PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **25** (1997/1998)
Številka 5
Strani 274–276

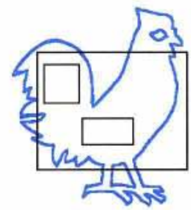
Marija Vencelj:

# MALA ŠOLA TOPOLOGIJE, 5. del

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/25/1350-Vencelj.pdf

# MALA ŠOLA TOPOLOGIJE – 5. del



Bralcem Male šole topologije dolgujemo odgovora na dve zanimivi vprašanji, zastavljeni v prejšnjih dveh številkah Preseka.

V tretji številki smo vam zastavili nalogo, da odkrijete zakonitost, ki velja za število izhodišč $I$, število lokov $L$ in število parcel $P$ poljubne ravninske risbe. Tisti, ki ste opazili, da za vsako risbo velja enakost

$$I - L + P = 2,$$

imate prav. Z uporabo te enakosti lahko uženemo marsikatero zanimivo nalogo. Za vajo poskusite z njo rešiti 2. nalogo, ki jo je v prejšnji številki v pogovoru za Presek zastavil prof. Repovš (drugačno rešitev te naloge najdete v tej številki Preseka na str. 300).

V četrti številki smo vas s problemom königsberških mostov povabili k razmišljanju, kdaj neke povezane krivulje ne bo moč narisati z eno samo potezo. Premislimo skupaj! Z izjemo začetne točke, v kateri potezo s svinčnikom začnemo, in končne točke, v kateri potezo zaključimo, morajo biti vsa izhodišča na risbi sode stopnje. Res: V tako točko pri risanju po nekem loku pridemo in po drugem (še neuporabljenem) odidemo. To pa je možno le, če izhaja iz izhodišča sodo mnogo poti. V primeru, da risanje začnemo in končamo v isti točki, mora biti tudi ta točka izhodišče sode stopnje.

To pomeni, da krivulje zanesljivo ne bo moč narisati z eno samo potezo, če bo imela več kakor dve izhodišči lihe stopnje. Očitno tudi ne more imeti enega samega izhodišča lihe stopnje. Če začetna in končna točka risanja ne sovpadata, morata biti obe točki izhodišči lihe stopnje. Natančneje velja:

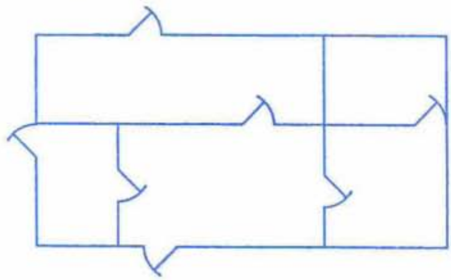
**Risbo lahko narišemo z eno samo potezo v naslednjih dveh primerih:**

1. **krivulja ima dve izhodišči lihe stopnje;**
2. **krivulja nima izhodišč lihe stopnje.**

**V vsakem primeru ima lahko krivulja poljubno število izhodišč sode stopnje.**

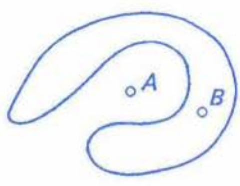
Ker ima krivulja, s katero je Euler nadomestil zemljevid königsberških mostov, štiri izhodišča lihe stopnje, je ne moremo narisati z eno potezo. **Königsberški sprehod torej ni možen.**

Zaključimo z nalogo. Slika prikazuje tloris počitniške hišice. Ali lahko izberemo obhod po hišici tako, da gremo skozi vsaka vrata natanko enkrat? Je za rešitev pomembno, kje svoj obhod začnemo?



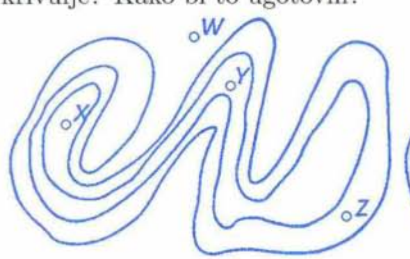
## Znotraj in zunaj

1. Na desni sliki je narisana enostavno sklenjena krivulja (tako smo rekli krivulji, ki je topološko enakovredna krožnici). Vrisani sta tudi dve točki $A$ in $B$. Pravimo, da leži točka $A$ zunaj narisane krivulje in $B$ znotraj te krivulje. Očitno v ravnini risbe ne moremo priti iz točke $A$ v točko $B$, ne da bi krivuljo prečkali.




Podobna trditev velja za vsako enostavno sklenjeno krivuljo. Iz točke zunaj krivulje lahko pridemo v točko znotraj krivulje (ali obratno) le, če krivuljo prečkamo.

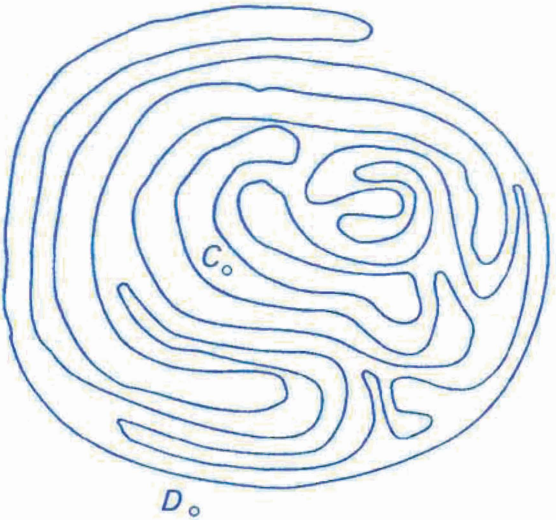
2. Tudi na spodnji levi sliki je narisana enostavno sklenjena krivulja in štiri točke $X$, $Y$, $Z$ in $W$. Ni težko opaziti, da leži točka $W$ zunaj krivulje. Kaj pa ostale tri? Ali leži tudi katera od teh treh točk zunaj krivulje? Kako bi to ugotovili?





Gotovo je ena od poti, da najdemo odgovor na to vprašanje, da notranjost krivulje obarvamo, kot smo to storili na desni od zgornjih slik. Z obarvane slike zlahka razberemo, da ležita $X$ in $Z$ znotraj, $Y$ pa zunaj krivulje.

3. Pred nami je nova risba enostavno sklenjene krivulje. Narišite jih še nekaj in poskusite najti kakšno preprosto pravilo, s katerim bi hitro ugotovili, ali neka točka leži zunaj ali znotraj krivulje.




Ni težko premisliti pravilnost naslednje trditve:

**Daljica, ki ima eno krajišče v točki zunaj enostavno sklenjene krivulje in drugo krajišče v točki znotraj te krivulje, seka krivuljo v liho mnogo točkah.**

Na zadnji sliki leži točka $D$ očitno zunaj krivulje. Če jo povežemo s točko $C$, se izkaže, da seka daljica $CD$ krivuljo v desetih točkah. Ker je deset sodo število, sledi, da tudi $C$ leži zunaj krivulje.

*Marija Vencelj*