

Apolonijeva krožnica

↓↓↓

MARJAN JERMAN

→

Uvod

Prispevek začnimo z navidez nepovezanima naloga-
ma.

- (1) Predstavljajmo si, da sedimo v čolnu. Radi bi prestregli ladjo, ki pluje naravnost s konstantno hitrostjo v_1 . Kam naj usmerimo čoln, da bomo po ravni poti s konstantno hitrostjo v_2 v enakem času prišli na isti položaj kot ladja?
- (2) S pomočjo šestila in ravnila načrtaj trikotnik z danima osnovnico c in težiščnico t_c na osnovnico ter razmerjem krakov $b : a$.

Prvo nalogo lahko prevedemo v geometrijski jezik takole: Do srečanja po pretečenem času t bo ladja opravila pot $v_1 t$, naš čoln pa pot $v_2 t$. Če označimo začetni položaj ladje z A , začetni položaj čolna z B , točko srečanja pa s C , velja

$$\blacksquare AC : BC = v_1 t : v_2 t = v_1 : v_2.$$

Recimo, da je $\mathcal{L}$ množica točk, katerih oddaljenost od točk A in B je v razmerju $v_1 : v_2$. Potem je točka C presečišče premice skozi A v smeri premikanja ladje in množice $\mathcal{L}$. Tako dobimo točko, kamor moramo usmeriti čoln.

Tudi o drugi nalogi lahko premišljujemo takole: Naj bo $AB = c$ osnovnica trikotnika ABC in T njeno razpolovišče. Množica $\mathcal{L}$ naj bo množica vseh takih točk C' , za katere velja $AC' : BC' = b : a$. Potem je točka C presečišče množice $\mathcal{L}$ ter krožnice s središčem T in polmerom t_c .

Če je razmerje $b : a$ enako $1 : 1$, množico $\mathcal{L}$ že poznamo. Tvorijo jo točke, ki so enako oddaljene od obeh točk A in B . Torej, množica $\mathcal{L}$ je simetrala daljice AB .

V nadaljevanju bomo pokazali, da je v vseh ostalih primerih množica $\mathcal{L}$ krožnica. Imenujemo jo po njenem izumitelju, starogrškem matematiku in astronomu Apoloniju iz Pergeja, starodavnega mesta, ki

danes leži na jugozahodni obali Turčije. Apolonij je živel približno med leti 265 in 170 pred našim šte-
tjem in je zelo znan po študiju presekov stožca z ravninami. Na ta način je definiral elipse, hiperbole in parabole. Proslavil se je tudi s problemom načrtovanja krožnice, ki se dotika danih treh krožnic.

Običajno krožnico definiramo kot množico točk, ki so za polmer r oddaljene od njenega središča S . Pokazali bomo, da lahko krožnico definiramo tudi drugače:

Za dani različni točki A in B , ki ju imenujemo gorišči, krožnico tvorijo take točke C , za katere je razmerje oddaljenosti $AC : BC \neq 1 : 1$ fiksno.

Simetrali notranjega in zunanjega kota

Na poti do Apolonijeve krožnice bomo izpeljali nekaj pomožnih rezultatov iz geometrije, ki so zanimivi in pomembni že sami zase.

Naj bo ABC običajno označen neenakokraki trikotnik, $b = AC$, $a = BC$ in

$$\blacksquare b : a = \lambda \neq 1.$$

Z y označimo kot pri C , z $y' = \pi - y$ pa njegov zunanji kot.

Najprej izračunajmo, kakšen kot oklepata simetrali notranjega in zunanjega kota. Ta kot je enak

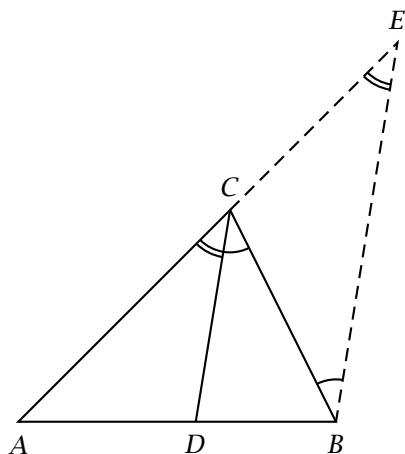
$$\blacksquare \frac{y}{2} + \frac{y'}{2} = \frac{y}{2} + \frac{\pi - y}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Torej: *simetrali notranjega in zunanjega kota oklepata pravi kot.*

Poglejmo si, kje simetrala kota y seka osnovnico AB (slika 1). To presečno točko označimo z D .

Stranico AC podaljšajmo v poltrak p_{AC} z začetkom v točki A . Narišimo še premico q , ki vsebuje točko B in je vzporedna simetrali kota pri C . Točka E naj bo presečišče poltraka p_{AC} in premice q . Ker sta kota ob prečnici BC enaka, velja

$$\blacksquare \angle BCD = \angle CBE = \frac{y}{2}.$$



SLIKA 1.

Razmerje, v katerem simetrala kota pri C deli osnovnico AB.

Prav tako sta enaka kota ob prečnici AE:

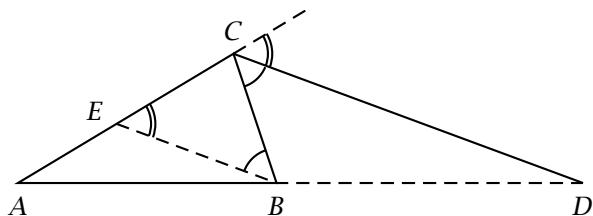
$$\angle ACD = \angle AEB = \frac{\gamma}{2}.$$

Zato je trikotnik BEC enakokrak in velja $BC = EC$. Po Talesovem izreku o sorazmerjih je tako

$$AD : DB = AC : CE = AC : BC = \lambda.$$

Tudi Tales je bil starogrški matematik, ki je živel na današnji zahodni obali Turčije v Miletu, še dobrih tristo let pred Apolonijem.

Tako smo dokazali, da *simetrala kota razdeli osnovnico v razmerju dolžin krakov*.



SLIKA 2.

Razmerje, v katerem simetrala zunanjega kota pri C deli osilko osnovnice AB.

Poglejmo si še podobno vprašanje za simetralo zunanjega kota (slika 2).

Kot pri C ima dva suplementarna kota. Ker trikotnik ABC ni enakokrak, simetrala notranjega kota pri

C ne vsebuje višine. Oba zunanja kota pri C imata skupno simetralo, ki tako ni vzporedna z osnovnico AB in jo zato seka. Presečno točko označimo z D. Točka D leži na levem bregu premice AC (ko je $b < a$) ali na desnem bregu premice BC (ko je $b > a$). Obravnavajmo le primer, ko je $b > a$. Primer $b < a$ obravnavamo na enak način. Simetrali DC potegnimo vzporednico skozi točko B, ki seka krak AC v točki E.

Enako kot prej, zaradi kotov ob prečnicah BC in EC velja

$$\angle EBC = \angle BCD = \frac{\gamma'}{2} = \angle BEC,$$

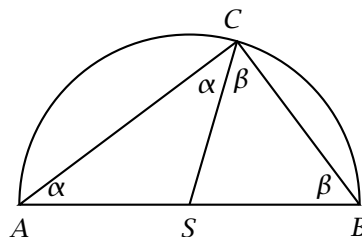
trikotnik EBC je zato enakokrak in $EC = BC$. Zopet izrek o sorazmerjih pove, da je

$$AD : BD = AC : EC = AC : BC = \lambda.$$

Razmerje je presenetljivo enako razmerju, ki smo ga dobili v primeru simetrale notranjega kota, le da tokrat točka D ne leži na osnovnici AB.

Talesov izrek in njegov obrat

Verjetno večina bralcev že pozna Talesov izrek, ki pravi, da je kot nad premerom kroga pravi. Zaradi samozadostnosti prispevka ga dokažimo še enkrat.



SLIKA 3.

Talesov izrek

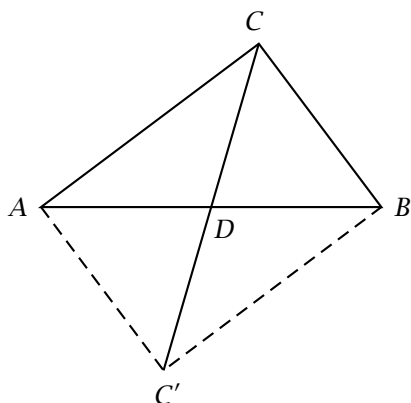
Naj bo trikotnik ABC včrtan v krog s središčem S in premerom AB. Trikotnika ACS in BCS sta enakokraka, zato je

$$\alpha = \angle SAC = \angle ACS \quad \text{in} \quad \beta = \angle SBC = \angle SCB.$$

Vsota kotov v trikotniku ABC je enaka iztegnjenemu kotu, zato je

$$\pi = \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \alpha + \beta + (\alpha + \beta)$$





SLIKA 4.

Obrat Talesovega izreka

in je

$$\angle BCA = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

kar smo želeli pokazati.

Zanimivo je, da velja tudi obrat Talesovega izreka: Naj bo kot pri oglišču C nad stranico AB pravi. Pokažimo, da C leži na obodu kroga s premerom AB .

V točkah A in B potegnimo pravokotnici na stranici AC in BC , tako da dobimo pravokotnik $AC'BC$. Diagonali pravokotnika sta enako dolgi in se razpolavljata, zato daljica CC' razreže stranico AB na dva enaka dela $AD = DB = DC = DC'$. Točka D je tako središče trikotniku ABC očrtanega kroga.

Apolonijeva krožnica

Najprej pokažimo, da vse točke C , ki zadoščajo pogoju

$$AC : BC = \lambda \neq 1$$

za izbrani različni točki A in B , ležijo na neki krožnici.

Poiščimo najprej kakšno točko C , ki zadošča gornjemu pogoju. Krožnica s središčem B in polmerom BC mora sekati krožnico s središčem A in polmerom $\lambda \cdot BC$. To je res, kadar obstaja trikotnik ABC , torej, ko velja trikotniška neenakost $AC + BC = BC(\lambda + 1) > AB$. Če točko C izberemo dovolj daleč od točke B ,

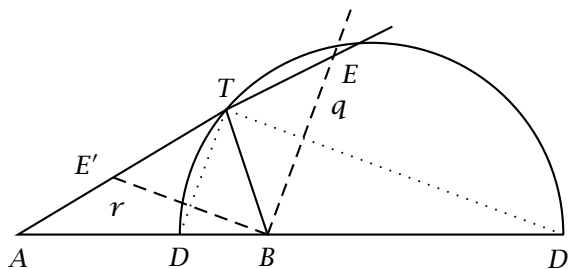
lahko zadostimo zadnjemu pogoju in tako najdemo točko C , za katero velja $AC : BC = \lambda$.

Narišimo trikotnik ABC . Z D označimo presek simetrale notranjega kota pri C z nosilko stranice AB , z D' pa presečišče simetrale zunanjega kota pri C z nosilko AB . Simetrali notranjega in zunanjega kota pri C oklepata pravi kot. Po obratu Talesovega izreka tako točka C leži na krožnici s premerom DD' .

Naj bo C' še kakšna druga točka, za katero velja

$$AC' : BC' = \lambda \neq 1.$$

Pokazali smo, da simetrali notranjega in zunanjega kota pri C' trikotnika ABC' razdelita osnovnico AB v razmerju krakov $AC' : BC'$, zato simetrali notranjega in zunanjega kota pri C' ponovno sekata nosilko osnovnice AB v točkah D in D' , ki smo ju že dobili s simetralama kotov pri C v trikotniku ABC . Zato vse točke C , za katere velja $AC : BC = \lambda \neq 1$, ležijo na obodu kroga s premerom DD' .



SLIKA 5.

Za vse točke na krožnici s premerom DD' velja $AT : BT = \lambda$.

Pokažimo še, da velja tudi obratno. Izberimo si razmerje $\lambda \neq 1$. Na daljici AB izberimo točko D , tako da bo $AD : DB = \lambda$, na nosilki daljice AB pa točko D' , ki ne leži na AB , da bo tudi $AD' : D'B = \lambda$. Narišimo krožnico s premerom DD' in na njej izberimo poljubno točko T . Kot $\angle DTD'$ je po Talesovem izreku pravi. Pokazati moramo, da velja $AT : BT = \lambda$.

Narišimo trikotnik ABT . Skozi B potegnimo vzporednico q premici DT , ki seka poltrak p_{AT} v točki E . Prav tako skozi B potegnimo vzporednico r premici $D'T$, ki seka poltrak p_{AT} v točki E' . Ker imata kota $\angle E'BE$ in $\angle DTD'$ vzporedne krake, sta enaka in je tudi kot $\angle E'BE$ pravi.

Po Talesovem izreku o sorazmerjih je zaradi vzporednosti premice q in daljice DT

$$AT : TE = AD : DB = \lambda$$

in na enak način zaradi vzporednosti premice r in daljice $D'T$

$$\blacksquare TA : TE' = D'A : D'B = \lambda.$$

Zato je $TE = TE'$ in je T razpolovišče daljice EE' .

Pokazali smo, da je kot $\angle E'BE$ pravi, zato po obratu Talesovega izreka točka B leži na krogu s premerom EE' in središčem T ter velja

$$\blacksquare TB = TE = TE'.$$

S tem smo dokaz končali. Po pravkar dokazanem namreč velja

$$\blacksquare TA : TB = TA : TE = \lambda.$$

Tako smo dobili iskano alternativno definicijo krožnice: *Apolonijeva krožnica je množica točk C , ki so od gorišč A in B oddaljene v predpisanem razmerju $AC : BC = \lambda \neq 1$.*

Zaključek

Sedaj lahko rešimo problem prestrežanja ladje, ki smo ga zastavili na začetku sestavka. Recimo, da se v nekem trenutku nahajamo v točki B , ladja pa v točki A . Ladjo bomo lahko prestregli, če bo ob nekem času t obstajal trikotnik ABC s krakoma $AC = v_1 t$ in $BC = v_2 t$. Vse takšne točke C ležijo na Apolonijevi krožnici z goriščema A in B in razmerjem $v_1 : v_2$. Prav tako mora točka prestrežanja ležati na premici, ki jo določa tir plovbe ladje. Zato moramo čoln usmeriti v točko, ki je presek nosilke tira ladje in Apolonijeve krožnice.

Prav tako znamo narisati trikotnik s podatki c , t_c in $b : a$. Najprej narišemo osnovnico $AB = c$ in njeno razpolovišče označimo z S . Potem je točka C presek krožnice s središčem S in polmerom t_c ter Apolonijeve krožnice z goriščema A in B in razmerjem $b : a$.

Radovedni bralec lahko s pridobljenim znanjem skuša narisati paralelogram z danima stranicama a in b in razmerjem diagonal $e : f$.

× × ×

www.presek.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

Prometna ureditev Zelenega gaja

↓↓↓

NIKA NOVAK

→ Prebivalci ulice *Zeleni gaj*, ki je bila del cone z omejitvijo hitrosti 30 km/h, so v času vsakodnevnih prometnih konic opazili, da se je promet v sicer mirnem okolju povečal. Nekateri so si po njihovi ulici skrajšali pot, drugi pa so se le skušali izogniti čakanju v koloni. Ker pa se je večini mudilo, omejitve hitrosti niso upoštevali (ali pa je sploh niso opazili). Tako je prej mirna cesta postala nevaren poligon za pešce, kolesarje in otroke. Zato so se prebivalci odločili, da se obrnejo na občino s prošnjo za postavitev hitrostnih ovir.

Občinski uradniki so prošnjo proučili, nato pa policistom naročili, da en teden merijo hitrost vseh vozil, ki se peljejo po ulici *Zeleni gaj*. Ko so prejeli vse meritve, so prošnjo zavrnil z obrazložitvijo, da je povprečna hitrost enaka 35 km/h, kar ni veliko odstopanje od omejitve.

Na kakšen način bi se pobudniki umiritve prometa lahko pritožili na odločitev občine, ko so prejeli tabelo izmerjenih hitrosti (tabela 1)?

Iz danih podatkov izračunaj povprečno vrednost, mediano in modus. Izračunaj še delež voznikov, ki se držijo omejitve.

