Janez Šter

Zbirka rešenih nalog iz Matematike 4 za študente fizike

Julij 2021

Predgovor

V tej zbirki so zbrane naloge z rešitvami s preverjanj znanja pri predmetu Matematika 4 za 2. letnik univerzitetnega študija 1. stopnje Fizika na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Izpitne naloge so iz let, ko sem bil asistent pri tem predmetu, in sicer iz študijskega leta 2012/13 ter od leta 2016/17 do leta 2019/20. Iz leta 2012/13 so zbrane le naloge enega izpitnega roka, iz leta 2017/18 naloge iz treh izpitnih rokov/kolokvijev, iz preostalih let pa so zbrane naloge vseh petih izpitov/kolokvijev za vsako leto. Skupaj torej zbirka vsebuje 19 izpitov in kolokvijev.

Vsem nalogam so priložene podrobne rešitve. To velja tudi za tiste naloge, ki jih v izpitih smatramo za "rutinske". Zato je ta zbirka primerna tako za dodatno pripravo pred preverjanji znanja kot tudi za učenje samih postopkov reševanja nalog. Seveda to slednje velja le do določene mere – osnova za razumevanje snovi je vselej snov predavanj ter vaj pri predmetu.

Notacija, uporabljena v rešitvah nalog, je večinoma enotna. Kljub temu je nekaj minimalnih razlik, ki pa bralca ne bi smele zmesti. Te razlike so predvsem posledica malenkost drugačnega dela in označevanja pri vajah za ta predmet v različnih letih. Nekaj je tudi vsebinskih razlik v samih rešitvah nalog. Morda najbolj očiten primer so integrali, ki se računajo s pomočjo kompleksne integracije (običajno po robu polkroga v kompleksni ravnini). Tu je "integral po polkrožnici", ki nastopi v rešitvi teh nalog, v nekaterih nalogah eksplicitno ocenjen (z vsemi vmesnimi koraki), medtem kot je v določenih rešitvah namenoma izpuščen in se v rešitvi namesto tega skličemo na določen izrek, ki je bil dokazan tisto leto na predavanjih ali vajah.

Ljubljana, julij 2021 — Janez Šter

Kazalo

2. izpit 2012/13

1. Poišči funkcijo $u(x,t) : [0,\pi] \times [0,\infty)$, ki zadošča

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 17e^{-t} \sin 2x$$

s pogoji $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = 2\sin 2x$ in $u_t(x,0) = 0$.

Rešitev: Preden uporabimo metodo separacije spremenljivk, moramo odpraviti člen $17e^{-t}\sin 2x$ na desni strani. Poskusimo z uvedbo nove spremenljivke

$$v(x,t) = u(x,t) + ae^{-t}\sin 2x$$

za neznano konstanto a. Ker je $v(x,t) = v(\pi,t) = 0$, bo takšna uvedba nove spremenljivke ohranila homogena robna pogoja. Ko odvajamo, dobimo $u_{tt} = v_{tt} - ae^{-t}\sin 2x$ in $u_{xx} = v_{xx} + 4ae^{-t}\sin 2x$, torej iz začetne enačbe dobimo

$$v_{tt} - ae^{-t}\sin 2x = 4v_{xx} + 16ae^{-t}\sin 2x + 17e^{-t}\sin 2x.$$

Ker želimo, da se odvečni trije členi krajšajo, postavimo $a = -1$. Parcialna diferencialna enačba za v je torej $v_{tt} = 4v_{xx}$, robni pogoji pa so $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$, $v(x,0) = u(x,0) - \sin 2x = \sin 2x$ in $v_t(x,0) = u_t(x,0) + \sin 2x = \sin 2x$.

Od tu dalje uporabimo običajni postopek. V enačbo vstavimo $v = X(x)T(t)$. Dobimo $XT'' = 4X''T$, torej $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{4T} = \lambda$, homogena robna pogoja $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$ pa dasta $X(0) = X(\pi) = 0$.

Najprej se lotimo enačbe $\frac{X''}{X} = \lambda$. Pri danih pogojih $X(0) = X(\pi) = 0$ ima ta enačba netrivialne rešitve le pri $\lambda < 0$, kjer dobimo $X = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$. Pogoj $X(0) = 0$ nam da $A = 0$, pogoj $X(\pi) = 0$ pa $\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Dobimo $\lambda = -n^2$. Ko postavimo še $B = 1$, dobimo rešitve $X_n = \sin(nx)$ in $\lambda_n = -n^2$.

Rešimo še enačbo za T, ki je $\frac{T''}{4T} = \lambda$. Ko upoštevamo $\lambda = -n^2$, dobimo enačbo $T'' = -4n^2T$, ki ima splošno rešitev $T_n = A_n\cos(2nt) + B_n\sin(2nt)$. Zdaj vstavimo dobljene rešitve in dobimo

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_nT_n = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(2nt) + B_n\sin(2nt))\sin nx.$$

Ko odvajamo, dobimo

$$v_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-2nA_n\sin(2nt) + 2nB_n\cos(2nt))\sin nx.$$

Vstavimo še začetna pogoja in dobimo

$$\sin 2x = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx \quad \text{in} \quad \sin 2x = v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx.$$

Odtod sledi $A_n = B_n = 0$ za $n \neq 2$, $A_2 = 1$ in $B_2 = \frac{1}{4}$. Dobimo $v = (\cos 4t + \frac{1}{4}\sin 4t)\sin 2x$ in odtod

$$u = v + e^{-t}\sin 2x = \left(e^{-t} + \cos 4t + \frac{\sin 4t}{4}\right)\sin 2x.$$

2. V kompleksni ravnini sta dana kroga $K_1 = \{z \in \mathbb{C},\ |z - \frac{1}{2}| < 1\}$ in $K_2 = \{z \in \mathbb{C},\ |z + \frac{1}{2}| < 1\}$.

   (a) Poišči konformno preslikavo, ki $K_1 \cap K_2$ preslika na zgornjo polravnino $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$.

   (b) Poišči konformno preslikavo, ki $K_1 \cap K_2$ preslika na $K_1 \setminus K_2$.

Rešitev: (a) Uporabimo Möbiusovo transformacijo f_1, kjer izberemo npr. $f_1 : -\frac{i\sqrt{3}}{2} \mapsto 0$, $\frac{1}{2} \mapsto 1$, $\frac{i\sqrt{3}}{2} \mapsto \infty$. Dobimo

$$f_1(z) = \frac{z + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{z - \frac{i\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}.$$

Pri tem se rob kroga K_2 preslika v abscisno os, rob kroga K_1 pa v neko premico, ki gre skozi koordinatno izhodišče. Kot med obema premicama je enak kotu med krožnicama, ta pa je $\frac{2\pi}{3}$. Ob upoštevanju orientacije vidimo, da torej preslikava f_1 preslika $K_1 \cap K_2$ na območje

$$\{z = re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < \frac{2\pi}{3}\}.$$

To območje raztegnemo v polravnino $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ s preslikavo $f_2 : z \mapsto z^{\frac{3}{2}}$. Iskana funkcija je torej kompozitum $f = f_2 \circ f_1$.

(b) Ker je $f_1(K_1 \setminus K_2) = \{z = re^{i\varphi},\ \frac{5\pi}{3} < \varphi < 2\pi\}$, potrebujemo le preslikavo

$$f_3 : \{z = re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < \frac{2\pi}{3}\} \to \{z = re^{i\varphi},\ \frac{5\pi}{3} < \varphi < 2\pi\}.$$

Ta preslikava je $f_3(z) = e^{-\frac{\pi i}{3}} z^{\frac{1}{2}}$. Iskana preslikava pa je potem $g = f_1^{-1} \circ f_3 \circ f_1$.

3. Poišči vsaj eno netrivialno rešitev diferencialne enačbe

$$4z^2 y'' - 4z^2 y' + (1 - 2z)y = 0$$

na zarezani okolici točke $z = 0$.

Rešitev: V enačbo vstavimo $y = z^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+r}$, $c_0 \neq 0$. Dobimo

$$4z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n z^{n+r-2} - 4z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n z^{n+r-1} + (1-2z) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+r} = 0.$$

Enačbo delimo z z^r in preuredimo. Dobimo

$$4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n z^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+1} = 0.$$

Primerjamo koeficiente pri posameznih potencah z. Pri z^0 dobimo

$$4r(r-1)c_0 + c_0 = 0,$$

pri z^k za $k \geq 1$ pa

$$4(k+r)(k+r-1)c_k - 4(k-1+r)c_{k-1} + c_k - 2c_{k-1} = 0.$$

Iz prve enačbe dobimo $4r^2 - 4r + 1 = 0$, od koder sledi $r = \frac{1}{2}$. Ko to vstavimo v drugo enačbo, dobimo

$$4(k + \tfrac{1}{2})(k - \tfrac{1}{2})c_k - 4(k - \tfrac{1}{2})c_{k-1} + c_k - 2c_{k-1} = 0.$$

Ko izrazimo c_k in izraz poenostavimo, dobimo $c_k = \frac{c_{k-1}}{k}$. Odtod lahko izračunamo nekaj členov:

$$c_1 = \frac{c_0}{1}, \quad c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{2}, \quad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{3 \cdot 2}.$$

Vidimo, da je splošni člen $c_k = \frac{c_0}{k!}$. Dobimo rešitev

$$y = z^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{n!} z^n = c_0 z^{\frac{1}{2}} e^z.$$

4. (a) Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$ poljubna funkcija in $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokaži, da velja:

$$(e^{i\alpha x} * f)(x) = \sqrt{2\pi} e^{i\alpha x} \widehat{f}(\alpha)$$

(b) Izračunaj $(\cos x) * (e^{-x^2})$.

Rešitev: (a) Po definiciji konvolucije in Fourierove transformacije je

$$(e^{i\alpha x} * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(x-t)} dt = e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt = \sqrt{2\pi} e^{i\alpha x} \widehat{f}(\alpha).$$

(b) Upoštevamo $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ in $\widehat{e^{-x^2}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{4}}$ in dobimo

$$\begin{aligned}
\cos x * e^{-x^2} &= \tfrac{1}{2} e^{ix} * e^{-x^2} + \tfrac{1}{2} e^{-ix} * e^{-x^2} = \\
&= \tfrac{1}{2} e^{ix} \widehat{e^{-x^2}}(1) + \tfrac{1}{2} e^{-ix} \widehat{e^{-x^2}}(-1) = \\
&= \tfrac{1}{2} e^{ix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}} + \tfrac{1}{2} e^{-ix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}} = \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}} \cos x.
\end{aligned}$$

1. kolokvij 2016/17

1. Razvij funkcijo
$$f(z) = \frac{2}{2z^2 - 2z + 1}$$
v Laurentovo vrsto na območju $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rešitev: S substitucijo $w = \frac{1}{z}$ dobimo $f(z) = \frac{2w^2}{w^2-2w+2}$. Ulomek $\frac{2}{w^2-2w+2}$ razcepimo na parcialne ulomke in dobimo
$$f(z) = w^2\left(\frac{i}{w-1+i} + \frac{-i}{w-1-i}\right) = w^2\left(\frac{\frac{1-i}{2}}{1-\frac{1+i}{2}\cdot w} + \frac{\frac{1+i}{2}}{1-\frac{1-i}{2}\cdot w}\right).$$
Dobljena ulomka zapišemo kot vsoto geometrijske vrste. Ko združimo člene, uredimo po potencah w in nazaj pišemo $w = z^{-1}$, dobimo končni rezultat
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-i}{2}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n + \frac{1+i}{2}\left(\frac{1-i}{2}\right)^n\right)z^{-n-2}.$$
Dobljena vsota konvergira, kjer konvergirata obe geometrijski vrsti, to pa je za $|\frac{1\pm i}{2}\cdot w| < 1$, kar je ekvivalentno $|z| > |\frac{1\pm i}{2}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Dana je funkcija
$$f(z) = \frac{1}{\sin(e^z)}.$$
   (a) Poišči vse singularnosti funkcije f.

   (b) Vse singularnosti funkcije f so poli prve stopnje (tega ni potrebno dokazovati). Izračunaj residuum funkcije f v vsakem izmed teh polov.

Rešitev: (a) Singularnosti so v točkah, kjer je $e^z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.

Ločimo dva primera. Za $k > 0$ lahko pišemo $k\pi = e^{\ln(k\pi)}$. Dobimo $e^z = e^{\ln(k\pi)}$, torej $z = \ln(k\pi) + 2l\pi i$, $l \in \mathbb{Z}$.

Za $k < 0$ pišemo $k\pi = e^{\ln(-k\pi)+\pi i}$. Dobimo $e^z = e^{\ln(-k\pi)+\pi i}$, torej $z = \ln(-k\pi) + \pi i + 2l\pi i$, $l \in \mathbb{Z}$.

Ko združimo obe družini rešitev, dobimo točno rešitve $z = \ln(k\pi) + l\pi i$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$.

(b) Označimo singularnosti $z_{k,l} = \ln(k\pi) + l\pi i$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}$. Ker vemo, da je vsaka singularnost pol stopnje 1, je residuum ravno
$$\operatorname{Res}(f, z_{k,l}) = \lim_{z\to z_{k,l}}(z - z_{k,l})f(z).$$
Limito izračunamo z L'Hospitalovim pravilom. Dobimo $\operatorname{Res}(f, z_{k,l}) = \frac{1}{e^z\cos(e^z)}\Big|_{z=z_{k,l}}$. Upoštevamo še $e^{z_{k,l}} = e^{\ln(k\pi)+l\pi i} = (-1)^l k\pi$ in dobimo
$$\operatorname{Res}(f, z_{k,l}) = \frac{1}{(-1)^l k\pi\cos((-1)^l k\pi)} = \frac{(-1)^{k+l}}{k\pi}.$$

3. Izračunaj integral
$$\oint_{|z|=2}\frac{\sin(\pi z)}{z^2(z^2+5z+4)}\,\mathrm{d}z.$$
Krožnica naj bo orientirana pozitivno.

Rešitev: Naj bo $f(z)$ funkcija v integralu. Ko razcepimo imenovalec, dobimo
$$f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z^2(z+1)(z+4)}.$$
Znotraj krožnice $|z| = 2$ ima funkcija f singularnosti $z = 0$ in $z = -1$.

Singularnost $z=0$ je pol stopnje 2, torej

$$\mathrm{Res}(f,0) = \left(\frac{\sin(\pi z)}{(z+1)(z+4)}\right)'(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Singularnost $z=-1$ je pol stopnje 1, zato

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{\sin(\pi z)}{z^2(z+4)}\Big|_{z=-1} = 0.$$

Torej je integral enak

$$2\pi i(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-1)) = \frac{\pi^2 i}{2}.$$

4. Naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takšna holomorfna funkcija, da je tudi funkcija g s predpisom $g(z) = f(z + \overline{z})$ holomorfna. Dokaži, da je f konstantna.

   Rešitev: Za vsak $t \in \mathbb{R}$ je $g(ti) = f(ti + \overline{ti}) = f(ti - ti) = f(0)$. Torej je g konstantna na množici $\mathbb{R}i$. Ker je g holomorfna in ima ta množica stekališče, je po principu identičnosti g konstantna na $\mathbb{C}$ (to je, $g(z) = f(0)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$).

   Odtod sledi, da za vsak $t \in \mathbb{R}$ velja $f(t) = f(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) = f(\frac{t}{2} + \frac{\overline{t}}{2}) = g(\frac{t}{2}) = f(0)$. Torej je tudi funkcija f konstantna na množici s stekališčem $\mathbb{R}$ in je zato konstantna na $\mathbb{C}$.

1. izpit 2016/17

1. Naj bosta $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takšni harmonični funkciji, da je tudi funkcija $u^2 + v^2$ harmonična. Pokaži, da sta u in v konstantni.

   Rešitev: Označimo $w = u^2+v^2$ in odvajamo: $w_x = 2uu_x+2vv_x$ in $w_{xx} = 2u_x^2+2uu_{xx}+2v_x^2+2vv_{xx}$, simetrično pa tudi $w_{yy} = 2u_y^2 + 2uu_{yy} + 2v_y^2 + 2vv_{yy}$. Ker je w harmonična, je $w_{xx} + w_{yy} = 0$, torej

   $$2u_x^2 + 2uu_{xx} + 2v_x^2 + 2vv_{xx} + 2u_y^2 + 2uu_{yy} + 2v_y^2 + 2vv_{yy} = 0.$$

   Upoštevamo še $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in $v_{xx} + v_{yy} = 0$ in dobimo

   $$2(u_x^2 + v_x^2 + u_y^2 + v_y^2) = 0.$$

   Ker so vsi štirje členi v oklepaju nenegativni, sledi $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$. Odtod pa sledi, da sta u in v konstantni.

2. Poišči holomorfno funkcijo $y(z)$ v okolici točke 0, ki zadošča kompleksni diferencialni enačbi

   $$y'' - 3z^2y' - 6zy = 0$$

   in začetnim pogojem $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Rešitev izrazi z elementarnimi funkcijami.

   Rešitev: Pišimo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Iz pogoja $y(0) = 1$ sledi $c_0 = 1$, iz pogoja $y'(0) = 0$ pa $c_1 = 0$. Ko y odvajamo in vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo

   $$\sum_{n\geq 2} c_n n(n-1)z^{n-2} - 3z^2 \sum_{n\geq 1} c_n n z^{n-1} - 6z \sum_{n\geq 0} c_n z^n = 0.$$

   Primerjamo koeficiente pri posameznih potencah z. Koeficient pred z^0 je $2c_2 = 0$, kar nam da $c_2 = 0$. Za $k \geq 1$ pa je koeficient pred z^k enak $c_{k+2}(k+2)(k+1) - 3c_{k-1}(k-1) - 6c_{k-1} = 0$, od koder dobimo rekurzivno zvezo

   $$c_{k+2} = \frac{3c_{k-1}(k-1) + 6c_{k-1}}{(k+2)(k+1)} = \frac{3c_{k-1}(k+1)}{(k+2)(k+1)} = \frac{3c_{k-1}}{k+2}.$$

   Iz te zveze takoj sledi $c_{3n+2} = 0$ za vsak n (saj je $c_2 = 0$) in $c_{3n+1} = 0$ (saj je $c_1 = 0$). Koeficienti oblike c_{3n} pa so $c_3 = c_0 = 1$, $c_6 = \frac{3c_3}{6} = \frac{c_0}{2} = \frac{1}{2}$, $c_9 = \frac{3c_6}{9} = \frac{c_0}{2\cdot 3} = \frac{1}{3!}$ in v splošnem $c_{3n} = \frac{1}{n!}$. Torej dobimo

   $$y = 1 + z^3 + \frac{z^6}{2!} + \frac{z^9}{3!} + \cdots = e^{z^3}.$$

3. Izračunaj integral

   $$\oint_\gamma \frac{\bar{z}^2 e^z}{3z+2}\, dz,$$

   kjer je γ pozitivno orientirana krožnica $|z| = 1$. (Nasvet: poišči holomorfno funkcijo $f(z)$, ki se na krožnici γ ujema s funkcijo v integralu.)

   Rešitev: Na krožnici $|z| = 1$ velja $\bar{z} = \frac{1}{z}$, torej je integral v nalogi enak integralu $\oint_\gamma f(z)dz$, kjer je f holomorfna funkcija

   $$f(z) = \frac{e^z}{z^2(3z+2)} = \frac{e^z}{3z^2(z+\frac{2}{3})}.$$

   Integral je torej po izreku o ostankih enak

   $$2\pi i\big(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,-\frac{2}{3})\big).$$

   Izračunamo

   $$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{1!}\Big(\frac{e^z}{3z+2}\Big)'(0) = \frac{e^z(3z+2) - e^z\cdot 3}{(3z+2)^2}\Big|_{z=0} = -\frac{1}{4}$$

   in

   $$\operatorname{Res}(f,-\frac{2}{3}) = \frac{e^z}{3z^2}\Big|_{z=-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}e^{-\frac{2}{3}}.$$

   Rezultat je tako

   $$2\pi i\big(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-\frac{2}{3}}\big) = \frac{\pi i}{2}\big(3e^{-\frac{2}{3}} - 1\big).$$

4. Določi residuum funkcije

$$f(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{2z}}}{1+z^2}$$

v vseh treh singularnostih.

Rešitev: Singularnosti funkcije f so v točkah 0, i in $-i$. Točki i in $-i$ sta pola 1. stopnje, zato je

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} f(z)(z-i) = \left.\frac{e^{\frac{\pi}{2z}}}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{2}}}{2i} = -\frac{i}{2i} = -\frac{1}{2}$$

in

$$\operatorname{Res}(f,-i) = \lim_{z\to -i} f(z)(z+i) = \left.\frac{e^{\frac{\pi}{2z}}}{z-i}\right|_{z=-i} = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}}}{-2i} = -\frac{i}{2i} = -\frac{1}{2}.$$

Singularnost $z=0$ pa je bistvena. Funkcijo f razvijemo v Laurentovo vrsto okrog 0:

$$f(z) = (1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \cdots)(1 + \frac{\pi}{2z} + \frac{(\frac{\pi}{2z})^2}{2!} + \frac{(\frac{\pi}{2z})^3}{3!} + \cdots).$$

Obe vrsti množimo po členih. Ostanek $\operatorname{Res}(f,0)$ tvorijo natanko vsi koeficienti v tem zmnožku, ki stojijo pred potenco z^{-1}, torej

$$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3!} - \frac{(\frac{\pi}{2})^5}{5!} \pm \cdots .$$

To pa je natanko vrsta za $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, torej je rezultat

$$\operatorname{Res}(f,0) = 1.$$

2. izpit 2016/17

1. S pomočjo kompleksne integracije izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\, dx.$$

Rešitev: Definirajmo $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)^2}$. Računamo realni del integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Funkcija $f(z)$ ima dve singularnosti, $2i$ in $-2i$, ki sta pola stopnje 2. Naj bo $R > 0$ velik in naj bo γ sklenjena pot v kompleksni ravnini, ki je sestavljena iz daljice od $-R$ do R ter iz pokrožnice v zgornji polravnini od R do $-R$. Polkrožnico označimo z γ_1. Po izreku o ostankih je

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i).$$

Najprej izračunamo

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = (\frac{e^{iz}}{(z+2i)^2})'(2i) = -\frac{3ie^{-2}}{32}.$$

Integral po γ_1 pa ocenimo (lahko pa uporabimo tudi kakega od izrekov s predavanj):

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_1} f(z)dz\right| &\le \int_{\gamma_1} |f(z)| \cdot |dz| = \int_{\gamma_1} \frac{|e^{iz}|}{|z^2+4|^2}\,|dz| = \int_{\gamma_1} \frac{e^{-\operatorname{Im}(z)}}{|z^2+4|^2}\,|dz| \\ &\le \int_{\gamma_1} \frac{1}{\frac{1}{2}|z|^4}\,|dz| = \frac{2}{R^4}\int_{\gamma_1} |dz| = \frac{2}{R^4}\int_0^{\pi} R dt = \frac{2\pi}{R^3}, \end{aligned}$$

kjer smo γ_1 parametrizirali z $z = Re^{it}$, $dz = Rie^{it}dt$, $|dz| = |Rie^{it}|dt = Rdt$. Ko gre $R \to \infty$, gre torej zgornji integral proti 0, zato je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{3\pi}{16e^2}.$$

Ker je to število realno, je to tudi končni rezultat.

2. Naj bo $-1 < a < 1$ in naj bo $P_{20}(x)$ dvajseti Legendrov polinom. Izračunaj

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_{20}(x)}{\sqrt{1-2ax+a^2}}\, dx.$$

(Nasvet: pomagaj si z rodovno funkcijo. Pri računanju lahko brez utemeljitve menjaš vsoto in integral.)

Rešitev:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{P_{20}(x)}{\sqrt{1-2ax+a^2}}\, dx &= \int_{-1}^{1} P_{20}(x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)a^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_{-1}^{1} P_{20}(x)P_n(x)\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \frac{2}{2n+1}\delta_{20,n} = a^{20} \cdot \frac{2}{2\cdot 20+1} = \frac{2a^{20}}{41} \end{aligned}$$

3. Reši naslednji problem prevajanja toplote na palici z izoliranima koncema:

$$\begin{aligned} &u(x,t) : [0,\pi] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}, && u_t = u_{xx}, \\ &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, && u(x,0) = \sin^2 x. \end{aligned}$$

Rešitev: Uporabimo metodo ločitve spremenljivk. Pišimo $u = X(x)T(t)$. Diferencialna enačba potem postane

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda,$$

z robnima pogojema $X'(0) = X'(\pi) = 0$.

Najprej rešujemo diferencialno enačbo $X'' = \lambda X$. Če je $\lambda > 0$, je $X = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{\lambda}x)$. Hitro vidimo, da taka funkcija zadošča $X'(0) = X'(\pi) = 0$ le, če je $X = 0$.

Če je $\lambda = 0$, potem je $X = Ax + B$. Takšna funkcija zadošča robnima pogojema, če je $A = 0$, torej je $X = B$ konstantna.

Če pa je $\lambda < 0$, pišemo $\lambda = -\mu^2$ in dobimo $X = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$. Robna pogoja dasta $B = 0$ in $\sin(\mu x) = 0$, torej $\mu \in \mathbb{Z}$. Skupaj s konstantno rešitvijo torej dobimo rešitve

$$X_k = \cos(kx), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Pri enačbi $T' = \lambda T$ pa dobimo $T = e^{\lambda t}$, kjer je $\lambda = -k^2$. Končno rešitev zapišemo kot

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-k^2 t}\cos(kx)$$

za neke konstante A_k. Ko vstavimo $t = 0$ in upoštevamo začetni pogoj, dobimo

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(kx) = \sin^2 x.$$

Funkcijo $\sin^2 x$ razvijemo v Fourierovo vrsto po $\cos(kx)$. Upoštevamo formulo za polovične kote $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ in dobimo $A_0 = \frac{1}{2}$, $A_2 = -\frac{1}{2}$ in $A_k = 0$ za ostale k. Torej je končna rešitev

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-4t}\cos(2x).$$

4. Naj bo Ω enotski disk $|z| \leq 1$ in naj bo $f : \Omega \to \mathbb{C}$ nekonstantna zvezna funkcija, ki je holomorfna v notranjosti in za katero velja $|f(z)| = 1$ na robu diska. Dokaži, da ima f vsaj eno ničlo na disku Ω. (Namig: princip maksima.)

   Rešitev: Ker je $|f|$ zvezna na kompaktni množici Ω, nekje doseže maksimum in minimum. Po principu maksima $|f|$ ne doseže maksimuma v notranjosti, torej ga doseže na robu. Denimo, da f nima ničel. Potem po principu maksima $|f|$ tudi minimuma ne doseže v notranjosti. Torej $|f|$ tudi minimum doseže na robu. Ker je $|f(z)| = 1$ na robu, sledi, da je $|f(z)| = 1$ na celotnem disku. Po nalogi z vaj vemo, da je holomorfna funkcija s konstanto absolutno vrednostjo konstantna. Torej je f konstantna, kar je protislovje.

1. kolokvij 2017/18

1. Funkcija $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ naj bo dana s predpisom

$$f(x+iy) = x - \frac{2y}{x^2+y^2} + i\Big(y - \frac{2x}{x^2+y^2}\Big).$$

(a) Preveri, da je f holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Poišči vse ničle funkcije f.

Rešitev: Točko (a) lahko rešimo tako, da preverimo Cauchy-Riemannove enačbe za f. Pri točki (b) pa rešimo sistem dveh enačb z dvema neznankama

$$x - \frac{2y}{x^2+y^2} = 0 \qquad \text{in} \qquad y - \frac{2x}{x^2+y^2} = 0.$$

Dobimo dve rešitvi $x_1 = y_1 = 1$ in $x_2 = y_2 = -1$, torej $z_1 = 1 + i$ in $z_2 = -1 - i$.

Alternativna rešitev: Preoblikujemo predpis za f in dobimo

$$f(x+iy) = x + iy - \frac{2(y+ix)}{x^2+y^2} = x + iy - \frac{2i(x-iy)}{x^2+y^2} = z - \frac{2i\bar{z}}{z\bar{z}} = z - \frac{2i}{z},$$

kjer smo pisali $z = x + iy$. Torej je f holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (saj je racionalna funkcija). Ničle funkcije f so rešitve enačbe $z = \frac{2i}{z}$ oziroma $z^2 = 2i$. Prek polarnega zapisa $2i = 2e^{\frac{\pi i}{2}}$ dobimo dve rešitvi

$$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}} = 1 + i \qquad \text{in} \qquad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}+\pi i} = -1 - i.$$

2. Razvij funkcijo $f(z) = \frac{3}{(z^2+1)(z^2+4)}$ v Laurentovo vrsto na območju $1 < |z| < 2$.

Rešitev: Razcepimo

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} - \frac{1}{z^2+4}.$$

Drugi člen lahko razvijemo v geometrijsko vrsto, ki bo konvergirala za $|z| < 2$:

$$\frac{1}{z^2+4} = \frac{1}{4(1+(\frac{z}{2})^2)} = \frac{1}{4}\Big(1 - (\tfrac{z}{2})^2 + (\tfrac{z}{2})^4 \mp \cdots\Big).$$

V prvi člen pa uvedemo substitucijo $w = \frac{1}{z}$ in nato razvijemo v geometrijsko vrsto po w:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2+1} &= \frac{w^2}{1+w^2} = w^2(1 - w^2 + w^4 \mp \cdots) \\ &= z^{-2}(1 - z^{-2} + z^{-4} \mp \cdots) = z^{-2} - z^{-4} + z^{-6} \mp \cdots\end{aligned}$$

Dobljena vrsta konvergira za $|w| < 1$, kar je ekvivalentno $|z| > 1$. Končni rezultat je torej

$$f(z) = z^{-2} - z^{-4} + z^{-6} \mp \cdots - \frac{1}{4} + \frac{z^2}{4^2} - \frac{z^4}{4^3} \pm \cdots.$$

3. Naj bo γ pozitivno orientirana krožnica $|z| = 1$. Izračunaj

$$\oint_\gamma \frac{1}{4-z^2} \cdot \sin\Big(\frac{\pi}{z}\Big)\, dz.$$

Rešitev: Označimo funkcijo v integralu z $f(z)$. Edina singularnost funkcije f znotraj γ je $z = 0$, torej je integral enak $2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, 0)$. Za določitev $\mathrm{Res}(f, 0)$ pa razvijemo f v Laurentovo vrsto okrog 0, tako da razvijemo oba faktorja. Prva vrsta je geometrijska, druga pa vrsta za sinus:

$$f(z) = \frac{1}{4}\Big(1 + (\frac{z}{2})^2 + (\frac{z}{2})^4 + \cdots\Big)\Big(\frac{\pi}{z} - \frac{1}{3!}\frac{\pi^3}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{\pi^5}{z^5} \mp \cdots\Big).$$

Vrsti množimo vsak člen z vsakim. Ostanek $\mathrm{Res}(f, 0)$ pa vsebuje samo tiste koeficiente v tem produktu, ki stojijo pred potenco z^{-1}. Ti se seštejejo v

$$\frac{1}{4}\Big(1 \cdot \pi - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\pi^3}{3!} + \frac{1}{2^4} \cdot \frac{\pi^5}{5!} \mp \cdots\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3!}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^3 + \frac{1}{5!}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^5 \mp \cdots\Big) = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

Rezultat je torej

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$

4. Naj bo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija, ki zadošča

$$f(z+1) = f(z+i) = f(z)$$

za vsak $z \in \mathbb{C}$. Dokaži, da je f konstantna. (Nasvet: najprej dokaži, da je f omejena.)

Rešitev: Iz pogoja očitno sledi $f(z+m+ni) = f(z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$ in $m, n \in \mathbb{Z}$. Naj bo

$$K = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \in [0,1],\ \mathrm{Im}(z) \in [0,1]\}.$$

Ker je K kompaktna množica in je $|f|$ zvezna na K, doseže $|f|$ maksimum na K, ki ga označimo z M. Velja torej $|f(z)| \leq M$ za vsak $z \in K$.

M pa je tudi maksimum funkcije $|f|$ na celi kompleksni ravnini. Res, za vsak $z \in \mathbb{C}$ lahko najdemo števili $m, n \in \mathbb{Z}$, da je $z + m + ni \in K$ in zato $|f(z)| = |f(z+m+ni)| \leq M$. Torej je f omejena na celi kompleksni ravnini in zato konstantna po Liouvillovem izreku.

2. kolokvij 2017/18

1. Poišči vse holomorfne funkcije $y(z)$ v okolici točke $z_0 = 0$, ki rešijo enačbo

$$y'' - 3z^2y' - 6zy = 0$$

pri pogoju $y'(0) = 0$.

Rešitev: Pišimo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Iz pogoja $y'(0) = 0$ sledi $c_1 = 0$. Iz diferencialne enačbe pa dobimo

$$\sum_{n\geq 2} c_n n(n-1)z^{n-2} - 3z^2 \sum_{n\geq 1} c_n n z^{n-1} - 6z \sum_{n\geq 0} c_n z^n = 0.$$

Primerjamo koeficiente pri posameznih potencah z. Koeficient pred z^0 je $2c_2 = 0$, kar nam da $c_2 = 0$. Za $k \geq 1$ pa je koeficient pred z^k enak $c_{k+2}(k+2)(k+1) - 3c_{k-1}(k-1) - 6c_{k-1} = 0$, od koder dobimo rekurzivno zvezo

$$c_{k+2} = \frac{3c_{k-1}(k-1) + 6c_{k-1}}{(k+2)(k+1)} = \frac{3c_{k-1}(k+1)}{(k+2)(k+1)} = \frac{3c_{k-1}}{k+2}.$$

Iz te zveze takoj sledi $c_{3n+2} = 0$ za vsak n (saj je $c_2 = 0$) in $c_{3n+1} = 0$ (saj je $c_1 = 0$). Koeficienti oblike c_{3n} pa so $c_3 = c_0$, $c_6 = \frac{3c_3}{6} = \frac{c_0}{2}$, $c_9 = \frac{3c_6}{9} = \frac{c_0}{2\cdot 3}$ in v splošnem $c_{3n} = \frac{c_0}{n!}$. Torej dobimo

$$y = c_0(1 + z^3 + \frac{z^6}{2!} + \frac{z^9}{3!} + \cdots) = c_0 e^{z^3}.$$

2. Dan je problem

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u(x,t) : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

pri pogojih

$$u(0,t) = 1, \qquad u(1,t) = 1, \qquad u(x,0) = \sin \pi x, \qquad u_t(x,0) = \sin \pi x \cos \pi x.$$

Z uvedbo nove spremenljivke $v(x,t) = u(x,t) - 1$ problem prevedi na problem s homogenimi robnimi pogoji in ga reši.

Rešitev: Po vpeljavi spremenljivke v dobimo problem

$$v_{tt} = c^2 v_{xx}, \qquad v(x,t) : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

pri pogojih

$$v(0,t) = 0, \qquad v(1,t) = 0, \qquad v(x,0) = \sin \pi x - 1, \qquad v_t(x,0) = \sin \pi x \cos \pi x.$$

Ker je to problem s homogenimi robnimi pogoji, ga lahko rešujemo s separacijo spremenljivk. Pišimo

$$v = X(x)T(t).$$

Potem diferencialna enačba postane $XT'' = c^2 X'' T$, od koder dobimo

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda,$$

kjer je $\lambda \in \mathbb{R}$. Enačba za X je potem

$$X'' - \lambda X = 0.$$

Iz robnih pogojev dobimo $X(0) = 0$ in $X(1) = 0$, iz česar na običajen način preverimo, da ima enačba netrivialne rešitve le za $\lambda < 0$. Če pišemo $\lambda = -\omega^2$, so rešitve zgornje enačbe $X = A\cos \omega x + B \sin \omega x$. Iz pogoja $X(0) = 0$ dobimo $A = 0$, torej smemo privzeti $B = 1$. Pogoj $X(1) = 0$ pa nam da $\sin \omega = 0$, torej $\omega = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Torej smo dobili rešitve

$$X_n(x) = \sin(n\pi x), \qquad \lambda_n = -(n\pi)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Rešimo še enačbo

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda_n.$$

Ko pomnožimo in upoštevamo $\lambda_n = -(n\pi)^2$, dobimo enačbo $T'' + (n\pi c)^2 T = 0$, ki ima rešitev $T_n(t) = A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)$. Torej je

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n\geq 1} \big(A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)\big) \sin(n\pi x).$$

Upoštevamo še začetna pogoja. Pogoj $v(x,0) = \sin(\pi x) - 1$ nam da

$$\sin(\pi x) - 1 = \sum_{n\geq 1} A_n \sin(n\pi x).$$

Zato moramo funkcijo $f(x) = \sin(\pi x) - 1$ razviti po sinusih na intervalu $[0,1]$. Če pišemo $-1 = \sum_{n\geq 1} a_n \sin(n\pi x)$, potem je

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (-1)\sin(n\pi x)dx = \frac{2}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{n\pi}; & n \text{ liho}, \\ 0; & n \text{ sodo}. \end{cases}$$

Torej je $A_1 = 1 - \frac{4}{\pi}$, $A_n = -\frac{4}{n\pi}$ za $n = 3, 5, 7, \ldots$ in $A_n = 0$ za sode n.
Upoštevamo še drugi začetni pogoj. Odvajamo

$$v_t(x,t) = \sum_{n\geq 1} \big(-n\pi c A_n \sin(n\pi ct) + n\pi c B_n \cos(n\pi ct)\big) \sin(n\pi x).$$

Ko vstavimo $t = 0$ in upoštevamo $v_t(x,0) = \sin(\pi x)\cos(\pi x) = \frac{1}{2}\sin(2\pi x)$, dobimo

$$\frac{1}{2}\sin(2\pi x) = v_t(x,0) = \sum_{n\geq 1} n\pi c B_n \sin(n\pi x).$$

Torej je $2\pi c B_2 = \frac{1}{2}$, od koder sledi $B_2 = \frac{1}{4\pi c}$, in $B_n = 0$ za $n \neq 2$. Ko združimo vse dobljene člene in upoštevamo $u = v + 1$, dobimo končni rezultat

$$u(x,t) = 1 + \frac{1}{4\pi c}\sin(2\pi ct)\sin(2\pi x) + \cos(\pi ct)\sin(\pi x) - \sum_{n\geq 3 \text{ liho}} \frac{4}{n\pi}\cos(n\pi ct)\sin(n\pi x).$$

3. Funkcija $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ naj ima naslednji razvoj po Legendrovih polinomih $P_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{\sqrt{2n+3}}, \qquad x \in [-1,1].$$

Izračunaj $\int_{-1}^1 f(x)dx$ in $\int_{-1}^1 f(x)^2 dx$.
Rešitev: Upoštevamo

$$\int_{-1}^1 P_n(x)dx = \int_{-1}^1 P_0(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2\cdot 0 + 1}\delta_{n,0} = 2\delta_{n,0}$$

in dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(x)dx &= \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{\sqrt{2n+3}}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \int_{-1}^1 P_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+3}} 2\delta_{n,0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Podobno izračunamo

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(x)^2 dx &= \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_m(x)}{\sqrt{2m+3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{\sqrt{2n+3}}\,dx = \sum_{m,n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{2m+3}} \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx \\
&= \sum_{m,n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{2m+3}} \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n} = \sum_{n\geq 0} \frac{2}{(2n+3)(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Za izračun te vrste razstavimo $\frac{2}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$ in dobimo

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2}{(2n+3)(2n+1)} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots = 1.$$

4. Za poljuben $a \in \mathbb{R}$ definiramo

$$f_a(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(ax).$$

(a) Dokaži, da je Fourierova transformiranka funkcije f_a enaka

$$\hat{f}_a(\omega) = e^{-\frac{a^2+\omega^2}{2}} \cosh(a\omega).$$

(Namig: $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$.)

(b) Določi funkcijo $f_a * f_0$. (Tu je $f_0(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.)

Rešitev: (a) Uporabimo formuli $\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ in $\widehat{f(x)e^{iax}}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$. Naša funkcija $f_a(x)$ je $f_a(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{iax} + e^{-iax})$, torej je

$$\begin{aligned}
\hat{f}_a(\omega) &= \frac{1}{2}\Big(\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}e^{iax}}(\omega) + \widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-iax}}(\omega)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(\omega - a) + \widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(\omega + a)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{-\frac{(\omega-a)^2}{2}} + e^{-\frac{(\omega+a)^2}{2}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^{-\frac{\omega^2-2a\omega+a^2}{2}} + e^{-\frac{\omega^2+2a\omega+a^2}{2}}\Big) \\
&= \frac{1}{2}e^{-\frac{\omega^2+a^2}{2}}(e^{a\omega} + e^{-a\omega}) = e^{-\frac{\omega^2+a^2}{2}} \cosh(a\omega).
\end{aligned}$$

(b) Po formuli $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}$ in točki (a) je

$$\widehat{f_a * f_0}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{a^2+\omega^2}{2}} \cosh(a\omega)e^{-\frac{\omega^2}{2}} = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{a^2}{2}-\omega^2} \cosh(a\omega).$$

Ta izraz lahko zapišemo kot

$$\widehat{f_a * f_0}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}e^{-\frac{(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(\omega\sqrt{2})^2}{2}} \cosh\Big(\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \omega\sqrt{2}\Big),$$

kar pa je natanko

$$\sqrt{2\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}\widehat{f_{\frac{a}{\sqrt{2}}}}(\omega\sqrt{2}).$$

Torej je

$$\begin{aligned}
(f_a * f_0)(-x) &= \widehat{\widehat{f_a * f_0}}(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}\widehat{\widehat{f_{\frac{a}{\sqrt{2}}}}(\omega\sqrt{2})}(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{\widehat{f_{\frac{a}{\sqrt{2}}}}}(\frac{x}{\sqrt{2}}) \\
&= \sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}f_{\frac{a}{\sqrt{2}}}(-\frac{x}{\sqrt{2}}) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2}{4}}e^{-\frac{(-\frac{x}{\sqrt{2}})^2}{2}} \cos\Big(\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \Big(-\frac{x}{\sqrt{2}}\Big)\Big) \\
&= \sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2+x^2}{4}} \cos\frac{ax}{2}
\end{aligned}$$

in tako

$$(f_a * f_0)(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{a^2+x^2}{4}} \cos\frac{ax}{2}.$$

1. izpit 2017/18

1. Funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je podana s predpisom

$$f(x+iy) = e^{2xy}\cos(y^2-x^2) + ie^{2xy}\sin(y^2-x^2), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

   (a) Dokaži, da je f holomorfna na $\mathbb{C}$.

   (b) Poišči vse rešitve $z \in \mathbb{C}$ enačbe $f(z) = 1$.

Rešitev: Holomorfnost preverimo s Cauchy-Riemannovimi enačbami. Pri drugem delu naloge pa rešujemo sistem enačb

$$\begin{aligned} e^{2xy}\cos(y^2-x^2) &= 1, \\ e^{2xy}\sin(y^2-x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Če enačbi kvadriramo in seštejemo, dobimo $e^{4xy} = 1$, torej $4xy = 0$ in zato $x = 0$ ali $y = 0$. Če je $x = 0$, je $\cos y^2 = 1$ in $\sin y^2 = 0$, torej $y^2 = 2k\pi$, torej $y = \pm\sqrt{2k\pi}$, $k \geq 0$. Podobno, če je $y = 0$, dobimo $\cos(-x^2) = 1$ in $\sin(-x^2) = 0$, torej $-x^2 = 2k\pi$, torej $x^2 = \pm\sqrt{2(-k)\pi}$, $k \leq 0$. Rešitve so tako $z = \pm\sqrt{2k\pi}i$ in $\pm\sqrt{2k\pi}$, $k \geq 0$.

Alternativna rešitev: Pišemo $z = x + iy$ in preoblikujemo predpis za f:

$$f(z) = e^{2xy}(\cos(y^2-x^2) + i\sin(y^2-x^2)) = e^{2xy}e^{i(y^2-x^2)} = e^{-i(x^2-y^2+2xyi)} = e^{-i(x+iy)^2} = e^{-iz^2}.$$

Funkcija je torej holomorfna, saj je kompozitum holomorfnih funkcij. Rešitve enačbe $f(z) = 1$ pa so natanko vsi z, ki rešijo $-iz^2 = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Enačbo preoblikujemo v $z^2 = -2k\pi$, rešitve te enačbe pa so natanko zgoraj navedene.

2. S pomočjo kompleksne integracije izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2i)^2}.$$

Rešitev: Definirajmo

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-2i)^2}.$$

Ko razcepimo $z^2 - 2i = (z-1-i)(z+1+i)$, vidimo, da ima funkcija f dva pola 2. stopnje, $1+i$ in $-1-i$. Integrirali bomo funkcijo f po robu polkroga s polmerom R. Najprej izračunamo

$$\operatorname{Res}(f, 1+i) = \frac{1}{1!}\left[\frac{1}{(z+1+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=1+i} = -\frac{2}{(z+1+i)^3}\Bigg|_{z=1+i} = -\frac{2}{(2(1+i))^3} = \frac{1}{8(1-i)}.$$

Po izreku o ostankih pa je

$$\int_{-R}^{R} f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1+i).$$

Tu γ označuje zgornjo polkrožnico polmera R. Prvi integral na levi strani enačbe konvergira proti integralu, ki ga računamo. Drugi integral pa gre proti 0, saj na krožnici velja

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2-2i|^2} \leq \frac{1}{||z^2|-|2i||^2} = \frac{1}{(R^2-2)^2}$$

in zato

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| \leq l(\gamma)\cdot\max_{z\in\gamma}|f(z)| = \pi R \cdot \frac{1}{(R^2-2)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Tako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2i)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1+i) = \frac{2\pi i}{8(1-i)} = \frac{\pi(i-1)}{8}.$$

3. S Frobeniusovo metodo poišči vse funkcije $y(z)$, ki so holomorfne na neki okolici točke $z_0 = 0$ in rešijo enačbo

$$2zy'' + y' - 2y = 0.$$

Rešitev je lahko v obliki jasno predstavljene vrste.

(Bodi pozoren na navodilo naloge. Zadošča poiskati le *holomorfne* funkcije.)

Rešitev: Če enačbo delimo z z, vidimo, da se lahko naloge lotimo s Frobeniusovo metodo. V enačbo vstavimo $y = \sum_{n\geq 0} c_n z^{n+r}$, kjer je $c_0 \neq 0$:

$$2z\sum_{n\geq 0} c_n(n+r)(n+r-1)z^{n+r-2} + \sum_{n\geq 0} c_n(n+r)z^{n+r-1} - 2\sum_{n\geq 0} c_n z^{n+r} = 0.$$

Ko enačbo delimo z z^r, dobimo

$$2z\sum_{n\geq 0} c_n(n+r)(n+r-1)z^{n-2} + \sum_{n\geq 0} c_n(n+r)z^{n-1} - 2\sum_{n\geq 0} c_n z^{n} = 0.$$

Primerjamo koeficiente pri posameznih potencah z-ja. Pri z^{-1} dobimo

$$2c_0 r(r-1) + c_0 r = 0,$$

torej $2r(r-1) + r = 0$ oziroma $2r^2 - r = 0$. Rešitvi te enačbe sta $r = 0$ in $r = \frac{1}{2}$. Ker iščemo samo rešitve, ki so holomorfne na okolici 0, upoštevamo samo rešitev $r = 0$.

Če zdaj primerjamo še koeficient pri z^k za $k \geq 0$, dobimo

$$2c_{k+1}(k+1)k + c_{k+1}(k+1) - 2c_k = 0,$$

torej $c_{k+1} = \frac{2c_k}{(k+1)(2k+1)} = \frac{4c_k}{(2k+1)(2k+2)}$. Izračunamo prvih nekaj členov:

$$c_1 = \frac{4c_0}{1\cdot 2}, \quad c_2 = \frac{4c_1}{3\cdot 4} = \frac{4^2 c_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \quad c_3 = \frac{4c_2}{5\cdot 6} = \frac{4^3 c_0}{6!}.$$

Vidimo, da je splošen člen $c_n = \frac{4^n c_0}{(2n)!}$ in zato

$$y = \sum_{n\geq 0} c_n z^n = c_0 \sum_{n\geq 0} \frac{(4z)^n}{(2n)!}.$$

Opomba: Glede na navodilo naloge, da iščemo le holomorfne funkcije, bi lahko začeli z nastavkom $y = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$.

4. Dani funkciji $f \in L^1(\mathbb{R})$ priredimo funkcijo g s predpisom

$$g(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt.$$

(To je, $g(x)$ je povprečje funkcije f na intervalu širine 2 okrog x.) Dokaži, da je

$$\hat{g}(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega}\hat{f}(\omega).$$

(Namig: Fourierova transformacija funkcije

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

je $\hat{h}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$.)

Rešitev: Ob upoštevanju namiga dokazujemo enakost

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega).$$

Ker je $\hat{h}(\omega)\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{(h*f)}(\omega)$, je ta enakost ekvivalentna $\hat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{(h*f)}(\omega)$, kar se poenostavi v

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\widehat{(h*f)}(\omega).$$

Slednje pa drži, saj je funkcija $\frac{1}{2}(h*f)$ ravno enaka g:

$$\frac{1}{2}(h*f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)h(x-t)dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt = g(x).$$

2. izpit 2017/18

1. Naj bo $u(x,y)$ harmonična funkcija na nekem območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

   (a) Dokaži, da je funkcija $f(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$ holomorfna na D.

   (b) Naj bo $v : D \to \mathbb{R}$ harmonična konjugiranka funkcije u, tj. takšna funkcija, da je $u + iv$ holomorfna. Dokaži, da je uv harmonična.

   Rešitev: (a) Preverimo Cauchy-Riemannove enačbe: $(u_x)_x = u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y$ in $(u_x)_y = u_{xy} = -(-u_y)_x$.

   (b) Odvajamo:

$$\begin{aligned}(uv)_{xx} + (uv)_{yy} &= u_{xx}v + 2u_xv_x + uv_{xx} + u_{yy}v + 2u_yv_y + uv_{yy} \\ &= (u_{xx} + u_{yy})v + 2(u_xv_x + u_yv_y) + u(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= 2(u_xv_x + u_yv_y) = 2(u_x(-u_y) + u_yu_x) = 0,\end{aligned}$$

   kjer smo uporabili, da sta u in v harmonični in da za njiju veljajo Cauchy-Riemannove enačbe.

2. Izračunaj v pozitivnem smislu kompleksni integral

$$\oint_{|z|=5} \frac{dz}{1+ie^z}.$$

   (Pomoč: vse singularnosti funkcije v integralu so poli 1. stopnje, česar ni potrebno dokazovati.)

   Rešitev: Singularnosti so rešitve enačbe $ie^z = -1$ oziroma $e^z = i$, torej $z = \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i$. Edini dve singularnosti znotraj krožnice $|z| = 5$ sta tako $z_1 = \frac{\pi i}{2}$ in $z_2 = -\frac{3\pi i}{2}$. Označimo z f funkcijo v integralu. Upoštevamo, da sta singularnosti pola 1. stopnje, in izračunamo

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{z - z_1}{1 + ie^z} = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{ie^z} = \frac{1}{-1} = -1$$

   in

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \lim_{z\to z_2} \frac{z - z_2}{1 + ie^z} = \lim_{z\to z_2} \frac{1}{ie^z} = \frac{1}{-1} = -1.$$

   Integral je torej enak

$$2\pi i(-1-1) = -4\pi i.$$

3. Reši problem:

$$\begin{aligned} u(x,t) : [0,1] \times [0,\infty) &\to \mathbb{R} & \qquad u(0,t) &= u(1,t) = 0 \\ u_t &= u_{xx} + u & u(x,0) &= \sin(\pi x)\cos(\pi x)\end{aligned}$$

   Rešitev: Ločimo spremenljivki $u = X(x)T(t)$. Robna pogoja dasta $X(0) = X(1) = 0$, diferencialna enačba pa je $XT' = X''T + XT$. Ko delimo z XT in ločimo spremenljivke, dobimo

$$\frac{T'}{T} - 1 = \frac{X''}{X} = \lambda.$$

   Najprej rešimo enačbo

$$\frac{X''}{X} = \lambda.$$

   Edine netrivialne rešitve ob danih robnih pogojih so $X_n = \sin(n\pi x)$, $n \geq 1$, kjer je $\lambda = -(n\pi)^2$. Rešitev enačbe

$$\frac{T'}{T} = 1 + \lambda = 1 - (n\pi)^2$$

   pa je $T_n = C_n e^{(1-n^2\pi^2)t}$. Torej dobimo

$$u = \sum_{n\geq 1} T_nX_n = \sum_{n\geq 1} C_n e^{(1-n^2\pi^2)t}\sin(n\pi x).$$

Upoštevamo še začetni pogoj:

$$\sum_{n\geq 1} C_n \sin(n\pi x) = u(x,0) = \frac{1}{2}\sin(2\pi x),$$

torej je $C_n = 0$ za $n \neq 2$ in $C_2 = \frac{1}{2}$. Končna rešitev je tako

$$u(x,t) = \frac{1}{2}e^{(1-4\pi^2)t}\sin(2\pi x).$$

4. Za vsak n izračunaj $\int_0^1 P_n(x)dx$, kjer P_n označuje n-ti Legendrov polinom. (Namig: rodovna funkcija.)

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} t^n \int_0^1 P_n(x)dx &= \int_0^1 \sum_{n\geq 0} P_n(x)t^n\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2tx+t^2}} \\ &= -\frac{1}{2t}\cdot 2\sqrt{1-2xt+t^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{t}(1-t-\sqrt{1+t^2}) = \frac{1}{t}(\sqrt{1+t^2}+t-1) \\ &= \frac{1}{t}\left(1+\binom{\frac{1}{2}}{1}t^2+\binom{\frac{1}{2}}{2}t^4+\cdots+t-1\right) = 1+\binom{\frac{1}{2}}{1}t+\binom{\frac{1}{2}}{2}t^3+\cdots.\end{aligned}$$

Torej je $\int_0^1 P_0(x)dx = 1$, $\int_0^1 P_n(x)dx = 0$ za sode n (razen za $n=0$) in $\int_0^1 P_{2k-1}(x)dx = \binom{\frac{1}{2}}{k}$.

3. izpit 2017/18

1. Razvij funkcijo $f(z) = \dfrac{z-i}{z^3-z}$ v Laurentovo vrsto okrog točke 0. Določi še območje konvergence dobljene vrste.

   Rešitev: Razcepimo imenovalec in dobimo

$$f(z) = \frac{z-i}{z(z^2-1)} = \frac{1}{z^2-1} - \frac{i}{z(z^2-1)}.$$

   Faktor $\frac{1}{z^2-1}$ v obeh členih razvijemo v geometrijsko vrsto in dobimo

$$f(z) = -(1+z^2+z^4+\cdots) + \frac{i}{z}(1+z^2+z^4+\cdots).$$

   Rezultat je torej:

$$f(z) = \frac{i}{z} - 1 + iz - z^2 + iz^3 - z^4 \pm \cdots$$

   Konvergenčni polmer obeh geometrijskih vrst je 1, torej je konvergenčno območje dobljene vrste $0 < |z| < 1$.

2. S pomočjo kompleksne integracije izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}.$$

   Rešitev: Definirajmo $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^3}$. Velja $f(z) = \frac{1}{(z-2i)^3(z+2i)^3}$, torej ima funkcija 2 pola 3. stopnje. Pri računanju integrala si pomagamo s kompleksnim integralom funkcije f po robu zgornjega polkroga polmera R. Integral po spodnjem robu polkroga limitira proti integralu, ki ga računamo. Integral po polkrožnici (označimo jo z γ) pa gre proti 0. Res, za $z \in \gamma$ (in dovolj velik R) je

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+4|^3} \leq \frac{1}{|\frac{z^2}{2}|^3} = \frac{8}{R^6},$$

   torej

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot l(\gamma) \leq \frac{8}{R^6} \cdot \pi R \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Zato je integral, ki ga računamo, enak $2\pi i$ krat vsota ostankov funkcije f v vseh singularnostih znotraj polkroga. Edina taka singularnost je $z = 2i$, ki je pol 3. stopnje, torej je

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{1}{2!} \cdot \Big(\frac{1}{(z+2i)^3}\Big)''\Big|_{z=2i} = \frac{1}{2} \cdot (-3)(-4)(z+2i)^{-5}|_{z=2i} = 6 \cdot (4i)^{-5} = \frac{6}{4^5 i},$$

   rezultat pa je tako

$$2\pi i \cdot \frac{6}{4^5 i} = \frac{3\pi}{256}.$$

3. Na katero območje preslika funkcija

$$f(z) = \frac{z^2-i}{z^2+i}$$

   prvi kvadrant $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0,\ \operatorname{Im}(z) > 0\}$? Poišči še točko v prvem kvadrantu, ki jo f preslika v $\frac{1}{2}$.

   Rešitev: Funkcija f je kompozitum kvadratne funkcije $z \mapsto z^2$ in Möbiusove transformacije $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. Najprej izvedemo kvadriranje – to nam prvi kvadrant preslika na zgornjo polravnino. Nato izvedemo Möbiusovo transformacijo. Ta nam premico skozi točke 0, 1 in ∞ preslika v krožnico skozi točke -1, $\frac{1-i}{1+i} = -i$ in 1 (torej enotsko krožnico). Točka i se pri tem preslika v 0, ki leži znotraj krožnice. Končno območje je torej notranjost enotske krožnice.

   Poiščimo še točko z, da je $f(z) = \frac{1}{2}$. Rešujemo enačbo $\frac{z^2-i}{z^2+i} = \frac{1}{2}$, kar se poenostavi v $z^2 = 3i$. Edina rešitev te enačbe v prvem kvadrantu je $z = \sqrt{\frac{3}{2}}(1+i)$ (to dobimo npr. s pretvorbo v polarni zapis).

4. Dana je funkcija $f(x) = e^{x-\frac{x^2}{2}}$.

   (a) Izračunaj Fourierovo transformacijo funkcije f.

   (b) Poišči funkcijo g, za katero je $g * g = f$.

Rešitev: (a) Velja $f(x) = e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$. Po upoštevanju pravila $\widehat{f(x-a)}(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$ in formule $\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ dobimo

$$\hat{f}(\omega) = e^{\frac{1}{2}}\widehat{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}(\omega) = e^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega}\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(\omega) = e^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega} e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

(b) Ko transformiramo enačbo, dobimo $\sqrt{2\pi}\hat{g}^2 = \hat{f}$, torej $\hat{g}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$. Ko korenimo (zadošča poiskati le eno rešitev), dobimo

$$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\sqrt{\hat{f}(\omega)} = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} e^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{i\omega}{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

To enačbo transformiramo še enkrat. Ob upoštevanju formul $\widehat{e^{iax}f(x)}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$ in $\widehat{f(ax)}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$ dobimo

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} e^{\frac{1}{4}}\widehat{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} e^{\frac{1}{4}}\widehat{e^{-\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}\omega)^2}{2}}}(x + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} e^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}\widehat{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}(\sqrt{2}(x + \frac{1}{2})) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} e^{\frac{1}{4}}\sqrt{2} e^{-\frac{(\sqrt{2}(x+\frac{1}{2}))^2}{2}}. \end{aligned}$$

Ko poenostavimo, dobimo $g(-x) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2-x}$. Končni rezultat je tako

$$g(x) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}} e^{x-x^2}.$$

1. kolokvij 2018/19

1. Poišči vse holomorfne funkcije $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, katerih realni del je enak $u(x+iy) = x + \frac{y}{x^2+y^2}$.

   Rešitev: Pišimo $f = u + iv$. Po Cauchy-Riemannovih enačbah je

$$v_y = u_x = 1 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

torej

$$v = \int \left(1 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) dy = y - \int \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy.$$

Po uvedbi nove spremenljivke $t = x^2 + y^2$ dobimo

$$v = y - \int \frac{xdt}{t^2} = y + \frac{x}{t} + C(x) = y + \frac{x}{x^2+y^2} + C(x),$$

kjer je $C(x)$ neznana funkcija. Upoštevamo še drugo enačbo $u_y = -v_x$:

$$\frac{1(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} - C'(x).$$

Ko krajšamo, dobimo $C'(x) = 0$, torej je $C(x) = C$ (realna konstanta) in tako $v = y + \frac{x}{x^2+y^2} + C$. Torej je

$$f(x+iy) = x + \frac{y}{x^2+y^2} + i(y + \frac{x}{x^2+y^2} + C).$$

Če želimo rezultat zapisati v lepši obliki, pišemo $z = x + iy$:

$$f(z) = x + iy + \frac{y+ix}{x^2+y^2} + Ci = x + iy + \frac{i(x-iy)}{x^2+y^2} + Ci = z + \frac{i\bar{z}}{z\bar{z}} + Ci = z + \frac{i}{z} + Ci.$$

2. Funkcijo $f(z) = \frac{1}{z^{11}}\left(\sin(z^2) + \frac{z^2}{z^4+i}\right)$ razvij v Laurentovo vrsto okrog točke 0 na območju

   (a) $0 < |z| < 1$,

   (b) $|z| > 1$.

   Določi še residuum funkcije f v točki 0.

   Rešitev: Razvoj za funkcijo $\sin(z^2)$ je $\sin(z^2) = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} \mp \cdots$. Ta vrsta konvergira povsod. Racionalni člen pa razvijemo v geometrijsko vrsto, pri čemer ločimo primera. V primeru (a) je

$$\frac{z^2}{z^4+i} = \frac{z^2}{i(1-iz^4)} = -iz^2(1 + iz^4 + (iz^4)^2 + \cdots).$$

Ta vrsta konvergira za $|iz^4| < 1$, kar je ekvivalentno $|z| < 1$. Dobimo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^{11}}\left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} \mp \cdots - iz^2(1 + iz^4 + (iz^4)^2 + \cdots)\right) \\ &= (1-i)z^{-9} + (-\frac{1}{3!} - i^2)z^{-5} + (\frac{1}{5!} - i^3)z^{-1} + \cdots. \end{aligned}$$

V primeru (b) pa je

$$\frac{z^2}{z^4+i} = \frac{z^{-2}}{1+iz^{-4}} = z^{-2}(1 - iz^{-4} + (iz^{-4})^2 \mp \cdots),$$

kjer dobljena vrsta konvergira za $|iz^{-4}| < 1$, kar je ekvivalentno $|z| > 1$. Dobimo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^{11}}\left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} \mp \cdots + z^{-2}(1 - iz^{-4} + (iz^{-4})^2 \mp \cdots)\right) \\ &= \cdots + i^2 z^{-21} + iz^{-17} + 1z^{-13} + 1z^{-9} - \frac{1}{3!}z^{-5} + \frac{1}{5!}z^{-1} \mp \cdots. \end{aligned}$$

Residuum v točki 0 je koeficient razvoja iz točke (a) pri potenci z^{-1}, torej

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{1}{5!} - i^3 = \frac{1}{5!} + i.$$

3. S pomočjo kompleksne integracije izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-2i)^2}.$$

Rešitev: Pišimo $f(z) = \frac{1}{(z^2-2i)^2}$. Funkcijo f integriramo po robu zgornjega polkroga s polmerom R. Rob je sestavljen iz daljice od $-R$ do R in polkrožnice, ki jo označimo z γ. Določimo singularnosti funkcije f znotraj polkroga: enačba $z^2 = 2i$ ima rešitvi $z = \pm\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}} = \pm(1+i)$. Znotraj polkroga se nahaja le singularnost $1+i$, torej je po izreku o ostankih

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1+i).$$

Prvi integral limitira proti integralu, ki ga iščemo. Drugi integral limitira proti 0, saj je

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq l(\gamma)\cdot \max_{z\in\gamma}|f(z)| = \pi R\cdot \max_{z\in\gamma}\frac{1}{|z^2-2i|^2} \leq \pi R\cdot\frac{1}{(R^2-2)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Izračunamo še

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,1+i) &= \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+1+i)^2(z-1-i)^2}, 1+i\right)\\
&= \frac{1}{1!}\left(\frac{1}{(z+1+i)^2}\right)'(1+i) = -\frac{2}{(z+1+i)^3}\bigg|_{z=1+i} = -\frac{2}{(2+2i)^3} = \frac{1+i}{16}.
\end{aligned}$$

Rezultat je tako

$$2\pi i\cdot\frac{1+i}{16} = \frac{\pi(i-1)}{8}.$$

4. Naj bo f holomorfna funkcija na območju $\Omega = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$, za katero velja $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ za vsak $z\in\Omega$. Dokaži, da za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Namig: izberi poljuben $0<r<1$ in s pomočjo Cauchyjeve integralske formule za krožnico $|z|=r$ dokaži, da velja $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n(1-r)}$.

Rešitev: Po Cauchyjevi formuli je $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$ za poljuben $0<r<1$. Torej je

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(0)| &= \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot\max_{|z|=r}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|\\
&= n!r\cdot\max_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{r^{n+1}} = \frac{n!}{r^n}\cdot\max_{|z|=r}|f(z)| \leq \frac{n!}{r^n}\cdot\frac{1}{1-r} = \frac{n!}{r^n(1-r)}.
\end{aligned}$$

Določimo še, za kateri $0<r<1$ funkcija $g(r) = \frac{1}{r^n(1-r)}$ doseže najmanjšo vrednost. Izračunamo $g'(r) = -nr^{-n-1}(1-r)^{-1} + r^{-n}(1-r)^{-2}$ in rešimo enačbo $g'(r)=0$. Edina rešitev je $r=\frac{n}{n+1}$. Tako je

$$|f^{(n)}(0)| \leq n!g\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n!}{(\frac{n}{n+1})^n(1-\frac{n}{n+1})} = n!\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1) = (n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

2. kolokvij 2018/19

1. S pomočjo Frobeniusove metode poišči rešitev $y(z)$ diferencialne enačbe $y'' - zy' + 4y = 0$ v okolici točke 0, ki zadošča pogojema $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

   Rešitev: Ko v enačbo vstavimo nastavek $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, dobimo

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0.$$

   Ko primerjamo koeficienta na obeh straneh zaporedoma pred z^0 in z^1, dobimo enačbi $2c_2 + 4c_0 = 0$ in $6c_3 + 3c_1 = 0$, iz česar sledi

$$c_2 = -2c_0 \quad \text{in} \quad c_3 = -\frac{c_1}{2}.$$

   Ko primerjamo koeficienta pred z^k za $k \geq 2$, pa dobimo $(k+2)(k+1)c_{k+2} - kc_k + 4c_k = 0$, iz česar sledi

$$c_{k+2} = \frac{k-4}{(k+2)(k+1)} c_k.$$

   Iz $y(0) = 1$ in $y'(0) = 0$ sledi $c_0 = 1$ in $c_1 = 0$. Torej je tudi $c_3 = 0$ in $c_k = 0$ za vse lihe k. Iz zgornje enačbe izračunamo še $c_2 = -2$, $c_4 = \frac{1}{3}$ in $c_6 = 0$, iz česar sledi $c_k = 0$ za vse sode $k \geq 6$. Torej je končna rešitev

$$y(z) = c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 = 1 - 2z^2 + \frac{z^4}{3}.$$

2. Poišči rešitev $u(x,t) : [0,\pi] \times [0,\infty)$ parcialne diferencialne enačbe

$$u_t = u_{xx} - 4u$$

   pri pogojih $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = \cos^4 x$.

   Rešitev: Rešitve iščemo z nastavkom $u = X(x)T(t)$. Ker je $u_x = X'T$, nam homogena robna pogoja $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ dasta $X'(0) = X'(\pi) = 0$, diferencialna enačba pa je $XT' = X''T - 4XT$. Po deljenju z XT dobimo $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} - 4$. Računanje se malenkost poenostavi, če konstanto 4 nesemo na levo stran, tako da dobimo

$$\frac{T'}{T} + 4 = \frac{X''}{X} = \lambda,$$

   kjer je λ neodvisna od x in t in posledično konstanta. Najprej rešujemo enačbo za X, torej $X'' = \lambda X$. Obravnavamo tri možnosti. Možnost $\lambda > 0$ da rešitev $X = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{\lambda}x)$. Po upoštevanju robnih pogojev $X'(0) = X'(\pi) = 0$ hitro vidimo, da je $A = B = 0$, torej nismo dobili netrivialnih rešitev.

   Možnost $\lambda = 0$ da rešitev $X = Ax + B$. Po upoštevanju robnih pogojev dobimo $A = 0$, torej je X konstantna funkcija; smemo predpostaviti $X = 1$. Dobili smo rešitev $X_0 = 1$ pri $\lambda_0 = 0$.

   Možnost $\lambda < 0$ da rešitev $X = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$. Po upoštevanju robnih pogojev dobimo $B = 0$ in $A\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$. Če je $A \neq 0$, je torej $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$ in zato $\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi$, od koder dobimo $\lambda = -n^2$ in $X = A\cos(nx)$. Smemo predpostaviti $A = 1$. Dobili smo rešitve $X_n = \cos(nx)$ pri $\lambda_n = -n^2$, $n \geq 1$. Tem rešitvam smemo priključiti tudi zgornjo rešitev za $\lambda = 0$ (ki ustreza $n = 0$).

   Rešimo še enačbo za T. Rešitve $\frac{T'}{T} = \lambda_n - 4 = -n^2 - 4$ so $T_n = A_n e^{-(n^2+4)t}$. Končna splošna rešitev je vsota

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} X_n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(n^2+4)t}\cos(nx).$$

   Za določitev konstant A_n vstavimo še začetni pogoj:

$$\cos^4 x = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx).$$

Funkcijo $\cos^4 x$ zato razvijemo po kosinusih na intervalu $[0, \pi]$. Dvakrat uporabimo formulo $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ in dobimo

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos(4x)}{2}$$
$$= \frac{3}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos(4x)}{8}.$$

Torej je $A_0 = \frac{3}{8}$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $A_4 = \frac{1}{8}$ in $A_n = 0$ za ostale n. Končna rešitev je tako

$$u(x,t) = \tfrac{3}{8}e^{-4t} + \tfrac{1}{2}e^{-8t}\cos(2x) + \tfrac{1}{8}e^{-20t}\cos(4x).$$

3. Poišči kakšno rešitev $f \in L^1(\mathbb{R})$ integralske enačbe

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{-\frac{x^2}{2}+ix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rešitev: Enačbo zapišemo v obliki

$$(f * f)(x) = e^{-\frac{x^2}{2}+ix}.$$

Po uporabi Fourierove transformacije dobimo

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{f}(\omega) = \widehat{e^{-\frac{x^2}{2}+ix}}(\omega).$$

Po formulah $\widehat{f(x)e^{iax}}(\omega) = \hat{f}(\omega - a)$ in $\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ je $\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}+ix}}(\omega) = \widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(\omega-1) = e^{-\frac{(\omega-1)^2}{2}}$, torej zgornja enačba postane

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)^2 = e^{-\frac{(\omega-1)^2}{2}}.$$

Izrazimo $\hat{f}(\omega)$, kjer pri korenjenju vzamemo npr. predznak plus (saj iščemo le eno rešitev):

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}e^{-\frac{(\omega-1)^2}{4}}.$$

Še enkrat uporabimo Fourierovo transformacijo, kjer uporabimo formuli $\widehat{f(x-a)}(\omega) = \hat{f}(\omega)e^{-ia\omega}$ in $\widehat{f(ax)}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$ (za $a > 0$):

$$f(-\omega) = \hat{\hat{f}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\widehat{e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}e^{-i\omega}\widehat{e^{-\frac{x^2}{4}}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}e^{-i\omega}\widehat{e^{-\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}x)^2}{2}}}(\omega)$$
$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}e^{-i\omega}\sqrt{2}\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(\sqrt{2}\omega) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}e^{-i\omega}e^{-\frac{(\sqrt{2}\omega)^2}{2}} = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}e^{-i\omega-\omega^2}.$$

Končna rešitev je tako

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}e^{ix-x^2}.$$

4. Naj bo $P_n(x)$ Legendrov polinom stopnje n. Izračunaj integrala

$$\int_{-1}^{1} xP_n(x)^2dx \quad \text{in} \quad \int_{-1}^{1} x^2P_n(x)^2dx.$$

(Namig: za izračun drugega integrala dvakrat zaporedoma uporabi formulo $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$.)

Rešitev: $P_n(x)$ je bodisi soda bodisi liha funkcija, zato je $P_n(x)^2$ soda funkcija in posledično $xP_n(x)^2$ liha funkcija. Prvi integral je tako integral lihe funkcije na simetričnem intervalu in zato enak 0.

Za izračun drugega integrala iz formule v namigu izrazimo $xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x)$. Ko vstavimo v integral, dobimo

$$\int_{-1}^{1}(xP_n(x))^2dx = \int_{-1}^{1}\Big((\tfrac{n+1}{2n+1})^2P_{n+1}(x)^2 + \tfrac{2(n+1)n}{(2n+1)^2}P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) + (\tfrac{n}{2n+1})^2P_{n-1}(x)^2\Big)dx.$$

Upoštevamo $\int_{-1}^{1} P_{n\pm 1}(x)^2 dx = \frac{2}{2(n\pm 1)+1}$ in $\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx = 0$ in dobimo

$$\int_{-1}^{1} (xP_n(x))^2 dx = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{2}{2n+3} + \frac{n^2}{(2n+1)^2} \cdot \frac{2}{2n-1} = \frac{2}{(2n+1)^2} \left(\frac{(n+1)^2}{2n+3} + \frac{n^2}{2n-1} \right).$$

Ta izpeljava velja le za $n \geq 1$, hitro pa lahko preverimo, da rezultat drži tudi za $n = 0$.

1. izpit 2018/19

1. S pomočjo izreka o ostankih (ali Cauchyjeve formule) izračunaj

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+2\cos x+2\sin x}.$$

Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $z = e^{ix}$. Integracijsko območje za z je krožnica $|z| = 1$. Izrazimo še $dz = ie^{ix}dx = izdx$ in $dx = \frac{dz}{iz}$ ter $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+1/z}{2}$ in $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i}$. Zgornji integral tako postane

$$\oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{3+2\cdot\frac{z+1/z}{2}+2\cdot\frac{z-1/z}{2i}},$$

kar se poenostavi v

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{(1+i)z^2+3iz-1+i}.$$

Označimo funkcijo v integralu z $f(z)$. Z reševanjem kvadratne enačbe razcepimo

$$f(z) = \frac{1}{(1+i)(z+1+i)(z+\frac{1+i}{2})}.$$

Funkcija ima torej singularnosti $z_1 = -1-i$ in $z_2 = -\frac{1+i}{2}$, od katerih je znotraj krožnice le z_2. Ker je

$$\operatorname{Res}(f,z_2) = \left.\frac{1}{(1+i)(z+1+i)}\right|_{z=z_2} = \frac{1}{(1+i)\cdot\frac{1+i}{2}} = -i,$$

je rezultat

$$2\pi i\cdot\operatorname{Res}(f,z_2) = 2\pi.$$

2. Poišči biholomorfno preslikavo iz območja $\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)<0 \text{ in } |z|>1\}$ na enotski disk.

Rešitev: Nalogo lahko rešimo na več načinov. Zgled rešitve: Najprej točke $-i$, i in ∞ z Möbiusovo preslikavo f preslikamo zaporedoma v točke ∞, 0 in 1. Hitro izračunamo ekspliciten predpis za f, ki je $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$. V nalogi dano območje se s preslikavo f preslika v 1. kvadrant. Preslikava $g(z) = z^2$ ta kvadrant preslika v zgornjo polravnino. Na koncu še z Möbiusovo preslikavo h, ki točke ∞, 1 in 0 zaporedoma preslika v 1, i in -1, to polravnino preslikamo na enotski disk. Izračunamo še ekspliciten predpis za h, ki je $h(z) = \frac{z+i}{z-i}$. Končna biholomorfna preslikava je torej $h\circ g\circ f$.

3. Poišči rešitev $u(x,t) : [0,\pi]\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ parcialne diferencialne enačbe

$$u_{tt} = u_{xx}+u$$

pri pogojih $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ in $u(x,0) = \sin x$, $u_t(x,0) = 2\sin 3x+3\sin 2x$.

Rešitev: Po standardnem postopku v enačbo vstavimo $u(x,t) = X(x)T(t)$, od koder dobimo

$$\frac{T''}{T}-1 = \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Iz homogenih robnih pogojev dobimo $X(0) = X(\pi) = 0$. Z obravnavo možnosti $\lambda>0$, $\lambda=0$ in $\lambda<0$ ugotovimo, da ima enačba $\frac{X''}{X} = \lambda$ netrivialne rešitve le pri $\lambda<0$. Te rešitve so $X_n = \sin nx$ pri $\lambda_n = -n^2$, $n\in\mathbb{N}$.

Enačba za T je $\frac{T''}{T} = 1-n^2$. Za $n=1$ je njena rešitev $T_1 = A_1t+B_1$, za $n\geq 2$ pa $T_n = A_n\sin(\sqrt{n^2-1}t)+B_n\cos(\sqrt{n^2-1}t)$. Končna splošna rešitev je tako

$$u(x,t) = (A_1t+B_1)\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\Big(A_n\sin(\sqrt{n^2-1}t)+B_n\cos(\sqrt{n^2-1}t)\Big)\sin nx.$$

Ko upoštevamo pogoj $u(x,0) = \sin x$, dobimo

$$B_1\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}B_n\sin nx = \sin x,$$

od koder sledi $B_1 = 1$ in $B_n = 0$ za $n \geq 2$. Ko upoštevamo še $u_t(x,0) = 2\sin 3x + 3\sin 2x$, pa dobimo

$$\begin{aligned} u_t(x,0) &= A_1 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos(\sqrt{n^2-1}t)\sqrt{n^2-1}\sin nx\Big|_{t=0} \\ &= A_1 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sqrt{n^2-1}\sin nx = 2\sin 3x + 3\sin 2x, \end{aligned}$$

od koder sledi $A_2\sqrt{3} = 3$, $A_3\sqrt{8} = 2$ in $A_n = 0$ za ostale n. Dobimo $A_2 = \sqrt{3}$ in $A_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Končna rešitev je tako

$$u(x,t) = \sin x + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{8}t)\sin 3x.$$

4. Dana je funkcija $f \in L^1([-1,1])$, $f(x) = x^3 - x$.

   (a) Razvij f po Legendrovih polinomih.

   (b) Za $|a| < 1$ izračunaj $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-2ax+a^2}}\,dx$. (Namig: rodovna funkcija.)

Rešitev: (a) S pomočjo Bonnetove formule izračunamo $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ in $P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, od koder izrazimo $x^3 = \frac{2}{5}(P_3 + \frac{3}{2}x) = \frac{2}{5}P_3 + \frac{3}{5}x$ in $f(x) = x^3 - x = \frac{2}{5}P_3 - \frac{2}{5}x = \frac{2}{5}(P_3 - P_1)$.
(b) Upoštevamo $\frac{1}{\sqrt{1-2ax+a^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)a^n$, zgoraj izračunan razvoj funkcije f ter ortogonalnost Legendrovih polinomov in dobimo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{\frac{2}{5}(P_3(x) - P_1(x))}{\sqrt{1-2ax+a^2}}\,dx &= \frac{2}{5}\int_{-1}^{1} (P_3(x) - P_1(x)) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)a^n\,dx \\ &= \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(\int_{-1}^{1} P_3(x)P_n(x)\,dx - \int_{-1}^{1} P_1(x)P_n(x)\,dx \right) \\ &= \frac{2}{5}\left(a^3 \cdot \frac{2}{2\cdot 3+1} - a \cdot \frac{2}{2\cdot 1+1} \right) = \frac{4a^3}{35} - \frac{4a}{15}. \end{aligned}$$

2. izpit 2018/19

1. S pomočjo izreka o ostankih izračunaj
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}.$$

Rešitev: Definiramo $f(z) = \frac{1}{(z^2-4z+5)^2}$. Ničli imenovalca sta $2 \pm i$, torej je $f(z) = \frac{1}{(z-2+i)^2(z-2-i)^2}$. Funkcijo f integriramo po robu zgornjega polkroga s polmerom R. Znotraj tega kroga je le singularnost $z = 2+i$, torej je po izreku o ostankih
$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2+i),$$
kjer γ označuje (pozitivno orientirano) zgornjo polovico krožnice $|z| = R$. Prvi integral limitira proti integralu, ki ga računamo. Drugi integral limitira proti 0, saj je stopnja imenovalca v funkciji f za 4 večja od stopnje števca. (Po izreku s predavanj sklep velja, če je stopnja vsaj za 2 večja. Da integral limitira proti 0, pa lahko dokažemo tudi neposredno z ocenjevanjem integrala.) Izračunamo še ostanek
$$\operatorname{Res}(f, 2+i) = \frac{1}{1!}\left(\tfrac{1}{(z-2+i)^2}\right)'(2+i) = -\frac{2}{(z-2+i)^3}\bigg|_{z=2+i} = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}.$$
Rezultat je tako
$$2\pi i \cdot \Big(-\frac{i}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Naj bo $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija in a realno število. Dokaži, da je potem tudi funkcija $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dana s predpisom $v(x,y) = u(ax+y, x-ay)$, harmonična.

Rešitev: Za lažjo notacijo označimo argumente funkcije u s s in t, torej $u = u(s,t)$. Računamo
$$\frac{d^2}{dx^2} u(s(x,y), t(x,y)) + \frac{d^2}{dy^2} u(s(x,y), t(x,y)),$$
kjer je $s(x,y) = ax+y$ in $t(x,y) = x-ay$. Zaradi preglednosti bomo argumente v notaciji opuščali, parcialne odvode pa označevali z indeksi. S posrednim odvajanjem dobimo
$$\frac{du}{dx} = u_s \cdot \frac{ds}{dx} + u_t \cdot \frac{dt}{dx} = au_s + u_t$$
in
$$\frac{du}{dy} = u_s \cdot \frac{ds}{dy} + u_t \cdot \frac{dt}{dy} = u_s - au_t.$$
Odvajamo še drugič:
$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2} &= a\frac{d}{dx}u_s + \frac{d}{dx}u_t = a\Big(u_{ss}\cdot\frac{ds}{dx} + u_{st}\cdot\frac{dt}{dx}\Big) + u_{ts}\cdot\frac{ds}{dx} + u_{tt}\cdot\frac{dt}{dx}\\ &= a(au_{ss} + u_{st}) + au_{ts} + u_{tt} = a^2u_{ss} + 2au_{st} + u_{tt}\end{aligned}$$
in
$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dy^2} &= \frac{d}{dy}u_s - a\frac{d}{dy}u_t = u_{ss}\cdot\frac{ds}{dy} + u_{st}\cdot\frac{dt}{dy} - a\Big(u_{ts}\cdot\frac{ds}{dy} + u_{tt}\cdot\frac{dt}{dy}\Big)\\ &= u_{ss} - au_{st} - a(u_{ts} - au_{tt}) = u_{ss} - 2au_{st} + a^2u_{tt}.\end{aligned}$$
Ko seštejemo, dobimo
$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = a^2(u_{ss} + u_{tt}) + u_{ss} + u_{tt}.$$
Ta izraz pa je nič, saj je $u_{ss} + u_{tt} = 0$, ker je u harmonična.

3. Poišči rešitev $u(x,y) : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ parcialne diferencialne enačbe $u_{xx} + 4u_{yy} = 0$ pri robnih pogojih

$$u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = y, \quad u(x,0) = \sin(\pi x), \quad u(x,1) = x.$$

Nasvet: določi konstanto a, tako da bosta po uvedbi nove neznanke $v(x,y) = u(x,y) + axy$ prva dva robna pogoja homogena.

Rešitev: Prvi robni pogoj za funkcijo v je $v(0,y) = u(0,y) + a \cdot 0 \cdot y = u(0,y) = 0$, drugi pa $v(1,y) = u(1,y) + a \cdot 1 \cdot y = y + ay$. Če želimo, da bo drugi pogoj enak 0, postavimo $a = -1$. Nova spremenljivka je tako $v = u - xy$. Prva dva robna pogoja sta $v(0,y) = v(1,y) = 0$, tretji pogoj je $v(x,0) = u(x,0) - x \cdot 0 = \sin(\pi x)$, četrti pa $v(x,1) = u(x,1) - x \cdot 1 = x - x = 0$. Ker je $u_{xx} = v_{xx}$ in $u_{yy} = v_{yy}$, je diferencialna enačba nespremenjena: $v_{xx} + 4v_{yy} = 0$.

Z metodo separacije $v = X(x)Y(y)$ dobimo

$$\frac{X''}{X} = -4\frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

kjer je λ realna konstanta. Najprej rešujemo enačbo za X. Iz prvih dveh robnih pogojev dobimo $X(0) = X(1) = 0$. Kot vedno se prepričamo, da ima enačba $\frac{X''}{X} = \lambda$ pri teh dveh pogojih netrivialne rešitve le za $\lambda < 0$, kjer dobimo rešitve $\lambda_n = -(n\pi)^2$ in $X_n = \sin(n\pi x)$. Rešimo še enačbo $-4\frac{Y''}{Y} = \lambda = -(n\pi)^2$. Enačbo preoblikujemo v $Y'' = (\frac{n\pi}{2})^2 Y$, ki ima rešitve $Y_n = A_n \cosh(\frac{n\pi y}{2}) + B_n \sinh(\frac{n\pi y}{2})$. Končna rešitev je tako

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh(\frac{n\pi y}{2}) + B_n \sinh(\frac{n\pi y}{2})) \sin(n\pi x).$$

Tretji robni pogoj za v nam da

$$v(x,0) = \sin(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x),$$

od koder dobimo $A_1 = 1$ in $A_n = 0$ za $n \geq 2$. Zadnji robni pogoj pa nam da

$$v(x,1) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh(\frac{n\pi}{2}) + B_n \sinh(\frac{n\pi}{2})) \sin(n\pi x),$$

od koder dobimo $A_n \cosh(\frac{n\pi}{2}) + B_n \sinh(\frac{n\pi}{2}) = 0$ za vsak n. Torej je $B_n = 0$ za $n \geq 2$ in $\cosh(\frac{\pi}{2}) + B_1 \sinh(\frac{\pi}{2}) = 0$, od koder sledi $B_1 = -\frac{\cosh(\frac{\pi}{2})}{\sinh(\frac{\pi}{2})}$. Končna rešitev je tako

$$u(x,y) = (\cosh(\frac{\pi y}{2}) - \frac{\cosh(\frac{\pi}{2})}{\sinh(\frac{\pi}{2})} \sinh(\frac{\pi y}{2})) \sin(\pi x) + xy.$$

4. Določi Fourierovo transformacijo funkcije $f(x) = (\frac{\sin x}{x})^2$ in nariši njen graf. (Namig: lahko uporabiš formulo $\widehat{fg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} * \hat{g}$, ki velja tudi za L^2 funkcije.)

Z vaj vemo, da ima karakteristična funkcija $\chi_{[-1,1]}$ intervala $[-1,1]$ transformiranko

$$\widehat{\chi_{[-1,1]}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

Ker je $\chi_{[-1,1]}$ soda funkcija, po formuli za inverzno transformacijo sledi

$$\widehat{\frac{\sin x}{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{[-1,1]}.$$

Opomba: Funkcija $\frac{\sin x}{x}$ ni v razredu $L^1(\mathbb{R})$, ampak le v razredu $L^2(\mathbb{R})$. S predavanj pa vemo, da lahko definiramo Fourierovo transformacijo takšnih funkcij kot limito funkcij iz $L^1(\mathbb{R})$ v Hilbertovem prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Če zdaj uporabimo formulo v namigu, dobimo

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{\frac{\sin x}{x}} * \widehat{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}^2 \chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}.$$

Torej moramo določiti funkcijo $\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}$. Po definiciji je

$$(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(t)\chi_{[-1,1]}(x-t)dt = \int_{-1}^{1} \chi_{[-1,1]}(x-t)dt.$$

Po uvedbi nove spremenljivke $s = x - t$ ta integral postane

$$\int_{x-1}^{x+1} \chi_{[-1,1]}(s)ds,$$

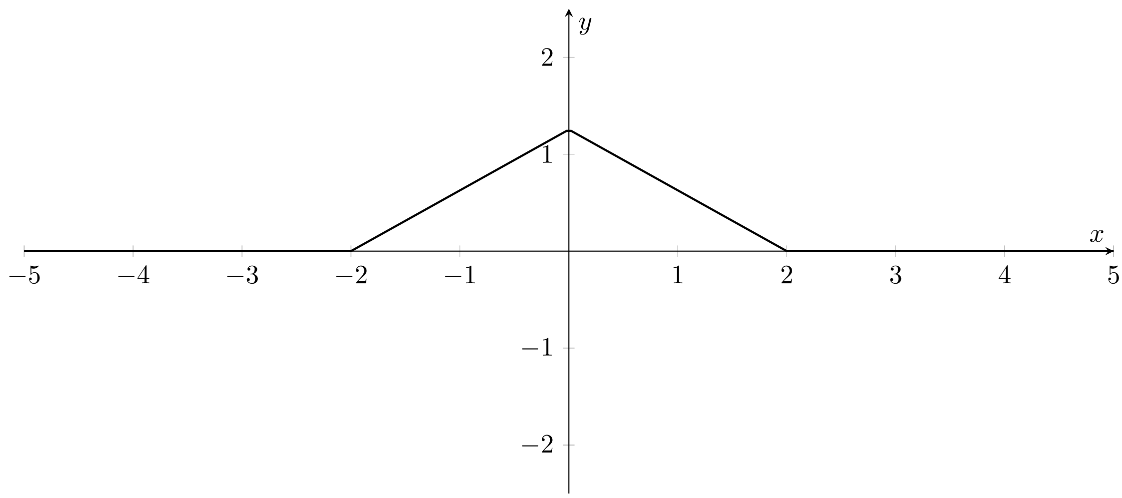
to pa je ravno dolžina preseka $[x-1, x+1] \cap [-1, 1]$ (oziroma 0, če se intervala ne prekrivata). Za $x < -2$ in $x > 2$ je presek prazen, za $0 \le x \le 2$ je enak $[x-1, 1]$ ter za $-2 \le x \le 0$ enak $[-1, x+1]$. Torej je

$$\int_{x-1}^{x+1} \chi_{[-1,1]}(s)ds = \begin{cases} 0 & ; \ |x| \ge 2 \\ 2-x & ; \ 0 \le x \le 2 \\ x+2 & ; \ -2 \le x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & ; \ |x| \ge 2 \\ 2-|x| & ; \ |x| \le 2 \end{cases} = \max\{0, 2-|x|\}.$$

Ko rezultat pomnožimo s konstanto $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, dobimo končni rezultat:

$$\hat{f}(\omega) = \max\{0, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2-|\omega|)\}.$$

Graf te funkcije je naslednji:



3. izpit 2018/19

1. Določi konstanto $a \in \mathbb{R}$, tako da bo $u(x,y) = x^4 + y^4 + ax^2y^2$ realni del neke holomorfne funkcije $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Določi še funkcijo f.

   Rešitev: Funkcija u mora biti harmonična. Ko odvajamo, dobimo $u_{xx} + u_{yy} = 12x^2 + 2ay^2 + 12y^2 + 2ax^2$. Ko enačimo z 0, dobimo $(12 + 2a)(x^2 + y^2) = 0$. Ker to velja za vsak $x, y \in \mathbb{R}$, sledi $a = -6$, torej $u = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$.

   Pišimo $f = u + iv$. Iz Cauchy-Riemannovih enačb sledi $v_y = u_x = 4x^3 - 12xy^2$, torej

   $$v = \int (4x^3 - 12xy^2)dy = 4x^3y - 4xy^3 + C(x).$$

   Iz druge enačbe $v_x = -u_y$ pa dobimo $12x^2y - 4y^3 + C'(x) = -4y^3 + 12x^2y$. Torej $C'(x) = 0$ in je $C(x) = C$ konstanta. Rešitev je $f(x+iy) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 4ix^3y - 4ixy^3 + Ci = (x+iy)^4 + Ci$ oziroma $f(z) = z^4 + Ci$, $C \in \mathbb{R}$.

2. Dana je funkcija

   $$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(e^{\frac{z\pi}{4}} - 1)}.$$

   (a) Določi residuum funkcije f v točki $z = 2i$ in $z = 0$.

   (b) Naj bo γ pot v $\mathbb{C}$, dana s parametrizacijo

   $$\gamma(t) = 3\cos t + 3i \sin t + 2i, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

   Izračunaj $\oint_\gamma f(z)dz$.

   Rešitev: (a) Ker obstaja limita

   $$\lim_{z\to 2i} f(z)(z-2i) = \lim_{z\to 2i} \frac{z-2i}{(z-2i)(z+2i)(e^{\frac{z\pi}{4}} - 1)} = \frac{1}{4i(i-1)} = \frac{i-1}{8},$$

   je $\mathrm{Res}(f, 2i)$ enak tej limiti. Podobno, ker obstaja limita

   $$\lim_{z\to 0} f(z)z = \lim_{z\to 0} \frac{z}{(z^2+4)(e^{\frac{z\pi}{4}} - 1)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2z(e^{\frac{z\pi}{4}} - 1) + (z^2+4)e^{\frac{z\pi}{4}}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\pi},$$

   je $\mathrm{Res}(f, 0)$ enak tej limiti.

   (b) Singularnosti funkcije f so tam, kjer je $z^2 + 4 = 0$ (torej v $z = \pm 2i$) in kjer je $e^{\frac{z\pi}{4}} - 1$ (torej $\frac{z\pi}{4} = 2k\pi i$ oziroma $z = 8ki$, $k \in \mathbb{Z}$). Znotraj krivulje γ (krožnica s središčem $2i$ in polmerom 3) sta le singularnosti $z = 2i$ in $z = 0$. Torej je

   $$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f, 2i) + \mathrm{Res}(f, 0)) = 2\pi i(\frac{i-1}{8} + \frac{1}{\pi}) = -\frac{\pi(1+i)}{4} + 2i.$$

3. Poišči vse funkcije $y(z)$, ki na zarezani okolici točke $z_0 = 0$ zadoščajo diferencialni enačbi

   $$z^2y'' + z(z+1)y' - y = 0.$$

   Rešitev: V enačbo vstavimo nastavek $y = \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+r}$, $a_0 \neq 0$. Ko odvajamo, dobimo

   $$z^2 \sum_{n\geq 0} a_n(n+r)(n+r-1)z^{n+r-2} + z(z+1)\sum_{n\geq 0} a_n(n+r)z^{n+r-1} - \sum_{n\geq 0} a_n z^{n+r} = 0.$$

   Enačbo preuredimo (srednji člen zapišemo kot dve vsoti) in delimo z z^r:

   $$\sum_{n\geq 0} a_n(n+r)(n+r-1)z^n + \sum_{n\geq 0} a_n(n+r)z^n + \sum_{n\geq 0} a_n(n+r)z^{n+1} - \sum_{n\geq 0} a_n z^n = 0.$$

   Zdaj primerjamo koeficiente. Pred potenco z^0 dobimo $a_0r(r-1) + a_0r - a_0 = 0$, od koder sledi $r(r-1) + r - 1 = 0$ oziroma $r = \pm 1$.

Predpostavimo najprej $r=-1$. Pred potenco z^k za $k \geq 1$ dobimo $a_k(k-1)(k-2)+a_k(k-1)+a_{k-1}(k-2)-a_k=0$, kar se poenostavi v $a_k k(k-2)+a_{k-1}(k-2)=0$. Iz te enačbe dobimo zvezo

$$a_k = -\frac{a_{k-1}}{k},$$

ki velja za vse k razen za $k=2$. Iz zveze izrazimo $a_1=-a_0$, $a_3=-\frac{a_2}{3}$, $a_4=-\frac{a_3}{4}=\frac{a_2}{4\cdot 3}$, $a_5=-\frac{a_4}{5}=-\frac{a_2}{5\cdot 4\cdot 3}$, ... (ker je a_2 poljuben, na ta način dobimo obe neodvisni rešitvi). Torej je končna rešitev

$$y(z)=z^{-1}(a_0-a_0z+a_2z^2-\frac{a_2}{3}z^3+\frac{a_2}{4\cdot 3}z^4 \mp \cdots).$$

Prva dva člena pišemo posebej, v ostalih pa prepoznamo eksponentno funkcijo e^{-z} (brez prvih dveh členov in pomnoženo z 2). Torej je $y(z)=a_0z^{-1}(1-z)+2a_2z^{-1}(-1+z+e^{-z})$. Izraz $2a_2z^{-1}(-1+z)$ lahko pridružimo prvemu členu, faktor 2 pa skrijemo v konstanto. Splošna rešitev je tako

$$y(z)=\tilde{a}_0(z^{-1}-1)+\tilde{a}_2z^{-1}e^{-z}.$$

4. Naj bo $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorfna funkcija, za katero velja $|f(z)| \leq |z|$ za vsak $z \in \mathbb{C}$. Dokaži, da je f oblike $f(z)=az$, kjer je $|a| \leq 1$.

   Rešitev: Funkcijo f zapišemo kot vrsto $f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$. Ko v dano neenakost vstavimo $z=0$, dobimo $f(z)=0$, torej je $a_0=0$. Torej je $f(z)=z(a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots)$ oziroma $f(z)=zg(z)$, kjer je $g(z)=a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots$ cela funkcija. Iz neenakosti $|zg(z)| \leq |z|$ dobimo $|g(z)| \leq 1$ za vse $z \neq 0$. Torej je funkcija $|g|$ omejena in po Liouvillovem izreku sledi, da je $g(z)=a$, kjer je a konstanta, ki mora zaradi $|g(z)| \leq 1$ zadoščati $|a| \leq 1$. Torej je res $f(z)=az$.

Poskusni 1. kolokvij 2019/20

1. Razvij funkcijo
$$f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)(2iz^2-1)}$$
v Laurentovo vrsto okrog točke $z_0 = 0$, ki bo konvergirala vsaj za $|z| > 5$. Kaj je dejansko območje konvergence dobljene vrste?

Rešitev: Ko izraz $\frac{1}{(z^2-1)(2iz^2-1)}$ razstavimo na parcialne ulomke, dobimo
$$f(z) = \frac{1}{z(1-2i)}\Big(-\frac{1}{z^2-1} + \frac{2i}{2iz^2-1}\Big) = \frac{1+2i}{5z}\Big(-\frac{1}{z^2-1} + \frac{2i}{2iz^2-1}\Big).$$
Prvi ulomek v števcu in imenovalcu delimo z z^2, drugega pa z $2iz^2$, nato pa oba člena razvijemo v geometrijsko vrsto:
$$f(z) = \frac{1+2i}{5z}\Big(-\frac{\frac{1}{z^2}}{1-\frac{1}{z^2}} + \frac{\frac{1}{z^2}}{1-\frac{1}{2iz^2}}\Big) = \frac{1+2i}{5z^3}\Big(-(1+\tfrac{1}{z^2}+\tfrac{1}{z^4}+\cdots)+1+\tfrac{1}{2iz^2}+\tfrac{1}{(2iz^2)^2}+\cdots\Big).$$
Prva vrsta konvergira za $|\frac{1}{z^2}| < 1$ oziroma $|z| > 1$, druga pa za $|\frac{1}{2iz^2}| < 1$ oziroma $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ko člene združimo, torej dobimo
$$f(z) = \frac{1+2i}{5}\Big(\Big(-1+\frac{1}{2i}\Big)z^{-5} + \Big(-1+\frac{1}{(2i)^2}\Big)z^{-7} + \Big(-1+\frac{1}{(2i)^3}\Big)z^{-9} + \cdots\Big),$$
območje konvergence pa je $|z| > 1$.

2. S pomočjo izreka o ostankih izračunaj
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{(x^2+1)(x-i)}\,dx.$$

Rešitev: S pomočjo uvedbe nove spremenljivke $t = 2x$ se integral v nalogi prevede na integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4e^{it}}{(t^2+4)(t-2i)}\,dt.$$
Definiramo funkcijo $f(z) = \frac{4e^{iz}}{(z^2+4)(z-2i)} = \frac{4e^{iz}}{(z-2i)^2(z+2i)}$. Ta ima v zgornji polravnini singularnost le v točki $2i$. V tej točki ima pol 2. stopnje, zato je
$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \frac{1}{1!}\Big(\frac{4e^{iz}}{z+2i}\Big)'(2i) = \frac{4ie^{iz}(z+2i) - 4e^{iz}}{(z+2i)^2}\Big|_{z=2i} = \frac{5}{4e^2}.$$
Rezultat je tako
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i) = 2\pi i \cdot \frac{5}{4e^2} = \frac{5\pi i}{2e^2}.$$

3. Naj bo $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takšna harmonična funkcija, da je tudi u^n harmonična za neko naravno število $n \geq 2$. Dokaži, da je u konstantna funkcija.

Rešitev: Zaradi lažjega označevanja bomo parcialne odvode označili z indeksi. Izračunamo
$$(u^n)_x = nu^{n-1}u_x$$
in odtod
$$(u^n)_{xx} = n(u^{n-1})_x u_x + nu^{n-1}u_{xx} = n(n-1)u^{n-2}u_x^2 + nu^{n-1}u_{xx}.$$
Podobno dobimo za $(u^n)_{yy}$ in $(u^n)_{zz}$. Ko člene združimo in upoštevamo $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = 0$, dobimo
$$\begin{aligned}\Delta(u^n) &= (u^n)_{xx} + (u^n)_{yy} + (u^n)_{zz}\\ &= n(n-1)u^{n-2}(u_x^2+u_y^2+u_z^2) + nu^{n-1}(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) = n(n-1)u^{n-2}(u_x^2+u_y^2+u_z^2).\end{aligned}$$

Po predpostavki je ta izraz enak 0. Odtod sledi, da v vsaki točki $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ velja $u^{n-2}(\vec{r}) = 0$ (in odtod $u(\vec{r}) = 0$) ali $u_x(\vec{r})^2 + u_y(\vec{r})^2 + u_z(\vec{r})^2 = 0$ (in odtod $u_x(\vec{r}) = u_y(\vec{r}) = u_z(\vec{r}) = 0$ ali krajše $\nabla u(\vec{r}) = 0$).

Denimo, da velja $\nabla u(\vec{r}_0) \neq 0$ za nek $\vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$. Potem velja $\nabla u(\vec{r}) \neq 0$ na neki okolici točke $\vec{r}_0$ (saj je ∇u zvezna funkcija). Na tej okolici mora torej veljati $u(\vec{r}) = 0$. To pa pomeni, da je ∇u ničelna funkcija na tej okolici, kar je protislovje. Dokazali smo torej, da je $\nabla u(\vec{r}) = 0$ za vsak $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, torej je u konstantna funkcija.

4. Naj bo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ cela funkcija brez kompleksnih ničel, za katero velja

$$|f(z)| \leq |f(\bar{z})|$$

za vsak $z \in \mathbb{C}$. Dokaži, da obstaja takšno kompleksno število c z absolutno vrednostjo 1, da je $ca_n \in \mathbb{R}$ za vsak $n \geq 0$. (Namig: Liouvillov izrek. Funkcija $f(\bar{z})$ ni nujno holomorfna. Kaj pa njena konjugiranka?)

Rešitev: Z vaj vemo, da je $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ holomorfna funkcija, saj je njen razvoj $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n$. Velja

$$|f(z)| \leq |f(\bar{z})| = |\overline{f(\bar{z})}| = |g(z)|.$$

Funkcija g je brez ničel, torej lahko izraz delimo in dobimo

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq 1,$$

od koder po Liouvillovem izreku sledi

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \alpha$$

za neko konstanto $\alpha \in \mathbb{C}$. Ko enačbo nazaj pomnožimo, dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \bar{a}_n z^n.$$

Odtod sledi $a_n = \alpha \bar{a}_n$ za vsak n. Torej je $|a_n| = |\alpha| \cdot |a_n|$, kar pomeni bodisi $a_n = 0$ za vsak n bodisi $|\alpha| = 1$. Prva možnost odpade, saj je f neničelna funkcija. Torej je $|\alpha| = 1$.

Vsako kompleksno število lahko zapišemo kot kvadrat. Pišimo torej $\bar{\alpha} = c^2$. Potem je $a_n = \bar{c}^2 \bar{a}_n$. Ko enačbo pomnožimo s c (in upoštevamo $|c| = 1$), dobimo $ca_n = \overline{ca_n}$, kar pomeni, da je ca_n realno število. Ker je $|c| = 1$, je s tem naloga rešena.

Predizpit 2019/20

1. Na kompleksni polravnini $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ je dana funkcija

$$f(x+iy) = \frac{\sin x + i \operatorname{sh} y}{\cos x + \operatorname{ch} y}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

   (a) Preveri, da je f holomorfna na Ω.

   (b) Poišči vse rešitve $z \in \mathbb{C}$ enačbe $f(z) = 1$.

Rešitev: Holomorfnost lahko preverimo s Cauchy-Riemannovimi enačbami. Rešimo še enačbo $f(z) = 1$. Pišimo $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Iz $\frac{\sin x + i \operatorname{sh} y}{\cos x + \operatorname{ch} y} = 1$ dobimo $\sin x + i \operatorname{sh} y = \cos x + \operatorname{ch} y$. Ko primerjamo imaginarna dela, dobimo $\operatorname{sh} y = 0$, torej $y = 0$. Iz primerjave realnih delov pa dobimo $\sin x = \cos x + \operatorname{ch} y$, torej $\sin x = \cos x + 1$. Ko to enačbo kvadriramo in poenostavimo, dobimo $2\cos x + 2\cos^2 x = 0$, torej $\cos x = -1$ ali $\cos x = 0$. Prva možnost odpade, saj funkcija f v imenovalcu ne sme imeti nič. Druga možnost pa nam da $\sin x = \cos x + 1 = 1$, torej $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Rešitve so torej $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. S pomočjo izreka o ostankih izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + ix + 2)^3}.$$

Rešitev: Razcepimo $x^2 + ix + 2 = (x + 2i)(x - i)$ in uporabimo formulo za uporabo izreka o ostankih za funkcijo $f(z) = \frac{1}{(z+2i)^3(z-i)^3}$ (ta ima v neskončnosti ničlo stopnje vsaj 2 in nima singularnosti na realni osi). Na zgornji polravnini ima funkcija f singularnost le v točki i, torej je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

Ker ima funkcija f v i pol tretje stopnje, je

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \to i} \left(f(z)(z-i)^3\right)'' = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(z+2i)^3}\Big)''\Big|_{z=i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-3)(-4)}{(z+2i)^5}\Big|_{z=i} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{(3i)^5} = \frac{6}{3^5 i} = \frac{2}{3^4 i}. \end{aligned}$$

Torej je integral enak

$$2\pi i \cdot \frac{2}{3^4 i} = \frac{4\pi}{81}.$$

3. Po Hermitovih polinomih razvij funkcijo $f(x) = (2x+1)^2$ in s pomočjo razvoja izračunaj integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 e^{-x^2} dx.$$

Pomoč: $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} (\frac{d}{dz})^n e^{-z^2}$, $H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z)$, $\sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{t^n}{n!} = e^{2zt - t^2}$,
$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$

Rešitev: S pomočjo Rodriguesove formule izračunamo $H_0(z) = 1$ in $H_1(z) = 2z$, za H_2 pa lahko uporabimo npr. rekurzivno formulo in dobimo $H_2(z) = 4z^2 - 2$. Torej po hitrem premisleku lahko zapišemo $f(x) = 4x^2 + 4x + 1 = H_2(x) + 2H_1(x) + 3H_0(x)$. Integral pa je enak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (H_2(x) + 2H_1(x) + 3H_0(x))^2 e^{-x^2} dx.$$

Ko oklepaj v integralu kvadriramo, mešani členi zaradi ortogonalnosti odpadejo. Torej dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} (H_2(x)^2 + 4H_1(x)^2 + 9H_0(x)^2) e^{-x^2} dx.$$

Ko upoštevamo še enkrat formulo $\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$, dobimo, da je ta izraz enak

$$2^2 \cdot 2! \sqrt{\pi} + 4 \cdot 2^1 \cdot 1! \sqrt{\pi} + 9 \cdot 2^0 \cdot 0! \sqrt{\pi} = 8\sqrt{\pi} + 8\sqrt{\pi} + 9\sqrt{\pi} = 25\sqrt{\pi}.$$

4. Naj bo J_n n-ta Besselova funkcija. Dokaži, da za vsako kompleksno število z velja

$$\cos z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z) \qquad \text{in} \qquad \sin z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(z).$$

(Namig: uporabi rodovno funkcijo, pri čemer vstavi $t = i$ in $t = -i$.)

Rešitev: Ko v rodovno funkcijo $\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)t^n = e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}$ vstavimo $t = i$, dobimo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)i^n = e^{\frac{z}{2}(i-\frac{1}{i})} = e^{\frac{z}{2}\cdot 2i} = e^{zi}.$$

Podobno, ko vstavimo $t = -i$, dobimo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)(-i)^n = e^{-zi}.$$

Torej je

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)(i^n + (-i)^n).$$

Za lihe n velja $i^n + (-i)^n = 0$, torej zgornja vsota teče le po sodih n. Ko vsoto preindeksiramo z $n = 2m$ in upoštevamo $i^n + (-i)^n = 2i^n = 2(-1)^m$, dobimo

$$\cos z = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} J_{2m}(z)\cdot 2(-1)^m = \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_{2m}(z)(-1)^m.$$

Podobno je

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = \frac{1}{2i}\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z)(i^n - (-i)^n).$$

Tu so nič vsi členi za sode n, za lihe pa po preindeksiranju $n = 2m+1$ dobimo $i^n - (-i)^n = 2i^n = 2i(-1)^m$, od koder podobno kot prej sledi tudi formula za $\sin z$.

1. izpit 2019/20

1. Razvij funkcijo $f(z) = \frac{3}{z^2+z-2} + z^2$ v Laurentovo vrsto okrog točke 0 na primernem kolobarju, tako da bo vrsta konvergirala za $|z| = 5$. Kaj je konvergenčno območje dobljene vrste?

   Rešitev: Ulomek $\frac{3}{z^2+z-2} = \frac{3}{(z-1)(z+2)}$ razcepimo na parcialna ulomka in dobimo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{3}{(z-1)(z+2)} + z^2 = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} + z^2 = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} - \frac{\frac{1}{z}}{1+\frac{2}{z}} + z^2 \\ &= \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) - \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} \pm \cdots\right) + z^2 \\ &= z^2 + (1+2)z^{-2} + (1-4)z^{-3} + (1+8)z^{-4} + (1-16)z^{-5} + \cdots . \end{aligned}$$

   Prva od obeh geometrijskih vrst konvergira za $|z| > 1$, druga pa za $|z| > 2$, torej je konvergenčno območje končne vrste $|z| > 2$.

2. S pomočjo izreka o ostankih izračunaj

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + i}.$$

   Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $z = e^{ix}$, $dz = ie^{ix}dx = izdx$. Izrazimo $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2}$ in dobimo

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x + i} = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\frac{z+z^{-1}}{2} + i} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2iz + 1}.$$

   Ta integral izračunamo z izrekom o ostankih. Ničli imenovalca v integralu sta $z_{1,2} = \frac{-2i\pm\sqrt{-8}}{2} = -i \pm \sqrt{2}i$. Od teh dveh znotraj krožnice leži le $z = -i + \sqrt{2}i$, torej je

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2iz + 1} &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+i+\sqrt{2}i)(z+i-\sqrt{2}i)}, -i + \sqrt{2}i\right) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{z+i+\sqrt{2}i}\bigg|_{z=-i+\sqrt{2}i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

   Rezultat je torej

$$\frac{2}{i} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} = -\pi i\sqrt{2}.$$

3. Poišči vse funkcije $u(x,t) : [0,\pi] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo parcialni diferencialni enačbi $u_t = u_{xx}$ pri robnih pogojih $u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$. Poišči še tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $u(x,0) = \sin\frac{x}{2}$.

   Rešitev: V enačbo in robna pogoja vstavimo nastavek $u = X(x)T(t)$. Dobimo $XT' = X''T$ in $X(0) = X'(\pi) = 0$. V diferencialni enačbi ločimo spremenljivke:

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda.$$

   Najprej rešujemo enačbo $X'' = \lambda X$. Za $\lambda > 0$ je $X = A\cosh\sqrt{\lambda}x + B\sinh\sqrt{\lambda}x$. Ko odvajamo in vstavimo pogoja $X(0) = X'(\pi) = 0$, dobimo $A = B = 0$. Podobno za $\lambda = 0$ dobimo $X = Ax + B$. Ko vstavimo robna pogoja, ponovno dobimo $A = B = 0$. Preostane nam torej še možnost $\lambda < 0$. V tem primeru je $X = A\sin\sqrt{-\lambda}x + B\cos\sqrt{-\lambda}x$. Vstavimo $X(0) = 0$ in dobimo $B = 0$. Lahko torej izberemo $A = 1$, torej $X = \sin\sqrt{-\lambda}x$. Odvajamo $X' = \sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}x$ in vstavimo $X'(\pi) = 0$. Dobimo $\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$, torej $\sqrt{-\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}_0$. Ko enačbo delimo s π, dobimo $\sqrt{-\lambda} = k + \frac{1}{2}$. Ko izrazimo λ, dobimo lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje:

$$\lambda_k = -\left(k + \frac{1}{2}\right)^2, \qquad X_k = \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Pripadajoče rešitve enačbe $\frac{T'}{T} = \lambda_k$ pa so $T_k = C_k e^{\lambda_k t} = C_k e^{-(k+\frac{1}{2})^2 t}$. Končna rešitev je torej

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-(k+\frac{1}{2})^2 t} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x.$$

Pri danem začetnem pogoju $u(x,0) = \sin\frac{x}{2}$ dobimo

$$\sin\frac{x}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x,$$

od koder sklepamo, da je $C_k = 0$ za $k \geq 1$ in $C_0 = 1$. Torej je rešitev

$$u(x,t) = e^{-\frac{t}{4}} \sin\frac{x}{2}.$$

4. Naj bo J_n n-ta Besselova funkcija. Dokaži, da za vsak $z \in \mathbb{C}$ in vsako celo število k velja

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) J_{n+k}(z) = \delta_{k,0}.$$

Namig: izračunaj produkt rodovnih funkcij $\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z) t^n \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(z) s^n$, pri čemer namesto s vstavi primeren izraz, odvisen od t.

Rešitev: Produkt rodovnih funkcij je enak

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} J_m(z) J_n(z) t^m s^n = e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t}+s-\frac{1}{s})}.$$

Ko vstavimo $s = \frac{1}{t}$, se eksponent na desni strani izniči, na levi strani pa je $t^m s^n = t^{m-n}$, torej dobimo

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} J_m(z) J_n(z) t^{m-n} = 1.$$

Dvojno vrsto preindeksiramo glede na potenco spremenljivke t. Torej uvedemo $k = m - n$ in izrazimo $m = n + k$. Dobimo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{n+k}(z) J_n(z) \right) t^k = 1.$$

Na levi strani imamo Laurentovo vrsto v spremenljivki t, na desni pa konstanto 1. Torej so vsi členi v Laurentovi vrsti enaki 0, razen pri $k = 0$, kjer je člen enak 1. Torej je res izraz

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{n+k}(z) J_n(z)$$

enak 0 za $k \neq 0$ in 1 za $k = 0$.

2. izpit 2019/20

1. S pomočjo izreka o ostankih izračunaj
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Rešitev: Računamo realni del integrala
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx.$$
Ker je v imenovalcu polinom stopnje vsaj 1, je po formuli s predavanj ta integral enak $2\pi i$ krat vsota ostankov v vseh singularnostih funkcije $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ na zgornji polravnini. Edina takšna singularnost je $z = i$, v njej pa je ostanek enak
$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\Big(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}, i\Big) &= \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} = \frac{ie^{iz}(z+i)^2 - 2e^{iz}(z+i)}{(z+i)^4}\Big|_{z=i}\\ &= \frac{-4ie^{-1} - 4ie^{-1}}{16} = -\frac{i}{2e}.\end{aligned}$$
Torej je $I = 2\pi i \cdot (-\frac{i}{2e}) = \frac{\pi}{e}$. To število je realno, zato je to tudi vrednost integrala v nalogi.

2. Skiciraj območje
$$\Omega = \Big\{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \sqrt{2},\ \mathrm{Re}(z) > 0\Big\}$$
in poišči biholomorfno preslikavo iz Ω na zgornjo polravnino.

Rešitev: Območje Ω je krožni odsek med krožnico s središčem -1 in polmerom $\sqrt{2}$ in premico $x = 0$. Obe krivulji se sekata pod kotom $\frac{\pi}{4}$ v točkah $z = i$ in $z = -i$.

Biholomorfno preslikavo poiščemo s pomočjo Möbiusovih transformacij. Slikamo npr. $i \mapsto 0$, $0 \mapsto 1$ in $-i \mapsto \infty$; v tem primeru dobimo preslikavo $f(z) = \frac{-z+i}{z+i}$. Ta območje Ω preslika v območje med premicama $y = 0$ in $y = x$ (saj je kot med premicama enak $\frac{\pi}{4}$); iz orientacije vidimo, da gre za območje $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{4}$. S preslikavo $g(z) = z^4$ to območje raztegnemo v polravnino. Rezultat je tako preslikava
$$(g \circ f)(z) = \Big(\frac{-z+i}{z+i}\Big)^4.$$

3. S pomočjo Frobeniusove metode poišči tisto rešitev enačbe $4zy'' + 6y' - y = 0$ na zarezani okolici točke 0, ki je ni mogoče razširiti do holomorfne funkcije na okolici točke 0.

Rešitev: V enačbo vstavimo nastavek $y = z^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+r}$, $c_0 \neq 0$, in dobimo
$$4z\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)z^{n+r-2} + 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)z^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+r} = 0.$$
Ko enačbo delimo z z^r in preuredimo, dobimo
$$4\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)z^{n-1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0.$$
Primerjamo koeficiente pri posameznih potencah z. Pri z^{-1} dobimo
$$4c_0 r(r-1) + 6c_0 r = 0,$$
pri z^k za $k \geq 0$ pa
$$4c_{k+1}(k+1+r)(k+r) + 6c_{k+1}(k+1+r) - c_k = 0.$$
Iz prve enačbe dobimo $4r^2 - 4r + 6r = 0$ oziroma $2r^2 + r = 0$, kar ima rešitvi $r = 0$ in $r = -\frac{1}{2}$. Glede na navodilo naloge obravnavamo le $r = -\frac{1}{2}$. Iz druge enačbe zdaj dobimo
$$4c_{k+1}(k+\tfrac{1}{2})(k-\tfrac{1}{2}) + 6c_{k+1}(k+\tfrac{1}{2}) - c_k = 0,$$

odtod pa

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+\frac{1}{2})(4k-2+6)} = \frac{c_k}{(2k+1)(2k+2)}.$$

Izračunamo prvih nekaj členov:

$$c_1 = \frac{c_0}{2}, \quad c_2 = \frac{c_1}{3\cdot 4} = \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 4}, \quad c_3 = \frac{c_2}{5\cdot 6} = \frac{c_0}{6!}.$$

Razberemo splošni člen $c_k = \frac{c_0}{(2k)!}$. Rešitev je torej

$$y = z^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{(2n)!} z^n = \frac{c_0}{\sqrt{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!}.$$

Ob upoštevanju znanega razvoja $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ (saj je $\operatorname{ch} z$ sodi del eksponentne funkcije e^z, $\operatorname{sh} z$ pa lihi) tako dobimo

$$y = \frac{c_0}{\sqrt{z}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{z})^{2n}}{(2n)!} = \frac{c_0 \operatorname{ch}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}.$$

4. (a) Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,1], \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Dokaži, da je njena Fourierova transformiranka enaka $\hat{f}(\omega) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\Big)$.

(b) Izračunaj

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\Big)^2 dx.$$

Rešitev: (a) Po definiciji je

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} x e^{-i\omega x} dx.$$

Po integraciji per partes in vstavljanju mej dobimo

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega} + e^{i\omega}) - \frac{1}{(-i\omega)^2}(e^{-i\omega} - e^{i\omega})\Big).$$

Ob upoštevanju znanih formul $e^{i\omega} + e^{-i\omega} = 2\cos\omega$ in $e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2i\sin\omega$ sledi enakost iz naloge.
(b) Po Plancherelovem izreku je $\langle f, f\rangle = \langle \hat{f}, \hat{f}\rangle$, torej

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Integral na levi strani je enak $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$, na desni strani pa dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\cos\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\Big)^2 d\omega.$$

Odtod sledi, da je integral v nalogi enak $\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$.

3. izpit 2019/20

1. Razvij funkcijo $f(z) = \frac{z^7}{z^8+3z^4+2}$ v Laurentovo vrsto okrog točke 0 na kolobarju $1 < |z| < \sqrt[4]{2}$. Določi še residuum funkcije f v točki 0.

   Rešitev: S pomočjo parcialnih ulomkov dobimo

$$f(z) = \frac{z^7}{(z^4+1)(z^4+2)} = z^7\Big(\frac{1}{z^4+1} - \frac{1}{z^4+2}\Big).$$

   V imenovalcu prvega ulomka izpostavimo z^4 ter v imenovalcu drugega ulomka 2. Oba ulomka razvijemo v geometrijsko vrsto in dobimo

$$\begin{aligned} f(z) &= z^7\Bigg(\frac{1}{z^4(1+\frac{1}{z^4})} - \frac{1}{2(1+\frac{z^4}{2})}\Bigg) \\ &= z^3\Big(1 - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^8} \mp \cdots\Big) - \frac{z^7}{2}\Big(1 - \frac{z^4}{2} + \frac{z^8}{4} - \frac{z^{12}}{8} \pm \cdots\Big) \\ &= \cdots - z^{-9} + z^{-5} - z^{-1} + z^3 - \frac{z^7}{2} + \frac{z^{11}}{2^2} - \frac{z^{15}}{2^3} \pm \cdots . \end{aligned}$$

   Ker prva geometrijska vrsta konvergira za $|z| > 1$ in druga za $|z| < \sqrt[4]{2}$, je območje konvergence res $1 < |z| < \sqrt[4]{2}$.

   Ostanek (residuum) funkcije v točki 0 je koeficient razvoja okrog točke 0 pri potenci z^{-1}. Ker je območje konvergence zgornje vrste kolobar $r < |z| < R$ (kjer je $r \neq 0$) in *ne* kolobar $0 < |z| < R$, si z zgoraj izračunanim razvojem ne moremo pomagati. Vendar je naloga kljub temu preprosta, saj $z = 0$ sploh ni singularnost funkcije f, oziroma drugače rečeno, funkcija f je holomorfna na območju $|z| < 1$. Zato je $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$.

2. S pomočjo Frobeniusove metode poišči vse holomorfne funkcije v okolici točke 0, ki zadoščajo enačbi $z^2y'' + z(z+1)y' - y = 0$.

   Rešitev: Glede na to, da iščemo le holomorfne funkcije v okolici točke 0, lahko uporabimo nastavek $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Ko odvajamo in vstavimo v enačbo, dobimo

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0.$$

   Primerjamo koeficiente pri posameznih potencah z. Pri z^0 imamo $-c_0 = 0$ (torej $c_0 = 0$), pri z^1 se členi krajšajo, pri z^k za $k \geq 2$ pa imamo

$$k(k-1)c_k + (k-1)c_{k-1} + kc_k - c_k = 0.$$

   Ko izraz poenostavimo, dobimo

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{k+1}.$$

   Ko izračunamo prvih nekaj členov, dobimo

$$c_2 = -\frac{c_1}{3}, \quad c_3 = -\frac{c_2}{4} = \frac{c_1}{3 \cdot 4}, \quad c_4 = -\frac{c_3}{5} = -\frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

   Vidimo, da je splošni člen $c_k = \frac{(-1)^{k+1}2c_1}{(k+1)!}$. Torej smo dobili

$$y = c_1 x - \frac{2c_1}{3!}x^2 + \frac{2c_1}{4!}x^3 - \frac{2c_1}{5!}x^4 \pm \cdots .$$

   Rešitev lahko zapišemo z elementarnimi funkcijami. Upoštevamo, da je $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \pm \cdots$ in dobimo

$$y = \frac{2c_1}{x}\Big(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots\Big) = \frac{2c_1}{x}\Big(e^{-x} - 1 + x\Big).$$

   Pišemo lahko $c = 2c_1$ in dobimo

$$y = c\Big(\frac{e^{-x}-1}{x} + 1\Big).$$

   Dobljena funkcija je res holomorfna v točki 0, saj ima tam odpravljivo singularnost.

3. Naj bosta u in v zaporedoma realni in imaginarni del neke holomorfne funkcije f na $\mathbb{C}$. Dokaži, da je tedaj funkcija w, dana s predpisom

$$w(x,y) = u(y,-x)v(-y,x),$$

harmonična na $\mathbb{R}^2$.

Rešitev: Zaradi boljše preglednosti bomo u in v označevali kot funkciji spremenljivk s in t. Torej je $w(x,y) = u(s_1,t_1)v(s_2,t_2)$, kjer je $s_1(x,y) = y$, $t_1(x,y) = -x$, $s_2(x,y) = -y$ in $t_2(x,y) = x$. Argumente v funkcijah v spodnjem računu bomo opuščali, parcialne odvode pa bomo označili z indeksi.

Najprej izračunamo $u_x = u_s \cdot (s_1)_x + u_t \cdot (t_1)_x = u_s \cdot 0 + u_t \cdot (-1) = -u_t$ in $v_x = v_s \cdot (s_2)_x + v_t \cdot (t_2)_x = v_s \cdot 0 + v_t \cdot 1 = v_t$. Odtod dobimo

$$w_x = u_x v + u v_x = -u_t v + u v_t.$$

Podobno je $(u_t)_x = u_{ts} \cdot (s_1)_x + u_{tt} \cdot (t_1)_x = -u_{tt}$ in $(v_t)_x = v_{ts} \cdot (s_2)_x + v_{tt} \cdot (t_2)_x = v_{tt}$ in odtod

$$w_{xx} = -(u_t v)_x + (u v_t)_x = -(u_t)_x v - u_t v_x + u_x v_t + u(v_t)_x = u_{tt} v - u_t v_t - u_t v_t + u v_{tt} = u_{tt} v + u v_{tt} - 2u_t v_t.$$

S podobnim računom dobimo $w_y = u_s v - u v_s$ in odtod $w_{yy} = u_{ss} v + u v_{ss} - 2u_s v_s$. Tako je

$$w_{xx} + w_{yy} = (u_{tt} + u_{ss})v + u(v_{tt} + v_{ss}) - 2(u_t v_t + u_s v_s).$$

Ker sta u in v harmonični funkciji, prva dva člena odpadeta. V tretjem členu pa upoštevamo Cauchy-Riemannove enačbe $v_t = u_s$ in $v_s = -u_t$, iz katerih sledi $u_t v_t + u_s v_s = u_t u_s - u_s u_t = 0$. Torej se vsi členi krajšajo in je zato $w_{xx} + w_{yy} = 0$.

4. Za vsak $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiramo $f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$. Dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\widehat{f_n}(\omega) = (n-1)\widehat{f_{n-2}}(\omega) - i\omega\widehat{f_{n-1}}(\omega)$$

(pri čemer je za $n = 1$ formula mišljena kot $\widehat{f_1}(\omega) = -i\omega\widehat{f_0}(\omega)$).

Rešitev: Po Leibnizovem pravilu je

$$f_n' = nx^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}} + x^n e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = nf_{n-1} - f_{n+1}.$$

Na tej enakosti uporabimo Fourierovo transformacijo in upoštevamo pravilo $\widehat{f'}(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$. Dobimo

$$i\omega\widehat{f_n}(\omega) = n\widehat{f_{n-1}}(\omega) - \widehat{f_{n+1}}(\omega),$$

od koder izrazimo

$$\widehat{f_{n+1}}(\omega) = n\widehat{f_{n-1}}(\omega) - i\omega\widehat{f_n}(\omega).$$

Ta enakost formalno velja tudi za $n = 0$ (kjer prvi člen na desni strani pri $n = 0$ odpade). Ko namesto n pišemo $n - 1$, dobimo enakost v nalogi.

Janez Šter

ZBIRKA REŠENIH NALOG IZ MATEMATIKE 4 ZA ŠTUDENTE FIZIKE

Izdano v elektronski obliki v formatu PDF

URL: `https://www.fmf.uni-lj.si/~ster/zbirka_mat4.pdf` (prost dostop)

Cena: brezplačno

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID 69906435

ISBN 978-961-07-0650-2 (PDF)