

Dr. Alenka Lipovec,
Darja Antolin
Pedagoška fakulteta
Maribor

Vzorci

Povzetek: Predstavljena je vertikala razvoja pojma vzorec od vrtca do zadnjega trilettja osnovne šole. Učna trajektorija vrst vzorcev, ki jih vpletamo v učne situacije, se razteza od ponavljajočih se vzorcev v prvem trilettju, rastočih vzorcev, ki se pričnejo pojavljati v drugem trilettju, do zaporedij in funkcij. Navedena je pričakovana terminologija in različni primeri aktivnosti. V šolskih situacijah vzorce prepoznavamo, nadaljujemo in na njih izpeljemo posplošitve na verbalnem ali simbolnem nivoju. Vzorci se pojavljajo v matematiki, pa tudi v vsakdanjem življenju. **Ključne besede:** vzorci, gradnik, shema, algebra, zaporedje, funkcija. **Abstract:** The article is about the development of the notion of a pattern starting in the kindergarten and finishing at the end of the third cycle of the primary school. There is a great variety of patterns involved in different learning situations; repeated in the first cycle, growing in the second cycle and sequences and functions in the third cycle. The author deals with terminology and different activities. In school situation one can recognize patterns and make generalizations at verbal and symbolic level. The patterns occur in Mathematics and in everyday life as well. **Key words:** patterns, scheme, algebra, sequence, function

Uvod

Vzorci se redno pojavljajo v matematiki, ki jo včasih imenujemo tudi »znanost vzorcev in reda« (Resnik, 1981). Vzorce najdemo v konkretnih fizičnih ali geometrijskih situacijah, pa tudi v aritmetiki. V okolju lahko isti vzorec najdemo v različnih pojavnih oblikah (slika 1). Izmenjevanje dneva in noči je matematično gledano enako kot izmenjevanje rdeče in bele barve na železniški zapornici.

Slika 1: Vzorci v okolju.

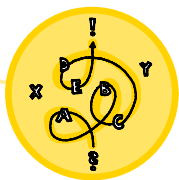


Razvoj razumevanja algebrskih struktur postopoma vpeljujemo z oblikovanjem in prepoznavanjem pravil v vzorcih (geometrijski vzorci) in z oblikovanjem številskih zaporedij (prepoznavanje in oblikovanje pravil v številskih zaporedjih, ki jih obravnavamo pri sklopu naravna števila) (Van de Walle, 2004). Ponavljajoče se vzorce otroci začnejo raziskovati že v vrtcu (Nudl, Brezočnik, Lipovec

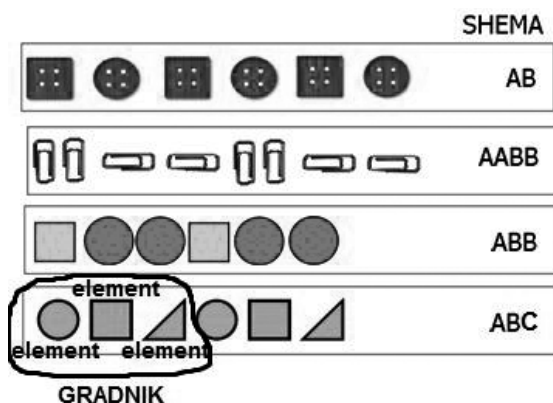
in Antolin, 2012). Preprost primer naraščajočega vzorca, ki je uporaben za mlajše šolarje, so »šotori« iz žigalic: $\Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta \Delta$. Otrokom bo pomagal pri odkrivanju relacije »podvojitve«, druge možnosti za »pomnoži z dve«.

Ponavljajoči se vzorci

Uporabljali bomo naslednje izraze, ki so ponazorjeni tudi na sliki 2. *Gradnik vzorca* je tisti del vzorca, ki se ponavlja. Sestavljen je iz najmanj dveh *elementov*. Primer: krog-kvadrat-trikotnik (gradnik), krog-kvadrat-trikotnik (gradnik), krog (element), kvadrat (element), trikotnik (element). Za lažje in hitrejše branje vzorcev lahko elemente nadomestimo s črkami. Tako bi zgoraj navedeni primer zapisali takole: ABC, ABC, ABC ... Zapis ABC bomo imenovali *shema vzorca*. Izrazov gradnik, element in shema vzorca ne uporabljamo pred otroki in jih od otrok ne zahtevamo. Namesto gradnik bomo rekli *nekaj*, kar se ponavlja, ali *del*, ki se ponavlja, namesto element pa bomo poimenovali *konkretni predmet*, zvok, gib, sliko, simbol ... Shemo poimenujemo npr. *zapis s črkami*.

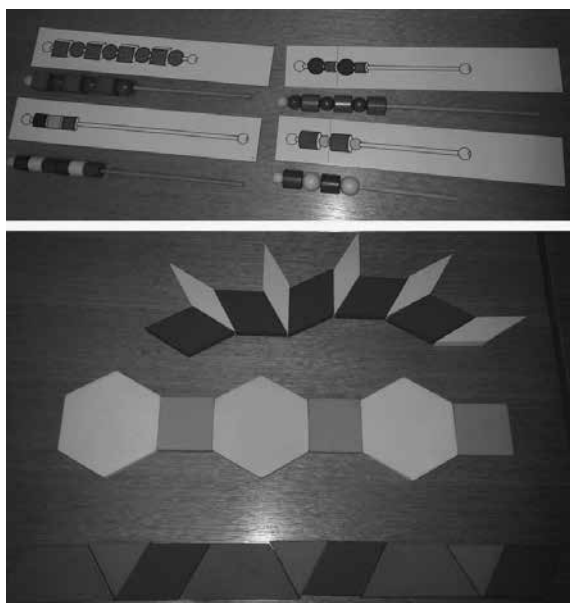


Slika 2: Primer predlog ponavljajočih se vzorcev narisanih na karton; vsak gradnik se ponovi v celoti vsaj dvakrat, pri čemer se niz ne prelomi na sredi gradnika. Kot material uporabimo gumbе, ploščice za vzorčke, sponke ...



Kadar je le možno, naj aktivnosti z vzorci vključujejo konkretni material, kajti s tem otrokom omogočamo varno okolje za nadaljevanje vzorca in eksperimentiranje. Slika 3 prikazuje nekatere najbolj tipične materiale, ki jih uporabljamo za izdelovanje vzorcev. Prikazane so ploščice za vzorčke (ang. pattern blocks) in perlice, ki jih lahko nizamo na palice ali vrvice. Materiali imajo običajno tudi predloge, ki učiteljem pomagajo pri oblikovanju aktivnosti.

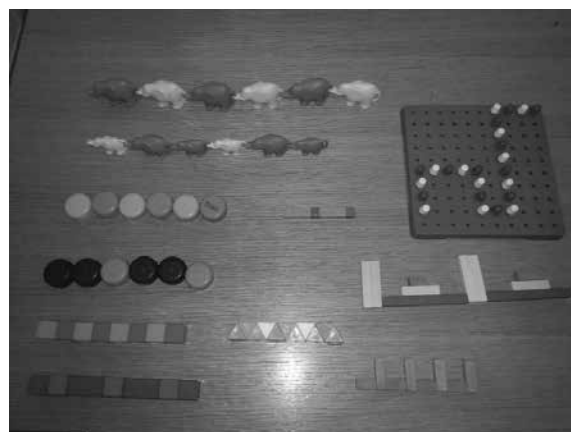
Slika 3: Perlice in ploščice za vzorčke



Za izdelovanje vzorcev lahko uporabimo tudi material, ki ga najdemo v vsaki igralnici ali učilnici in

je običajno namenjen klasifikacijskim aktivnostim. Pozorni moramo biti na to, da imamo dovolj enakih elementov, da je otrokom omogočeno večkratno ponavljanje gradnika kot je prikazano na sliki 4.

Slika 4: Vzorci, izdelani iz klasifikacijskega materiala.



Nekatera gradiva za vrtec ali nižje razrede osnovne šole ponujajo slikovne ponazoritve vzorcev kot npr. niz pobarvanih krožcev. Naloga običajno zahteva, da otrok nadaljuje barvanje. Obstajata dve bistveni razliki med tako podano nalogo in aktivnostjo, ki vključuje konkretni material (npr. nizanje barvnih perlic). Prva in najpomembnejša razlika je v tem, da pri slikovni predstavitvi aktivnost v ozadju skriva idejo »prav« in »napak«. Če otrok barva »napačno«, je sprememba barve (radiranje) dokaj težavna in lahko pri otroku vzbudi občutke nesposobnosti. Konkretni material po drugi strani otroku omogoča metodo poskusa in napake. Druga slabost slikovne predloge je omejenost s prostorom, kajti otroci vzorca ne morejo nadaljevati prek vnaprej predvidenega prostora. Večina otrok uživa v uporabi konkretnih materialov, kot so npr. barvice, gumbi ali ploščice. Večkrat jih tako lahko opazujemo, kako nizanje nadaljujejo zelo dolgo, pri čemer nastanejo vzorci, ki se raztezajo čez cele učilnice.

Koncept ponavljajočih se vzorcev in način, kako vzorec nadaljujemo, lahko celotnemu razredu predstavimo na več različnih načinov. Vzorce lahko oblikujemo vnaprej (npr. razne simbole pritr-dimo v niz na tablo, na vrvico obesimo predmete, ki oblikujejo vzorec ...). Glasbeni vzorci, kot je npr. do-mi-mi; do-mi-mi, so namenjeni temu, da se

celotni razred pridruži nadaljevanju. Gibalni vzorci kot npr. gor-dol v igri Dan in noč ali pa gibanje treh elementov pri gibanju rok v nizu gor-stran-stran-dol, gor-stran-stran-dol so lahko dobrodošel uvod. Ko je osnovna ideja ponavljajočega se vzorca jasna, učenci začnejo delo v manjših skupinah, ki bo osnova bolj učinkovitemu učenju koncepta. V skupinah naj nadaljujejo vzorce, oblikovane iz preprostih materialov. Za vsako skupino materialov učitelj na papirnati trak (cca. 5 cm x 30 cm) nariše nekaj ponovitev gradnika. Otroci morajo uporabiti konkretni material, ponoviti že narisane niz in ga nadaljevati. Za vsako skupino materialov potrebujemo 10 do 15 predlog; za celoten razred zadošča 6 do 8 takih skupin oz. materialov. Na predloge lahko nastavimo konkreten material (slika 5), ali pa pripravimo slikovne predloge.

Slika 5: Predloge za nadaljevanje vzorca

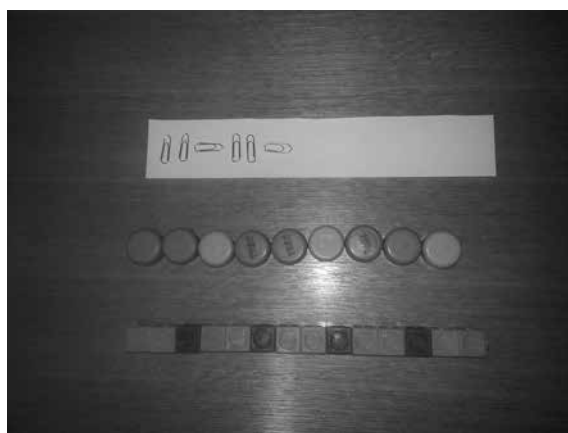


Začetni cilj učenja ponavljajočih se vzorcev je pravzaprav prepoznati gradnik, ki se ponavlja. Gradnik, včasih imenovan tudi jedro, je najkrajši niz elementov, ki se ponavlja. Ponovno opozorimo na to, da je v nižjih razredih pomembno, da se gradnik ponovi v celoti in da se prikazani niz ne prelomi sredi gradnika. Če je gradnik npr. oo, lahko na traku prikažemo npr. oo-oo (ponovitev gradnika), da se izognemo dvoumnemu podajanju naloge, pa raje ne narišemo oo-oo- ali oo-. Ko otroci dosežejo stopnjo prepoznavanja gradnika, lahko sestavljajo tudi svoje vzorce. Verjetno se bo treba pogovoriti o tem, ali je sestavljena struktura sploh »vzorec«, kajti beseda ima v naravnem jeziku drug pomen. Če otrok na paličico naniza kvader,

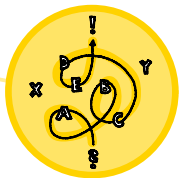
kocko in stožec ter trdi, da je zgradil vzorček, mu je treba pojasniti, da ni naredil ponavljajočega se vzorca (ker pač ni ničesar, kar se ponavlja). Otroci radi sami določajo pravila, medtem ko oblikujejo gradnik, še posebej takrat, ko se to igro igrajo s sošolcem, ki mora odkriti pravilo, po katerem je vzorec sestavljen.

Pomemben korak v razvoju koncepta je, da otroci zaznajo, da sta dva vzorca, ki sta zgrajena iz različnega materiala, pravzaprav isti vzorec. Otroci naj bi zaznali neodvisnost strukture od uporabljenega materiala. Za ta namen jim lahko damo trak, ki npr. prikazuje vzorec s sponkami, in drugi material (npr. gumbi). Slika 6 prikazuje podlago s sponkami v shemi AAB in predstavitev tega istega vzorca z zamaški in link kockami.

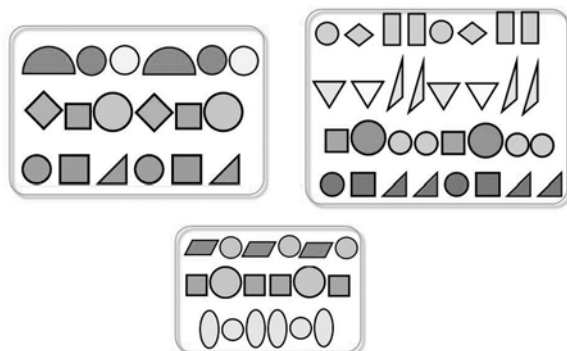
Slika 6: Predloga s sponkami za vzorec AAB ter predstavitev vzorca z zamaški in link kockami



Lahko pa izvedemo tudi klasifikacijsko aktivnost, kjer učenci iščejo trakove, ki prikazujejo vzorce z enako strukturo, a različnim materialom (slika 7). Kot preverjanje, ali so klasificirali pravilno, lahko uporabimo branje vzorca s črkami. Otroci naj bi torej ugotovili, da je vzorec »modra-rdeča-rdeča, modra-rdeča-rdeča« enak kot vzorec »sedi-stoj-stoj, sedi-stoj-stoj«. S tem pridobimo osnovo za ugotovitev, da lahko imajo zelo različne situacije podobne matematične lastnosti. Otrokom lahko pri teh ugotovitvah pomagamo z vpeljevanjem shem oz. simbolnih zapisov vzorcev z npr. črkami (seveda bi lahko uporabili katerekoli druge dogovorjene simbole, npr. številke). Vzorce npr. lahko beremo AB AB AB ..., ABB ABB ..., ABC ABC ABC ABC ...; tretji vzorec na sliki 2 je torej »enak« kot vzorca, navedena prej.

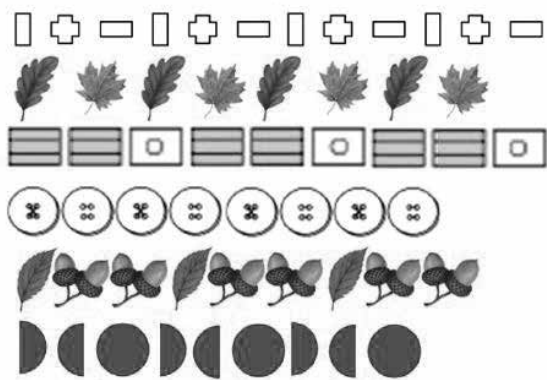


Slika 7: Klasifikacija vzorcev



Učitelj lahko za vpeljavo shem uporabi npr. prikaz šestih do sedmih vzorcev, ki jih najprej z uporabo črk preberejo (slika 8). Polovica razreda nato zapre oči, med tem ko druga polovica prebere vzorec, ki ga pokaže učitelj. Nato odpro oči in poskušajo ugotoviti, kateri vzorec je bil prebran. Če imata dva vzorca med prikazanimi enako strukturo, se med učenci lahko razvije zelo učinkovita razprava.

Slika 8: Vzorci za prepoznavanje shem



Kot končni korak na tej etapi, ki naj bi se sklenila po prvem triletju, od otrok pričakujemo, da predvidijo, kateri element se bo pojavil npr. na 15. mestu. Od njih pričakujemo tudi utemeljitev svoje odločitve, npr. pri gumbih bi lahko bila utemeljitev drugošolca »kvadraten bo, ker je vsak drug kvadraten in začne se s kvadratnim«, utemeljitev četrtošolca pa bi že vključevala »kvadraten bo, ker je 15 liho število«. Aktivnosti napovedovanja so verjetno prevelik izziv za prvi razred, zato jih uvajamo v drugem razredu. Vedno pa smo pozorni na to, da lahko svojo napoved preverijo s tem, da nizajo do zahtevanega mesta. Po več aktivnostih

bodo otroci ugotovili, da dolžina gradnika igra pomembno vlogo, in povezali vsebino z večkratniki, ki so jim v 3. razredu pri napovedovanju lahko v veliko pomoč. Če na primer pri vzorcu, ki je predstavljen na sliki 9, vprašamo po 34. elementu, lahko razmišljajo takole: »dolžina ponavljanja je 4, štejem 1-2-3-4, 5-6-7-8, 9-10-11-12, štejem torej po 4; prvi je vedno za ena več, kot so večkratniki števila 4, drugi za 2 več, tretji za 3 več, četrti pa je natanko večkratnik števila 4; ker je 34 za 2 več, kot je večkratnik števila 4, bom prišel na drug element; 34. element bo torej rdeč krog.«

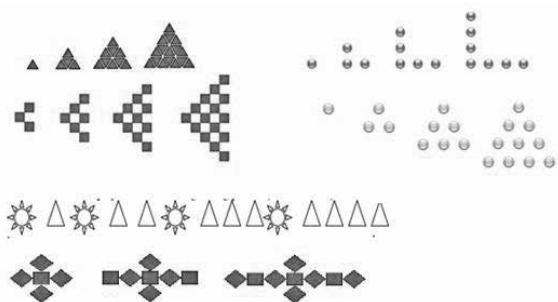
Slika 9: Kaj bo na 34. mestu?



Naraščajoči vzorci

V četrtem razredu učenci pričnejo raziskovati tudi vzorce, ki iz koraka v korak naraščajo (večkrat gre za naraščajoča aritmetična zaporedja). Pravzaprav take vzorce že poznajo, saj že od 1. razreda ob spoznavanju števil štejejo »s korakom« in tako gradijo naraščajoče vzorce kot npr. 1, 3, 5, 7 ..., ki je prikazan z zelenimi krogi (slika 10).

Slika 10: Naraščajoči vzorci

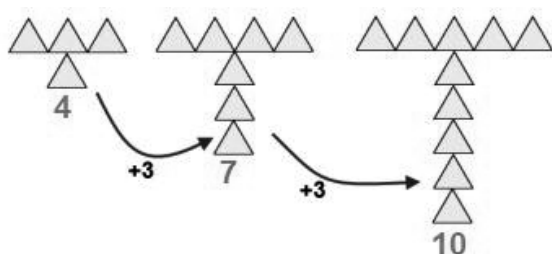


Te vzorce naj bi učenci ne le nadaljevali, ampak težišče prenesemo na posplošitve oz. algebrajske relacije, ki bodo učencem povedale, kakšni bodo vzorci v nadaljevanju niza. Ti vzorci nakazujejo koncept funkcije in so lahko uporabljeni kot vstopna točka za to izjemno pomembno matematično idejo. Še vedno vzorce gradimo iz konkretnih materialov in smo posebej pozorni na to, da se učenci

počutijo varne ob tem, ko gradijo vzorce in govorijo o tem, kako jih lahko logično nadaljujejo. Vključujemo tudi slikovne ponazoritve, kjer lahko uspešno uporabljamo slike na karo papirju. Učenci naj poskušajo določiti, kako se vsak naslednji korak v nizu razlikuje od predhodnega. Pri rumenih krožcih npr. vedno dodamo še eno vrstico, za razliko od spodnjega modrega vzorca, ki pomeni širjenje.

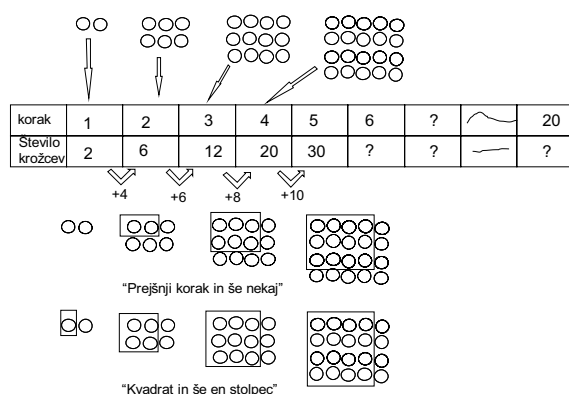
Najprej bodo učenci zaznali rekurzivno pravilo tipa »je za tri več« (slika 11).

Slika 11: Primer naraščajočega vzorca, kjer se število trikotnikov v vsakem koraku poveča za 3



V tej fazi lahko pričnemo vzorce tabelirati in usmerimo pozornost v število elementov, ki nastopajo v vsakem izmed členov zaporedja. Znova se vprašamo, kako ugotoviti, koliko elementov je potrebnih za npr. petindvajseti člen zaporedja. Skupaj ugotovimo, da rekurzivno pravilo ne daje odgovora, zato iščemo »splošno pravilo«. Naraščajoči vzorci namreč vključujejo tudi numerično komponento oz. število elementov v vsakem koraku. Slika 12 prikazuje možnost tabeliranja. Ena izmed vrstic v tabeli je vedno oznaka število korakov, druga pa koliko objektov potrebujemo za izgradnjo v tem koraku.

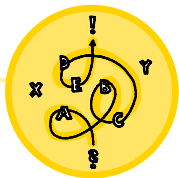
Slika 12: Tabela in dve različni relaciji v slikovnem naraščajočem vzorcu



Pogosto vzorci naraščajo tako hitro, da je smiselno izgraditi oz. narisati le prvih pet do šest korakov. Naloga učencev je zato predvidevanje števila objektov, potrebnih v 20. koraku. Izziv je seveda v tem, da ugotovimo, ali je to možno, ne da izpolnimo prejšnjih 19 stolpcev tabele. Učenčeva predvidevanja morajo biti seveda podkrepljena z argumenti. Gre za naravno nadaljevanje aktivnosti predvidevanja iz ponavljajočih se vzorcev. Iskanje dvajsetega ali celo stotega vnosa predstavlja vstopno točko v iskanje relacij, ki jih bodo učenci kasneje razumeli kot primere funkcij.

Ko učenci naredijo tabelo, sta pred njimi dve reprezentaciji vzorca: tista, ki so jo ustvarili z risanjem ali z materiali in numerična verzija s tabelo. Pri iskanju relacij se bodo nekateri učenci osredotočili na tabelo, nekateri pa na vizualni vzorec. Pomembno je, da se učenci zavedo, da relacija, ki jo bodo našli, mora obstajati v obeh reprezentacijah. Če torej najdejo relacijo v tabeli, jih spodbudimo, da pogledajo, kakšno vlogo igra v slikovni verziji.

Večina učencev bo najprej našla relacijo med sosednjima korakoma. To relacijo lahko zapišemo pod tabelo, tako kot vidimo na sliki 12. V tem primeru lahko število v naslednjem koraku določimo tako, da dodamo sodo število številu objektov v prejšnjem koraku. Opis relacije, ki govori o odnosu med dvema sosednjima korakoma, bomo imenovali *rekurzivni opis*. Vsakič, ko imamo zapis s tabelo, je zelo pomembno, da relacijo najdemo tudi v vizualni obliki. Na sliki 12 lahko opazimo, kako sta dve možni interpretaciji relacije »prištej sodo število« prikazani s pomočjo uokvirjanja. Rekurzivni opis relacije iz koraka v korak bo skoraj zagotovo prva stvar, ki jo bodo učenci opazili. Pri iskanju objektov, potrebnih v stotem koraku, učencem ta opis pomaga le, če izpolnijo vseh devetindevetdeset prejšnjih korakov. Kmalu postane jasno, da bi bila povezava med zaporedno številko koraka in številom objektov v njem bolj uporabna. Tak opis relacije bomo imenovali *funkcijski opis*. Kot pomoč pri iskanju tega prepisa ne moremo navesti nobene učinkovite metode. Nekateri učenci bodo morda doživeli iluminacijsko fazo s tem, da se bodo preprosto poigrali s števili in se spraševali »Kaj naj storim s številom 5, da dobim število 30? Ali uporaba tega pravila na številu 4 da število 20?« Večini učencev pomaga opazovanje pravilnosti v konkretnem prikazu vzorca.

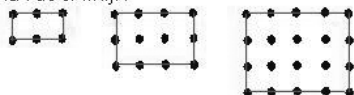


Slika 13 prikazuje uokvirjen kvadrat, pri čemer ima vsak naslednji kvadrat stranico za ena daljšo od predhodnega. Lahko se vprašamo po funkcijskem opisu odnosa, ki določa tole podmnožico vzorca. V danem primeru je dolžina kvadrata enaka kot število, ki določa korak. Prav tako je število objektov v stolpcu desno enako številu, ki določa korak. Na tej točki je lahko zapisovanje številskih izrazov, ki opisujejo posamične korake, učinkovita aktivnost. Prve štiri korake (slika 12) lahko npr. opišemo kot 1^2+1 , 2^2+2 , 3^2+3 in 4^2+4 . Kar precej eksperimentiranja je potrebnega, da učenci v skupinah najdejo opise, ki so povezani s številom, ki določa korak. Učitelj ne sme postati vznemirjen in izgubiti vere v sposobnosti svojih učencev. Iskanje relacij je treba spodbujati, četudi traja dlje kot predvideno eno šolsko uro, kajti gre za temeljno idejo.

Ko učenci odkrijejo številski izraz, ki funkcijsko opisuje relacijo, jim učitelj lahko pomaga pri prehodu na klasičen funkcijski zapis z uporabo posebnega simbola (npr. oglatih oklepajev) pri zapisu števila, ki opisuje korak (slika 13).

Slika 13: Iskanje funkcijskega opisa v vzorcu

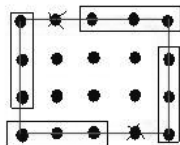
Koliko pik je na rdeči liniji?



Korak	1	2	3	4
Št. pik	6	10	14	

[1]-4+2
[2]-4+2
[3]-4+2
[4]-4+2

$n \cdot 4 + 2$



Ob opazovanju takega zapisa vidimo, da se število v oglatih oklepajih spreminja, vse drugo pa ostaja enako. Zato lahko število v oglatem oklepaju nadomestimo s črko oz. oznako za spremenljivko ter tako pridobimo splošno formulo.

Sklep

Prepoznavanje in nadaljevanje vzorca je pomemben proces predalgebrskega razmišljanja in kot tak pomeni osnovo novih pristopov k algebri, ki se pojavlja v učnih načrtih za matematiko v večini držav (Orton, 2001). Isti vzorec (npr. ABAB) se lahko pojavi v mnogih različnih oblikah. Učenci naj bi ugotovili, da npr. barvni vzorec »rdeče-modro-modro-rdeče-modro-modro« predstavlja vzorec z enakim »pravilom« kot glasovni vzorec »i-ha-ha-i-ha-ha«. S tem postavljajo temelje ugotovitvi, da imajo lahko zelo različne situacije enake matematične lastnosti. Ugotovitev, da lahko prej omenjena vzorca opišemo v obliki »AABAAB«, je za učence prvi uvod v algebro. S samostojnim oblikovanjem različnih vzorcev učenci razvijajo kreativnost in ustvarjalnost; z opazovanjem, ugotavljanjem pravilnosti, zakonitosti, pa se učijo posploševanja, zapisovanja algebrskih izrazov. ■

Viri in literatura:

1. Golob, A. (2007). Celostni pristop pri matematiki – vzorci skozi glasbo. Diplomsko delo. Maribor: Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta.
2. Nudl, A., Brezočnik, D., Lipovec, A. in Antolin, D. (2012). Struktura zastopanosti matematičnih dejavnosti v slovenskih vrtcih. Matematika v šoli, 18 (1/2), 5–14.
3. Orton, J. (2001). Algebra, vzorci in motivacija. Matematika v šoli, 9 (1–2), 14–26.
4. Resnik, M. D. (1981). Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference In Philosophy of Mathematics, Nous, 15 (4), 529–550.
5. Van de Walle, J. (2004). Elementary and middle school mathematics. Teaching Developmentally. NY: Pearson.