Filozofski vestnik | Volume XLI | Number 2 | 2020 | 249–284 | DOI: 10.3986/FV.41.2.10

David Rabouin*

Espace et nombre : deux voies dans l'ontologie ?

Introduction

Cet article poursuit un dialogue engagé à la sortie de *Logiques des mondes* à partir de trois grandes lignes de questionnement : 1. La première, la plus immédiate, est le sens qu'il convient de donner au célèbre slogan « mathématiques = ontologie ». C'est autre chose, en effet, d'avancer que les « mathématiques sont l'ontologie », comme l'avait promu *l'Être et l'événement* explicitement[1], et de dire que la théorie des ensembles seule est l'ontologie (comme l'avance *Logiques des mondes*, ainsi que d'autres textes contemporains). Il semble qu'il y ait en ce point une inflexion importante du système, au demeurant non thématisée comme telle ; la théorie des ensemble est-elle une manière d'*exprimer* l'ontologie, c'est-à-dire les mathématiques, ou *est-elle* l'ontologie elle-même ? 2. Ceci conduit à une interrogation plus large sur le rapport, en mathématiques, entre expression et ontologie, ou « langage » et « être ». Ici, je voudrais indiquer que, contrairement à ce que l'on pourrait croire, il y a souvent une ambiguïté entre l'un et l'autre non seulement chez Badiou, mais plus généralement dans les discussions de philosophie des mathématiques. Si cette distinction est pertinente — et j'essayerai de montrer pourquoi elle doit l'être —, alors on ne peut pas conclure trop vite du fait que les mathématiques ont adopté une expression unifiée grâce au *langage* ensembliste au fait que la forme de l'être qu'elles expriment est de nature ensembliste (que l'être est « multiple pur » dans le vocabulaire de Badiou) ; 3. Enfin, je voudrais creuser le fait que le langage ensembliste a justement donné lieu à la thématisation de *deux* orientations que l'on pourrait tout aussi bien qualifier d'« ontologiques » (dans un sens différent, donc, de celui que lui donne Badiou) ; la première met en avant le nombre, tandis que l'autre met en avant l'espace (plus tard nommé « topologique »). Que l'on dispose d'un *langage* apte à les décrire de manière homogène ne préjuge pas alors de ce que nous ayons affaire à un seul domaine d'objets. Je voudrais montrer

[1] Alain Badiou, *L'Être et l'événement*, Seuil, Paris 1988, p. 10.

* (CNRS), the research group SPHERE (UMR 7219, CNRS – Université de Paris)

que cette tension traverse les mathématiques contemporaines, et par voie de conséquence, la pensée d'Alain Badiou plus qu'il ne veut l'admettre (notamment au titre de ce qu'il nomme « onto-logique »). Elle est d'ailleurs au cœur de différentes tentatives proposées en mathématiques pour parvenir à des formes plus satisfaisantes d'unification que celle procurée par les seuls « ensembles ».

1. Quel est le sens de l'énoncé « les mathématiques sont l'ontologie » ?

1.1. « Ontologie » et devenir historique des mathématiques

Accordons pour le moment que « les mathématiques », *toutes* les mathématiques, soient « l'ontologie ». On devrait alors dire que les *Éléments* d'Euclide sont un traité d'ontologie au même titre que « la formidable Introduction à l'analyse en 9 volumes, de Jean Dieudonné »[2]. Mais une telle affirmation n'est pas sans poser de difficulté. Il ne s'agira pas alors seulement de pointer les embarras qui peuvent naître dès lors que le philosophe délègue au mathématicien le soin d'être seul prescripteur en matière d'ontologie. Ces difficultés, Alain Badiou a d'ailleurs fini par les reconnaître et cela l'a conduit à moduler un énoncé brandi d'abord sans autre qualificatif en énoncé de nature plutôt stratégique. Mais même si l'on concède que l'énoncé initial est de nature stratégique, même si l'on concède qu'il signe des choix qui peuvent rester irréductiblement philosophiques, il n'en accompagnera pas moins une certaine vue sur les mathématiques qui en fait un discours sur « l'être en tant qu'être ». Dans l'affirmation précédente, on n'entend pas notamment qu'Euclide et Dieudonné aient formulé *des* ontologies et encore moins que ces ontologies puissent être différentes. Le cœur du slogan, qu'il soit stratégique ou non, est qu'ils nous offrent l'un et l'autre un certain rapport à « l'ontologie », parce que l'un et l'autre décrivent « ce qui est ».

Or ce face-à-face avec l'être semble soustraire les mathématiques, au moins pour une part, à leur devenir historique. Plus exactement, elle semble rejeter ce devenir du côté des modalités de la seule *expression*. Il faut que les mathématiques d'Euclide, quoiqu'exprimée dans une terminologie qui leur est propre, nous parlent d'entités que nous reconnaissons, d'une manière ou d'une autre, comme *les mêmes* que celles dont parle Dieudonné (au moins pour les parties de leurs discours qui se recouvrent, par exemple ce qui a trait aux nombres et

2 *Ibid.*, p. 20.

aux grandeurs en général). Il ne s'agit pas là d'une vue particulièrement originale face à cette science singulière, à la fois déployée dans une histoire et pourtant, comme l'avançait déjà Cavaillès, « négatrice d'histoire ». De fait, le devenir semble pouvoir y être ressaisi après coup comme déploiement d'une nécessité purement conceptuelle qui en efface les scories contingentes. Les mathématiciens ne cessent de relire leur passé en agissant comme si certains théorèmes étaient les « mêmes » et qu'ils portaient sur « les mêmes » objets. Sous ce point de vue, c'est bien la manière d'*exprimer* ces objets qui seule varie. Peut-être est-ce là, d'ailleurs, une des origines de la croyance aux concepts comme pures « idées » éternelles et immuables, dont les mathématiques ont toujours servi de support exemplaire. Mais que cette croyance soit très largement partagée ne la rend pas moins questionnable.

Supposons, en effet, que les mathématiques d'Euclide se rapportent, non moins que les nôtres, à « l'être en tant qu'être ». Une chose paraît acquise à qui les lit : elles ne sont certes pas formulées dans un langage qui porterait sur des objets du type « ensembles ». Les objets dont elles traitent se nomment plutôt « nombres » et « grandeurs », et même, plus souvent encore, « triangle », « cercle », « droite », « rectangle », etc. (mais le livre V des *Éléments* nous apprend que toutes ces formes géométriques sont des « grandeurs »)[3]. L'affaire n'est pas sans importance, parce que le fait que les mathématiques grecques classiques — le constat se transfère aisément, en effet, à Archimède aussi bien qu'à Apollonius — s'expriment selon *deux* grands domaines d'objets commande leur organisation théorique. Ainsi, il n'y a chez Euclide *aucune démonstration* qui circule entre les livres géométriques (I-VI pour la géométrie plane) et les livres arithmétiques (VII-IX), alors même que de nombreux résultats se répondent d'un domaine à l'autre. Non moins surprenant est le fait qu'il y ait alors besoin de *deux* théories des proportions pour opérer avec ces objets (exposées respectivement aux livre V et au livre VII des *Éléments*), alors que leurs propriétés sont pourtant identiques quand on les applique à l'un ou l'autre type d'entités (pensons au fait que les rapports entrant dans une proportion peuvent être « renversés » ou, comme disaient les Grecs, « alternés »). C'était d'ailleurs là un des exemples favoris d'Aristote pour faire valoir que l'être se dit « en plusieurs sens », qui correspondent à autant de « genres d'être » incommunicables : pour Euclide comme pour Aristote, même si certains énoncés valent en apparence de toutes

3 Euclide, Les *Éléments*, trad. fr. Bernard Vitrac, PUF, Paris 1990-2001.

les entités, on ne pourra jamais prouver le géométrique avec l'arithmétique, et réciproquement, parce que l'un et l'autre visent des « genres d'être » distincts[4]. Si nous rétorquons alors que ce n'est là qu'un phénomène de surface et qu'Euclide se meut dans la même « ontologie » que nous, qui n'est rien d'autre que « l'ontologie » éternelle, dont il reviendrait simplement au philosophe d'expliciter les attendus, alors nous devons du même souffle admettre plusieurs thèses problématiques. Tout d'abord, cela veut dire qu'une théorie mathématique peut relever d'un langage qui se rapporte *en apparence* à des domaines d'objets, tandis qu'elle se rapporte *en fait* à d'autres. Ensuite, cela conduit à faire des mathématiques une discipline soumise à des formes de progrès qui ne seraient pas seulement à trouver du côté des résultats, mais des modalités d'expression de cette réalité sous-jacente — certaines se révélant « meilleures » que d'autres. Ainsi on dira que le langage euclidien porte « en apparence » sur des nombres et des grandeurs, mais que « en réalité » il traite déjà de multiples purs. On devra également tenir que les embarras dans lesquels il se meut à sacrifier à son langage de surface doivent être imputés, en dernière analyse, à des maladresses d'expression dont nous serions heureusement sortis.

Mais entre autres difficultés subséquentes s'avance alors le fait que ces thèses valent de droit de toute théorie mathématique et donc, en particulier, *de la théorie des ensembles* (et, plus généralement, de toute théorie en vigueur qui prétendra livrer l'expression la « meilleure » des entités mathématiques). Si elles sont vraies, il faut donc admettre déjà qu'il n'y a rien dans la théorie des ensembles, prise en elle-même, qui permettent de savoir si elle parle *vraiment* d'ensembles ou si c'est là simplement une manière de parler *d'autre chose* — exactement comme le mathématicien contemporain prétend que les mathématiques d'Euclide semblent parler de « nombres » et de « grandeurs », mais que tous deux relèvent d'une essence commune (celle qu'exprimeraient les « ensembles »). En outre, il n'y a rien dans la théorie des ensembles qui en fera le dernier mot de la recherche de la meilleure expression à laquelle sera porté, par sa nature même, le développement des mathématiques[5].

---

4 Voir par exemple *Analytiques Seconds*, I, 7, 75 a 38–b 6 (Aristote, *Seconds Analytiques. Organon IV*, trad. fr. P. Pellegrin, GF, Paris 2005, p. 103).

5 On n'aura d'ailleurs pas de peine à trouver des mathématiciens arguant du fait que les mathématiques, même quand elles parlent d'ensembles, ne portent pas sur des ensembles et que c'est là une indication qu'il ne saurait s'agir de la meilleure expression des entités mathématiques. Je donnerai des exemples dans la dernière section, mais notons dès

Mais remarquons également que si les thèses que je viens d'évoquer sont fausses, s'il n'y a pas d'écart entre expression et ontologie, la situation n'en sera pas moins problématique : car on se retrouvera alors avec des types d'entités *différentes* d'une expression à l'autre, et notamment d'une période à l'autre, d'une culture à l'autre, d'un auteur à l'autre, d'un auteur à lui-même, etc. La question se posera, par exemple, de savoir non seulement si Euclide se meut dans la même « ontologie » que Dieudonné, mais si Leibniz se meut dans la même « ontologie » que Newton, Lagrange que Euler ou Brouwer que Hilbert, voire que Heyting – et même, à termes, si le jeune Newton (le virtuose des méthodes symboliques qui découvre le développement du binôme) se meut dans la même ontologie que le vieux Newton (celui qui défend la primauté de la géométrie synthétique à l'ancienne)[6], etc. etc. On ne pourra même pas s'en sortir alors avec une solution de type « aristotélicienne » qui entendrait par « ontologie » une description des grands « genres de l'être », car ces genres n'auront plus rien de « grands ». Ils se démultiplieront avec les formes d'expression que l'historien nous apprend à discerner et dont le nombre ne cesse de croître à mesure que s'affinent nos descriptions.

1.2. Langage et ontologie

La difficulté soulevée dans la section précédente touche à un problème philosophique plus général et plus profond, sur lequel il peut être utile de s'arrêter brièvement. Il s'est trouvé naturellement associé à une conception du langage où le formalisme logique élaboré pour ce que l'on nomme aujourd'hui « la logique du premier ordre » a prétendu fournir un premier modèle formel. Le mécanisme de la « référence » s'y trouvait alors idéalement représenté par le rapport entre une syntaxe supposément « vide », vue comme pur jeu de symboles contrôlé par des règles, et une sémantique donnée par une « interprétation » de ces symboles. Du fait que les mathématiques sont déclarées une science « formelle » — mais à nouveau veut-on dire par là *toutes* les mathématiques à travers l'histoire ? — et du fait qu'on peut effectivement *exprimer* la plupart des structures mathématiques à l'aide du formalisme que je viens de décrire, on croit alors que ce

à présent que c'était là un des motifs des objections de Desanti contre ce qu'il appelait le rêve d'une « ontologie intrinsèque » des mathématiques, cf. Jean-Toussaint Desanti, « Quelques remarques à propos de l'ontologie intrinsèque d'Alain Badiou », *Les Temps Modernes* 45 (526/1990), pp. 61–71.

6 Voir Niccolò Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts 2009.

modèle du rapport entre syntaxe et sémantique, même s'il a rapidement montré ses limites dans la formalisation du langage naturel, s'y trouve exemplairement validé[7].

Or derrière cette évidence se cache un problème désormais classique que des auteurs comme Hilary Putnam ont mis en avant à propos du fonctionnement de la « référence ». L'intérêt particulier de l'approche de Putnam, même si elle prend son départ aux antipodes de la pensée de Badiou, est qu'elle appuie en partie son argument sur le point aveugle de l'historicité des sciences, dont je suis également parti[8]. C'est pourquoi je la rappelle ici. Supposons donc que le langage scientifique puisse être idéalement représenté dans un langage formel « transparent » (par exemple celui de la logique du premier ordre) au sein duquel il nous serait possible de décrire directement les objets à l'aide de ce que Russell appelait des « descriptions définies »[9]. Une entité, quelle qu'elle soit, devrait alors être caractérisable par une collection de telles formules qui constitueront sa « description complète »[10]. Dans ce cadre, la seule forme d'historicité que l'on semble pouvoir attribuer aux sciences, au-delà des améliorations liées à la seule expression (invisibles du point de vue du langage formel), est celle de la correction des erreurs et d'un progrès cumulatif : une description peut s'avérer fausse, au sens où elle ne correspond finalement à « rien » (comme le « phlogistique ») ; mais il peut également arriver qu'elle soit considérée à un moment comme complète, alors qu'elle n'était que partielle (comme lorsque l'on pensait, par exemple, que toute « fonction continue » devait également avoir une tangente en chaque point). Dans le premier cas, on remplacera une descrip-

7 Badiou a d'ailleurs consacré à ces questions une de ses premières interventions philosophiques en défendant un point de vue très critique sur la tendance à exporter le concept de modèle des mathématiques aux autres sciences (pour ne rien dire du langage !), cf. *Le concept de modèle*, Maspéro, Paris 1969. Mais il n'en a pas moins conservé *en mathématiques* une entente assez stricte du fonctionnement du mécanisme de la référence.

8 Voir, par exemple, en traduction française : Hilary Putnam, « Langage et réalité [1975] », dans *Textes clés de philosophie des sciences*, *Vol. 2*, dirs. S. Laugier et P. Wagner, Vrin, Paris 2004, pp. 61–104 et « Explication et référence », *De Vienne à Cambridge*, dir. dans P. Jacob, pp. 337–365, Gallimard, Paris 1980.

9 Bertrand Russell, « On denoting », *Mind* 14 (56/1905), pp. 479–493; trad. fr. Jean-Michel Roy, *Écrits de logique philosophique*, PUF, Paris 1989, pp. 203–218.

10 On peut toujours mettre bout à bout toutes ces descriptions à l'aide de conjonctions et obtenir ainsi un seul énoncé définitionnel que j'appelle « complet ».

tion par une autre ; dans le second, on complètera une description existante en la précisant.

Or l'histoire des sciences modernes met à mal une telle vue en procurant un très grand nombre d'exemples où la connaissance a progressé non pas en remplaçant ou en complétant, mais en *niant* des descriptions antérieures *du même objet*. Les noms de Bachelard et de Canguilhem, dont Badiou hérite, viennent ici à l'esprit de tout lecteur français. Un exemple que propose Putnam et que nous pouvons suivre, est celui des descriptions de l'électron dans les théories de Bohr-Rutherdord et de Schrödinger[11]. Le point clef sur lequel Putnam veut attirer l'attention est le suivant : plusieurs « descriptions définies » données dans ces deux modèles apparaissent comme *incompatibles*. Dans le premier, notamment, l'électron est une entité qui a une position et une vitesse déterminées, mais pas dans le second.

Nous nous trouvons alors face à un dilemme : ou bien nous considérons qu'il s'agit de différentes tentatives pour approcher théoriquement *le même objet* ; c'est la tendance naturelle à laquelle est porté l'historien des sciences quand il distingue différentes conceptions de « l'électron » à travers l'histoire. Mais le prix à payer sera alors de concéder que nous ne nous référons donc *pas* aux objets par l'intermédiaire des descriptions (qu'elles soient complètes ou incomplètes). Le problème de la description initiale de Bohr, en effet, n'est pas qu'elle est incomplète, mais qu'elle est *inadéquate* et persiste à penser l'électron sur le modèle d'un objet de la mécanique *classique* auquel on devrait ajouter des propriétés particulières pour le transformer en objet quantique. Ou bien nous devons accepter que nous avons affaire à des entités de types différents, disons

[11] Dans le premier modèle, l'électron est conçu comme tournant autour du noyau de l'atome à la manière d'un satellite autour d'une planète (mais sur une orbite qui serait circulaire). L'idée est alors d'intégrer à un tel modèle les spécificités issues des découvertes liées à la quantification, c'est-à-dire le fait que les électrons restent sur des orbites stationnaires correspondant à des niveaux d'énergie déterminés et qu'ils peuvent néanmoins passer d'un niveau à l'autre par émission ou absorption d'un certain quantum d'énergie. Mais ce modèle souffre du nombre d'hypothèses *ad hoc* qu'il nécessite. Il laissa donc rapidement la place, sous l'impulsion de Bohr lui-même, à un modèle de nature très différente, probabiliste. Dans cette nouvelle description, dont Schrödinger fut le maître d'œuvre, on ne parle plus d'orbite, mais d'orbitale et il ne s'agit plus d'isoler des régions physiques *stricto sensu*, mais de concevoir plutôt des « nuages de probabilité » dans lesquels la notion de trajectoire n'a plus de sens clair.

l'électron$_{\text{Bohr}}$ et l'électron$_{\text{Schödinger}}$, que ne relient entre elles qu'une homonymie de surface forcée par le déroulement des affaires humaines. Dans ce cas, nous pourrons dire, par exemple, que l'on a cru que l'une d'entre elles existait alors qu'elle n'existait pas. Le problème ne serait donc pas que nous entretenions des croyances fausses sur « l'électron » (ce qui nous ramènerait à la possibilité d'une référence hors description adéquate), mais que notre langage de surface nous faisait croire à une stabilité de la référence là où en fait, nous nous référions à deux entités différentes : l'électron$_{\text{Schödinger}}$ et l'électron$_{\text{Bohr}}$ — ce dernier s'étant avéré aussi peu existant que d'autres entités fantastiques qui peuplent l'histoire des sciences : « l'humeur noire », « l'éther » ou le « phlogistique ». La difficulté est alors que l'histoire de la connaissance humaine se dispersera aussitôt en une multitude incontrôlable d'entités produites par notre langage au travers des siècles et en perpétuel devenir (l'« électron » auquel nous croyons aujourd'hui n'est déjà plus exactement l'électron$_{\text{Schödinger}}$). Le monde rassurant des idées se révèlera alors ni plus ni moins bariolé et fluctuant que celui du devenir sensible.

Même si Putnam lui-même n'a guère utilisé son modèle pour traiter des mathématiques[12], le problème qu'il soulève s'y transfère aisément et rejoint alors notre interrogation initiale. En mathématiques, non moins qu'ailleurs, on trouvera à travers l'histoire des descriptions incompatibles de certains objets. Nous y avons fait allusion en proposant de comparer Euclide et Dieudonné dans leurs traitements respectifs des opérations entre nombres et entre grandeurs. Pour prendre un exemple plus élémentaire, il est bien connu que les Grecs anciens ne considéraient pas l'unité comme un nombre (et encore moins le zéro, dont ils n'avaient pas idée). Nous pourrions croire qu'il s'agit alors simplement de « compléter » leur système numérique par des entités qu'ils auraient simplement « oubliées ». Mais c'est là une vue très simpliste de l'histoire des mathématiques, sur laquelle les historiens ont attiré l'attention depuis longtemps.

[12] Son objectif était plutôt de défendre l'idée que les mécanismes de la référence ne passent pas par des descriptions — ce qui paraît d'abord une thèse assez curieuse lorsqu'on l'applique aux mathématiques. Il a néanmoins, à plusieurs reprises, confirmé qu'à ses yeux, la vérité mathématique avait un statut quasi expérimental qui la rapprochait plus qu'on ne le croit ordinairement des sciences naturelles, cf. « What is mathematical truth ? », dans Hilary Putnam, *Mathematics, Matter and Method. Philosophical papers*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge 1975, pp. 60–78.

Comme le faisait déjà remarquer Simon Stevin dès la fin du XVIème siècle[13], la conception grecque entraînait, en effet, des conséquences « infortunées » dans leur manière de penser le *parallèle* entre nombres et grandeurs, dont les conséquences furent longues à être perçues. En particulier, il leur était naturel de mettre face à face le point, « principe des grandeurs », et l'unité, « principe des nombres » (alors, rappelait Stevin, que c'est le zéro qu'il aurait fallu mettre à cette place pour assurer un parallèle cohérent). Comme je l'ai indiqué précédemment, cette conception *structure* la mathématique grecque et nourrit l'idée qu'il y a, en mathématiques, deux domaines d'objets *incommunicables*, que seules des analogies (au demeurant mal fondées) peuvent unir. L'évolution du concept de « nombre » au temps de l'algèbre symbolique (Viète, Stevin, puis Descartes), qui elle-même prenait la suite d'une longue tradition initiée avec les débuts de l'algèbre arabe, ne consista donc pas seulement à *compléter* la conception du nombre : elle en changea aussi radicalement *la nature* (de sorte qu'il fût progressivement à même de recouvrir l'entièreté du domaine ancien des « grandeurs »)[14]. C'est tout le problème qui se pose quand on avance qu'Euclide et Dieudonné se réfèrent à l'occasion aux « mêmes » objets (par exemple à l'objet « nombres entiers »).

On pourrait prendre bien d'autres exemples de ce phénomène très répandu. Ainsi, pour rester sur des cas élémentaires, lorsque Blaise Pascal aborde les « sections coniques » d'un point de vue que nous dirions « projectif » et y intègre le point (comme un cas de conique qu'on dirait aujourd'hui « dégénérée »), il fait bien plus que *compléter* la classification d'Apollonius. Il change profondément la nature des « coniques » en les voyant non comme des sections du cône, mais comme des projections du cercle. Or certaines propriétés du point ne sont pas compatibles avec celles des coniques conçues comme courbes. L'idée même de « courbe » a d'ailleurs fortement évolué au cours du temps. Ainsi, de même qu'il

---

13 Simon Stevin, « Arithmétique (1585) », dans *The Principal Works of Simon Stevin*, éd. E. Crone, E.J. Dijksterhuis, R.J. Forbes et al., 6 vol., t. 2 B, N. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam 1955–1966, p. 498.

14 Sur cette évolution, on peut renvoyer le lecteur philosophe au livre classique de Jacob Klein, « *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra* (1934/1936) », dans *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abteilung B: Studien. Band 3, Erstes Heft, Springer, Berlin 1934, pp. 18–105 und Zweites Heft, Berlin 1936, pp. 122–235). Notons au passage que les solutions de Viète et de Stevin relèvent d'ailleurs de deux « ontologies » différentes pour la résolution de ce problème.

aurait été inconcevable à un ancien qu'une courbe (« dégénérée ») *soit* un point, de même il aurait été incompréhensible à un auteur du XVIIème siècle qu'une courbe (« monstrueuse ») puisse emplir entièrement une surface. Or c'est ce que peut la courbe de Peano qui emplit le carré. L'idée de « surface » a évidemment connu le même sort. Pour s'approcher plus près de nous, un célèbre théorème de Nash, dit « de plongement », établit par exemple que toute surface orientée et fermée peut être plongée, tout en préservant les distances, dans une boule de l'espace euclidien ordinaire de taille arbitrairement petite. Mais ceci n'aurait eu aucun sens il y a encore un siècle : comment imaginer que je puisse déformer continument la terre pour la faire entrer dans une balle de ping pong *tout en préservant les distances* ? Ceci a pourtant été à la base de l'élaboration récente d'objets baptisés « fractales lisses »[15]. Or les « fractales » avaient précisément été conçues originellement au titre des objets « non lisses » (éventuellement continus, mais pas différentiables), etc. etc. À chaque fois, un même type d'objet est pourvu à différentes périodes de propriétés *incompatibles*, par lesquelles semble se manifester le progrès de notre connaissance à son sujet.

Les exemples sont nombreux de telles avancées où il ne s'agit pas tant d'étendre un domaine que de *nier* certaines propriétés qu'on croyait appartenir à son « essence » (au sens le plus neutre qu'on puisse imaginer, disons à son « ce qu'il est »). Dans chaque cas, c'est l'écart entre expression et ontologie qui se manifeste : aucun langage, aussi formel qu'il soit, n'est intégralement transparent à l'être et, tel est le fond de l'argument de Putnam, il faut que nous puissions nous référer aux entités existantes *indépendamment de l'expression par lesquelles nous tentons de les décrire*. Ce mécanisme est le ressort de tout progrès scientifique, en mathématiques comme ailleurs. Il est le soutien de son devenir à travers le temps et l'espace. Mais il interdit du même coup de faire de telle ou telle expression (dans le cas de Badiou, l'expression « ensembliste ») le dernier mot de « l'ontologie ».

[15] Pour une présentation accessible à tous, voir Vincent Borrelli, « Gnash, un tore plat ! » — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2012 (https://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html, consulté le 15 mars 2020).

2. Quel est le sens de la révolution cantorienne sous laquelle se place Alain Badiou ?

2.1. Langage et ontologie dans l'histoire de la théorie des ensembles

Les remarques qui précèdent sur le rapport entre langage et ontologie permettent de soulever une difficulté générale sur le rôle que sont censé avoir joué les « ensembles » dans l'histoire des mathématiques et, par voie de conséquence, le rôle qu'ils peuvent jouer dans une interprétation philosophique comme celle que propose Badiou. De fait, l'émergence de ce paradigme chez des auteurs comme Cantor et Dedekind se fait sous l'égide d'une théorie que l'on décrit rétrospectivement comme « naïve » et qui produit ses effets les plus remarquables *avant* d'avoir été axiomatisée. Il y a donc un raccourci à dire que les ensembles ont procuré « un *langage* universel pour toutes les branches des mathématiques », comme l'avance à juste titre *L'Être et l'événement*[16] et de faire comme si on parlait alors de la *théorie*, au sens axiomatique du terme (théorie dite aujourd'hui « ZFC », pour « Zermelo-Fraenkel avec axiome du Choix »). Le développement du langage et celui de la théorie (du moins sous sa forme axiomatique) correspondent, en effet, à deux moments différents de l'histoire. Or, nous apprennent les historiens, le succès de l'un fut relativement indépendant de l'autre. On peut ici rappeler la mise en garde de José Ferreirós, auteur d'une histoire de la théorie des ensembles qui pointe une importante distinction à faire entre « la théorie des ensembles comme branche autonome des mathématiques — comme lorsque l'on parle de théorie des ensembles *transfinis* ou de théorie des ensembles *abstraite* — et la théorie des ensembles comme outil de base ou langage pour les mathématiques : l'*approche* ou le *langage* ensembliste »[17]. Et Ferreiros de rappeler : « comme indiqué précédemment, la théorie des ensembles abstraite vint à l'existence après que l'approche ensembliste eut commencé à se développer, et non le contraire »[18].

Ainsi les ensembles forment d'abord un langage qui est introduit, par Cantor et Dedekind, pour traiter de problèmes mathématiques particuliers, en l'occurrence des questions de convergence des séries trigonométriques et des

16 Badiou, *L'Être et l'événement*, p. 49.

17 José Ferreirós, *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1999, p. xix (ma traduction).

18 *Ibid.*

problèmes de divisibilité dans les systèmes de nombres. C'est dans le premier domaine que Cantor obtient ses résultats les plus marquants dès le début des années 1870, notamment son grand théorème d'unicité qui établit que deux séries trigonométriques qui ont la même limite simple ont les mêmes coefficients. À la même époque, Dedekind élabore les premières versions de sa « théorie des idéaux », sous-structure de ce que nous appelons aujourd'hui un « anneau » et qui permet d'y préserver dans un cadre général la possibilité d'une décomposition unique en éléments premiers (sous réserve de redéfinir dans ce cadre ce à quoi correspondent les « nombres premiers »).

Si le second contexte forme les prémices du développement de l'« algèbre moderne », le premier voit apparaître chez Cantor un certain nombre de concepts relatifs aux « ensembles de points », c'est-à-dire à ce que nous désignerions aujourd'hui sous le nom de « topologie générale » (comme le concept d'ensemble « parfait », « dérivé », « dense », etc.). C'est un des domaines où la théorie va connaître ses premiers succès auprès des contemporains, bien plus que dans le domaine de l'arithmétique de l'infini, où elle suscite au mieux l'indifférence, au pire la défiance. On le voit très bien en regardant sa réception en France auprès d'auteurs comme Lebesgue, Borel ou Baire (avant l'élaboration d'une théorie axiomatique par Zermelo en 1908) — artisans de la théorie moderne de la mesure et parfois qualifiés de « semi-intuitionnistes ». De fait, ces auteurs, pourtant grands défenseurs du *langage* mis au point par Cantor, n'en refusent pas moins l'utilité de la *théorie* abstraite que ce dernier cherche ensuite à développer sous la forme d'une arithmétique transfinie. À propos de Baire, Hélène Gispert rappelle qu'« il adopte une démarche radicalement différente de celle de Cantor qui cherche à dégager sa généralisation du concept de nombre de ses premières considérations sur les ensembles de points et ne privilégie d'aucune façon l'infini dénombrable dans son étude du transfini »[19]. Elle cite à ce propos une lettre à Borel de 1905 où Baire évoque la « corvée assommante » que représente l'article qu'il doit écrire sur les ensembles pour la version française de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques* :

> En écrivant mes *Leçons sur les fonctions discontinues*, j'avais les coudées franches, j'exposais de la manière qui me paraissait la plus claire les théories

[19] Hélène Gispert, « La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue… et tous les autres », *Revue d'histoire des mathématiques* 1 (1/1995), p. 58.

> dont j'avais l'intention de me servir. Je ne suis plus ici dans les mêmes conditions, je n'ai plus le droit de faire dévier la pensée de G. Cantor. Il me faut bon gré, mal gré, parler de l'addition, de la multiplication des types ordinaux, etc., *choses dont je ne connais pas la moindre application. Je ne peux tout de même pas en inventer* [*Lettres*, p. 83. C'est moi qui souligne][20].

On aurait tort de croire qu'il s'agit là de quelques résistances rapidement surmontées et que la théorie axiomatique aurait justement balayées. Aujourd'hui encore, c'est la même réponse qu'on recevrait de la part de nombre de mathématiciens. Je cite, par exemple, ce que dit à ce sujet Yves André dans ses *Leçons de mathématiques contemporaines* — dont un des chapitres est significativement intitulé : « (Non-)influence de la Théorie des ensembles sur les Mathématiques ».

> Que retiennent les Mathématiques de tous ces travaux sur les multiplicités infinies ?
>
> La réponse est double, et très tranchée.
>
> En ce qui concerne l'usage et le langage (élémentaire) des ensembles, à la manière de Dedekind disons, ils ont envahi toutes les Mathématiques. L'usage des ensembles a ouvert la voie à la Topologie générale, à la Théorie de la mesure, et à l'Analyse fonctionnelle (où l'on traite d'ensembles de fonctions comme s'il s'agissait de points d'un espace). D'autre part, le langage des ensembles, sous l'impulsion de Bourbaki notamment, a beaucoup contribué à la précision du langage mathématique en général.
>
> [...] En revanche, en ce qui concerne les travaux de Cantor sur la combinatoire transfinie, l'axiomatique ensembliste et tous les développements ultérieurs de la Théorie des ensembles, *les Mathématiques (hors Théorie des ensembles et Logique) n'en retiennent quasi-rien*[21].

On voit donc que les historiens, comme les acteurs de l'époque et comme ceux de notre temps, s'accordent tous sur l'importance qu'il peut y avoir à distinguer *langage* et *ontologie* ensembliste (au sens de ce que porte la théorie formelle axiomatisée). Si le triomphe de la théorie des ensembles comme langage est in-

---

[20] Cité par Gispert, *ibid*. L'édition des lettres est : *Lettres de René Baire à Émile Borel, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 11 (1990), pp. 33–120.

[21] Yves André, *Leçons de Mathématiques contemporaines à l'IRCAM*, IRCAM, France 2009, p. 104 (archives ouvertes. https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01359200/document (consulté le 25 janvier 2020). C'est moi qui souligne.

déniable et si l'on peut tout à fait soutenir que ce langage a permis de mieux exprimer certains aspects de la réalité mathématique, cela ne nous dit encore rien sur cette réalité elle-même — surtout s'il s'agit de voir dans la théorie *axiomatique* l'expression d'une telle ontologie du « multiple pur » et de son règlement[22]. Un point sur lequel je voudrais insister est que cette situation n'est nullement spécifique à la Théorie des ensembles. À de très nombreuses reprises dans l'histoire des mathématiques, on assiste à la mise au point d'un langage qui s'avère fécond et qui va être adopté par un grand nombre de mathématiciens, *alors même que ces mathématiciens sont en désaccord sur le type d'entités qui est associé à ce langage* (comme on vient de le voir avec l'exemple de Baire et de Cantor). Ceci rend la tâche particulièrement ardue pour le philosophe qui pense qu'il lui revient d'*expliciter* le discours « ontologique » sous-jacent. J'ai déjà cité à ce propos le langage euclidien des proportions, contesté dès l'Antiquité tardive par ceux qui estimaient que nombres et grandeurs pouvaient tout à fait « communiquer » (mouvement qui fut continué et amplifié dans les mathématiques arabes), mais on peut aussi penser au langage algébrique cartésien et aux débats qui s'ensuivirent pour savoir si les courbes décrites par Descartes étaient, comme il le prétendait, les seules entités dignes d'être reçues dans la « géométrie », au calcul différentiel leibnizien et aux débats qui déchirèrent ses premiers défenseurs pour savoir si l'algorithme nécessitait d'accepter ou non d'authentiques entités infinitésimales, au langage des développements en série et à la question de savoir si toute « fonction » est exprimable sous cette forme, au langage des « epsilon/delta » et aux querelles sur l'existence d'entités ne satisfaisant pas l'axiome d'Archimède, jusqu'aux débats agitant au début du XXème siècle les topologues pour savoir si l'approche par les « ensembles de points » était la meilleure pour capturer la notion d'espace ou si, au contraire, elle nous faisait perdre l'essentiel (par contraste avec la topologie qu'on appelait alors « combinatoire » et qu'on appelle aujourd'hui « algébrique »)[23]. À chaque

22 Je n'ai pas la place de développer ce point ici, mais il est non moins remarquable que le développement de la théorie dite « descriptive » des ensembles se soit fait en grande partie par une réflexion très poussée, jusque dans ses attendus théologiques, sur les rapports entre langage et être — et plus précisément encore sur la question de la nomination. Je renvoie sur ce point à l'étude de Jean-Michel Kantor et Loren Graham, *Au nom de l'infini*, Éditions Belin, Paris, 2010.

23 Sur les réticences que certains topologues ont pu avoir à accepter que les notions spatiales soient adéquatement capturées dans le langage ensembliste, voir M. Bélanger et J.-P. Marquis, « Menger and Nöbeling on pointless topology », *Logic and Logical Philosophy* 22, (2/2013), pp. 145–165.

fois, un langage triomphe (souvent assez rapidement s'il permet la résolution de problèmes latents) tandis que les débats font rage sur le type d'entités auquel il nous engage « vraiment ». Même si l'on conçoit l'« ontologie » proprement dite comme un méta-discours qui aurait à trancher dans ces débats, le problème majeur est qu'il ne s'agira nullement de trancher seulement sur le dernier venu et qu'il faudra prendre position sur tous les débats advenus dans l'histoire des mathématiques.

Un point clef qui se dégage des considérations précédentes est qu'il ne semble donc pas qu'on puisse conclure de l'adoption d'un langage à la donnée concomitante d'une ontologie et que ceci vaut de la théorie des ensembles comme de la plupart des théories antérieures. L'histoire des mathématiques nous offre de nombreux exemples où l'on voit un discours se rapportant *en apparence* à un domaine d'objets être soumis à des discussion sur la nature du domaine qu'il vise *réellement* — exactement comme on a vu les physiciens se quereller sur la nature exacte de ce qu'est un « électron ». Mais au-delà du cas particulier des controverses, il arrive bien plus souvent encore — c'était notre constat de départ — que telle ou telle reformulation postérieure fasse apparaître la distinction entre différents domaines d'objets comme simple « effet de langage ». Ceci est même inhérent à la lecture rétrospective que les mathématiciens portent sur leur discipline et au fait qu'il leur faut alors tenir que si tel ou tel pan des mathématiques a été formulé dans telle ou telle terminologie, il parlait en fait « toujours déjà » des mêmes objets que ceux que nous reconnaissons aujourd'hui (sans quoi, remarquons-le, il ne sera pas possible de dire que tel ou tel théorème a réellement été démontré dans une période antérieure, faute de porter sur les mêmes choses). Pis, comme j'ai essayé de l'indiquer, il semble que toute position, comme celle de Badiou, qui voudrait *à la fois* s'appuyer sur une théorie en vigueur pour délivrer un sens « ontologique » profond et tenir qu'une telle théorie n'a pas simplement une portée régionale, mais capture *tous* les sens d'être déployés par « les mathématiques » à travers leur histoire, *soit dans l'obligation* de s'appuyer sur un tel écart entre langage et ontologie. Le problème, j'y insiste, est donc *interne* à la perspective développée par Badiou.

2.2. De quoi parle-t-on lorsqu'on manipule des « ensembles » ?

Dans le cas de la théorie des ensembles, on pourrait rendre les considérations qui précèdent plus précises, comme l'évoque Yves André dans le passage de la citation précédente que j'ai omis :

> Au reste, la plupart des ensembles considérés par les mathématiciens sont des ensembles définis « en compréhension », pour lesquels l'appartenance veut dire, concrètement, satisfaire une certaine propriété explicite ; à ce niveau basique, les ensembles n'offrent guère qu'un langage « réaliste » un peu plus commode que le maniement logique des propriétés elles-mêmes[24].

Ainsi certains auteurs comme Stewart Shapiro considèrent que les mathématiques ensemblistes parlent, *en réalité*, d'objets qui ne sont pas des « ensembles », mais des « structures » et qui doivent être décrites dans un cadre qui n'est pas à proprement parler ZFC (formulé au premier ordre avec des schémas d'axiomes), mais la logique du second ordre[25]. Dans ce cas, « l'objet » propre de la théorie que nous interprétons comme « ensembles » doit plutôt être ressaisi, ainsi que le rappelle Yves André, comme une manière commode de parler d'autre chose (des propriétés et des relations). Les mathématiques, comme cela a été soutenu à de nombreuses reprises dans l'histoire, ne serait qu'une science des relations[26].

Un autre exemple qui vient immédiatement à l'esprit étant donnée l'orientation générale de l'œuvre de Badiou est l'alternative proposée à la théorie des ensembles par la « théorie des catégories », qui elle aussi met fortement en avant le caractère relationnel des entités mathématiques. Sous ce point de vue, il peut être utile de rappeler tout d'abord que le rapport Théorie des ensembles/Théorie des Catégories n'est pas simplement ici, comme l'estiment trop souvent les philosophes, de querelle sur la prétention à « fonder » les mathématiques. Il peut également toucher l'interprétation *des mêmes objets*, en l'occurrence des

24 Yves André, *Leçons de Mathématiques contemporaines à l'IRCAM*, p. 104

25 Stewart Shapiro, *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*, Oxford University Press, Oxford 1991.

26 De fait, c'est là une lecture assez répandue des mathématiques « structurale » et il paraît effectivement difficile d'*identifier* une structure comme celle de « groupe », par exemple, à un objet du type « ensemble », même si tout groupe peut être *interprété* comme un ensemble. Cela tient au fait que nous voulons précisément que cette structure puisse valoir d'ensembles de natures très différentes, notamment en ce qui concerne leur cardinalité (ensembles finis ou infinis, groupes discrets ou continus). En identifiant la structure à l'ensemble, nous commettrions donc un abus de langage qui permet de se rapporter à toutes ces interprétations possibles dans un langage qui ne porterait plus sur des relations, mais sur des objets – ou, comme le dit Yves André, nous adoptons un langage « réaliste » commode pour parler « en fait » de systèmes de propriétés.

« ensembles ». Il existe notamment des versions purement catégoriques de ZFC, comme la « théorie algébrique des ensembles » (TAE) développée par Joyal et Moierdijk, ainsi que par Awodey, qui montrent que l'on peut se situer *dans un même cadre fondationnel* (au sens où il s'agit dans les deux cas d'exprimer ZFC) et se rapporter en apparence aux mêmes entités (les « ensembles » *au sens de ZFC*) selon deux interprétations (on voudrait dire « ontologies ») différentes. Comme l'indique Brice Halimi, la TAE « incarne une combinaison heureuse de théorie des ensembles et de théorie des catégories ». Et de préciser :

> D'un point de vue ensembliste, une application est un ensemble : il n'y a pas de flèche. Les seules flèches correspondent aux arêtes du graphe d'appartenance propre à l'univers ensembliste d'arrière-plan [..]. Le point de vue de la théorie algébrique des ensembles consiste, au contraire, à mettre en vedette les flèches, à l'aide du « foncteur de codomaine » — ce qui est une perspective typique de théorie des catégories. La théorie des catégories fibrées permet ainsi de ressaisir la théorie des ensembles *tout en la transformant en une théorie fondée sur les flèches plutôt que sur les objets*[27].

Ainsi la théorie algébrique des ensembles peut être décrite comme « la greffe de la théorie des catégories à ZFC, ce qui est bien plus fécond que la rivalité habituelle entre théorie des ensembles et théorie des catégories »[28].

Cette remarque s'inscrit dans une réflexion plus vaste sur le changement de point de vue opéré avec les catégories. Ainsi la théorie des *topos* — puisque c'est un aspect de la théorie des catégories auquel s'intéresse particulièrement Badiou — peut être vue, elle aussi, comme une « théorie des ensembles », mais *locale*[29]. Ici ce n'est plus au sens de ZFC, mais au sens où l'on extrait un noyau

[27] Brice Halimi, « Sets and Descent », dans *Objectivity, Realism and Proof*, dirs. A. Sereni & F. Boccuni, pp. 123–142, Springer, Basel 2016. Ma traduction et mes italiques.

[28] *Ibid*.

[29] Un *topos* est une catégorie, c'est-à-dire une collection des flèches et d'objets, munie de propriétés additionnelles concernant l'existence de certaines flèches associées à la collection initiale. Une manière condensée de l'exprimer est de dire que cette catégorie possède toutes les limites et colimites finies, les exponentielles, ainsi qu'un objet distingué appelé « classificateur de sous-objets » (qui, comme son nom l'indique, permet de capturer au moyen de diagrammes l'idée qu'un objet est un « sous-objet » d'un autre). Les topos qui intéressent particulièrement Badiou sont les « topos de Grothendieck », un cas particulier de la définition générale précédente. Ils peuvent être définis comme des faisceaux d'en-

opératoire à *toute* « théorie des ensembles », y compris des versions plus faibles que l'axiomatique qui a fini par s'imposer au début du XXème siècle. C'est le point de vue qui a été développé notamment par J. Bell dans son livre *Toposes and local set theories*[30] (qui prolonge le point de vue initial de Lawvere sur l'idée qu'un topos exemplifie l'idée d'ensembles *variables*).

Dans un exposé précédent, j'avais essayé d'indiquer pourquoi cette idée d'une mathématique « locale » (par opposition aux mathématiques « absolues »)[31] peut être féconde et comment elle court-circuite ce qui peut apparaître chez Badiou comme un raccourci, à savoir l'alternative où il cherche souvent à enfermer son interlocuteur : « soit l'absolu, soit le relativisme ». De fait, la théorie des ensemble *locale* permet de donner un sens parfaitement bien déterminé à la notion de vérité locale et elle donne lieu non à un relativisme, mais à une théorie de la relativité (mathématique)[32]. Bien plus, l'idée de vérité « locale » paraît *présupposée* par la notion de vérité « absolue » plutôt que le contraire : dans le système de Badiou, appuyé très fortement sur l'idée de Cohen que l'on peut « forcer » certaines vérités dans des modèles de l'univers ensembliste, le point de départ est précisément que l'ensemble des vérités ne peut pas être déployé devant nous une fois pour toutes et *a priori*[33]. Une vérité doit apparaître *dans* un ou plusieurs mondes (c'est tout le sens du projet de *Logiques des mondes* d'expliciter les modalités de cette apparition). Son « absoluité » (au sens que donne Badiou aux vérités « éternelles ») est alors simplement postulée à partir du fait de sa réactivation possible dans d'autres mondes, voire dans tout autre monde

sembles sur un site (une généralisation des espaces topologiques). Sous ce point de vue, un topos est une manière de voir des ensembles qui varient d'une région à l'autre d'un espace et se recollent selon certaines règles de compatibilité.

30 J. L. Bell, *Toposes and local set theories: An introduction*, Oxford Logic, Guides: 14, Clarendon Press, Oxford 1988.

31 Bell lui-même en a développé le programme philosophique dans « From Absolute to Local Mathematics », *Synthese* 69 (3/1986), pp. 409–426. Voir mon analyse dans : « Tous ensemble ? Sur le rapport d'Alain Badiou aux mathématiques » dans *Autour d'Alain Badiou*, dirs. F. Tarby et I. Vodoz, pp. 81–102, Germina, Paris 2011.

32 Le parallèle avec la théorie de la relativité est au cœur de l'article de John Bell cité dans la note précédente. Voir également, René Guitart, « Caractère global et caractère local de la vérité », conférence donnée à la Lysimaque, 23 septembre 1990 (disponible sur le site de l'auteur : http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr/preprints.html), en particulier p. 8 pour la référence à la théorie de la relativité et l'opposition relativité/relativisme.

33 C'est justement le point de départ de Bell dans l'article cité note précédente.

(c'est ce que Badiou présente comme une relecture de la doctrine cartésienne de la « création des vérités éternelles »)[34].

Je ne reviendrai pas sur ces discussions autour de l'approche « locale » des mathématiques ici et me concentrerai sur un autre point : la manière dont elle modifie le rapport entre multiplicité spatiale et multiplicité numérique. De fait, l'idée d'une théorie des ensembles « locales », et, plus simplement encore, le nom même de *topos*, suppose une forme de revanche du spatial dans la compréhension du « multiple pur », qui réactive la tension entre nombre et espace dans le paradigme ensembliste.

3. Espace et nombre, à nouveau

Le fait que les catégories, et en particulier la notion de *topos*, ait pu redistribuer les rapports entre nombre et espace, discret et continu, arithmétique et géométrie, etc., a été pointé par de nombreux auteurs, à commencer par l'inventeur de cette dernière notion, Alexandre Grothendieck. Je cite un passage bien connu de *Récoltes et Semailles* :

> C'est le thème du topos qui est ce « lit » où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures « discontinues » ou « discrètes ». Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonnances géométriques, une « essence » commune à des situations des plus éloignées les unes des autres[35].

[34] Les différents sens de l'absoluité, dans lesquels je ne peux entrer ici, sont au cœur du troisième tome de l'*Être et l'événement* intitulé *L'immanence des vérités*. Celui qui nous venons d'évoquer (qui se marque du fait qu'un événement se transcrit dans une œuvre dotée du maximum d'existence dans un monde) n'est qu'un aspect d'une absoluité qui s'atteste plus précisément du rapport qu'une œuvre de vérité entretient avec « l'absolu », c'est-à-dire « l'ensemble de tous les ensembles » – ou plus précisément avec un « attribut de l'absolu », dont l'œuvre témoigne par la structure intriquée des infinis qu'elle implique (voyez notamment le chap. VII de *l'Immanence des vérités*, Fayard, Paris, 2018).

[35] Alexander Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, p. 59. Ce texte est encore inédit, mais il est aisé de s'en procurer une version numérique sur divers sites internet (par exemple ici : https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/recoltesetc.php).

On trouve des déclarations très similaires chez Mac Lane et Moerdijk, mais avec une référence additionnelle à Cohen qui n'est pas sans intérêt en contexte badiousien :

> Un aspect frappant de la théorie des topos est qu'elle unifie deux domaines mathématiques en apparence complètement distincts : la topologie algébrique et la géométrie algébrique, d'un côté, la logique et la théorie des ensembles de l'autre. De fait, un *topos* peut être considéré à la fois comme un « espace généralisé » et comme un « univers ensembliste généralisé ». Ces différents aspects ont émergé indépendamment vers 1963 : avec A. Grothendieck et sa reformulation de la théorie des faisceaux en géométrie algébrique, avec William F. Lawvere dans sa recherche d'une axiomatisation de la catégorie des ensembles et de celle d'ensembles « variables », et avec Paul Cohen dans son usage du forcing pour construire des nouveaux modèles de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel[36].

Le point sur lequel j'aimerais insister est l'évocation par Grothendieck d'une « essence commune » à des situations qu'il dit « les plus éloignées les unes des autres » – ou, chez Mac Lane et Moerdijk de l'unification de « deux domaines mathématiques en apparence complètement distincts ». Nous avons là un exemple typique de la manière dont on réinterprète un langage de surface en disant qu'*en fait* il ne parlait pas de ce qu'on croyait, qu'il y a derrière une « essence » cachée qui permet de saisir l'unité des « genres » d'être antérieurement distingués[37]. Bien plus, ce geste n'est pas sans affinité avec celui qui reprochait aux mathématiques grecques la scission maintenue entre discret et continu. Mais dans ce cas, ce n'est plus sur la mathématique ancienne que porte cette reformulation : elle porte *sur la mathématique ensembliste elle-même*. Grothendieck, pas plus que Lawvere, et tant d'autres mathématiciens auprès eux, ne croient que ZFC soit la meilleure manière d'exprimer des entités sous-jacentes à ce que le langage séparait encore le long de la frontière entre arithmétique et géométrie (soit *exactement le même argument* que celui que pouvait faire

36 Saunders Mac Lane et Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic. A First introduction in topos theory*, Springer-Verlag, New York 1992, Prologue p. 1. Ma traduction.

37 Ce vocabulaire de « l'essence cachée » est bien plus répandu en mathématiques qu'on ne pourrait le croire. Mark Wilson en a fait le ressort d'une analyse philosophique du discours mathématiques dans son article « Frege: The Royal Road From Geometry », *Noûs* 26 (2/1992), pp. 149 –180.

valoir un mathématicien « ensembliste » en se rapportant aux mathématiques anciennes !).

C'est en ce point, bien plus que dans le fait que la théorie des catégories nous livre en apparence une ontologie des relations plutôt que des objets, des morphismes plutôt que des éléments, que l'on devrait, me semble-t-il, faire porter la confrontation. Avant même de prétendre qu'elle nous livre une nouvelle vision de l'« ontologie » (qu'en sait-on si l'on s'en tient à son seul vocabulaire descriptif ?), nous devons dire que la théorie des catégories nous montre, une nouvelle fois, que ce que nous avions pris pour principe de l'élucidation ontologique ultime ne l'était pas et peut être reformulée à son tour dans une théorie dont l'objet apparent est différent (qui elle-même se trouvera reformulée dans d'autres langages qui modifieront éventuellement l'interprétation de la réalité visée, etc., etc. Nous en verrons un autre exemple sous peu)[38].

Dans la dernière partie de cet article, je voudrais développer plusieurs remarques relatives à ce constat. Tout d'abord, l'unification invoquée en lien avec l'émergence des *topos* nous conduit à relire le développement *de la théorie des ensembles elle-même*. De fait, la tension entre nombre (multiplicité numérique) et espace (topologique) pourrait y être *constitutive* (à la manière dont la reformulation ensembliste elle-même nous avait permis de voir que la coupure entre nombre et grandeur était *constitutive* de la rationalité mathématique grecque classique). La question centrale évoquée par Grothendieck et Mac Lane n'est pas de savoir si on décrit les objets mathématiques en termes d'éléments plutôt qu'en termes de flèches – elle est de savoir si on a manqué quelque chose de *l'unité* des objets mathématiques quand on les a décrit dans les termes d'une

[38] Remarquons que l'idée qu'une science est soumise à des progrès constants dans l'expression de la réalité qu'elle vise laisse ouverte plusieurs options métaphysiques. On peut y voir, bien sûr, un témoignage de l'existence d'une réalité immuable qui résiste à ces expressions, qui en forment autant d'approximations. Une telle position conduit assez naturellement à une forme de platonisme, dit parfois « naïf », que l'on retrouve chez nombre de mathématiciens au travail. Mais on peut aussi considérer que la position d'objet est immanente à l'expression elle-même et que sa « réalité » n'est pas à trouver dans une entité indépendante et séparée, mais dans le mécanisme de l'expression ou de la visée elle-même – une position qu'ont pu tenir nombre d'interlocuteurs de Badiou sous des formes très différentes (Desanti, Deleuze, certains relativistes d'inspiration wittgensteinienne ou latourienne).

théorie comme ZFC[39]. Et leur réponse est sans ambiguïté : on manque quelque chose de l'*essence commune* du nombre et de l'espace parce que les ensembles n'ont justement pas réussi à *vraiment* unifier ces deux types d'entités (c'est-à-dire autrement que dans un *langage* que la formulation catégorique aura permis de *dépasser*). Mais cela signifie notamment que l'ontologie sous-jacente à la théorie des ensembles (quelle qu'elle soit) n'est précisément *pas* exprimée adéquatement par ce langage. On peut certes contester cette affirmation. Mais il paraît difficile de le faire, comme semble y être contraint Badiou, en tenant *exactement la même position* à propos de la mathématique antérieure (qui exprimerait « en réalité » des multiples purs).

Un autre point particulièrement intéressant est que la tension entre multiplicité numérique et multiplicité spatiale, que la notion de *topos* est censée permettre de dépasser, rejoint une ligne de démarcation entre deux orientations *philosophiques*. On peut l'associer à deux propositions divergentes pour une « ontologie » du multiple pur telles que thématisées par Deleuze et Badiou. Badiou a lui-même mis en scène cette opposition à plusieurs reprises et fait valoir ce qu'il considère comme la faiblesse d'une position s'appuyant sur des intuitions spatiales originaires. Son argument est précisément que les modèles spatiaux, typiquement les modèles différentiels dont raffole Deleuze, apparaissent comme un cas très particulier de ce qu'on peut *exprimer* dans un cadre ensembliste[40]. De fait, tant qu'on reste confiné à un langage ensembliste, ce constat semble s'imposer. J'ai déjà eu l'occasion d'indiquer qu'il y a, cependant, une réponse possible à l'objection et que cette réponse consiste non pas à défendre la primauté du continu et du différentiel, comme l'ont fait nombre de deleuziens, mais à s'installer dans la tension entre discret et continu – une version du platonisme qu'a illustrée remarquablement la perspective d'Albert Lautman dont se réclame justement Deleuze (tandis que Badiou serait plutôt, à mon sens, du côté de l'héritage de Jean Cavaillès). Je voudrais revenir brièvement sur cette réponse dans le cadre que j'ai retracé ci-dessus où c'est le langage ensembliste

39 On peut d'ailleurs remarquer, comme y a insisté Bernard Vitrac dans sa traduction des *Éléments*, qu'Euclide dispose déjà d'un langage « commun » qui lui permet de décrire les nombres et les grandeurs (par exemple à partir de la notion de « multiplicité »/*pléthos*, mais aussi des rapports tout/parties, ajouter/soustraire, etc.).

40 Voir, outre son *Deleuze : La clameur de l'être* (Hachette Littératures, Paris 1997), l'article donné par Alain Badiou pour le numéro spécial « Badiou/Deleuze » de la revue *Futur Antérieur* (43, avril 1998) sous le titre : « Un, multiple, multiplicité(s) ».

lui-même qui s'avère porter cette tension. Enfin, je voudrais indiquer en conclusion que le développement récent des mathématiques accompagne, comme on pouvait s'y attendre un nouveau changement de paradigme dont la philosophie n'a pas encore pris toute la mesure et qui revisite à son tour la reformulation catégorique elle-même (au sens de Grothendieck et Mac Lane), pour la ressaisir à un niveau d'unification « supérieur ». Or, comme j'y insisterai en conclusion, la référence spatiale y tient une place encore plus prépondérante que dans le cadre toposique.

Sur le premier point, je passerai vite puisque j'y ai déjà fait allusion en rappelant les travaux de Cantor et leur réception, mais il est important de voir que le langage ensembliste se prête immédiatement à deux formes de thématisations différentes, que l'on peut dire « topologique » et « ordinale »[41]. Quand on suit la préhistoire de la Théorie des ensembles, on ne peut qu'être frappé de constater que cette thématisation est déjà présente chez Riemann dans un passage célèbre sur les *mannigfaltichkeiten*. Or ce passage se trouve être également le point de départ de Deleuze dès *le Bergsonisme* (1966) :

> Les concepts de grandeur ne sont possibles que là où il existe un concept général qui permette différents modes de détermination. Suivant qu'il est, ou non, possible de passer de l'un de ces modes de détermination à un autre, d'une manière continue, ils forment une multiplicité continue ou une multiplicité discrète. [...] Une partie d'une multiplicité, séparée du reste par une marque ou par une limite, s'appelle un quantum. La comparaison des quanta au point de vue de la quantité, s'effectue, pour les grandeurs discrètes, au moyen du dénombrement ; pour les grandeurs continues, au moyen de la mesure. La mesure consiste dans une superposition de grandeurs à comparer ; il faut donc, pour mesurer, avoir un moyen de transporter la grandeur qui sert d'étalon de mesure pour les autres. Si ce moyen manque, on ne pourra alors comparer entre elles deux grandeurs, que si l'une d'elles est une partie de l'autre, et encore, dans ce cas, ne pourra-t-on décider que la question du plus grand ou du plus petit, et non celle du rapport numérique. Les recherches auxquelles un tel cas peut donner lieu forment une

[41] En fait, on devrait dire trois en ajoutant la thématisation algébrique dont Dedekind s'emparait au même moment. Cela permettrait, par ailleurs, de rappeler le souvenir des trois « structures mères » bourbakistes (algébrique, topologique et d'ordre). Mais je laisserai cette troisième thématisation de côté parce que sa jonction avec la seconde a été immédiate et s'est plus facilement opérée.

> branche générale de la théorie des grandeurs, indépendante des déterminations métriques, et dans laquelle elles ne sont pas considérées comme existant indépendamment de la position, ni comme exprimables au moyen d'une unité, mais comme des régions dans une multiplicité[42].

Le point clef est que ces différentes thématisations ont conduit, entre autres choses, à des axiomatiques distinctes comme celle de l'arithmétique transfinie cantorienne d'un côté, formalisée par Zermelo et ses successeurs (qui conduit à « ZFC »), et celle de la topologie ensembliste formalisée initialement par Hausdorff et Weyl de l'autre (qui conduit à la définition en termes de régions ou de « voisinages » des variétés, puis plus généralement des « espaces topologiques »).

Le fait que la première axiomatise en général le *langage* des ensembles dans lequel se trouve *exprimée* la seconde (comme on le voit chez Hausdorff, mais pas chez Weyl) peut d'abord donner l'impression qu'on a affaire à une unification *ontologique*. Mais cette impression doit être nuancée par deux remarques importantes. La première est que les différentes propriétés des espaces topologiques qui vont alors émerger comme centrales (connexité, compacité, continuité, etc.) ne paraissent pas analytiquement dérivables, pour reprendre le vocabulaire kantien, du concept de multiplicité pure – à la différence de ce qui se passe pour les concepts numériques. Autant il est aisé de dériver du concept pur de « multiple » ou d'« ensemble » l'idée de zéro et de successeur, puis d'édifier progressivement sur cette base *tous* les systèmes de nombres (à l'aide d'un certain nombre de fonctions et de relations), ainsi que leurs structures opératoires, autant il paraît difficile d'en tirer l'idée qu'un espace est, par exemple, « d'un seul tenant » (« simplement connexe »).

Pour l'expliquer, prenons, à nouveau, un exemple élémentaire : peut-on dire que les entiers naturels forment un ensemble « d'un seul tenant »? Peut-on dériver cette propriété de l'analyse conceptuelle de cette multiplicité ? La réponse va dépendre des régions que nous allons considérer. Car le multiple « entiers naturels » ne porte avec soi aucune indication des « régions » qu'on peut y discerner. Si, par exemple, l'ensemble lui-même est la seule région considérée

42 Bernhard Riemann, « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie », *Œuvres mathématiques*, trad. Laugel, Gauthier-Villars, Paris 1898, p. 282.

(avec la région « vide »), il va sans dire qu'il est d'un seul tenant ! C'est ce qu'on appelle aujourd'hui la « topologie grossière » (de fait, *tout ensemble* muni de la topologie grossière est simplement connexe). Si, en revanche, nous considérons l'ensemble des entiers comme « héritant » de la topologie usuelle de la droite numérique réelle dans laquelle nous avons l'habitude de le voir plongé (les « régions » sont donc les points à coordonnées entières sur la droite), alors l'ensemble des entiers naturels sera cette fois ... totalement déconnecté ! Il sera même le prototype d'espace *discret*. Cette situation crée des phénomènes intrigants pour ceux qui peinent à distinguer ces thématisations et dont la valeur pédagogique est bien connue. Ainsi, on apprend aux débutants qu'un ensemble comme le « triadique » de Cantor peut avoir la puissance du *continu* (selon la thématisation numérique), alors qu'il est pourtant *discontinu* (selon la thématisation topologique)[43]. On leur apprend également à munir la droite réelle de topologies différentes de la topologie usuelle, par exemple d'une topologie qui la rende « non séparée », c'est-à-dire dans laquelle la condition *partes extra partes* n'est pas satisfaite – alors même que la droite réelle apparaît comme le cas le plus simple, à une dimension, de l'espace « ordinaire », caractérisé par le fait que l'on peut y découper des parties extérieures les unes aux autres (*partes extra partes*). Il est d'ailleurs possible de munir la droite réelle d'une topologie qui la rende « discrète », par un procédé symétrique à celui par lequel on avait rendu les entiers « d'un seul tenant » : il suffit de prendre tous les points comme « régions » de notre découpage. Le simple fait que l'on puisse ainsi munir un « multiple » de différentes topologies, aux propriétés incompatibles entre elles, montre bien qu'il ne saurait s'agir d'une dérivation « analytique » au sens kantien (les différentes propriétés considérées ne sont pas dérivables du seul concept du multiple considéré).

La seconde remarque, plus historique, tient au constat suivant : l'idée que les espaces topologiques soient de *nature* ensembliste fut immédiatement l'objet de doute de la part de certains mathématiciens, souvent issus de la tradition de la topologie algébrique, qui considéraient que la structure topologique proprement dite était indépendante de cette expression (comme ils en faisaient eux-mêmes l'expérience en analysant ces espaces sans les concevoir comme des en-

[43] C'est la raison pour laquelle Cantor objecta justement à Dedekind que la propriété de complétude (numérique) ne pouvait suffire à définir la continuité géométrique et qu'il fallait également y adjoindre des propriétés de connexité.

sembles de points). J'y ai déjà fait allusion au titre des controverses qui agitèrent les pères fondateurs : nombre d'entre eux considéraient, en effet, la machinerie cantorienne des ordinaux transfinis comme dénuée d'utilité et marquant plutôt le fait que la théorie du multiple pur, prise pour elle-même, nous égarait dans des abstractions sans signification (le même reproche qu'on fit par la suite à la théorie des catégories prise pour elle-même et qualifiée alors d'*abstract nonsense*). Ce mouvement fut notamment à l'origine de l'idée d'une topologie qui se ferait « sans points » (*pointless topology*)[44]. Or cette remarque historique n'est pas anodine dans notre développement puisque les « mondes » que considère Alain Badiou dans *Logiques des mondes* sont adossés à des structures qui généralisent celle d'espace topologique et que l'on peut justement exprimer par la structure algébrique sous-jacente de leurs régions (« l'algèbre de leurs ouverts »). Dans le cas d'espèce, elles forment la structure logico-algébrique d'« algèbre de Heyting complète »[45]. Mais cette structure est précisément celle qui s'est révélée être un objet privilégié de… la topologie *sans points* (c'est-à-dire qu'elle peut être exprimée entièrement *sans évoquer la notion d'ensemble*). C'est d'ailleurs un des problèmes théoriques majeurs de *Logiques des Mondes* que le dispositif ne force nullement le caractère ensembliste des structures décrites et que cette contrainte doive donc être *ajoutée* par un postulat *ad hoc* (que Badiou appelle « postulat du matérialisme »)[46].

Il est très intéressant que *Logiques des mondes* choisisse délibérément une présentation logique et ensembliste du cadre dans lequel sont censé varier les ensembles lorsqu'ils « apparaissent » et n'introduise l'approche topologique de ce même cadre que dans un second temps, au chapitre III, tout en confessant que cette dernière est néanmoins « plus fondamentale »[47]. Mais pourquoi préciser qu'elle est « plus fondamentale » ? Une étude fine du dispositif montre qu'il ne s'agit pas là d'une facilité de formule. De fait, on a *besoin* de cette présentation spatiale pour comprendre la structure de monde non pas seulement comme variation de l'apparaître par rapport à une grille d'évaluation, mais comme *recol-*

44 Voir l'article de Bélanger et Marquis, « Menger and Nöbeling on pointless topology ».

45 Pour une présentation générale du formalisme de *Logiques des mondes*, je me permets de renvoyer à : « Objet, relation, transcendantal. Une introduction au formalisme de *Logiques des mondes* » dans *Autour de « Logiques des mondes »*, dirs. D. Rabouin, O. Feltham et L. Lincoln, Editions des Archives contemporaines, Paris 2011.

46 Badiou, *Logiques des mondes*, p. 264.

47 *Ibid.*, p. 267.

lement de ces informations, c'est-à-dire, en vocabulaire mathématique, comme « faisceau ». Cet aspect occupe l'essentiel de la partie III consacrée à ce que Badiou désigne par l'expression curieuse (dans son système) d'« onto-logique ». C'est ce qui permet de construire tout « monde » comme « topos de Grothendieck », c'est-à-dire comme catégorie de faisceaux d'ensembles (sur un site)[48]. Le point clef est alors le suivant : pour construire un « monde » au sens de Badiou, il ne suffit pas d'avoir une grille de valeurs à partir de laquelle évaluer les variations des existants (un « transcendantal » dans le vocabulaire de *Logiques des mondes*), encore faut-il aussi que ces variations soient *cohérentes entre elles* et, pour cela, qu'elles satisfassent à des conditions de *recollement*.

Ici s'ouvrent de nombreuses questions que je vais essayer de formuler brièvement en guise d'ouverture à cette étude et en restant le plus possible, comme auparavant, *à l'intérieur* du système d'Alain Badiou :

1. Tout d'abord, il devient alors particulièrement clair que la construction des « mondes », comme structure d'apparaître de l'être, s'est faite par un certain nombre de choix philosophiques qui déborde le simple choix d'un fondement ensembliste et opère parmi les objets mathématiques considérés comme pertinents. En particulier, on n'a pas choisi n'importe quel *topos*, mais un *topos* qui se laisse exprimer sous *une certaine forme spatiale* (qu'on dit « localique »). Mais comment justifier un tel choix si d'autres *topos* apparaissent non pas dans la théorie *abstraite* des catégories, à titre de purs possibles non réalisés, mais dans des situations mathématiques réalisées ?[49] Si « les mathématiques sont l'ontologie », en effet, il n'y a aucun moyen de balayer ces apparitions (qui ne correspondent pourtant pas à la définition d'un « monde ») comme n'étant pas « réelles »[50]. Autant on peut comprendre que la théorie des catégories abstraite puisse être décrite comme une logique

[48] Un site est une catégorie équipée d'une topologie de Grothendieck. Il fournit une généralisation de la notion d'espace topologique opérée à partir de l'idée centrale de « recouvrement ». Pour une description technique, mais accessible, voir Antti Veilahti, « Alain Badiou's mistake. Two postulates of dialectic materialism », arXiv: 1301.1203, p. 19 (https://arxiv.org/abs/1301.1203, consulté le 15 mars 2020).

[49] Pour les détails techniques, voyer l'article d'Antti Veilahti cité dans la note précédente.

[50] Si j'étudie, par exemple, les actions d'un groupe discret G, les G-ensembles forment un topos BG (dit « topos classifiant » de G) qui n'a aucune raison d'être localique. Je remercie Mathieu Anel pour m'avoir indiqué cet exemple lors d'une de nos discussions sur les topos.

générale des mondes possibles tant elle s'aventure souvent dans des terres où la mathématique « ordinaire » ne semble pas pénétrer[51], autant on ne comprend pas très bien que certains de ces possibles abstraits apparaissent dans les mathématiques ordinaires, lieu même de « l'ontologie », *sans* satisfaire aux réquisits de ce qu'est un « monde ». Par contraste, on voit que les contraintes spatiales sont impensées dans ce modèle, alors même que ce sont elles qui forcent, en dernière instance, la structure de ce qui est acceptable ou non (par le philosophe).

2. D'où une deuxième remarque importante : comment justifier que « l'ontologique », ou structure de l'apparaître, coïncide précisément pour Badiou avec un processus de *spatialisation* ? C'est un problème qui hante la philosophie depuis Platon au titre de la *chôra*, mais qui n'en est pas moins un point aveugle de tout platonisme, celui de Badiou comme celui de son maître. L'espace vient suturer l'écart entre l'être et l'apparaître en situant la manifestation de l'être *quelque part*. Et c'est le même problème qui resurgit jusqu'à Kant dans le fait que la donation intuitive doit se faire via la forme-espace, alors même que la dérivation de cette prétendue « nécessité » mobilise déjà toute une entente *préalable* de la spatialité, à commencer par celle qui permet de distinguer entre un sens « interne » et un sens « externe ». La « forme-espace » ne peut advenir que sur la donnée préalable d'une extériorité qui ne peut pourtant advenir dans aucune « forme-espace » (puisqu'elle est antérieure à sa possibilité même). Derrière se terre le problème, dans un vocabulaire que reprend Badiou lui-même dès l'époque de l'*Être et l'événement*, du passage de l'être à l'« être-là ». Dit autrement : pourquoi la forme générale de la manifestation doit-elle s'opérer par une forme de spatialisation (le « là » de l'être-là), alors même que la doctrine générale de la manifestation relègue l'espace à n'être qu'une forme *particulière* de ce qui se manifeste ?

Ces remarques, qu'on pourrait développer bien plus avant, me conduisent aux deux aspects auxquels je souhaitais parvenir : tout d'abord, on voit que si les mathématiques elles-mêmes évoluent vers une conception où la spatialité n'a pas un statut *dérivé* par rapport à une ontologie fondamentale, mais au contraire *constitutif* – alors la difficulté va se trouver aggravée. Or c'est bien ce à

[51] Alain Badiou, *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris 1998, p. 198.

quoi a conduit le développement libre (hors des choix philosophiques forcés par Badiou) de la théorie des topos et la question qui s'est ouverte progressivement de formes d'unité de niveau « supérieur » entre nombre et espace, arithmétique et géométrie. Cette idée a notamment donné lieu à l'émergence d'une prise en compte du caractère irréductiblement spatial de *toutes* les relations mathématiques, *à commencer par les flèches du catégoricien*. J'y reviendrai brièvement en conclusion de cette étude, mais on peut noter dès à présent que le pas est considérable par rapport à une première approche où certaines catégories (typiquement les « topos ») étaient censées capturer l'essence de la spatialité (par différence avec d'autres).

L'autre aspect est évidemment lié à la querelle Badiou-Deleuze. Comme je l'ai rappelé, Badiou a objecté à Deleuze que son entente des multiplicités était limitée à cause de son attachement à des intuitions originaires spatialisantes. C'est la même critique que pourrait faire Kant à quelqu'un qui prétendrait que l'espace est une structure de la pensée elle-même (et non seulement de l'intuition sensible) et qui se verrait objecter que le domaine de la pensée est bien plus vaste que ce qui s'en exprime via la forme-espace. Mais, comme l'avait déjà objecté le mathématicien Johann Heinrich Lambert[52], l'entente de l'espace à laquelle s'adosse cette réponse repose sur le refoulement préalable de tout un régime de spatialité attaché à la structure de l'être en tant que se manifestant[53]. On cherchera alors à rabaisser cette intervention originaire du spatial au rang de simple métaphore (c'est la stratégie que suit Badiou dans *Logiques des mondes* en présentant d'abord les structures spatiales de l'apparaître dans leur expression logique et algébrique et en ne recourant au vocabulaire topologique que dans un second temps, comme une manière imagée de les exprimer). Mais reste alors à expliciter le sens *littéral* qui rendrait la métaphore inopérante et, en particulier, lorsque l'on parvient à ce sens « plus fondamental » de la spatialisation où elle ne sert pas seulement à exprimer les variations, mais à en assurer la cohérence.

52 Emmanuel Kant, *Correspondance*, Vrin, Paris 1991, p. 79.

53 C'est la même réponse que pourrait faire un spinoziste, comme j'y ai insisté dans d'autres études (*Vivre Ici*, PUF, Paris 2010) : si l'espace et la pensée sont deux attributs distincts de l'être, cela ne signifie pas qu'on puisse concevoir un excès de l'un sur l'autre. Il n'y a rien de la pensée qui ne soit exprimable dans la spatialité et réciproquement : c'est tout le sens du mal-nommé « parallélisme » spinoziste.

Conclusion

En guise de conclusion, je voudrais indiquer quelques prolongements possibles à mes questions initiales.

Tout d'abord, si l'on considère que les ensembles forment d'abord un langage pour décrire l'être mathématique, alors on constate aisément qu'un des avantages de la théorie des catégories est précisément, indépendamment de toute question fondationnelle, d'offrir un nouveau langage dans lequel la référence à des « ensembles » est préservée, mais étendue à des situations nouvelles. Ici une question naturelle est donc : y a-t-il des situations mathématiques que les catégories permettent d'exprimer *mieux* que ce que faisait le vocabulaire ensembliste ? La réponse est indéniablement oui. Tel fut même le principal moteur du développement de cette théorie (exactement de la même façon qu'un grand succès de la théorie des ensembles fut de pouvoir exprimer des situations qui étaient inaccessibles au *langage* de la « grandeur »). Le lieu prototypique de déploiement de ce langage a été, et est toujours, la topologie algébrique. Pour prendre l'exemple le plus célèbre, il paraît très difficile d'exprimer ce qu'est une homologie *en général* ou une homotopie *en général* (« homotopie supérieure ») sans passer par ce langage – même si, bien entendu, on peut toujours trouver des situations ensemblistes où l'on pourra exprimer ces différentes notions dans des contextes particuliers (puisque c'est dans ces contextes qu'elles ont émergé).

Ceci conduit à une seconde remarque : la topologie contemporaine, et tout particulièrement la théorie de l'homotopie, offre ici un triple défi dont il faut prendre acte et qui reste à penser par la philosophie. Tout d'abord, ses constituants de base, les « types d'homotopie » ne se laissent pas bien exprimer dans un cadre extensionnel. Ce point peut être rendu précis au moyen d'un théorème qui montre que la catégorie associée ne peut pas être rendue « concrète » (c'est-à-dire qu'elle ne peut pas être plongée « fidèlement » dans celle des ensembles)[54]. Comme l'a indiqué Jean-Pierre Marquis, un des rares philosophes à s'être pen-

[54] On dit qu'un foncteur entre deux catégories est « fidèle » si l'application qui associe les morphismes de la première à leurs images dans la seconde est injective. Plus intuitivement (mais aussi moins précisément), la seconde catégorie représente « fidèlement » la première, car elle n'identifie pas des morphismes distincts de la première. Le théorème mentionné est dû à Peter Freyd (1969) dans le cas de la catégorie homotopique *htop* (généralisé depuis aux catégories de modèles) et il indique donc que la catégorie des ensembles ne représente pas fidèlement les types d'homotopie.

ché sur ces questions, nous semblons alors quitter les rives de la mathématique « extensionnelle »[55]. Or, comme il le rappelle également, certains mathématiciens considèrent, non sans arguments, que les « types d'homotopie » sont aux formes spatiales ce que les nombres premiers (d'ailleurs non moins mystérieux) sont aux nombres entiers : des sortes de « composants ultimes » qui en règlent les structures fondamentales. Sous ce point de vue, le fait que l'on ait pu exprimer les nombres entiers ou l'espace au moyen du langage ensembliste n'atteint pas pleinement à la nature « profonde » de ces objets, parce qu'il n'a pas prise sur leurs « composants ultimes ».

Ensuite, la perspective homotopique s'est développée jusqu'à pouvoir se présenter comme un véritable *changement de paradigme* permettant d'exprimer des situations *généralisant* ce qu'exprimaient l'égalité extensionnelle et les isomorphismes des catégories « simples »[56]. Nous ne sommes donc déjà plus au moment où les catégories viendraient contester la prééminence du langage ensembliste, mais au moment suivant où ce sont ces mêmes catégories qui peuvent désormais être ressaisies à un niveau « supérieur ». Le phénomène tout à fait remarquable, au regard des développements qui précèdent, est que ce point de vue « supérieur » se fasse précisément par une *accentuation du caractère spatial* conféré aux entités fondamentales : les flèches des catégories simples étaient, en effet, réglées par un principe d'identification donnée par les isomorphismes, mais *vues comme objets spatiaux*, elles peuvent également être vues comme des « chemins » entre les objets, que l'on peut ou non déformer les uns dans les autres. Dans ce cas, c'est la notion d'homotopie qui fournit le bon critère d'identification, la notion d'isomorphisme apparaissant comme une manière d'écraser (ou de « tronquer ») la richesse des diverses possibilités données pour identifier des chemins entre eux.

55 Jean-Pierre Marquis, « Mathematical forms and forms of mathematics: leaving the shores of extensional mathematics », *Synthese* 190 (2013) pp. 2141–2164.

56 L'expression est de Bertrand Toën : « Very briefly, the expression homotopical mathematics reflects a shift of paradigm in which the relation of equality relation is weakened to that of homotopy », phrase qu'accompagne la note suivante : « It is is very similar to the shift of paradigm that has appeared with the introduction of category theory, for which being equal has been replaced by being naturally isomorphic » (Bertrand Toën, « Derived algebraic geometry », *EMS Survey in Mathematical Sciences* 1 (2014), pp. 153–240.

Je cite à ce propos un des tenants de ce « changement de paradigme » en géométrie, qui va jusqu'à proposer de substituer au nom de « mathématique », trop associé aujourd'hui au paradigme structural ensembliste, celui de « mathématiques homotopiques » (dont il faut bien comprendre qu'elles ne constitueraient donc pas une forme *particulière* des « mathématiques », mais au contraire une extension)[57] :

> Tout au long de ce travail, j'ai aussi essayé de montrer que les résultats de ce mémoire ne sont pas du tout indépendants les uns des autres et qu'ils appartiennent tous au domaine de la mathématique homotopique. Les mathématiques sont fondées sur la théorie des ensembles et la notion de structure (au sens de Bourbaki), tandis que dans les mathématiques homotopiques, les ensembles sont remplacés par les types d'homotopie et les structures se trouvent alors enrichies sur la théorie homotopique des espaces [...]. La philosophie générale (qui est probablement assez ancienne et, je suppose, remonte à Bordman, Dwyer, Kan, Quillen, Thomason, Waldhausen, Vogt, ...) semble être qu'une grande partie des mathématiques possède des extensions intéressantes et utiles dans le contexte des mathématiques homotopiques.[58]

Ceci permet finalement de revenir mieux informé au débat que j'ai évoqué entre l'approche de Badiou et celle de Deleuze sur les « multiplicités ». De ce qui précède, on peut, en effet, conclure qu'il y a deux façons assez différentes d'entendre le doublet multiplicité discrète/multiplicité continue. La première consiste à y voir le motif d'un choix philosophique en termes de « fondements ». Il s'agirait alors de choisir laquelle de ces deux voies a la priorité sur l'autre. C'est ainsi que s'y rapporte Badiou en faisant valoir que le langage ensembliste porte bien plus de possibilités que ce que sa prise dans certains modèles géométriques pourrait laisser croire. Il objecte alors à Deleuze de s'être lié les mains en ne se plaçant pas immédiatement au degré le plus grand de généralité. À l'opposé, on pourrait rappeler les déclarations de René Thom sur la primauté irréductible du continu, et celles de son principal défenseur en philosophie des mathématiques : Jean Petitot.

57 Pour bien comprendre cet énoncé, il faut bien garder à l'esprit que les catégories homotopiques ne sont pas « concrètes » (c'est-à-dire qu'elles ne se laissent pas représenter fidèlement par des structures sur des ensembles).

58 Bertrand Toën, *Homotopical and Higher Categorical Structures in Algebraic Geometry*, arXiv:math/0312262, consulté le 16 mars 2020, ma traduction.

Alain Badiou et Jean Petitot considèrent tous les deux – l'un pour le critiquer et l'autre pour le défendre – que ce sont les positions de Deleuze lui-même. À mon sens, tel n'est pas le cas. Deleuze ne choisit pas un des modèles comme « meilleur » que l'autre, mais part de la dualité elle-même des formes du multiple, telle que l'évoquait Riemann. C'est même là une des bizarreries de son interprétation de Bergson, puisqu'il reverse la coupure entre deux types de multiplicités *à l'intérieur des mathématiques* – alors que Bergson cherchait plutôt à y fonder la différence irréductible entre une approche mathématisante du qualitatif (plus tard de la « durée ») et un régime de multiplicités « intensives » qui échapperait *de jure* à la mathématisation. Il y a là un trait constant de l'œuvre de Deleuze auquel on n'a pas prêté suffisamment attention : à chaque fois qu'il pose un modèle continu (et même souvent différentiel), il l'accompagne d'un autre modèle discontinu censé exprimer *la même réalité*[59]. Ceci s'accorde avec sa conception « lautmanienne » des mathématiques et une ontologie qui serait celle des idées-problèmes, et non des idées-propositions[60]. Par rapport aux questions qui nous ont intéressés dans cette étude, il s'agit d'une manière radicalement différente d'investir le rapport entre expression et ontologie en prenant acte de la labilité de la référence et en reversant l'ontologie proprement dite *dans le mécanisme même d'expression* (comme articulation d'un plan d'expression et d'un plan de contenu).

C'est ce que Deleuze lui-même a appelé une logique non de l'être, mais du sens. Sa grande thèse sur Spinoza avait d'ailleurs déjà indiqué comment cette logique peut s'exprimer métaphysiquement en reversant toute la part de l'expression *dans l'ontologie elle-même*[61]. En ce point, la position de Deleuze paraît à même d'affronter les difficultés que nous avons soulevées pour commencer. Plutôt que de vouloir résorber l'écart entre langage et être, elle s'y installe pour identifier l'ontologie au mécanisme de l'expression et en faire une véritable « logique du sens ». Plutôt que de mettre espace et pensée face à face, elle s'installe dans leur parallélisme et leur articulation mouvante, toujours reconfigurée. Plutôt que de rigidifier l'espace selon une norme absolue qui l'assignerait au rang d'objet

59 Ainsi du pli de René Thom et des fractales de Mandelbrot, de la variété de Riemann et du tapis de Sierpinski, etc., cf. David Rabouin, « Un calcul différentiel des idées ? Note sur le rapport de Deleuze aux mathématiques », *Revue Europe* 996 (avril 2012), numéro spécial Deleuze, sous la direction de E. Grossmann et P. Zaoui, pp. 140–153.

60 Gilles Deleuze, *Différence et répétition*, PUF, Paris 1968, chap. IV.

61 Gilles Deleuze, *Spinoza et le problème de l'expression*, Les Éditions de Minuit, Paris 1968.

pour la pensée, elle se donne les moyens de s'ouvrir aux multiples formes discordantes de sa variabilité locale et de son expressivité (constitutive de ce qu'est « penser »). La tension entre espace et nombre n'y apparaît plus alors comme un problème à résoudre, mais comme un problème *sous la condition duquel* nous pensons. Que ce problème résiste, à n'en plus finir, à toutes les tentatives de le réduire, y compris en mathématiques, paraît d'ailleurs le meilleur témoignage de la fécondité de ces vues.

Références

André, Yves, *Leçons de Mathématiques contemporaines à l'IRCAM*, IRCAM, France 2009, archives ouvertes: https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01359200/document (consulté le 25 janvier 2020)

Aristote, *Seconds Analytiques*. *Organon IV*, trad. fr. P. Pellegrin, GF, Paris 2005

Badiou, Alain, *Court traité d'ontologie transitoire*, Seuil, Paris 1998

— *Deleuze : La clameur de l'être*, Hachette Littératures, Paris 1997

— *Le concept de modèle*, Maspéro, Paris 1969

— *L'Être et l'Événement*, Seuil, Paris 1988

— *l'Immanence des vérités*, Fayard, Paris 2018

— « Un, multiple, multiplicité(s) », *Futur Antérieur* 43 (avril 1998)

Bélanger, M. et J.-P. Marquis, « Menger and Nöbeling on pointless topology », *Logic and Logical Philosophy* 22 (2/2013), pp. 145–165.

Bell, J. L., *Toposes and local set theories: An introduction*, Oxford Logic, Guides: 14, Clarendon Press, Oxford 1988

— « From Absolute to Local Mathematics », *Synthese* 69 (3/1986), pp. 409–426

— « Tous ensemble ? Sur le rapport d'Alain Badiou aux mathématiques », dans *Autour d'Alain Badiou*, dirs. F. Tarby et I. Vodoz, pp. 81–102, Germina, Paris 2011

Baire, René/Borel, Emile, *Lettres de René Baire à Émile Borel, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 11 (1990), pp. 33–120

Borrelli, Vincent, « Gnash, un tore plat ! », *Images des Mathématiques*, CNRS, 2012, disponible à: https://images.math.cnrs.fr/Gnash-un-tore-plat.html (consulté le 15 mars 2020)

Deleuze, Gilles, *Différence et répétition*, PUF, Paris 1968

— *Spinoza et le problème de l'expression*, Les Éditions de Minuit, Paris 1968

Desanti, Jean-Toussaint, « Quelques remarques à propos de l'ontologie intrinsèque d'Alain Badiou », *Les Temps Modernes* 45 (526/1990), pp. 61–71

Euclide, *Les Éléments*, trad. fr. Bernard Vitrac, PUF, Paris, 1990-2001

Rabouin, David, « Objet, relation, transcendantal. Une introduction au formalisme de *Logiques des mondes* » dans *Autour de « Logiques des mondes »*, dirs. D. Rabouin, O. Feltham et L. Lincoln, Editions des Archives contemporaines, Paris 2011

Ferreirós, José, *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1999

Gispert, Hélène, « La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 : Baire, Borel, Lebesgue… et tous les autres », *Revue d'histoire des mathématiques* 1 (1/1995), pp. 39–81

Grothendieck, Alexander, *Récoltes et Semailles,* disponible à: https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/recoltesetc.php

Guitart, René, « Caractère global et caractère local de la vérité », conférence donnée à la Lysimaque, 23 septembre 1990, disponible sur le site de l'auteur : http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr/preprints.html

Halimi, Brice, « Sets and Descent », dans *Objectivity, Realism and Proof*, dirs. A. Sereni & F. Boccuni, pp. 123–142, Springer, Basel 2016

Kant, Emmanuel, *Correspondance*, Vrin, Paris 1991

Kantor, Jean-Michel et Loren Graham, *Au nom de l'infini*, Éditions Belin, Paris 2010

Klein, Jacob, « *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra* (1934/1936) », dans *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Abteilung B: Studien. Band 3, Erstes Heft, pp. 18–105, Springer, Berlin 1934

— *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*, Zweites Heft, pp. 122–235, Springer, Berlin 1936

Mac Lane, Saunders et Ieke Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic. A First introduction in topos theory*, Springer-Verlag, New York 1992

Marquis, Jean-Pierre, « Mathematical forms and forms of mathematics: leaving the shores of extensional mathematics », *Synthese* 190 (2013) pp. 2141–2164

Niccolò Guicciardini, *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts 2009

Putnam, Hilary, « Langage et réalité [1975] », dans *Textes clés de philosophie des sciences, Vol. 2*, dirs. S. Laugier et P. Wagner, pp. 61–104, Vrin, Paris 2004

— « Explication et référence » dans *De Vienne à Cambridge*, dir. P. Jacob, Gallimard, Paris 1980, pp. 337–365

— « What is Mathematical Truth? », dans Hilary Putnam, *Mathematics, Matter and Method. Philosophical Papers*, vol. 1, pp. 60–78, Cambridge University Press, Cambridge 1975

Rabouin, David, « Un calcul différentiel des idées ? Note sur le rapport de Deleuze aux mathématiques », *Revue Europe* 996 (avril 2012), pp.140–153

Roy, Jean-Michel, *Écrits de logique philosophique*, PUF, Paris 1989, pp. 203–218

Riemann, B., « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie », *Œuvres mathématiques*, trad. Laugel, Gauthier-Villars, Paris 1898

Russell, Bertrand, « On denoting », *Mind* 14 (56/1905), pp. 479–493

Stewart Shapiro, *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*, Oxford University Press, Oxford 1991

Stevin, Simon, *Arithmétique*, (1585) », dans *The Principal Works of Simon Stevin*, dirs. E. Crone, E.J. Dijksterhuis, R.J. Forbes et al., 6 vol., t. 2 B, N. V. Swets & Zeitlinger, Amsterdam 1955–1966

Toën, Bertrand, « Derived algebraic geometry », *EMS Survey in Mathematical Sciences* 1 (2014), pp. 153–240

— *Homotopical and Higher Categorical Structures in Algebraic Geometry*, arXiv:-math/0312262 (consulté le 16 mars 2020)

Veilahti, Antti, « Alain Badiou's Mistake. Two Postulates of Dialectic Materialism », arXiv: 1301.1203, displonible à: https://arxiv.org/abs/1301.1203 (consulté le 15 mars 2020)

Wilson, Mark, « Frege: The Royal Road From Geometry », *Noûs* 26 (2/1992), pp. 149–180.