10-a)^2 - b^2)$.

2.18. Imamo sklad denarja, ki na t-tem krogu vsebuje $2t$ evrov. Igro igrata dva igralca. V vsakem krogu igralca izbereta akcijo, ki je lahko 'wait' ali 'steal'. Če oba igralca izbereta 'wait', potem gre igra v naslednji krog. Če oba igralca izbereta 'steal', potem vsak igralec dobi polovico denarja iz sklada in igra je končana. Če en igralec izbere 'steal' in drugi izbere 'wait', gre denar iz sklada igralcu, ki je izbral 'steal', in igra je končana. Če igra pride do kroga 1000, potem se konča in vsak igralec dobi polovico denarja iz sklada.

Določi vgnezdena ravnovesja igre.

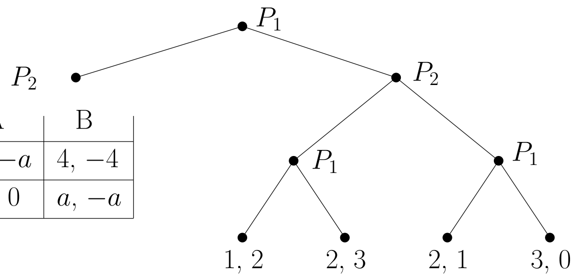
2.19. Določi rešitev naslednje igre:

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G_{n-1} \end{pmatrix} \qquad G_1 = (1)$$

2.20. Določi rešitev naslednje igre:

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & G_{n-1} \end{pmatrix} \qquad G_1 = (1)$$

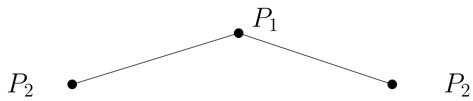
2.21. Opazujemo naslednjo igro za dva igralca s funkcijami preferenc. V strateški podigri uporabljata mešane strategije.



P_1		A	B
	X	$a, -a$	$4, -4$
	Y	$0, 0$	$a, -a$

Določi vgnezdena ravnovesja igre v odvisnosti od vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$.

2.22. Opazujemo naslednjo igro za 2 igralca. V strateških podigrah uporabljata mešane strategije.



P_1		A	B
	X	$a, -a$	$2, -2$
	Y	$0, 0$	$3, -3$

P_1		C	D
	W	$a, 3-a$	$0, 3$
	Z	$1, 2$	$3, 0$

Določi vgnezdena ravnovesja igre v odvisnosti od vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$.

3 Kooperativne igre

3.1. Določi rešitev in točko nesporazuma naslednje bimatrične igre. Določi tudi D_{TU} in D_{NTU}.

$$\begin{pmatrix} 3,1 & 2,2 \\ 0,5 & 4,3 \end{pmatrix}$$

3.2. Določi rešitev in točko nesporazuma naslednje bimatrične igre.

$$\begin{pmatrix} a,1 & 2,2 \\ 0,5 & 5,3 \end{pmatrix}$$

3.3. Določi rešitev in točko nesporazuma naslednje bimatrične igre.

$$\begin{pmatrix} 1,5 & 2,2 & 0,1 \\ 4,2 & 1,0 & 2,1 \\ 5,0 & 2,3 & 0,0 \end{pmatrix}$$

3.4. Določi rešitev in točko nesporazuma naslednje bimatrične igre.

$$\begin{pmatrix} 3,2 & 4,1 & 4,2 \\ 4,2 & 2,3 & 4,1 \\ 1,3 & 3,0 & 4,3 \end{pmatrix}$$

3.5. Za naslednjo bimatrično igro določi rešitev in točko nesporazuma.

$$(A,B) = (a_{ij}, b_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}, \text{ kjer } (a_{ij}, b_{ij}) = \begin{cases} (i+j, i+j), & \text{če } i \neq j; \\ (4,3), & \text{sicer.} \end{cases}$$

3.6. Opazujemo strateško igro za 3 igralce, določeno s spodnjo tabelo. Katero koalicijsko igro določi?

	L	R
T	$-1, 0, 0$	$0, 1, 0$
M	$0, 0, 1$	$1, 0, 0$

če $a_3 = A$

	L	R
T	$1, 0, 1$	$0, 0, 0$
M	$0, 0, -1$	$0, 1, 0$

če $a_3 = B$

3.7. Opazujemo strateško igro za 3 igralce, določeno s spodnjo tabelo. Kakšno karakteristično funkcijo določi?

	L	R
T	2, −1, 1	3, 1, 0
M	3, 0, 2	−1, 2, 1

če $a_3 = A$

	L	R
T	1, 2, 3	2, 2, 2
M	0, −1, 0	0, −2, 4

če $a_3 = B$

	L	R
T	−2, 1, 0	1, 2, −2
M	0, 0, 2	1, 1, 1

če $a_3 = C$

3.8. Opazujemo naslednjo bimatrično igro:

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 1,5 & 2,4 & 0,3 & 3,2 \\ 3,2 & a,3 & 4,5 & 4,6 \end{pmatrix}.$$

(a) Kakšno karakteristično funkcijo koalicijske igre določi igra (A, B)?

(b) Preveri,ali je karakteristična funkcija iz točke (a) superaditivna.

3.9. Opazujemo funkcijo $v : 2^{\{1,2,3\}} \to \mathbb{R}$ z vrednostmi

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = a & v(\{1,2\}) = 6 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = b & v(\{1,3\}) = 10 - a & v(\{1,2,3\}) = 15 \\ & v(\{3\}) = 3 & v(\{2,3\}) = 8 - b & \end{array}$$

Za katere vrednosti parametrov a, b je funkcija v karakteristična funkcija? Rešitev lahko opisišeš z uporabo slike.

3.10. Kakšna je množica imputacij, kakšno je jedro in kakšne so Shapleyeve vrednosti za naslednjo koalicijsko igro?

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = -2 & v(\{1,2\}) = 2 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = -1 & v(\{1,3\}) = 1 & v(\{1,2,3\}) = 3 \\ & v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 1 & \end{array}$$

3.11. Za katere trojke (a, b, c) je naslednja funkcija karakteristična? Nato opiši množice imputacij.

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = a & v(\{1,2\}) = 5 - a & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = b & v(\{1,3\}) = a & v(\{1,2,3\}) = 10 - a \\ & v(\{3\}) = c & v(\{2,3\}) = b + 2c & \end{array}$$

3.12. Za katere pare (a, b) je naslednja funkcija karakteristična in je jedro igre petkotnik?

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = a & v(\{1,2\}) = 5 - a & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = b & v(\{1,3\}) = a + 4 & v(\{1,2,3\}) = 12 - a \\ & v(\{3\}) = 4 & v(\{2,3\}) = 7 & \end{array}$$

3.13. Kakšna je množica imputacij, kakšno je jedro in kakšne so Shapleyeve vrednosti za naslednjo koalicijsko igro?

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = 0 & v(\{1,2\}) = 2 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 1 & v(\{1,3\}) = 3 & v(\{1,2,3\}) = 10 \\ & v(\{3\}) = 2 & v(\{2,3\}) = 6 & \end{array}$$

3.14. Ali lahko določiš jedro za naslednjo koalicijsko igro, kjer velja $0 < a_1 < a_2 < a_3$?

$$\begin{array}{llll} & v(\{1\}) = a_1 & v(\{1,2\}) = a_2 & \\ v(\emptyset) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{1,3\}) = a_3 & v(\{1,2,3\}) = a_3 \\ & v(\{3\}) = 0 & v(\{2,3\}) = 0 & \end{array}$$

Kakšno je jedro, če velja $v(\{2,3\}) = a_2$ namesto $v(\{2,3\}) = 0$?

3.15. Pokaži, da so Shapleyeve vrednosti imputacija.

3.16. Varnostni svet Organizacije Združenih Narodov (OZN) ima 15 članic. Pet članic je stalnih. Glede na wikipedijo, "za sprejem odločitve zadostuje, da se strinja 9 od 15 članic, med katerimi mora biti vseh 5 stalnih članic". To lahko modeliramo z naslednjo karakteristično funkcijo: $v(S) = 1$, če S vsebuje vsaj 9 članic in vseh 5 stalnih članic; sicer je $v(S) = 0$. Določi Shapleyeve vrednosti vseh članic varnostnega sveta.

3.17. Opazujemo koalicijsko igro z n igralci in karakteristično funkcijo:

$$v(S) = k, \text{ če velja } \{1, 2, \ldots, k\} \subseteq S \text{ in } k + 1 \notin S.$$

Na primer: $v(\{2, 3, 4\}) = 0$, $v(\{1, 2, 4, 5\}) = 2$ in $v(\{1, 3\}) = 1$. Naj bo ϕ_i Shapleyeva vrednost igralca i.

(a) Ali bo $\phi_i < \phi_{i+1}$ ali $\phi_i > \phi_{i+1}$?

(b) Določi vrednost ϕ_i za vsak i, ko je $n = 5$. Preveri, ali je vsota $\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_5$ prava. (Lahko uporabljaš kalkulator.)

(c) Kakšna je ϕ_i v splošnem primeru?

3.18. Določi Shapleyeve vrednosti naslednje koalicijske igre. Igra je za 5 igralcev, ki so razdeljeni na dve skupini A, B. Velja $|A| = 2$ in $|B| = 3$. Karakteristična funkcija $v : 2^{A \cup B} \to \mathbb{R}$ je določena takole:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{če velja } S \cap A \neq \emptyset \text{ in } S \cap B \neq \emptyset; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

3.19. Določi, ali obstaja koalicijska igra za 3 igralce, ki izpolnjuje naslednje pogoje:

- $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\})$.
- Velja $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = 2$ in $\phi_3 = 3$, pri čemer je ϕ_i Shapleyeva vrednost igralca i.

3.20. Opazujemo naslednjo bimatrično igro

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 8,2 & 1,0 & 4,-1 \\ 3,3 & 6,3 & 4,0 \\ 1,-1 & 0,1 & 2,0 \end{pmatrix}.$$

(a) Določi rešitev (sporazum) in točko nesporazuma, ko igralca sodelujeta in je koristnost prenosljiva.

(b) Kakšno karakteristično funkcijo koalicijske igre določi igra (A, B)?

(c) Reši točki (a) in (b) še za bimatrično igro

$$(A', B) = \begin{pmatrix} 15, 2 & 8, 0 & 11, -1 \\ 10, 3 & 13, 3 & 11, 0 \\ 8, -1 & 7, 1 & 9, 0 \end{pmatrix}.$$

3.21. Opazujemo naslednjo bimatrično igro

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 4, 2 & a, 0 \\ 2, 6 & 4, 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Določi rešitev (sporazum) in točko nesporazuma, ko igralca sodelujeta in je koristnost prenosljiva.

(b) Kakšno karakteristično funkcijo koalicijske igre določi igra (A, B)?