Programm

des

k. k. Gymnasiums zu Neustadtl

am

Schlusse des Schuljahres 1857.

Inhalt:

Arithmetische Progressionen: Vom P. **Bernard Vovk**, Gymnasial-Lehrer.
Schulnachrichten: Vom supplirenden Director P. **Chrisolog Groesnik**.

Wien.
Druck von Carl Gerold's Sohn.
1857.

Arithmetische Progressionen.

§. 1. Einleitung.

Eine Folge von Größen, die nach einem bestimmten, allen gemeinschaftlichen Gesetze fortschreiten, heißt eine Reihe oder Progression, und zwar, wenn die Größen zunehmen eine steigende, wenn sie abnehmen eine fallende. Die einzelnen Größen, welche die Reihe bilden, heißen Glieder derselben. Nach den Stellen, welche die Glieder in der Reihe einnehmen, werden dieselben vom Anfange der Reihe an das erste, zweite, dritte u. s. w. Glied der Reihe genannt. Die Zahl, durch welche die Stelle eines Gliedes in der Reihe bestimmt wird, heißt Stellenzahl, Stellenzeiger, Zeiger oder Index dieses Gliedes, und wird ihm rechts unten angehängt. So ist

$$2_1;\quad 4_2;\quad 6_3;\quad 8_4;\quad 10_5;\quad 12_6;\quad 14_7;\ \text{eine steigende Reihe,}$$
$$18_1;\quad 16_2;\quad 14_3;\quad 12_4;\quad 10_5;\quad 8_6;\quad 6_7;\ \text{eine fallende Reihe,}$$

in welchen die Glieder nach dem bestimmten Gesetze fortschreiten, daß in der ersten jedes Glied um zwei Einheiten größer, in der zweiten jedes um zwei Einheiten kleiner sein soll, als das unmittelbar vorhergehende.

Aus diesem folgt von selbst, daß man, wenn das Gesetz einer Reihe bekannt, und das erste oder Anfangsglied derselben gegeben ist, die Reihe beliebig fortsetzen, daß man jedes Glied derselben bestimmen kann. Ferner auch, daß man die Summe einer jeden Anzahl Anfangsglieder derselben durch die Addition finden kann. Das erste Postulat unterliegt offenbar keiner Schwierigkeit, wohl aber das zweite und das dritte. Denn es ist gewiß nichts leichtes, wenn das Gesetz etwas complicirter ist, das 1.000,000 Glied einer Reihe zu bestimmen, weil seine Bestimmung die Bestimmung von 999,999 Glieder voraussetzt. Noch schwieriger, in gewissen Fällen fast unmöglich, ist die Befriedigung des dritten Postulates, wenn nämlich mehrere Tausende von Gliedern zu summiren sind.

Da jedoch die Glieder einer jeden Reihe nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, so ist es zu vermuthen, daß es einen algebra'schen Ausdruck, eine geschlossene Formel gebe, welcher in sich die allgemeinen Stellenzeiger n enthält und so beschaffen ist, daß, wenn man darein $n = 1$ setzt, das erste; $n = 2$ das zweite; $n = 3$ das dritte u. s. w. Glied der Reihe zum Vorschein kommt. Ein solcher, den Stellenzeiger n enthaltender algebra'scher Ausdruck von der Beschaffenheit, daß wenn man in demselben für n eine beliebige Zahl setzt, das ebensovielte Glied der Reihe durch ihn ausgedrückt wird, heißt das allgemeine Glied der Reihe und wird durch das Symbol a_n oder $f(n)$ bezeichnet.

In Zeichen: $f(n) = 2n$.

Setzt man hierin für n 1, 2, 3, 4 . . . so ist

$$f(1) = 2;\quad f(2) = 4;\quad f(3) = 6;\quad f(4) = 8 \text{ u. s. w.}$$

Eben so läßt sich vermuthen, daß sich für jede Reihe ein den Zeiger n enthaltender algebra'scher Ausdruck von der Beschaffenheit aufstellen lasse, daß wenn man darin für n eine beliebige Zahl m setzt, er die Summe der m Anfangsglieder der Reihe gibt. Ein solcher Ausdruck heißt die Summenformel, das summatorische Glied, oder die Summe von n Gliedern, und wird durch das Symbol S_n oder $F(n)$ bezeichnet.

In Zeichen: ist $F(n) = n^2 + n$; so ist für $n = 4$ die Summe von 4 Anfangsgliedern
$$F(4) = 16 + 4 = 20.$$

Die Lehre von den Reihen bildet einen der ausgedehntesten und wichtigsten Theile der Mathematik. Hier sollen nur die arithmetischen Progressionen einer besonderen Betrachtung unterzogen werden, und zwar deßhalb, um denjenigen Schülern des Ober-Gymnasiums, die bereits die Schönheit und Erhabenheit der Mathematik zu fühlen, und an Beschäftigungen dieser Art ein Wohlbehagen zu empfinden begonnen haben, für die Ferienzeit eine angenehme und nützliche Lectüre in die Hand zu geben.

§. 2. Differenz-Reihen.

Untersucht man die Glieder einer vorgelegten Reihe und es ergibt sich, daß jedes die mittlere Proportionale zwischen dem unmittelbar vorhergehenden und dem unmittelbar darauffolgenden, und daß dieses Verhältniß ein arithmetisches ist, so nennt man die Reihe eine arithmetische Progression und das Verhältniß ihre Differenz.

Es sei die gegebene Reihe, die auch Hauptreihe heißt, und die wir uns durch die Zeichen

(1) $$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ \ldots\ a_n$$

vorstellen wollen und suchen ihr Verhältniß, d. h. subtrahiren jedes Glied derselben von dem unmittelbar darauffolgenden, schreiben diese Differenzen horizontal neben einander und deuten diese dadurch an, daß wir dem Minuend den Buchstaben Δ voraussetzen, der aber keineswegs ein Multiplicator, sondern ein Operationszeichen ist, so erhalten wir

(2) $$\Delta a_1;\ \Delta a_2;\ \Delta a_3;\ \Delta a_4;\ \ldots\ \Delta a_n;\ \Delta a_{n+1}\ \ldots$$

wobei nämlich $\Delta a_1 = a_2 - a_1$; $\Delta a_2 = a_3 - a_2$; $\Delta a_3 = a_4 - a_3$; $\Delta a_4 = a_5 - a_4$

und allgemein $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ ist

eine neue Reihe, die man Differenz-Reihe der Reihe (1) nennt.

Untersucht man die Glieder der Reihe (2), so kann ein Doppeltes stattfinden: entweder sind sie alle gleich, d. h. es ist $\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3\ \ldots = \Delta a_n$ oder sie sind ungleich. Im ersten Falle heißt die Reihe (1) eine arithmetische Progression der ersten Ordnung oder des ersten Ranges, im zweiten eine arithmetische Progression höherer Ordnung.

Es ist leicht einzusehen, daß zur näheren Betrachtung einer vorgelegten Reihe nothwendig ist, zu entscheiden, von welcher Ordnung sie ist. Das Mittel hiezu bieten die Differenz-Reihen. Man nennt nämlich jede Reihe von der so vielten Ordnung, die wie vielte Differenz-Reihe gleiche Glieder enthält.

Wenn die Reihe (2) aus ungleichen Gliedern besteht, so bildet man aus ihr eben so eine neue Reihe, wie sie aus (1) hervorgegangen ist. Man hat nämlich:

$$\Delta\Delta a_1;\ \Delta\Delta a_2;\ \Delta\Delta a_3;\ \Delta\Delta a_4;\ \Delta\Delta a_5;\ \ldots\ \Delta\Delta a_n$$

Was man abkürzend so bezeichnet, daß man dem Buchstaben Δ die Anzahl der Wiederholungen rechts oben schreibt. Nämlich:

(3) $$\Delta^2 a_1;\ \Delta^2 a_2;\ \Delta^2 a_3;\ \Delta^2 a_4;\ \Delta^2 a_5;\ \ldots\ \Delta^2 a_n$$

so, daß der Erklärung gemäß

$$\Delta^2 a_1 = \Delta a_2 - \Delta a_1;\ \ \Delta^2 a_2 = \Delta a_3 - \Delta a_2;\ \ \Delta^2 a_3 = \Delta a_4 - \Delta a_3;\ \ \Delta^2 a_4 = \Delta a_5 - \Delta a_4\ \ldots$$

und allgemein: $\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$

Die Reihe (3) ist die erste Differenz-Reihe der Reihe (2) oder die zweite Differenz-Reihe der Reihe (1).

Wenn (3) nicht gleiche Glieder hat, so kann man auf die nämliche Art ihre Differenz-Reihe ableiten, welche man der angenommenen Beziehungsweise gemäß durch

$$\Delta\Delta^2 a_1;\ \Delta\Delta^2 a_2;\ \Delta\Delta^2 a_3;\ \Delta\Delta^2 a_4;\ \Delta\Delta^2 a_5;\ \Delta\Delta^2 a_6\ \ldots\ \Delta\Delta^2 a_n$$

oder abkürzend durch

(4) $\Delta^3 a_1;\ \Delta^3 a_2;\ \Delta^3 a_3;\ \Delta^3 a_4;\ \Delta^3 a_5;\ \ldots\ \Delta^3 a_n$

darstellt, so daß man hat:

$$\Delta^3 a_1 = \Delta^2 a_2 - \Delta^2 a_1;\ \Delta^3 a_2 = \Delta^2 a_3 - \Delta^2 a_2;\ \Delta^3 a_3 = \Delta^2 a_4 - \Delta^2 a_3;\ \ldots$$

und allgemein: $\Delta^3 a_n = \Delta^2 a_{n+1} - \Delta^2 a_n$.

Die Reihe (4) ist die dritte Differenz-Reihe der Reihe (1).

Bildet man eben so aus (4) ihre Differenz-Reihe, so erhält man

(5) $\Delta^4 a_1;\ \Delta^4 a_2;\ \Delta^4 a_3;\ \Delta^4 a_4;\ \Delta^4 a_5;\ \Delta^4 a_6;\ \ldots\ \Delta^4 a_n$,

die vierte Differenz-Reihe der Reihe (1), und allgemein:

(6) $\Delta^r a_1;\ \Delta^r a_2;\ \Delta^r a_3;\ \Delta^r a_4;\ \Delta^r a_5;\ \Delta^r a_6;\ \ldots\ \Delta^r a_n$,

die r^{te} Differenz-Reihe der Hauptreihe, wo

$$\Delta^r a_1 = \Delta^{r-1} a_2 - \Delta^{r-1} a_1;\ \Delta^r a_2 = \Delta^{r-1} a_3 - \Delta^{r-1} a_2;\ \Delta^r a_3 = \Delta^{r-1} a_4 - \Delta^{r-1} a_3;\ \ldots,$$

und allgemein: $\Delta^r a_n = \Delta^{r-1} a_{n+1} - \Delta^{r-1} a_n$.

Diese Gleichung wird mit Worten folgendermaßen ausgedrückt: das n^{te} Glied der r^{ten} Differenz-Reihe ist gleich dem $(n+1)^{sten}$ weniger dem n^{ten} Gliede der $(r-1)^{ten}$ (d. i. vorhergehenden) Differenz-Reihe.

Um diese Erklärungen und Zeichen an einem besonderen Beispiele zu erläutern, wollen wir annehmen, daß die gegebene Reihe sei

1; 2; 5; 13; 33; 79; 177; 372; 737; 1384; 2477.

Bestimmen wir die auf einander folgenden Differenz-Reihen und schreiben zur größeren Deutlichkeit jede Differenz unter das Paar von Größen, deren Differenz sie ist, so haben wir

1; 2; 5; 13; 33; 79; 177; 372; 737; 1384; 2477; . . . Hauptreihe,
1; 3; 8; 20; 46; 98; 195; 365; 647; 1093; . . . 1. Differenz-Reihe,
2; 5; 12; 26; 52; 97; 170; 282; 446; . . . 2. Differenz-Reihe,
3; 7; 14; 26; 45; 73; 112; 164; . . . 3. Differenz-Reihe,
4; 7; 12; 19; 28; 39; 52; . . . 4. Differenz-Reihe,
3; 5; 7; 9; 11; 13; . . . 5. Differenz-Reihe,
2; 2; 2; 2; 2; . . . 6. Differenz-Reihe.

Der angenommenen Bezeichnungsweise gemäß hat man für den vorliegenden Fall:

$a_1 = 1;\quad a_2 = 2;\quad a_3 = 5;\quad a_4 = 13;\quad a_5 = 33;\quad a_6 = 79$ u. s. w.
$\Delta a_1 = 1;\ \Delta a_2 = 3;\ \Delta a_3 = 8;\ \Delta a_4 = 20;\ \Delta a_5 = 46;\ \Delta a_6 = 98\ \ldots$
$\Delta^2 a_1 = 2;\ \Delta^2 a_2 = 5;\ \Delta^2 a_3 = 12;\ \Delta^2 a_4 = 26;\ \Delta^2 a_5 = 52;\ \Delta^2 a_6 = 97\ \ldots$
$\Delta^3 a_1 = 3;\ \Delta^3 a_2 = 7;\ \Delta^3 a_3 = 14;\ \Delta^3 a_4 = 26;\ \Delta^3 a_5 = 45;\ \Delta^3 a_6 = 73\ \ldots$
$\Delta^4 a_1 = 4;\ \Delta^4 a_2 = 7;\ \Delta^4 a_3 = 12;\ \Delta^4 a_4 = 19;\ \Delta^4 a_5 = 28;\ \Delta^6 a_6 = 39\ \ldots$
$\Delta^5 a_1 = 3;\ \Delta^5 a_2 = 5;\ \Delta^5 a_3 = 7;\ \Delta^5 a_4 = 9;\ \Delta^5 a_5 = 11;\ \Delta^5 a_6 = 13\ \ldots$
$\Delta^6 a_1 = 2;\ \Delta^6 a_2 = 2;\ \Delta^6 a_3 = 2;\ \Delta^6 a_4 = 2;\ \Delta^6 a_5 = 2;\ \Delta^6 a_6 = 2\ \ldots$

Die vorgelegte Reihe ist demnach von der 6. Ordnung, weil die 6. Differenz-Reihe gleiche Glieder enthält.

§. 3. Allgemeine Bestimmung von a_n und S_n.

a. Bestimmung von a_n.

Die Differenz-Reihen gewähren nicht nur ein einfaches Mittel über den Rang einer Reihe zu entscheiden, sondern sie dienen auch zur Bestimmung von a_n, denn bei ihrer Bildung bezeichneten wir

$$\Delta a_m = a_{m+1} - a_m, \text{ daher}$$

(1) $$a_{m+1} = a_m + \Delta a_m.$$

Hierin $m + 1$ für m gesetzt, ist

$$a_{m+2} = a_{m+1} + \Delta a_{m+1}.$$

Es war $\Delta^2 a_m = \Delta a_{m+1} - \Delta a_m$, daher

$$\Delta a_{m+1} = \Delta a_m + \Delta^2 a_m \quad (\alpha).$$

Setzt man in die aus (1) erhaltene Gleichung von a_{m+1} den Werth aus (1) und von Δa_{m+1} aus (α); so hat man

(2) $$a_{m+2} = a_m + 2\Delta a_m + \Delta^2 a_m.$$

Hierin $m + 1$ für m gesetzt, ist

$$a_{m+3} = a_{m+1} + 2\Delta a_{m+1} + \Delta^2 a_{m+1}.$$

Nun war $\Delta^3 a_m = \Delta^2 a_{m+1} - \Delta^2 a_m$, mithin

$$\Delta^2 a_{m+1} = \Delta^2 a_m + \Delta^3 a_m \quad (\beta).$$

Die aus (2) erhaltene Gleichung geht wegen (1), (α) und (β) über in

(3) $$a_{m+3} = a_m + 3\Delta a_m + 3\Delta^2 a_m + \Delta^3 a_m.$$

Hierin $m + 1$ für m gesetzt, ist

$$a_{m+4} = a_{m+1} + 3\Delta a_{m+1} + 3\Delta^2 a_{m+1} + \Delta^3 a_{m+1}.$$

Aus $\Delta^4 a_m = \Delta^3 a_{m+1} - \Delta^3 a_m$ folgt

$$\Delta^3 a_{m+1} = \Delta^3 a_m + \Delta^4 a_m \quad (\gamma).$$

Die aus (3) erhaltene Gleichung nimmt wegen (1), (α), (β) und (γ) die Form an

(4) $$a_{m+4} = a_m + 4\Delta a_m + 6\Delta^2 a_m + 4\Delta^3 a_m + \Delta^4 a_m.$$

Hierin $m + 1$ für m gesetzt, ist

$$a_{m+5} = a_{m+1} + 4\Delta a_{m+1} + 6\Delta^2 a_{m+1} + 4\Delta^3 a_{m+1} + \Delta^4 a_{m+1}.$$

Wegen $\Delta^5 a_m = \Delta^4 a_{m+1} - \Delta^4 a_m$ ist

$$\Delta^4 a_{m+1} = \Delta^4 a_m + \Delta^5 a_m \quad (\delta).$$

Die aus (4) erhaltene Gleichung verwandelt sich wegen (1), (α), (β), (γ) (δ) in

(5) $$a_{m+5} = a_m + 5\Delta a_m + 10\Delta^2 a_m + 10\Delta^3 a_m + 5\Delta^4 a_m + \Delta^5 a_m.$$

Hierin $m + 1$ für m gesetzt, ist

$$a_{m+6} = a_{m+1} + 5\Delta a_{m+1} + 10\Delta^2 a_{m+1} + 10\Delta^3 a_{m+1} + 5\Delta^4 a_{m+1} + \Delta^5 a_{m+1}.$$

Weil $\Delta^6 a_m = \Delta^5 a_{m+1} - \Delta^5 a_m$ ist, daher

$$\Delta^5 a_{m+1} = \Delta^5 a_m + \Delta^6 a_m \quad (\varepsilon).$$

Wegen (1), (α), (β), (γ), (δ) und (ε) nimmt die aus (5) erhaltene Gleichung folgende Form an:

(6) $$a_{m+6} = a_m + 6\Delta a_m + 15\Delta^2 a_m + 20\Delta^3 a_m + 15\Delta^4 a_m + 6\Delta^5 a_m + \Delta^6 a_m.$$

Eben so könnte man die andern auf das m^{te} folgenden Glieder der Hauptreihe durch ihr m^{tes} und durch die m^{ten} Glieder ihrer Differenz-Reihen darstellen. Allein dieses ist nicht nothwendig, weil eine oberflächliche Betrachtung dieser 6. Gleichung das darin herrschende Gesetz leicht erkennen läßt. Das erste Glied ist nämlich ein bestimmtes Glied der Hauptreihe, die folgenden sind die ebensovielten Glieder der Differenz-Reihen. Was die Coefficienten der einzelnen Glieder anbelangt, so bemerkt man leicht, daß sie Binomial-Coefficienten sind. Demnach ist das auf m^{te} folgende r^{te} Glied der Hauptreihe, wenn die Binomial-Coefficienten nach Euler geschrieben werden, gegeben durch die Gleichung

$$a_{m+r} = a_m + \binom{r}{1}\Delta a_m + \binom{r}{2}\Delta^2 a_m + \binom{r}{3}\Delta^3 a_m + \binom{r}{4}\Delta^4 a_m + \ldots \Delta^r a_m.$$

Wird $m + r = n$ gesetzt, so ist $r = n - m$. Somit

$$a_n = a_m + \binom{n-m}{1}\Delta a_m + \binom{n-m}{2}\Delta^2 a_m + \binom{n-m}{3}\Delta^3 a_m + \binom{n-m}{4}\Delta^4 a_m + \binom{n-m}{5}\Delta^5 a_m + \ldots \Delta^{n-m} a_m$$

Für $m=1$ hat man

(A.) $a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta a_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 a_1 + \binom{n-1}{4}\Delta^4 a_1 + \binom{n-1}{5}\Delta^5 a_1 + \ldots \Delta^{n-1} a_1$.

Diese Formel drückt jedes beliebige Glied der Hauptreihe durch ihr erstes und durch die ersten Glieder der $(n-1)$ Differenz-Reihen. Es ist das allgemeine Glied.

Daß diese Formel bei jeder arithmetischen Reihe abbricht, und je nach dem Range der Reihe aus 2, 3, 4 . . . $(p+1)$ Gliedern besteht, folgt daraus, weil für eine arithmetische Progression der ersten Ordnung $\Delta^2, \Delta^3, \Delta^4, \ldots$ für eine der zweiten Ordnung $\Delta^3, \Delta^4, \Delta^5 \ldots$ für eine der r^{ten} Ordnung $\Delta^{r+1}, \Delta^{r+2}, \Delta^{r+3} \ldots$ gleich Null ist.

Ist $a_1 = 1$; $\Delta a_1 = 1$; $\Delta^2 a_1 = 2$; $\Delta^3 a_1 = 3$; $\Delta^4 a_1 = 4$; $\Delta^5 a_1 = 3$; $\Delta^6 a_1 = 2$; $\Delta^7 a_1 = 0$; so ist das achte Glied

$$a_8 = 1 + \binom{7}{1}1 + \binom{7}{2}2 + \binom{7}{3}3 + \binom{7}{4}4 + \binom{7}{5}3 + \binom{7}{6}2 + \binom{7}{7}.0 = 372.$$

Eben so kann man jedes andere Glied der Reihe aus (A) erhalten.

b. Bestimmung von S_n.

Soll die Summe einer bestimmten Anzahl Anfangsglieder einer Reihe angegeben werden, so bedient man sich des gewöhnlichen Additions-Verfahrens, bei dem man die einzelnen Summanden mittelst Differenzen transformirt.

Es ist offenbar

(1) $$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2.$$

Setzt man in der Gleichung (1) in a) $m=1$, so erhält man

$$a_2 = a_1 + \Delta a_1, \quad \text{mithin}$$

(2) $$S_2 = 2a_1 + \Delta a_1,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3.$$

In a) in der Gleichung (2) $m=1$ gesetzt, ist

$$a_3 = a_1 + 2\Delta a_1 + \Delta^2 a_1, \quad \text{somit}$$

(3) $$S_3 = 3a_1 + 3\Delta a_1 + \Delta^2 a_1,$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4.$$

In a) in der Gleichung (3) $m=1$ gesetzt, ist

$$a_4 = a_1 + 3\Delta a_1 + 3\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1 \quad \text{daher}$$

(4) $$S_4 = 4a_1 + 6\Delta a_1 + 4\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1,$$
$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S_4 + a_5.$$

In a) in der Gleichung (4) $m=1$ gesetzt, ist

$$a_5 = a_1 + 4\Delta a_1 + 6\Delta^2 a_1 + 4\Delta^3 a_1 + \Delta^4 a_1, \quad \text{somit}$$

(5) $$S_5 = 5a_1 + 10\Delta a_1 + 10\Delta^2 a_1 + 5\Delta^3 a_1 + \Delta^4 a_1,$$
$$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = S_5 + a_6.$$

In a) in der Gleichung (5) $m=1$ gesetzt, ist

$$a_6 = a_1 + 5\Delta a_1 + 10\Delta^2 a_1 + 10\Delta^3 a_1 + 5\Delta^4 a_1 + \Delta^5 a_1, \quad \text{mithin}$$

(6) $$S_6 = 6a_1 + 15\Delta a_1 + 20\Delta^2 a_1 + 15\Delta^3 a_1 + 6\Delta^4 a_1 + \Delta^5 a_1;$$

daher allgemein, wenn man berücksichtigt, daß in den Coefficienten das Gesetz der Binomial-Coefficienten herrscht:

(B) $$S_n = \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}\Delta a_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 a_1 + \binom{n}{4}\Delta^3 a_1 + \binom{n}{5}\Delta^4 a_1 + \ldots \Delta^{n-1} a_1.$$

Hiedurch ist die Summe jeder beliebigen Anzahl Anfangsglieder einer jeden arithmetischen Progression durch ihr erstes und durch die ersten Glieder der $(n-1)$ Differenz-Reihen ausgedrückt. Es ist das summatorische Glied. Dieser Ausdruck bricht jedesmal ab wie a_n und zwar aus eben demselben Grunde.

Ist in einer Reihe $a_1=1$; $\Delta a_1=1$; $\Delta^2 a_1=2$; $\Delta^3 a_1=3$; $\Delta^4 a_1=4$; $\Delta^5 a_1=3$; $\Delta^6 a_1=2$; $\Delta^7 a_1=0$, so ist die Summe von acht Anfangsgliedern

$$S_8 = \binom{8}{1}1 + \binom{8}{2}1 + \binom{8}{3}2 + \binom{8}{4}3 + \binom{8}{5}4 + \binom{8}{6}3 + \binom{8}{7}2 + \binom{8}{8}0 = 682.$$

Die Formeln (A) und (B) sind auch für die Differenz-Reihen giltig, denn man kann die erste Differenz-Reihe rücksichtlich der zweiten, die zweite rücksichtlich der dritten und jede beliebige rücksichtlich der auf sie folgenden als Hauptreihe betrachten.

Das allgemeine Glied einer Reihe kann auch gefunden werden, wenn ihr summatorisches bekannt ist. Denn offenbar bekommt man das n^{te} Glied oder $f(n)$, wenn man von der Summe der n Anfangsglieder die Summe von $(n-1)$ Anfangsgliedern subtrahirt, d. h. es besteht die Gleichung

(C) $$f(n) = F(n) - F(n-1).$$

Z. B. Ist $F(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, so erhält man $F(n-1)$, wenn man in $F(n)$, $(n-1)$ für n setzt; somit

$$F(n-1) = \frac{(n-1)(n-1+1)(n-1+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}, \text{ daher}$$

$$f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} - \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$f(n) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n - (n^3 - n)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{3n^2 + 3n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \frac{n^2 + n}{1 \,.\, 2},$$

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2}.$$

Die Ausdrücke (A) und (B) können noch in einer andern Form dargestellt werden. Verrichtet man nämlich in den zweiten Theilen die Multiplication der Factoren der Binomial-Coefficienten und ordnet das Resultat nach Potenzen von n, so erhält man aus (A.

(D) $$f(n) = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \varepsilon n^4 + \ldots \pi n^m,$$

und aus (B)

(E) $$F(n) = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + \ldots Pn^{m+1}.$$

In diesen zwei Formeln sind die Coefficienten von n unbestimmt, weil sie in jedem besondern Falle besonders ausgemittelt werden müssen, wie weiter unten gezeigt werden wird. Hier genüge die Bemerkung, daß man, wenn der Rang der Reihe m ist, zur Bestimmung von $f(n)$ aus (D) irgend welche $(m+1)$ Glieder; hingegen zur Bestimmung von $F(n)$ aus (E) $(m+1)$ Anfangsglieder kennen muß, wie dieß aus (A) und (B) deutlich erhellet. Selbst in dem Falle, wenn der Rang der Reihe unbekannt ist, mehrere Glieder aber gegeben sind, kann das Gesetz derselben aus (D) gefunden werden, jedoch unter der Bedingung, daß die Anzahl der gegebenen Glieder größer als der Rang der Reihe ist. denn bildet man aus (C) durch Substitution der p gegebenen Glieder p Gleichungen, bestimmt daraus die Coefficienten, so sind die Werthe der überflüssig angenommenen gleich Null.

§. 4. Arithmetische Progressionen der ersten Ordnung.

Eine arithmetische Progression des ersten Ranges ist diejenige, deren erste Differenz-Reihe aus durchaus gleichen Gliedern besteht, also jedes folgende um gleich viel von dem vorhergehenden Gliede verschieden ist. Ist das erste Glied einer solchen Reihe a, und der Betrag des Unterschiedes b, so ist $a+b$ ihr zweites, $a+2b$ ihr drittes, $a+3b$ ihr viertes Glied u. s. w.

Für diese Reihe

$$a;\quad a+b;\quad a+2b;\quad a+3b;\quad a+4b;\quad a+5b;\quad a+6b;\quad \ldots$$

ist also, wenn die früheren Zeichen gebraucht werden, $a_1 = a$; $\Delta a_1 = b$; $\Delta^2 a_1 = 0$.

Somit nach gehöriger Substitution in (A) und (B) des vorhergehenden §. ihr allgemeines Glied

1) $$a_n = a + (n-1)\,b,$$

und ihr summatorisches Glied

$$S_n = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} b,$$

2) $$S_n = na + \frac{n(n-1)\,b}{1\,.\,2} \quad \text{oder}$$

$$S_n = \frac{2na + n(n-1)\,b}{2},$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)\,b,$$

3) $$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n).$$

Aus (C) vorigen §. erhält man

$$a_n = na + \frac{n(n-1)\,b}{1\,.\,2} - \left[(n-1)\,a + \frac{(n-1)(n-2)\,b}{1\,.\,2}\right],$$

$$a_n = na + \frac{n^2 b - nb}{2} - na + a - \frac{n^2 b - 3nb + 2b}{2},$$

$$a_n = \quad a + \frac{2nb - 2b}{2},$$

$$a_n = \quad a + (n-1)\,b, \text{ wie (1).}$$

Um aus (D) a_n zu bestimmen, müssen, weil die Reihe von erster Ordnung ist, irgend welche zwei Glieder gegeben sein, z. B. das erste Glied $= a$, das dritte Glied $= a + 2b$. Setzt man diese Werthe in

$$a_n = \alpha + n\beta, \text{ so ist für } n = 1$$

$$a \;= \alpha + \beta, \text{ und für } n = 3$$

$$a + 2b = \alpha + 3\beta.$$

Zwei Gleichungen, durch die α und β bestimmt sind. Subtrahirt man die erste von der zweiten, so erhält man

$$2b = 2\beta, \text{ und mithin}$$

$$\beta = b;\quad \alpha = a - b;\ \text{somit}$$

$$a_n = a - b + nb \quad \text{oder}$$

$$a_n = a + (n-1)\,b, \text{ wie (1).}$$

Um aus (E) S_n für diese Reihe zu finden, müssen zwei Anfangsglieder, das erste $= a$, das zweite $= a + b$ gegeben sein. Man erhält aus

$$S_n = nA + n^2 B \text{ für } n = 1$$

$$a = \;\; A + \;\; B \text{ für } n = 2$$

$$2a + b = 2A + 4B.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit 2 und subtrahirt sie von der zweiten, so hat man

$$b = 2B,\ \text{somit}$$

$$B = \frac{b}{2} \text{ und } A = a - \frac{b}{2}, \text{ mithin nach gehöriger Substitution}$$

$$S_n = n\left(a - \frac{b}{2}\right) + \frac{n^2 b}{2},$$

$$S_n = na - \frac{nb}{2} + \frac{n^2 b}{2},$$

$$S_n = na + \frac{n(n-1)\,b}{1\,.\,2}, \text{ wie (2).}$$

Die Gleichungen (1) und (2) enthalten fünf Größen a_n, a, b, n, S_n, und es lassen sich, wenn drei der in Rede stehenden fünf Größen bekannt sind, mittelst dieser beiden Gleichungen jederzeit die zwei andern finden, und so alle bei den arithmetischen Progressionen dieser Ordnung vorkommenden Aufgaben auflösen.

§. 5. Arithmetische Progressionen der zweiten Ordnung.

Eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung ist diejenige, deren zweite Differenz-Reihe aus gleichen Gliedern besteht. Ist das erste Glied einer solchen Reihe a, das erste Glied ihrer ersten Differenz-Reihe b, das erste Glied ihrer zweiten Differenz-Reihe c, so hat die Progression die Form

$$a;\quad a+b;\quad a+2b+c;\quad a+3b+3c;\quad a+4b+6c;\ \ldots$$

Demnach ist für diese Reihe $a_1 = a$; $\Delta a_1 = b$; $\Delta^2 a_1 = c$; $\Delta^3 a_1 = 0$; mithin ihr allgemeines Glied, wenn man in (A) §. 3 diese Werthe setzt:

$$a_n = a + \binom{n-1}{1} b + \binom{n-1}{2} c, \text{ oder}$$

1) $$a_n = a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2} c,$$

und das summatorische Glied aus (B)

$$S_n = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} b + \binom{n}{3} c, \text{ oder}$$

2) $$S_n = na + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} c.$$

Aus (C) §. 3 folgt

$$a_n = na + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} c - \left[(n-1)a + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2} b + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3} c\right] \text{ oder}$$

$$a_n = \ a + \frac{2nb-2b}{1\,.\,2} + \frac{3n^2c - 9nc + 6c}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$a_n = \ a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2} c, \text{ wie (1).}$$

Für die Bestimmung von a_n aus (D) seien das erste, dritte und fünfte Glied gegeben. Man erhält aus

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha + \beta_n + \gamma n^2 && \text{für } n = 1 \\ a &= \alpha + \beta + \gamma && \text{für } n = 3 \\ a + 2b + c &= \alpha + 3\beta + 9\gamma && \text{für } n = 5 \\ a + 4b + 6c &= \alpha + 5\beta + 25\gamma. && \end{aligned}$$

Um aus diesen Gleichungen α, β und γ zu bestimmen, subtrahiren wir die erste von der zweiten und die zweite von der dritten Gleichung und erhalten

$$\begin{aligned} 2b + c &= 2\beta + 8\gamma, \\ 2b + 5c &= 2\beta + 16\gamma. \end{aligned}$$

Wird die erste von der zweiten Gleichung abgezogen, so ist

$$4c = 8\gamma, \text{ mithin } \gamma = \frac{c}{2};\ \beta = b - \frac{3c}{2};\ \alpha = a - b + c$$

somit nach gehöriger Substitution:

$$a_n = a - b + c + n\left(b - \frac{3c}{2}\right) + \frac{cn^2}{2} c \text{ oder}$$

$$a_n = a - b + nb + c - \frac{3nc}{2} + \frac{n^2c}{2},$$

$$a_n = a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2} c, \text{ wie (1).}$$

Für die Bestimmung von S_n aus (E), da hier drei Anfangsglieder gegeben sein müssen, erhält man aus

$$\begin{aligned} S_n &= An + Bn^2 + Cn^3 \quad \text{für } n=1 \\ a &= A + B + C \quad \text{für } n=2 \\ 2a + b &= 2A + 4B + 8C \quad \text{für } n=3 \\ 3a + 3b + c &= 3A + 9B + 27C. \end{aligned}$$

Subtrahirt man die erste Gleichung, nachdem man sie mit 2 multiplicirt hat, von der zweiten, und die zweite, nachdem man sie mit 3 und die dritte mit 2 multiplicirt hat, von der dritten, so gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} b &= 2B + 6C, \\ 3b + 2c &= 6B + 30C. \end{aligned}$$

Wird die erste Gleichung mit 3 multiplicirt und dann von der zweiten abgezogen, so ergibt sich

$$2c = 12C, \text{ daher } C = \frac{c}{6}; \quad B = \frac{b-c}{2}; \quad A = a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3}; \text{ somit}$$

$$S_n = n\left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3}\right) + n^2\frac{b-c}{2} + \frac{n^3c}{6},$$

$$S_n = na + \frac{n^2-n}{2}b + \frac{n^3-3n^2+2n}{6}c,$$

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}c, \text{ wie (2).}$$

Wäre a_n und S_n für die besondere Reihe

4; 7; 12; 19; 28; 39; 52; . . . zu finden,

so ist 3; 5; 7; 9; 11; 13; . . . ihre erste Differenz-Reihe,

und 2; 2; 2; 2; 2; . . . ihre zweite Differenz-Reihe,

daher der angenommenen Bezeichnungsweise gemäß $a_1 = 4$; $\Delta a_1 = 3$: $\Delta^2 a_1 = 2$; $\Delta^3 a_1 = 0$.

Man erhält aus (A)

$$a_n = 4 + \binom{n-1}{1}3 + \binom{n-1}{2}2 \text{ oder}$$

$$a_n = 4 + 3n - 3 + n^2 - 3n + 2, \text{ somit}$$

$$a_n = n^2 + 3.$$

Aus (B): $S_n = \binom{n}{1}4 + \binom{n}{2}3 + \binom{n}{3}2$ oder

$$S_n = 4n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}2, \text{ mithin}$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + 19n}{6}.$$

Aus (C): $a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + 19n}{6} - \left[\frac{2(n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 19(n-1)}{6}\right]$ oder

$$a_n = \frac{6n^2 + 18}{6}, \text{ daher}$$

$$a_n = n^2 + 3.$$

Nehmen wir an, daß die Reihe vom unbekannten, jedoch höchstens vom vierten Range sei. Wir erhalten aus (D) mit Berücksichtigung der Bemerkung im §. 3, wenn 7 ihr zweites, 19 ihr viertes, 28 ihr fünftes und 39 ihr sechstes Glied ist, zur Bestimmung von a_n folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} 7 &= \alpha + 2\beta + 4\gamma + 8\delta, \\ 19 &= \alpha + 4\beta + 16\gamma + 64\delta, \\ 28 &= \alpha + 5\beta + 25\gamma + 125\delta, \\ 39 &= \alpha + 6\beta + 36\gamma + 216\delta. \end{aligned}$$

Subtrahirt man die erste von der zweiten, die zweite von der dritten, die dritte von der vierten, so erhält man

$$12 = 2\beta + 12\gamma + 56\delta,$$
$$9 = \beta + 9\gamma + 61\delta,$$
$$11 = \beta + 11\gamma + 91\delta.$$

Subtrahirt man die erste Gleichung, nachdem man sie durch 2 dividirt hat, von der zweiten und die zweite von der dritten, so gelangt man zu den Gleichungen

$$3 = 3\gamma + 33\delta,$$
$$2 = 2\gamma + 30\delta.$$

Dividirt man die erste Gleichung durch 3 und die zweite durch 2 und subtrahirt sie von einander, so hat man

$0 = 4\delta$, daher $\delta = \frac{0}{4} = 0$; $\gamma = 1$; $\beta = 6 - 6 = 0$; $\alpha = 7 - 4 = 3$; mithin

$$a_n = 3 + n^2.$$

Man sieht, daß der überflüssig angenommene Coefficient δ Null geworden ist, wie im §. 3 bemerkt wurde.

Aus (E) erhält man zur Bestimmung von S_n

$$4 = A + B + C,$$
$$11 = 2A + 4B + 8C,$$
$$23 = 3A + 9B + 27C.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen A, so erhält man

$$3 = 2B + 6C,$$
$$13 = 6B + 30C.$$

Eliminirt man B, so ist

$4 = 12C$, daher $C = \frac{1}{3}$; $B = \frac{1}{2}$; $A = \frac{19}{6}$; somit

$$S_n = \frac{19n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \text{ oder}$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + 19n}{6}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) enthalten sechs Größen a_n, a, b, c, n und S_n und es lassen sich, wenn deren vier gegeben sind, die beiden andern bestimmen, und so die Aufgaben auflösen, die bei Progressionen dieser Ordnung gegeben werden können.

§. 6. Arithmetische Progressionen der dritten Ordnung.

Sind die Glieder der dritten Differenz-Reihe einer gegebenen Progression unter einander gleich, so heißt die Reihe die der dritten Ordnung. Ist das erste Glied einer solchen Reihe a, das erste Glied ihrer ersten Differenz-Reihe b, das erste Glied ihrer zweiten Differenz-Reihe c, das erste Glied ihrer dritten Differenz-Reihe d, so ist die Reihe selbst

$$a;\ a + b;\ a + 2b + c;\ a + 3b + 3c + d;\ a + 4b + 6c + 4d;\ \ldots$$

und der allgemeinen Bezeichnungsweise gemäß $a_1 = a$; $\Delta a_1 = b$; $\Delta^2 a_1 = c$; $\Delta^3 a_1 = d$; $\Delta^4 a_1 = 0$, und daher ihr allgemeines Glied

(1) $$a_n = a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}c + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}d,$$

und das summatorische

(2) $$S_n = a_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}c + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}d.$$

Eben diese Formeln erhält man aus (D) und (E), wenn das erste, zweite, dritte und vierte Glied gegeben sind, und zwar aus (D) bekommt man, wenn man darin für n nach der Reihe 1, 2, 3 und 4 setzt, für die Bestimmung des allgemeinen Gliedes folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \beta + \gamma + \delta, \\ a + b &= \alpha + 2\beta + 4\gamma + 8\delta, \\ a + 2b + c &= \alpha + 3\beta + 9\gamma + 27\delta, \\ a + 3b + 3c + d &= \alpha + 4\beta + 16\gamma + 64\delta. \end{aligned}$$

Wird aus diesen Gleichungen α eliminirt, so erhält man

$$\begin{aligned} b &= \beta + 3\gamma + 7\delta, \\ b + c &= \beta + 5\gamma + 19\delta, \\ b + 2c + d &= \beta + 7\gamma + 37\delta. \end{aligned}$$

Subtrahirt man die erste von der zweiten und die zweite von der dritten, so bekommt man

$$\begin{aligned} c &= 2\gamma + 12\delta, \\ c + d &= 2\gamma + 18\delta. \end{aligned}$$

Werden die beiden Gleichungen von einander abgezogen, so ist

$d = 6\delta$, daher $\delta = \frac{d}{6}$; $\gamma = \frac{c}{2} - d$; $\beta = b - \frac{3c}{2} + \frac{11d}{6}$; $\alpha = a - b + c - d$; somit

$$a_n = a - b + c - d + \left(b - \frac{3c}{2} + \frac{11d}{6}\right)n + \left(\frac{c}{2} - d\right)n^2 + \frac{dn^3}{6} \text{ oder}$$

$$a_n = a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}c + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}d, \text{ wie (1).}$$

Für die Bestimmung von S_n gibt (E), wenn man darin nach der Reihe 1, 2, 3, 4 für n setzt, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} a &= A + B + C + D, \\ 2a + b &= 2A + 4B + 8C + 16D, \\ 3a + 3b + c &= 3A + 9B + 27C + 81D, \\ 4a + 6b + 4c + d &= 4A + 16B + 64C + 256D. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste Gleichung nach der Reihe mit 2, 3, 4 und zieht sie von der zweiten, dritten und vierten ab, so erhält man

$$\begin{aligned} b &= 2B + 6C + 14D, \\ 3b + c &= 6B + 24C + 78D, \\ 6b + 4c + d &= 12B + 60C + 252D. \end{aligned}$$

Wird die erste Gleichung zuerst mit 3 und hernach mit 6 multiplicirt und dann von der zweiten und der dritten abgezogen, so bekommt man

$$\begin{aligned} c &= 6C + 36D, \\ 4c + d &= 24C + 168D. \end{aligned}$$

Wird die erste Gleichung mit 4 multiplicirt und von der zweiten abgezogen, so ist

$d = 24D$, daher $D = \frac{d}{24}$; $C = \frac{c}{6} - \frac{d}{4}$; $B = \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + \frac{11d}{24}$; $A = a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{d}{4}$; somit

$$S_n = \left(a - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \frac{d}{4}\right)n + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{11d}{24}\right)n^2 + \left(\frac{c}{6} - \frac{d}{4}\right)n^3 + \frac{d}{24}n^4 \text{ oder}$$

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}b + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}c + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}d, \text{ wie (2).}$$

Wäre a_n und S_n für die Reihe

	3; 7; 14; 26; 45; 73; 112; . . .	zu suchen,
so ist	4; 7; 12; 19; 28; 39; . . .	ihre erste Differenz-Reihe,
	3; 5; 7; 9; 11; . . .	ihre zweite Differenz-Reihe,
und	2; 2; 2; 2 . . .	ihre dritte Differenz-Reihe.

Die gegebene Reihe ist daher von der dritten Ordnung und es ist $a_1 = 3$; $\Delta a_1 = 4$; $\Delta^2 a_1 = 3$; $\Delta^3 a_1$ 2; $\Delta^4 a_1 = 0$. Mithin ihr allgemeines Glied

$$a_n = 3 + (n-1)4 + \binom{n-1}{2}3 + \binom{n-1}{3}2 \text{ oder}$$

$$a_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 19n}{6},$$

und ihr summatorisches Glied

$$S_n = \binom{n}{1}3 + \binom{n}{2}4 + \binom{n}{3}3 + \binom{n}{4}2 \quad \text{oder}$$

$$S_n = \frac{n^4 + 17n^2 + 18n}{12}.$$

Für die Bestimmung von a_n nach der Methode der unbestimmten Coefficienten für den Fall, daß die vier ersten Glieder gegeben sind, erhält man aus (D)

$$3 = \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$
$$7 = \alpha + 2\beta + 4\gamma + 8\delta,$$
$$14 = \alpha + 3\beta + 9\gamma + 27\delta,$$
$$26 = \alpha + 4\beta + 16\gamma + 64\delta.$$

Eliminirt man α, so erhält man

$$4 = \beta + 3\gamma + 7\delta,$$
$$7 = \beta + 5\gamma + 19\delta,$$
$$12 = \beta + 7\gamma + 57\delta.$$

Wird die erste Gleichung von der zweiten, und die zweite von der dritten abgezogen, so bekommt man

$$3 = 2\gamma + 12\delta,$$
$$5 + 2\gamma + 18\delta.$$

Subtrahirt man die erste Gleichung von der zweiten, so ist

$$2 = 6\delta, \text{ daher } \delta = \tfrac{1}{3};\ \gamma = -\tfrac{1}{2};\ \beta = \frac{19}{6};\ \alpha = 0; \text{ somit}$$

$$a_n = \frac{19n}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \quad \text{oder}$$

$$a_n = \frac{2n^3 - 3n^2 + 19n}{6}.$$

Für eben diese Annahme erhält man aus (E)

$$3 = A + B + C + D,$$
$$10 = 2A + 4B + 8C + 16D,$$
$$24 = 3A + 9B + 27C + 81D,$$
$$50 = 4A + 16B + 64C + 256D.$$

Wird die zweite Gleichung durch 2, die dritte durch 3, und die vierte durch 4 dividirt und dann die erste von der zweiten, die zweite von der dritten und die dritte von der vierten Gleichung subtrahirt, so gelangt man zu den Gleichungen

$$2 = B + 3C + 7D,$$
$$3 = B + 5C + 19D,$$
$$\tfrac{9}{2} = B + 7C + 37D.$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten und die zweite von der dritten, so bekommt man

$$1 = 2C + 12D,$$
$$\tfrac{3}{2} = 2C + 18D.$$

Werden die beiden Gleichungen von einander abgezogen, so ist

$$\tfrac{1}{2} = 6D, \text{ und daher } D = \tfrac{1}{12};\; C = 0;\; B = \tfrac{17}{12};\; A = \tfrac{3}{2}; \text{ somit}$$

$$S_n = \tfrac{3}{2}n + \tfrac{17}{12}n^2 + \frac{n^4}{12} \text{ oder}$$
$$S_n = \frac{n^4 + 17n^2 + 18n}{12}.$$

In den Gleichungen (1) und (2) kommen sieben Größen a_n, a, b, c, d, n und S_n vor. Sind von diesen Größen fünf gegeben, so können die beiden andern gefunden werden; mithin sind alle Aufgaben, die über Progressionen der dritten Ordnung gestellt werden können, auflösbar.

Eben so könnte man die Reihen der folgenden höhern Ordnungen behandeln; doch scheint dieses überflüssig, weil ihre Behandlungsweise aus den bisherigen Betrachtungen deutlich erhellet.

§. 7. Figurirte Zahlen.

a) Polygonalzahlen.

Nimmt man eine Reihe von der Form an

1) $\quad 1;\; a;\; a;\; a;\; a;\; a;\; a;\; a;\; a;\; \ldots$

bildet die Summe aus dem ersten, aus dem ersten und zweiten, aus dem ersten, zweiten und dritten Gliede u. s. w. und schreibt diese Summen horizontal, so erhält man die Reihe

2) $\quad 1;\; 1+a;\; 1+2a;\; 1+3a;\; 1+4a;\; 1+5a;\; 1+6a;\; \ldots$

die offenbar eine arithmetische Progression der ersten Ordnung ist.

Wendet man auf die Reihe (2) das Verfahren an, welches auf (1) angewendet wurde, so ergibt sich die Reihe

3) $\quad 1;\; 2+a;\; 3+3a;\; 4+6a;\; 5+10a;\; 6+15a;\; 7+21a;\; \ldots$

die eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung ist; denn man findet leicht, daß $\Delta a_1 = 1 + a$; $\Delta^2 a_1 = a$; $\Delta^3 a_1 = 0$ ist. Die Reihe (3) wird wegen der Entstehungsweise Summenreihe, gewöhnlicher Polygonalreihe und die Glieder Polygonalzahlen genannt, weil sich Punkte oder Kugeln in dieser Anzahl in regelmäßige Vielecke gruppiren lassen.

Für die Reihe (3) findet man aus (A) und (B) §. 3

$$a_n = 1 + (n-1)(1+a) + \binom{n-1}{2} a$$

$$a_n = \frac{2n + n^2 a - na}{2}$$

4) $$a_n = n + \frac{n(n-1)a}{2}$$

$$S_n = \binom{n}{1}.1 + \binom{n}{2}(1+a) + \binom{n}{3} a$$

$$S_n = \frac{n^3 a + 3n^2 + 3n - na}{6}$$

5) $$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n^2-1)a}{1.2.3}$$

Setzt man in (3), (4), (5) $a = 1$; so erhält man

6) $\quad 1;\; 3;\; 6;\; 10;\; 15;\; 21;\; 28;\; 36;\; 45;\; 55;\; \ldots$

$$a_n = n + \frac{n(-1)}{2}$$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n^2-1)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$S_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Die Reihe (6) heißt Dreiecks- oder Trigonal-Reihe und die Glieder Dreiecks-, Triangular- oder Trigonal-Zahlen, weil sich Kugeln in dieser Anzahl in gleichseitige Dreiecke ordnen lassen.

Ist $a = 2$, so geben die Formeln (3), (4), (5)

7) 1; 4; 9; 16; 25; 36; 29; 64; 81; 100; . . .

$$a_n = n + \frac{n(n-1)2}{2}$$

$$a_n = n^2$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}\,2$$

$$S_n = \frac{3n^2 + 3n + 2n^3 - 2n}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Die Reihe (7) heißt Quadrat- oder Tetragonal-Reihe und ihre Glieder Quadrat- oder Titregonal-Zahlen.

Wird $a = 3$ angenommen, so erhält man aus (3), (4) und (5)

8) 1; 5; 12; 22; 35; 51; 70; 92; 117; 145; . . .

$$a_n = n + \frac{n(n-1)3}{2},$$

$$= \frac{n(3n-1)}{2},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2} + \frac{n(n^2-1)3}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$S_n = \frac{n^3 + n^2}{2},$$

$$S_n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Die Reihe (8) heißt Pentagonal-Reihe und die Glieder Pentagonal-Zahlen.

Für $a = 4$ folgt aus (3), (4) und (5)

9) 1; 6; 15; 28; 45; 66; 91; 120; 153; 190; . . .

$$a_n = n + \frac{n(n-1)4}{2},$$

$$a_n = 2n^2 - n,$$

$$a_n = n(2n-1),$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2} + \frac{n(n^2-1)}{1\,.\,2\,.\,3}\,4,$$

$$S_n = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6},$$

$$S_n = \frac{n(4n^2 + 3n - 1)}{6}.$$

Die Reihe (9) heißt Sexagonal-Reihe und die Glieder Sexagonal-Zahlen.

Für $a = 5$ folgt aus (3), (4) und (5)

10) 1; 7; 18; 34; 55; 81; 112; 148; 189; 235; . . .

$$a_n = n + \frac{(n-1)5}{2},$$

$$a_n = \frac{5n^2 - 3n}{2},$$

$$a_n = \frac{n(5n-3)}{2},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}5,$$

$$S_n = \frac{5n^3 + 3n^2 - 2n}{1.2.3},$$

$$S_n = \frac{n(5n^2 + 3n - 2)}{1.2.3}.$$

Die Reihe (10) heißt Siebenecksreihe, und die Glieder Siebeneckszahlen.

Für $a = m - 2$ folgt aus (3), (4) und (5)

11) $1;\ m;\ 3m-3;\ 6m-8;\ 10m-15;\ 15m-24;\ 21m-35;\ 28m-48;\ldots$

$$a_n = n + \frac{n(n-1)}{2}(m-2),$$

$$a_n = \frac{mn^2 - 2n^2 + 4n - nm}{2},$$

$$a_n = \frac{n^2(m-2) - n(m-n)}{2},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3}(m-2),$$

$$S_n = \frac{mn^3 - mn - 2n^3 + 3n^2 + n}{1.2.3},$$

$$S_n = \frac{mn(n^2-1) - n(2n^2 - 3n - 1)}{1.2.3}.$$

Die Reihe (11) heißt m Ecksreihe und die Glieder m Eckszahlen.

Um zu erfahren, ob eine vorgelegte Zahl z eine gegebene m Eckszahl sei, und welche die Seite derselben ist, so ist nur nothwendig, die Zahl z dem allgemeinen Gliede gleichzusetzen und die Gleichung nach n aufzulösen. Es ist

$$\frac{n^2(m-2) - n(m-4)}{2} = z \quad \text{und}$$

$$n = \frac{m - 4 + \sqrt{(m-4)^2 + 8(m-2)z}}{2(m-2)}.$$

Demnach ist die Zahl z eine m Eckszahl, wenn $(m-4)^2 + 8(m-2)z$ ein vollständiges Quadrat und eine ganze positive Zahl ist. Dieses festhaltend, ist die Zahl z eine Dreiecks-, Vierecks-, Fünfecks-, Sechsecks-, Siebenecks-Zahl, wenn nachstehende Bedingungen erfüllt sind.

$$n = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8z}}{2},$$

$$n = \sqrt{z},$$

$$n = \frac{1 + \sqrt{24z + 1}}{6},$$

$$n = \frac{2 + \sqrt{32z + 4}}{8},$$

$$n = \frac{3 + \sqrt{40z + 9}}{10}.$$

§. 8.

b) Pyramidalzahlen.

Sucht man von der Polygonalreihe (3) vorigen Paragraphs die Summenreihe, so erhält man

1) $1;\ 3 + a;\ 6 + 4a;\ 10 + 10a;\ 15 + 20a;\ 21 + 35a;\ 28 + 56a;\ 36 + 84a;\ldots$

Diese Reihe heißt Pyramidalreihe und die Glieder Pyramidalzahlen, weil sich so viele Punkte oder Kugeln, als eine solche Zahl anzeigt, in eine Gruppe zusammenstellen lassen, welche eine Pyramidenform annimmt.

Was den Rang der Reihe (1) anbelangt, so findet man leicht, daß sie eine arithmetische Progression der dritten Ordnung ist, denn es ist $\Delta a_1 = 2 + a$; $\Delta^2 a_1 = 1 + 2a$; $\Delta^3 a_1 = a$; $\Delta^4 a_1 = 0$ und daher das allgemeine Glied von (1)

$$a_n = 1 + (n-1)(2+a) + \binom{n-1}{2}(1+2a) + \binom{n-1}{3}a,$$

$$a_n = \frac{3n^2 + 3n + n^3 a - an}{6},$$

2) $$a_n = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n^2-1)a}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

und ihr summatorisches Glied

$$S_n = \binom{n}{1}1 + \binom{n}{2}(2+a) + \binom{n}{3}(1+2a) + \binom{n}{4}a,$$

$$S_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{an^4 + 2an^3 - an^2 - 2an}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4},$$

3) $$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{n(n^2-1)(n+2)a}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}.$$

Setzt man in (1), (2), (3) $a = 1$, so erhält man

4) $1;\ 4;\ 10;\ 20;\ 35;\ 56;\ 84;\ 120;\ 180;\ 220;\ \ldots$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n^2-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$a_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{n(n^2-1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4},$$

$$S_n = \frac{n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}.$$

Die Reihe (4) nennt man dreieckige oder dreiseitige Pyramidalreihe und die Glieder dreieckige oder dreiseitige Pyramidalzahlen.

Für $a = 2$ folgt aus (1), (2), (3)

5) $1;\ 5;\ 14;\ 30;\ 55;\ 91;\ 140;\ 203;\ 285;\ 385;\ \ldots$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n^2-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 2,$$

$$a_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{n(n^2-1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.\, 2,$$

$$S_n = \frac{2n^4 + 8n^3 + 10n^2 + 4n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

Die Reihe (5) heißt viereckige oder vierseitige Pyramidalreihe und die Glieder vierseitige Pyramidalzahlen.

Für $a = 3$ erhält man aus (1), (2), (3)

6) $1;\ 6;\ 18;\ 40;\ 75;\ 126;\ 196;\ 288;\ 405;\ 550;\ \ldots$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n^2-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 3,$$

$$= \frac{3n^3 + 3n^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{n(n^2-1)(n^2+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.\, 3,$$

$$S_n = \frac{3n^4 + 10n^3 + 9n^2 + 2n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}.$$

Die Reihe (6) heißt fünfseitige Pyramidalreihe und die Glieder fünfseitige Pyramidalzahlen.

Für $a = 4$ folgt aus (1), (2), (3)

7) $1;\ 7;\ 22;\ 50;\ 95;\ 161;\ 252;\ 372;\ 525;\ 715;\ \ldots$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n^2-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, 4,$$

$$a_n = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$a_n = \frac{n(4n-1)(n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{n(n^2-1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.\, 4,$$

$$S_n = \frac{n^4 + 3n^3 + 2n^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$S_n = \frac{n^2(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}.$$

Die Reihe (7) heißt sechseckige Pyramidalreihe und ihre Glieder sechseckige Pyramidalzahlen.

Ist $a = 5$, erhält man aus (1), (2) und (3)

8) $1;\ 8;\ 26;\ 60;\ 115;\ 196;\ 308;\ 456;\ 645;\ 880;\ \ldots$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n^2+1)5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$a_n = \frac{5n^3 + 3n^2 - 2n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$a_n = \frac{n(5n-2)(n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

9) $$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{n(n^2-1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4},$$

$$S_n = \frac{5n^4 + 14n^3 + 7n^2 - 2n}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4},$$

$$S_n = \frac{n(5n-1)(n+1)(n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}.$$

Die Reihe (9) heißt siebenseitige Pyramidalreihe und ihre Glieder siebenseitige Pyramidalzahlen.

Für $a = m - 2$ erhält man aus (1), (2), (3)

10) $1;\ m+1;\ 4m-2;\ 10m-10;\ 20m-25;\ 35m-49;\ 56m-84;\ 84m-132;\ 120m-195;\ \ldots$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n^2-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(m-2),$$

$$a_n = \frac{-2n^3 + 3n^2 + 5n + mn^3 - mn}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$a_n = \frac{-n(2n-5)(n+1) + n(n^2-1)m}{1 \,.\, 2 \,.\, 3},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{n(n^2-1)(n+2)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

$$S_n = \frac{-n}{12}(n^3-7n-6) + \frac{n(n^2-1)(n+2)m}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.$$

Die Reihe (10) heißt m seitige Pyramidalreihe und ihre Glieder m seitige Pyramidalzahlen.

Um zu erfahren, ob eine vorgelegte Zahl z eine Pyramidalzahl und welche die Seite derselben sei, muß die kubische Gleichung

$$n^3(m-2) + 3n^2 + n(5-m) = 6z$$

eine reelle, positive, ganzzahlige Wurzel haben.

§. 9. Anwendung der arithmetischen Progressionen zur Berechnung der Kugelhaufen.

I. Wenn der Haufen, in dem die Kugeln aufgeschichtet sind, die Gestalt einer dreiseitigen, ganz ausgeführten Pyramide hat, so wird die oberste Kugel an der Spitze von drei Kugeln, diese drei von sechs, diese sechs von zehn, diese zehn von fünfzehn Kugeln u. s. w. getragen werden. Die Kugelmengen in den einzelnen Schichten von oben abwärts lassen sich demnach so schreiben:

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,$$

und bilden eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung; denn man findet, daß $\Delta a_1 = 2$; $\Delta^2 a_1 = 1$; $\Delta^3 a_1 = 0$; somit

$$a_n = 1 + (n-1)2 + \frac{(n-1)(n-2)1}{1\,.\,2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{1\,.\,2},$$

demnach befinden sich in der 20. Schichte von oben

$$a_{20} = \frac{20\,.\,21}{2} = 210 \text{ Kugeln},$$

$$\text{und}\quad S_n = n\,.\,1 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}2 + \frac{n(n-1)(n-2)\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Die Summe von Kugeln in 20 Schichten von oben ist

$$S_{20} = \frac{20\,.\,21\,.\,22}{1\,.\,2\,.\,3} = 1540.$$

II. Sind jedoch einige Schichten abgetragen, so hat der Haufe die Form eines Pyramidalstutzes und die Anzahl S der ihn bildenden Kugeln ist offenbar, wenn sich in der vollkommen ausgeführten Pyramide P und in der abgetragenen Q Kugeln befinden, bestimmt durch die Gleichung

$$S = P - Q,$$

mithin, wenn die vollständige Pyramide aus n und die abgetragene aus m Schichten besteht:

$$S = \frac{n(n+1)(n+2}{1\,.\,2\,.\,3} - \frac{m(m+1)(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Man kann die Summe der Kugeln, die sich in einer abgestutzten dreiseitigen Pyramide befinden, auch durch folgende Betrachtung erhalten. Bei einem dreiseitigen Pyramidalstutze bildet die oberste Schichte, so wie auch jede folgende ein Dreieck. Wenn nun in einer Seite der obersten Schichte m Kugeln liegen, so sind in derselben $\frac{m(m+1)}{2}$ Kugeln vorhanden; weil ferner in jeder nachfolgenden Schichte eine Seite immer eine Kugel mehr hat, als sich in der nächst darüber liegenden befinden, so sind in der zweiten $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$, in der dritten $\frac{(m+2)(m+3)}{2}$, in der vierten $(m+3)(m+4)$ Kugeln u. s. w. Die Kugelmengen in den einzelnen Schichten von oben nach unten, nämlich

$$\frac{m(m+1)}{2};\ \frac{(m+1)(m+2)}{2};\ \frac{(m+2)(m+3)}{2};\ \frac{(m+3)(m+4)}{2};\ \frac{(m+4)(m+5)}{2};\ \frac{(m+5)(m+6)}{2};\ \ldots$$

$$\frac{m^2+m}{2};\ \frac{m^2+3m+2}{2};\ \frac{m^2+5m+6}{2};\ \frac{m^2+7m+12}{2};\ \frac{m^2+9m+20}{2};\ \frac{m^2+11m+30}{2};\ \ldots$$

bilden eine Reihe, die eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung ist; denn es ist $\Delta a_1 = m + 1$; $\Delta^2 a_1 = 1$; $\Delta^3 a_1 = 0$ und daher

$$S_n = n\frac{m^2+m}{2} + \frac{n(n-1)(m+1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$S_n = \frac{m^2 n + mn^2 + mn - mn}{2} + \frac{n^2-n}{2} + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6},$$

$$S_n = \frac{mn(m+n)}{2} + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3},$$

und $$a_n = \frac{m^2+m}{2} + (n-1)(m+1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2},$$

$$a_n = \frac{m^2 + 2nm - m}{2} + \frac{n^2-n}{2},$$

$$a_n = \frac{m}{2}(m + 2n - 1) + \frac{n}{2}(n-1).$$

III. Bisweilen werden die Kugeln in vierseitige Pyramiden aufgeschichtet, so daß die Schichten sämmtlich Quadrate bilden; mithin liegen in der obersten Schichte 1 Kugel, in der zweiten 4, in der dritten 9, in der vierten 16 Kugeln u. s. w. Die Mengen der Kugeln von oben nach unten

1, 4, 9, 16, 25,

bilden eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung, denn es ist
ihre erste Differenz-Reihe 3; 5; 7; 9;
und ihre zweite Differenz-Reihe 2; 2; 2; somit

$$a_n = 1 + (n-1)3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}2,$$

$$a_n = 1 + 3n - 3 + n^2 - 3n - 2,$$

$$a_n = n^2,$$

$$S_n = n + \frac{n(n-1)}{1.2}3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}2,$$

$$S_n = n + \frac{3n^2 - 3n}{1.2} + \frac{2n^3 - 6n^2 + 4n}{1.2.3},$$

$$S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{1.2.3},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$

Demnach liegen in der 30. Schichte

$$a_{30} = 900,$$

und in 30 Schichten $S_n = \frac{30.31.61}{6} = 9455.$

IV. Sind jedoch etliche Schichten schon abgetragen, so ist die Summe S der übrig gebliebenen, wenn in den vollständigen P und in der abgetragenen Pyramide Q Kugeln lagen

$$S = P - Q,$$

oder wenn die vollständige Pyramide aus n und die abgetragene aus m Schichten bestand

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{1.2.3}.$$

Man kann die Summe der übriggebliebenen Kugeln auch auf folgende Art bestimmen. Da wir uns mit der vierseitigen Pyramide beschäftigen, so ist jede Schichte ein Quadrat, wie es auch aus dem allgemeinen Gliede erhellet. Wenn sich in einer Seite der obersten Schichte m Kugeln befinden, so befinden sich in der ganzen Schichte m^2; weil in jeder folgenden Schichte eine Seite eine Kugel mehr hat, als die ihr vorhergehende, so liegen in der zweiten Schichte $(m+1)^2$, in der dritten $(m+2)^2$, in der vierten $(m+3)^2$ u. s. w. Mithin bilden die Kugelmengen

$$m^2;\ (m+1)^2;\ (m+2)^2;\ (m+3)^2;\ (m+4)^2;\ (m+5)^2;\ (m+6)^2;\ (m+7)^2,$$
$$m^2;\ m^2+2m+1;\ m^2+4m+4;\ m^2+6m+9;\ m^2+8m+16;\ m^2+10m+25;\ m^2+12m+36;$$

eine Reihe, die eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung ist; denn es ist $\Delta a_1 = 2m+1$; $\Delta^2 a_1 = 2$; $\Delta^3 a_1 = 0$ und daher

$$S_n = m^2 n + \frac{n(n-1)(2m+1)}{1\ .\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3} 2,$$
$$S_n = m^2 n + m n^2 - n m + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{1\ .\ 2\ .\ 3},$$
$$S_n = m n (m + n - 1) + \frac{n(2n-1)(n-1)}{1\ .\ 2\ .\ 3},$$
$$a_n = m^2 + (n-1)(2m+1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2} 2,$$
$$a_n = m^2 + 2mn - 2m + n^2 - 2n + 1,$$
$$a_n = m(m + 2n - 2) + (n-1)^2,$$

für $m = 3$ und $n = 4$ ist

$$a_n = 3\ .\ 9 + 9 = 36,$$
$$S_n = 12\ .\ 6 + \frac{4\ .\ 7\ .\ 3}{1\ .\ 2\ .\ 3} = 86.$$

V. Wenn viele Kugeln aufzuschichten sind, so gibt man den Schichten gewöhnlich die Form von Rechtecken, mithin ist der Kugelhaufen dachförmig oder er hat die Gestalt eines dreiseitigen Prisma mit schiefen Grundflächen. In der obersten Schichte befindet sich nur eine Reihe von m Kugeln; diese ruhen auf zwei Reihen von $(m+1)$ Kugeln, mithin liegen in der zweiten Schichte $2(m+1)$ Kugeln; diese ruhen wieder auf drei Reihen jede von $(m+2)$ Kugeln, mithin liegen in der dritten Schichte $3(m+2)$ Kugeln u. s. w., nämlich in jeder folgenden Schichte eine Reihe und in jeder Reihe eine Kugel mehr. Bei dieser Anordnung enthalten die Schichten folgende Anzahl von Kugeln:

$$m;\ 2(m+1);\ 3(m+2);\ 4(m+3);\ 5(m+4);\ 6(m+5);\ 7(m+6);\ 8(m+7);\ \ldots$$
$$m;\ 2m+2;\ 3m+6;\ 4m+12;\ 5m+20;\ 6m+30;\ 7m+42;\ 8m+56;\ \ldots$$

diese Reihe ist eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung, denn es ist ihre erste Differenz-Reihe

$$m+2;\ m+4;\ m+6;\ m+8;\ m+10;\ m+12;\ m+16.$$

und ihre zweite Differenz-Reihe

$$2;\ \ 2;\ \ 2;\ \ 2;\ \ 2;\ \ 2;$$

daher $a_n = m + (n-1)(m+2) + \frac{(n-1)(n-2)2}{1\ .\ 2},$

$$a_n = n(m + n - 1),$$
$$S_n = mn + \frac{n(n-1)(m+2)}{1\ .\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)2}{1\ .\ 2\ .\ 3},$$
$$S_n = \frac{2n^3 + 3mn^2 + 3mn - 2n}{1\ .\ 2\ .\ 3},$$
$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}.$$

Ist $m = 10$ und $n = 20$, so ist

$$a_{20} = 20\ .\ 29 = 580,$$
$$S_{20} = \frac{20\ .\ 21\ .\ 68}{6} = 4760.$$

VI. Ist der rechteckige Kugelhaufen nicht ganz ausgeführt oder theilweise abgetragen, so ist die Anzahl S der übriggebliebenen Kugeln, wenn der vollständige Haufen, der aus n Schichten bestand und im Rücken m Kugeln hatte, P Kugeln enthielt und p Schichten abgetragen wurden, die Q Kugeln enthielten, offenbar

$$S = P - Q \text{ oder}$$
$$S = \frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} - \frac{p(p+1)(2p+3m-2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

S kann auch durch folgende Betrachtung erhalten werden. Hat die oberste Schichte im Haufenreste in der Seite nach der Länge q, in der Seite nach der Quere p Kugeln, so erhält diese Schichte pq Kugeln; in jeder folgenden Schichte hat jede Seite eine Kugel mehr, mithin die zweite Schichte $(p+1)(q+1)$; die dritte Schichte $(p+2)(q+2)$ Kugeln u. s. w. Die Kugeln in den aufeinander folgenden Schichten sind demnach durch folgende Zahlen gegeben:

$$pq;\ (p+1)(q+1);\ (p+2)(q+2);\ (p+3)(q+3);\ (p+4)(q+4);\ (p+5)(q+5)\ \ldots$$
$$pq;\ pq+p+q+1;\ pq+2p+2q+4;\ pq+3p+3q+9;\ pq+4p+4q+16;\ pq+5p+5q+25;\ \ldots$$

die eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung bilden, denn es $\Delta a_1 = p+q+1$; $\Delta^2 a_1 = 2$; $\Delta^3 a_1 = 0$. Somit

$$S_n = npq + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(p+q+1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}2,$$
$$S_n = \frac{2npq + n^2p + n^2q - np - nq}{1\,.\,2} + \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{1\,.\,2\,.\,3},$$
$$S_n = \tfrac{n}{2}(2pq + np + nq - p - q) + \tfrac{n}{6}(2n-1)(n-1),$$
$$a_n = pq + (n-1)(p+q+1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}2,$$
$$a_n = pq + (p+q)n - p - q + (n-1)^2.$$

Für $p = 5$; $q = 10$ und $n = 20$ ist

$$S_{20} = 10\,(100 + 200 + 100 - 15) + \frac{20\,.\,39\,.\,19}{6} = 6320,$$
$$S_{20} = 50 + 300 - 15 + 361 = 696.$$

VII. Aus den in Rechtecken geformten Schichten pflegt man noch eine andere Art von Kugelhaufen zu bilden, welche aber zu ihrem Gleichgewichte erfordern, daß sie an zwei Seiten an andere Kugelhaufen angelehnt oder auf sonst eine Art unterstützt werden. In einem solchen Haufen liegen in der obersten Schichte, die aus einer Reihe besteht, m Kugeln; darunter zwei Reihen, jede von $(m-1)$ Kugeln, mithin in der zweiten Schichte $2(m-1)$; unter diesen drei Reihen, jede von $(m-2)$ Kugeln, daher in der dritten Schichte $3(m-2)$ Kugeln u. s. w., so daß die Kugelmengen in den verschiedenen Schichten von oben nach unten durch folgende Zahlen gegeben sind:

$$m;\ 2(m-1);\ 3(m-2);\ 4(m-3);\ 5(m-4);\ 6(m-5);\ 7(m-6);\ 8(m-7);\ \ldots$$
$$m;\ 2m-2;\ 3m-6;\ 4m-12;\ 5m-20;\ 6m-30;\ 7m-42;\ 8m-56;\ \ldots$$

welche eine arithmetische Reihe des zweiten Ranges bilden; denn es ist

$m-2;\ m-4;\ m-6;\ m-8;\ m-10;\ m-12;\ m-12;\ \ldots$ ihre erste Differenz-Reihe, und

$-2;\ -2;\ -2;\ -2;\ -2;\ -2;\ \ldots$ ihre zweite Differenz-Reihe, daher

$$a_n = m + (n-1)(m-2) + \frac{(n-1)(n-2)(-2)}{1\,.\,2},$$
$$a_n = m + nm - m - 2n + 2 - n^2 + 3n - 2,$$
$$a_n = nm - n^2 + n,$$
$$a_n = n(m-n+1),$$

$$S_n = mn + \frac{n(n-1)(m-2)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)(-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(3m-2n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Für $m = 30$ und $n = 10$ ist

$$a_{10} = 10.21 = 210,$$

$$S_{20} = \frac{10.11.72}{6} = 1320.$$

VIII. Kann jedoch ein solcher Haufen nur von einer Seite angelehnt werden, so gibt man gewöhnlich jeder folgenden Schichte zwar eine Reihe mehr, läßt aber die Anzahl der Kugeln in jeder Reihe unverändert. Es ist demnach die Anzahl der Kugeln in den verschiedenen Schichten von oben

$$m;\ 2m;\ 3m;\ 4m;\ 5m;\ 6m;\ 7m;\ 8m;\ \ldots$$

die eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung bilden. Mithin

$$a_n = m + (n-1)m,$$

$$a_n = nm,$$

$$S_n = nm + \frac{n(n-1)m}{1 \cdot 2},$$

$$S_n = \frac{mn(n+1}{1 \cdot 2}.$$

IX. Ist eine bestimmte Menge Kugeln S in eine dreiseitige Pyramide aufzuschichten, so ist nothwendig zu wissen, wie viele Schichten man zu bilden oder wie viele Kugeln man in eine Seite der untersten Schichte zu legen hat, d. h. die Gleichung

$$n^3 + 3n^2 + 2n = 6S$$

muß eine reelle, ganzzahlige, positive Wurzel haben.

Eine eben solche Wurzel muß die Gleichung

$$2n^3 + 3n^2 + n + 6S$$

haben, wenn die nämliche Kugelmenge S in eine vierseitige Pyramide aufzuschichten wäre.

Sollte man aus der Kugelmenge S einen länglichen Haufen bilden, so hat man zur Bestimmung von n, vorausgesetzt, daß m die Anzahl der Kugeln im Rücken gegeben ist, die Gleichung

$$2n^3 + 3n^2m + 3mn = 6S.$$

Wäre m nicht gegeben, so hätte man ein Problem der unbestimmten Analytik in ganzen, positiven Zahlen aufzulösen. Eben so unbestimmt wäre die Aufgabe, wenn der Kugelhaufe nicht ganz ausgeführt werden sollte.

§. 10. Das Interpoliren der Reihen.

Eine Reihe interpoliren heißt, zwischen je zwei Glieder derselben eine gegebene Anzahl von Gliedern dergestalt einschalten, daß die dadurch entstehende neue Reihe mit der gegebenen vom gleichen Range ist; die so erhaltene Reihe heißt eine interpolirte.

Jede arithmetische Reihe

(1) $$a;\ b;\ c;\ d;\ e;\ f;\ \ldots$$

kann man betrachten, als hervorgegangen aus einer andern, von der man zwischen a und b, zwischen b und c, zwischen c und d u. s. w., dieselbe Anzahl von Gliedern weggelassen hat. Nimmt man an, daß in der Reihe (1) zwischen zwei Gliedern zwei weggelassen worden sind, bezeichnet die einzufügenden mit accentuirten Buchstaben, so ist die ursprüngliche Reihe, die nun interpolirte heißt

(2) $$a;\ a';\ a'';\ b;\ b';\ b'';\ c;\ c';\ c'';\ d;\ d';\ d'';\ e\ \ldots$$

Die Reihe (2) ist bestimmt, wenn ihr allgemeines Glied bekannt ist. Da jedoch die Reihe (2) vom gleichen Range mit (1) sein soll, deren allgemeines Glied aus einer hinlänglichen Anzahl beliebiger Glieder gefunden werden kann, so ist klar, daß a_n von (1) auch a_n von (2) ist.

Es sei a; $a+b$; $a+2b+c$; ... die zu interpolirende Reihe von zweiter Ordnung und zwar a ihr erstes, $a+b$ ihr zweites, $a+2b+c$ ihr drittes Glied. Sollen zwischen je zwei Glieder zwei eingeschaltet werden, so wird $a+b$ das vierte, $a+2b+c$ das siebente Glied der interpolirten Reihe sein. Man hat demnach zur Bestimmung von a_n aus (D) §. 3 folgende Gleichungen:

$$a = \alpha + \beta + \gamma,$$
$$a + b = \alpha + 4\beta + 16\gamma,$$
$$a + 2b + c = \alpha + 7\beta + 49\gamma.$$

Wird die erste Gleichung von der zweiten und der dritten abgezogen, so ist

$$b = 3\beta + 15\gamma,$$
$$b + c = 3\beta + 33\gamma.$$

Eliminirt man aus diesen zwei Gleichungen β, so erhält man

$$c = 18\gamma, \text{ daher}$$

$$\gamma = \frac{c}{18}; \ \beta = \frac{\frac{b-5c}{6}}{3} = \frac{6b-5c}{18}; \ \alpha = a - \frac{6b}{18} + \frac{15c}{18} - \frac{c}{18} = a - \frac{b}{3} + \frac{2c}{9}, \text{ somit}$$

$$a_n = a - \frac{b}{3} + \frac{2c}{9} + \frac{6b-5c}{18} n + \frac{cn^2}{18},$$

Setzt man für n nach und nach 1, 2, 3, 4 . . . so erhält man

$$a_1 = a - \frac{b}{3} + \frac{2c}{9} + \frac{6b-5c}{18} + \frac{c}{18} = a,$$
$$a_2 = a - \frac{b}{3} + \frac{2c}{9} + \frac{12b}{18} - \frac{10c}{18} + \frac{4c}{18} = a + \frac{b}{3} - \frac{c}{9},$$
$$a_3 = a - \frac{b}{3} + \frac{2c}{9} + \frac{18b}{18} - \frac{15}{18}c + \frac{9c}{18} = a + \frac{2b}{3} - \frac{c}{9},$$
$$a_4 = a - \frac{b}{3} + \frac{2c}{9} + \frac{24b}{18} - \frac{20c}{18} + \frac{16c}{18} = a + b,$$
$$a_5 = a - \frac{b}{3} + \frac{2c}{9} + \frac{30b}{18} - \frac{25c}{18} + \frac{25c}{18} = a + \frac{4b}{3} + \frac{2c}{9},$$
$$a_6 = a - \frac{b}{3} + \frac{2c}{9} + \frac{36b}{18} - \frac{30c}{18} + \frac{36}{18}c = a + \frac{5b}{3} + \frac{5c}{9},$$
$$a_7 = a - \frac{b}{3} + \frac{2}{9}c + \frac{42}{18}b - \frac{35}{18}c + \frac{49c}{18} = a + 2b + c,$$
$$a_8 = a - \frac{b}{3} + \frac{2}{9}c + \frac{48}{18}b - \frac{40}{18}c + \frac{64}{18}c = a + \frac{7b}{3} + \frac{13c}{9},$$
$$a_9 = a - \frac{b}{3} + \frac{2}{9}c + \frac{54b}{18} - \frac{45c}{18} + \frac{81c}{18} = a + \frac{8}{3}b + \frac{20c}{9},$$
$$a_{10} = a - \frac{b}{3} + \frac{2c}{9} + \frac{60}{18}b - \frac{50}{18}c + \frac{100c}{18} = a + 3b + 3c \text{ u. s. w.},$$

daher die interpolirte Reihe

$$(a);\ a + \frac{b}{3} - \frac{c}{9};\ a + \frac{2b}{3} - \frac{c}{9};\ (a+b);\ a + \frac{4b}{3} + \frac{2c}{9};\ a + \frac{5b}{3} + \frac{5c}{9};\ (a+2b+c);\ a + \frac{7b}{3} + \frac{13c}{9};\ a + \frac{8b}{3} + \frac{20c}{9};\ (a+3b+3c),$$

die eingeklammerten Glieder sind Glieder der gegebenen Reihe.

Oder wenn man die concrete Reihe der zweiten Ordnung 1; 10; 28; . . . mit zwei Gliedern zu interpoliren hätte, so hat man zur Bestimmung des allgemeinen Gliedes der interpolirten Reihe aus $a_n = \alpha + n\beta + n^2\gamma$ folgende Gleichungen:

$$1 = \alpha + \beta + \gamma,$$
$$10 = \alpha + 4\beta + 16\gamma,$$
$$28 = \alpha + 7\beta + 49\gamma.$$

Wird aus diesen Gleichungen α eliminirt, so ist

$$9 = 3\beta + 15\gamma,$$
$$18 = 3\beta + 23\gamma.$$

Nach Elimination von β ist

$$9 = 18\gamma, \text{ mithin}$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2};\ \beta = \tfrac{1}{2};\ \alpha = 0, \text{ daher}$$
$$a_n = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ somit}$$

(1); 3; 6; (10); 15; 21; (28); 36; 45; (55); 66; 78; (91); . . .
die interpolirte Reihe.

Diese Methode ist jedoch beim Interpoliren der Reihen nicht beliebt, jene der Differenzen wird ihr vorgezogen. Da die interpolirte mit der gegebenen von einerlei Ordnung sein muß, so ist klar, daß die allgemeine Formel

$$a_{m+r} = a_m + \binom{r}{1} \varDelta a_m + \binom{r}{2} \varDelta^2 a_m + \binom{r}{3} \varDelta^3 a_m + \binom{r}{4} \varDelta^4 a_m + \ldots \varDelta^2 a_m,$$

wodurch jedes Glied einer jeden arithmetischen Reihe durch ein vorangehendes und durch die eben so vielten Glieder der auf einander folgenden Differenz-Reihen ausgedrückt wird, nach einer kleinen Transfirmation für diesen Fall brauchbar wird.

Sollen r Glieder eingeschaltet werden, so ist das erste interpolirte Glied a_{m+1}; das zweite a_{m+2} . . . das letzte a_{m+r}. Um jedoch die eingeschalteten Glieder leichter zu übersehen und um zu wissen, wie viele Glieder eingeschaltet werden, und das wie vielte jedes eingeschaltete ist, setzen wir $r = \frac{u}{v}$, und $m = n$. Demnach ist

$$\text{(F)}\quad a_{n+\frac{u}{v}} = a_n + \binom{\frac{u}{v}}{1} \varDelta a_n + \binom{\frac{u}{v}}{2} \varDelta^2 a_n + \binom{\frac{u}{v}}{3} \varDelta^3 a_n + \binom{\frac{u}{v}}{4} \varDelta^4 a_n + \binom{\frac{u}{v}}{5} \varDelta^5 a_n + \ldots$$

wo $v > u$ ist.

Weil die Formel (F) für jede arithmetische abbricht, weil n, u und v jede beliebige Zahl (daß sie reell, positiv und ganz sein müsse, erfordert die Natur der Sache) bedeuten können, so ist klar, daß man zwischen zwei beliebige Glieder der gegebenen Reihe eine beliebige Anzahl Glieder einschalten kann, weßhalb sie als allgemeine Interpolations-Formel betrachtet werden darf. Beim Gebrauche derselben bezeichnet man immer jene zwei Glieder, zwischen welchen gerade die Einschaltung vorgenommen wird; mit a_n und a_{n+1}.

Wir wollen den Gebrauch der Formel durch ein Beispiel erläutern.

Um zwischen je zwei Glieder der Reihe 1; 25; 81; 169; . . . drei Glieder so einzuschalten, daß dadurch der Rang der Reihe nicht geändert wird, hat man u = 3; v = 4 und

1; 25; 81; 169; . . .
24; 56; 88; . . .
32; 32; . . .

also für das Einschalten zwischen dem ersten und zweiten Glieder
$a_n = 1$; $a_{n+1} = 25$; $\varDelta a_n = 24$; $\varDelta^2 a_n = 32$; $\varDelta^3 a_n = 0$, somit aus (F)

$$a_{n+\frac{u}{v}} = a_n \binom{\frac{u}{4}}{1} 24 + \binom{\frac{u}{4}}{2} 32 = a_n + 6u + u^2 - 4$$

$$a_1 + \frac{1}{4} = 1 + 6 + 1 - 4 = 4,$$
$$a_1 + \frac{2}{4} = 1 + 12 + 4 - 8 = 9,$$
$$a_1 + \frac{3}{4} = 1 + 18 + 9 - 12 = 16,$$

für die nächsten zwei Glieder ist $a_n = 25$; $a_{n+1} = 81$; $\Delta a_n = 56$; $\Delta^2 a_n = 32$, mithin

$$a_n + \frac{u}{4} = a_n + \frac{u}{4}\, 56 + \frac{u^2 - 4u}{16}.16 = a_n + 14u + u^2 - 4u,$$
$$a_2 + \frac{1}{4} = 25 + 14 + 1 - 4 = 36,$$
$$a_2 + \frac{2}{4} = 25 + 28 + 4 - 8 = 49,$$
$$a_2 + \frac{3}{4} = 25 + 42 + 9 - 12 = 64,$$

für die beiden folgenden Glieder ist $a_n = 81$; $a_{n+1} = 169$; $\Delta a_n = 88$; $\Delta^2 a_n = 32$, somit

$$a_n + \frac{u}{4} = a_n + \frac{u}{4}\, 88 + \frac{u^2 - 4u}{16}.16 = a_n + 22u + u^2 - 4u,$$
$$a_3 + \frac{1}{4} = 81 + 22 + 1 - 4 = 100,$$
$$a_3 + \frac{2}{4} = 81 + 44 + 4 - 8 = 121,$$
$$a_3 + \frac{3}{4} = 81 + 66 + 9 - 12 = 144 \text{ u. s. w.},$$

demnach ist die interpolirte Reihe

(1); 4; 9; 16; (25); 36; 49; 64; (81); 100; 121; 144; (169); . . .

die eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung ist, wie man sich leicht überzeugen kann.

Betrachtet man u nicht als Stellenzeiger der interpolirten Glieder, sondern als allgemeinen Index, so nimmt (F) folgende Form an:

$$\text{G)} \qquad a_u = a_u + \binom{\frac{u}{v}}{1} \Delta a_u + \binom{\frac{u}{v}}{2} \Delta^2 a_u + \binom{\frac{u}{v}}{3} \Delta^3 a_u + \binom{\frac{u}{v}}{4} \Delta^4 a_u + \binom{\frac{u}{v}}{5} \Delta a_u + \ldots$$

Diese Formel ist in vielen Fällen bequemer und brauchbarer als (F). Die Glieder der gegebenen Reihe kann man sehr leicht von den interpolirten Gliedern unterscheiden, so wie auch bestimmen, das wie vielte der interpolirten Glieder ein bestimmtes Glied ist. Dividirt man nämlich u durch v (die um eine Einheit vermehrte Anzahl der interpolirten Glieder), so erhält man entweder eine ganze Zahl p oder eine gemischte $p\frac{r}{v}$, zum Quotienten; im ersten Falle ist u der Index des $(p+1)^{\text{ten}}$ Gliedes der gegebenen Reihe, im zweiten eines interpolirten und zwar des r^{ten} zwischen dem $(p+1)^{\text{ten}}$ und $(p+2)^{\text{ten}}$ Gliede der interpolirten Reihe. Beim Gebrauche dieser Formel muß man u um eine Einheit kleiner annehmen, als der Stellenzeiger des Gliedes ist, das man aus (G) erhalten will, wovon der Grund leicht einzusehen ist.

Wäre die Reihe 1; 25; 81: . . . die von zweiter Ordnung ist, mit drei Gliedern zu interpoliren, so ist $a_1 = 1$; $\Delta a_1 = 24$; $\Delta a_1 = 31$; $v = 4$; demnach

$$a_u = 1 + \frac{u}{4}\, 24 + \frac{u\,(u-4)}{16.2}.32 = 1 + 6u + u^2 - 4u,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 1 + 6 + 1 - 4 = 4,$$
$$a_3 = 1 + 12 + 4 - 8 = 9,$$
$$a_4 = 1 + 18 + 9 - 12 = 16,$$
$$a_5 = 1 + 24 + 16 - 16 = 25,$$
$$a_6 = 1 + 30 + 25 - 20 = 36,$$
$$a_7 = 1 + 36 + 36 - 24 = 49,$$
$$a_8 = 1 + 42 + 49 - 28 = 64 \text{ u. s. w.}$$

Man sieht, daß man aus (G) die nämlichen Glieder erhält, wie aus (F).

Von der Interpolation macht man bei naturwissenschaftlichen Forschungen häufig mit großem Nutzen Gebrauch. Wenn man nämlich durch mühsame Versuche oder Beobachtungen eine Reihe von Resultaten erhalten hat, so bilden diese wirklich oder wenigstens näherungsweise eine arithmetische Progression, denn die Glieder irgend einer Differenz-Reihe sind entweder gleich oder so wenig von einander verschieden, daß sie, wenn sie als gleich betrachtet oder wenn das arithmetische Mittel für sie gesetzt wird, auf die zu fordernde Genauigkeit keinen Einfluß ausüben. Wir wollen dieses an einigen Beispielen betrachten.

I. Nach den Untersuchungen von Dulong und Petit ergab sich, daß der Gang eines Quecksilberthermometers, das mit Q bezeichnet werden soll, in Temperaturen, die höher waren, als die der Siedhitze, mit dem Gange eines Luftthermometers, das L heißen mag, nicht mehr übereinstimmte, sondern wenn Q angab

$$100;\ 150;\ 200;\ 250;\ 300;\ 360,$$

zeigte L

$$100;\ 148{,}7;\ 197{,}05;\ 245{,}05;\ 292{,}7;\ 350,$$

folglich sind die Unterschiede in den beiden Angaben

(1) $$0;\ 1.30;\ 2.95;\ 4.95;\ 7.30;\ 10.00,$$

die wir als Glieder einer arithmetischen Progression ansehen wollen, und suchen ihre Differenz-Reihen

$$1.30;\ 1.65;\ 2.00;\ 2.35;\ 2.70,$$

$$0.35;\ 0.35;\ 0.35;\ 0.35.$$

Sie bilden, weil die Glieder der zweiten Differenz-Reihe gleich sind, eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung.

Die Reihe (1) enthält Abweichungen nur für Temperaturen, die um 50° Celsius von einander abstehen, um diese auch für Temperaturen 1°, 2°, 3°... über 100° C. zu erhalten, muß man die Reihe (1) interpoliren, und zwar muß man zwischen je zwei 49 Glieder einschalten.

Man hat für die Interpolation zwischen den zwei ersten Gliedern

$$a_n = 0;\ a_{n+1} = 1.3;\ \Delta a_n = 1.3;\ \Delta^2 a_n = 0.35;\ u = 49;\ v = 50;\ n = 100,$$

$$a_{100} + \tfrac{u}{50} = \tfrac{u}{50}\,1.3 + \frac{u(u-50)}{2.2500}\,0.35 = \tfrac{u}{50}\,1.3 + \frac{u^2 - 50u}{1000}\,0.07,$$

$$a_{100} + \tfrac{1}{50} = 0.026 - 0.00343 = 0.02257,$$

$$a_{100} + \tfrac{2}{50} = 0.052 - 0.00672 = 0.04528,$$

$$a_{100} + \tfrac{3}{50} = 0.078 - 0.00987 = 0.06812 \text{ u. s. w.},$$

für die Interpolation zwischen den zwei folgenden Gliedern hat man

$$a_n = 1.3;\ a_{n+1} = 2.95;\ \Delta a_n = 1\ 65;\ \Delta^2 a_n = 0.35;\ u = 49;\ v = 50;\ n = 150,$$

$$a_{150} + \tfrac{1}{50} = 1.3 + \tfrac{u}{50}\,1.65 + \frac{u(-50)}{2.2500}\,0.35 = 1.3 + \tfrac{u}{10}\,0.33 + \frac{u(u-50)}{1000}\,0.07,$$

$$a_{150} + \tfrac{1}{50} = 1.3 + 0.033 - 0.00343 = 1.32957,$$

$$a_{150} + \tfrac{2}{50} = 1.3 + 0.066 - 0.00672 = 1.35928 \text{ u. s. w.}$$

Gebraucht man die Interpolations-Formel (G), so ist

$$a_u = \tfrac{u}{50}\,1.3 + \frac{u(u-50)}{2.50.50}\,0.35 = 0.225\,u + 0.00007\,u^2,$$

wo u die Anzahl der über 100° liegenden Temperaturgrade des hunderttheiligen Thermometers bedeutet Man hat für u = 1 . . . . . . = 51 . . .

$$a^1 = 0.0225 + 0.00007 = 0.02257,$$

$$a^{51} = 1.1475 + 0.18207 = 1.35928 \text{ u. s. w.}$$

Heißt T die wahre Temperatur, wie sie das Luftthermometer anzeigen würde, und T' die an Quecksilberthermometer beobachtete, die Siedhitze um u Grade übersteigende Temperatur nach C., so ist $T = T' - a_u = T' - (0.0225\,u + 0.00007\,u^2)$ eine für den Gebrauch sehr bequeme Formel.

II. Nach Regnault ist die Spannkraft des Wasserdampfes für Temperaturen nach C. in Millimètren

$$0^\circ;\quad 2^\circ;\quad 4^\circ;\quad 6^\circ;\quad 8^\circ;\quad 10^\circ,$$
$$4.600;\quad 5.302;\quad 6.097;\quad 6.998;\quad 8.017;\quad 9.165,$$

betrachtet man diese Resultate als eine arithmetische Reihe und sucht nun den Rang derselben zu erkennen, ihre Differenz-Reihen, so ist

0.702; 0.795; 0.901; 1.019; 1.148	ihre erste Differenz-Reihe,
0.093; 0.106; 0.118; 0.129	ihre zweite Differenz-Reihe,
0.013; 0.012; 0.011	ihre dritte Differenz-Reihe,
—0.001; —0.001	ihre vierte Differenz-Reihe,

mithin hat man für die Einschaltung zwischen 0° und 2° C.

$$a_0 + \frac{u}{v} = 4.600 + \frac{u}{v}\, 0.702 + \binom{\frac{u}{v}}{2} 0.093 + \binom{\frac{u}{v}}{3} 0.013 + \binom{\frac{u}{v}}{4} (-0.001).$$

Setzt man $v = 2$, mithin $u = 1$, so erhält man die Sperrkraft des Wasserdampfes für 1°; setzt man aber $v = 20$ oder $= 200$, mithin $u = 19$ oder 199, so erhält man sie, aber für Zehntel, Hundertel der C. Grade u. s. w.

Gebraucht man die Interpelations-Formel (G), so hat man, wenn $(v - 1)$ Glieder eingeschaltet werden

$$a_u = 4.6 + \frac{u}{v} 0.702 + \frac{u(u-v)}{2v^2} 0.093 + \frac{u(u-v)(u-2v)}{6v^3} 0.013 + \frac{u(u-v)(u-2v)(u-3v)}{6v^4} (-0.001).$$

Nimmt man nach der Reihe u gleich 0, 1, 2, . . . so erhält man die Spannkraft des Wasserdampfes für Temperaturen 0°, 1°, 2°... In diesem Falle ist $v = 2$. Ist aber $v = 20$, 200, so muß man u, um ganze Thermometergrade zu erhalten, respective durch 10, 100 dividiren. Der Rest gibt die Zehntel oder Hundertel eines C. Grades an. Führt man die Rechnungen wirklich aus, so überzeugt man sich, daß diese Resultate mit den durch Versuche erhaltenen recht gut übereinstimmen.

III. Wären die Brigg'schen Logarithmen nur von allen ganzen Zahlen unter 100 in sieben Decimalen berechnet und man wollte den Logarithmus von 51125 in sieben Decimalstellen wissen, so kann dieser Forderung mittelst Interpolation Genüge geleistet werden.

Bekanntlich ist bei den Brigg'schen Logarithmen nur die Manteffe, die von der Stellung des Decimalzeichens ganz unbhängig ist, zu berechnen; weßhalb man dieses in der gegebenen Zahl so stellen kann, daß die zu seiner Linken stehende Zahl unter denjenigen sich befindet, deren Mantisse man kennt, d. h. es ist die Mantisse von 51, 125 zu suchen.

Nimmt man aus den Tafeln die Mantissen der Zahlen

51	52	53	54	55	56
0.7075702;	0.7160033;	0.7242759;	0.7323938;	0.7403627;	0.7481880,

und betrachtet diese Größen als Glieder einer arithmetischen Reihe, so ist

0.0084331; 0.0082726; 0.0081179; 0.0079689; 0.0078253	ihre erste Differenz-Reihe,
— 0.0001605; — 0.0001547; — 0.0001490; — 0.0001436	ihre zweite Differenz-Reihe,
0.0000058; 0.0000057; 0.0000054	ihre dritte Differenz-Reihe.

Man sieht, daß die Mantissen keine vollkommene arithmetische Reihe bilden; weßhalb für die Glieder der dritten Differenz-Reihe das arithmetische Mittel 0.0000056 genommen wird.

Da die Mantisse von Log 51.125 zu bestimmen ist, so sind zwischen die Mantissen von Log 51 und Log 52 (1000 — 1) Glieder einzuschalten, d. h. in der allgemeinen Interpolations-Formel ist $v = 1000$ und $u = 125$ zu setzen. Es ist

$$a_n + \frac{125}{1000} = 0.7075702 + \frac{125}{1000}\,0.0084331 + \frac{125(125-1000)}{2.1000^2}(-0.0001605)$$
$$+ \frac{125(125-1000)(125-2000)}{6.1000^3}\,0.0000056,$$

$$a_n + \frac{125}{1000} = 0.7075702 + 0.001054137 + 0.000008777 + 0.000000192,$$

$$a_n + \frac{125}{1000} = 0.7086333, \text{ daher}$$

Log 51125 = 4.7086333. Die Mantisse stimmt mit der in den Tafeln befindlichen vollkommen überein.

Neustadtl, im Juni 1857.

P. Bernard Vouk.

Schul-Nachrichten.

Uebersicht des Lehrplanes.

A. Nach Classen und Lehrgegenständen.

Erste Classe.

Classenlehrer: P. Johann Schibrat.

Religionslehre: 2 Stunden wöchentlich. Vom Glauben, den Geboten und Gnadenmitteln nach dem Regensburger Katechismus.

Lateinische Sprache: 8 St. w. Formenlehre der wichtigsten regelmäßigen Flexionen, eingeübt in beiderseitigen Uebersetzungen nach M. Schinnagl's lateinischem Elementarbuche.

Deutsche Sprache: 3 St. w. Wortlehre, Orthographie nach Heyse's Leitfaden; Leseübungen aus Mozart's 1. Band f. d. U. G. Vortrag memorierter Stücke.

Slovenische Sprache: 2 St. w. Das Haupt-, Bei-, Für-, Zahl- und Zeitwort, Orthographie nach Potočnik's Grammatik. Lesebuch: Slovensko berilo I. Theil. Kleine Aufsätze.

Geographie: 3 St. w. Topische Erdbeschreibung nach Bellinger's Leitfaden mit Benutzung des Globus und der Sydow'schen Wandkarten.

Mathematik: 3 St. w. a. Die vier Species, die gemeinen und die Decimalbrüche. b. Geometrische Anschauungslehre: die Linien, Winkel, Parallelen, Dreiecke nach Močnik.

Naturgeschichte: 2 St. w. Beschreibende Zoologie: Säugethiere, niedere Thiere, vorzüglich Insecten, Arachniden, Krustaceen, Raupen nach Pokorny.

Zweite Classe.

Classenlehrer: P. Theodor Seitz.

Religionslehre: 2 St. w. Erklärung der gottesdienstlichen Handlungen der katholischen Kirche nach Terklau's Geist des katholischen Cultus.

Lateinische Sprache: 8 St. w. Formenlehre der seltenern und unregelmäßigen Flexionen durch mündliches und schriftliches Uebersetzen, eingeübt nach Schinnagl's Grammatik und Lesebuch.

Deutsche Sprache: 2 St. w. Satzlehre nach Heyse; Lesen, Sprechen, Vortragen nach Mozart's Lesebuch 2. Band f. d. U. G. Kleine Aufsätze.

Slovenische Sprache: 2 St. w. Ausführlichere Behandlung der Formenlehre nach Potočnik; Slovensko berilo II. Theil mit mündlichen und schriftlichen Uebungen.

Geographie und Geschichte: 3 St. w. Alte Geschichte mit vorangehender Geographie jedes in der Geschichte vorkommenden Landes nach Welter's Auszug.

Mathematik: 3 St. w. Verhältnisse, Proportionen, wälsche Praktik nebst Münz-, Maß-, Gewichtskunde. Geometrische Anschauungslehre nach Močnik.

Naturgeschichte: 2 St. w. 1. Sem. Beschreibende Zoologie: Vögel, Amphibien, Fische; 2. Sem. Botanik, veranschaulicht durch Wandtafeln und frische Exemplare nach Pokorny.

Dritte Classe.

Classenlehrer: P. Gratian Ziegler.

Religionslehre: 2 St. w. Geschichte des alten Bundes nach Schumacher. Sitten und Gebräuche der Juden aus dem Ergänzungsbande von Schmied.

Lateinische Sprache: 6 St. w. Vollständige Casuslehre nach Schinnagl; Lectüre aus Hoffmann's Historiae antiquae Liber 5, 6, 7 mit gesetzlichen Haus- und Schulaufgaben.

Griechische Sprache: 5 St. w. Regelmäßige Formenlehre bis zum Verb auf $\mu\iota$ nach Curtius; Schenkel's Elementarbuch mündlich und schriftlich eingeübt. Präparation mit Memorieren der Vocabeln. Alle zwei Wochen ein Pensum.

Deutsche Sprache: 3 St. w. Bildung und Zergliederung erweiterter Sätze in mündlichen und schriftlichen Uebungen; Lectüre aus Mozart's 3. Band.

Slovenische Sprache: 2 St. w. Unregelmäßigkeiten aus der Formenlehre sammt Grundsätzen der Satzlehre nach Potočnik; Lectüre: Slovensko berilo von Bleiweis. Schriftliche Uebungen.

Geographie und Geschichte: 3 St. w. Mittlere und neuere Geschichte mit Hervorhebung der Hauptereignisse aus der Geschichte Oesterreichs nach Welter's Auszug.

Mathematik: 3 St. w. Arithmetik: die vier Grundrechnungen mit einfachen und zusammengesetzten algebraischen Ausdrücken; das Potenzieren, Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel. Geometrische Anschauungslehre: der Kreis und die ihm ein- und umgeschriebenen Figuren. Beides nach Močnik.

Naturgeschichte: 2 St. w. 1. Sem. Mineralogie nach Fellöcker mit Benutzung der vorhandenen Kristallmodelle und Mineralien. 2. Sem. Physik: allgemeine Eigenschaften der Körper; Aggregations-Zustände, Wärmelehre nach Pisko.

Vierte Classe.

Classenlehrer: P. Burghard Schwinger.

Religionslehre: 2 St. w. Geschichte des neuen Bundes nach Schumacher. Wiederholung der physischen Geographie des heiligen Landes, und die politische Eintheilung desselben zur Zeit Christi.

Lateinische Sprache: 6 St. w. Tempus- und Moduslehre, Prosodie nach Schinnagl. Lectüre: Caesar. bell. gall. Lib. 5, 6, 7. Metamorph. Lib. I. v. 163–415. Deucalion et Pyrrha. Schriftliche Uebungen.

Griechische Sprache: 4 St. w. Wiederholung der regelmäßigen Formenlehre in Verbindung mit den Unregelmäßigkeiten beim Nomen und Verbum; das Wichtigste der Syntax nach Curtius' Grammatik und Schenkel's Lesebuch mündlich und schriftlich eingeübt.

Deutsche Sprache: 3 St. w. Lese- und Declamationsstücke aus Mozart's 4. Bande mit daran geknüpfter Belehrung über Metrik. Aufsätze.

Slovenische Sprache: 2 St. w. Wiederholung des in der 3. Classe Vorgenommenen nach Potočnik. Lectüre nach Bleiweis mit mündlichen und schriftlichen Uebungen.

Geschichte und Geographie: 3 St. w. Neuere Geschichte mit Hervorhebung der österreichischen nach Welter, verbunden mit Geographie. Populäre Vaterlandskunde. Schulbuch.

Mathematik: 3 St. w. Zusammengesetzte Verhältnisse und Proportionen, Regeldetrie; Interessen-, Termin-, Gesellschafts-, Allegations- und Kettenrechnungen; Gleichungen des 1. Grades mit Einer Unbekannten. Stereometrische Anschauungslehre: Lage der Linien und Ebenen gegen einander, körperliche Ecke, Hauptarten der Körper, Ausmessung ihrer Oberfläche und ihres kubischen Inhaltes mit Benutzung der vorhandenen Modelle nach Močnik.

Physik: 3 St. w. Gleichgewicht und Bewegung, Akustik, Optik, Magnetismus, Elektricität; Hauptpunkte der Astronomie und physischen Geographie nach Schabus.

Fünfte Classe.

Classenlehrer: P. Fulgenz Arko.

Religionslehre: 2 St. w. Allgemeine Religionslehre mit kurzgefaßten Einleitungen in die heiligen Bücher des alten und neuen Bundes nach Dr. Martin.

Lateinische Sprache: 6 St. w. Lectüre: Aus dem T. F. Livius Buch 1, 4, 7, 9 nach Grysar. Aus Ovid's Metamorph. Fabel: de Icaro, Perdice, Orpheo discerpto, de Ajacis et Ulixis certamine, de Caesare in stellam crin. transformato nach Grysar. Präparation und schriftliche Uebungen nach Süpfle.

Griechische Sprache: 5 St. w. Casus- und Moduslehre nach Curtius; Lectüre: Aus Schenkel's Chrestom. Kyrop. A. Das Jugendleben; Anab. I. Rüstungen zum Kriege; Hom. Il. Epit. 1, 2. Aufgaben.

Deutsche Sprache: 2 St. w. Theorie mehrerer Dichtarten und diesen entsprechende Musterstücke aus Mozart's 1. Bande f. d. O. G. Haus- und Schulaufgaben. Declamationen.

Slovenische Sprache: 2 St. w. Wiederholung der Grammatik von Potočnik; Lectüre: Slovensko berilo von Miklošič, mündlich und schriftlich eingeübt.

Geschichte und Geographie: 3 St. w. Das Alterthum bis zur Unterjochung Griechenlands durch die Römer mit vorausgeschickter Geographie der Länder nach Pütz.

Mathematik: 4 St. w. Die vier Grundrechnungen wissenschaftlich, Brüche, Verhältnisse, Proportionen; Longi- und Planimetrie nach Močnik.

Naturgeschichte: 2 St. w. Systematische Mineralogie und Geognosie nach Fellöker; Botanik in enger Verbindung mit Paläontologie und geographischer Verbreitung der Gewächse nach Bill.

Sechste Classe.

Classenlehrer: P. Bernard Vouk.

Religionslehre: 2 St. w. Die besondere Glaubenslehre nach Martin.

Lateinische Sprache: 6 St. w. Lectüre: C. Sallustii bellum Jugurth.; Virgil. Aeneid. L. 1, 2, 9 und Ecloga 1. nach Hoffmann; grammatisch-statistischer Unterricht mit Aufgaben nach Süpfle.

Griechische Sprache: 5 St. w. Curtius' Grammatik zum Nachschlagen und Einüben; Hom. Il. Epit. L. 3, 4, 5. — Herod. Epit. VIII, IX. 1—21 mit beständiger Vergleichung des Jonischen Dialects mit dem Attischen und Hinweisung auf Etymologie; schriftliche Uebungen.

Deutsche Sprache: 3 St. w. Lectüre aus Mozart's 2 Band f. d. O. G.; eine Auswahl von poetischen und prosaischen Musterstücken sammt Biographien, Erklärungen und stylistischen Uebungen.

Slovenische Sprache: 2 St. w. Formenlehre nach der Grammatik von Metelko. — Gelesen wurde: Slovensko berilo za 6. razr. von Miklošič mit Aufgaben.

Geschichte und Geographie: 3 St. w. Fortsetzung und Schluß der alten Geschichte; mittlere bis zu den Kreuzzügen nach Pütz.

Mathematik: 3 St. w. Algebra: Potenz, Wurzel, Logarithmen, Gleichungen mit Einer und mehreren Unbekannten. Reduction algebraischer Ausdrücke. — Geometrie: Stereometrie und Trigonometrie. Schriftliche häusliche und Schulübungen. Nach Močnik.

Naturgeschichte: 2 St. w. Zoologie in enger Verbindung mit Paläontologie und geographischer Verbreitung der Thiere nach Schmarda.

Siebente Classe.

Classenlehrer: P. Ladislaus Hrovat.

Religionslehre: 2 St. w. Christliche Sittenlehre nach Martin.

Lateinische Sprache: 5 St. w. Lectüre: Aus Cicero's Reden: Orat. III. in Catilin., Orat. pro Ligario, Orat. pro rege Dejotaro; aus Virgil's Aeneide Lib. VIII., X., XI. nach Hoffmann's Epit. Grammatisch-stylistische Uebungen nach Süpfle, wochentlich 1 Stunde. Alle 14 Tage ein Pensum.

Griechische Sprache: 4 St. w. Wiederholung der Grammatik von Curtius; Lectüre: Xenophon's Memorabilien Lib. I. 1—2. Lib. IV.; Homer Il. Epit. Lib. 18—19. — Demosthenes 1. und 2. Philippische Rede, und die über den Frieden. Aufgaben.

Deutsche Sprache: 3 St. w. Lectüre ausgewählter Lesestücke nach Mozart's 3. Bande f. d. O. G. — Schriftliche Schul- und Hausübungen.

Slovenische Sprache: 2 St. w. Der syntactische Theil der Grammatik von Metelko. — Gelesen wurde: Slovensko berilo za 6. razr. von Miklošič; schriftliche Compositionen.

Geschichte und Geographie: 3 St. w. Von den Kreuzzügen bis zur französischen Revolution in steter Verbindung mit Geographie nach Pütz.

Mathematik: 3 St. w. Algebra: Unbestimmte Gleichungen des 1. Grades; Quadratische Gleichungen mit Einer Unbekannten; Progressionen, Combinationslehre und binomischer Lehrsatz. Geometrie: Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Analytische Geometrie in der Ebene, nebst Kegelschnitten. Schriftliche häusliche und Schulübungen. Nach Močnik.

Philosophische Propädeutik: 2 St. w. Allgemeine Logik nach Beck.

Physik: 3 St. w. Allgemeine Eigenschaften, chemische Verbindung, Gleichgewicht und Bewegung, Wellenlehre und Akustik nach Baumgartner.

Achte Classe.

Classenlehrer: P. Chrysolog Grösnik.

Religionslehre: 3 St. w. Kirchengeschichte nach Feßler mit zwei schriftlichen Prüfungen.

Lateinische Sprache: 5 St. w. Lectüre: Tacitus, histor. I. und V. B.; Horaz: Od. I. 1.—4., 12., 15., 22., 23. III. 1.—5., 23. IV. 3., 6., 12. Epod. 2., 7., 13. Sat. I. 1., 9. nach Grysar; grammatisch-stylistische Uebungen und Pensen nach Süpfle.

Griechische Sprache: 5 St. w. Platon's Apologie des Sokrates und Criton; Demosthenes 1. und 3. Olynth. Rede; extemporirte Lectüre aus Homer und Herodot; Curtius' Grammatik, Präparationen und Pensen.

Deutsche Sprache: 3 St. w. Lectüre: aus dem 3. Bande des deutschen Lesebuches für's Ober-Gymnasium von Mozart; Aufsätze.

Slovenische Sprache: 2 St. w. Einübung der Grammatik von Metelko. Erklärung einiger Versarten. Gelesen wurde: Slovensko berilo za 6. razr. von Miklošič. Compositionen.

Geschichte und Geographie: 3 St. w. Schluß der neueren Geschichte mit besonderer Rücksicht auf Oesterreich nach Pütz; Statistik des österreichischen Staates nach Schmitt.

Mathematik: 1 St. w. Uebungen in Lösung mathematischer Probleme. Zusammenfassende Wiederholung des mathematischen Unterrichtes.

Philosophische Propädeutik: 2 St. w. Empirische Psychologie nach Zimmermann.

Physik: 3 St. w. Magnetismus, Elektricität, Optik, Anfangsgründe der Astronomie und Meteorologie nach Baumgartner.

Freie Lehrgegenstände.

Gesang-Unterricht, vorzüglich Kirchengesang, wurde im I. und II. Semester wöchentlich 2 Stunden in zwei Abtheilungen ertheilt. Vom Musiklehrer Josef Kraus.

Zeichnungs-Unterricht, vorzüglich Freihandzeichnen, wurde nur im I. Semester durch zwei Stunden in der Woche ertheilt. Vom Zeichnungslehrer Jacob Schaschel, der im II. Semester in einer andern Stadt seinen Wohnsitz genommen hat.

B. Uebersicht des Lehrplanes nach den Lehrkräften.

Lehrer	Lehrgegenstand	Classe	Wöchentliche Stundenzahl
P. Engelbert Knisiz, provisor. Director a)	Latein	8.	7 im I. Sem.
	Allgemeine Logik	7.	
P. Fulgenz Arko	Latein	5., 6.	12
P. Bernardin Osredkar	Mathematik	1., 2., 3., 4., 5.	18
	Slovenisch	8.	
P. Moriz Leiller	Geschichte und Geographie	2., 3., 4.	17
	Deutsch	4	
	Slovenisch	5., 6., 7.	
P. Chrisolog Grösnik b)	Griechisch	6., 7.	17 im I. Sem., 19 im II. Sem.
	Deutsch	7., 8.	
	Empirische Psychologie	8.	
	Allgemeine Logik	7. im II. Sem.	
P. Burghard Schwinger	Latein	4.	17
	Deutsch	1., 2., 4.	
	Slovenisch	4.	
P. Ehrenfried Pipau, zugleich Exhortator	Religionslehre	1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8.	17
P. Gratian Ziegler	Deutsch	3.	17 im I. Sem., 15 im II. Sem.
	Slovenisch	2, 3	
	Naturgeschichte	1., 2., 5., 6. im I. Sem. 3. Cl.	
P. Theodor Seitz, Supplent	Latein	2., 3.	17
	Deutsch	6.	
P. Bernard Vouk	Mathematik	6., 7., 8.	16 im I. Sem., 18 im II. Sem.
	Physik	3., im II. Sem. 4., 7., 8.	
P. Ladislaus Hrovat	Latein	7., im II. Sem. 8.	15 im I. Sem., 20 im II. Sem.
	Griechisch	3., 8.	
P. Johann Schibrat, Supplent	Latein	1.	17
	Griechisch	4., 5.	
P. Cajetan Pizigas, Supplent	Geschichte und Geographie	1., 5., 6., 7., 8.	17
	Slovenisch	1.	

Anmerkungen. a) Ist beim Beginn des II. Semesters erkrankt, und wurde durch Andere vertreten.

b) Besorgt zugleich seit dem 18. März 1857 die Directions-Geschäfte.

Obgenannte Gymnasiallehrer sind Franciscaner-Ordensgeistliche, und gehören der croatisch-krainischen Provinz an.

C. Uebersicht der Schüler.

	Anzahl der Schüler in den einzelnen Classen								Gesammtzahl	Betrag des entrichteten Schulgeldes à 4 fl. C. M.	
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.		I. Semester	II. Semester
Waren am Schlusse des Schuljahres 1856	30	23	9	9	11	8	7	7	104	280	180
Zu Anfang des Schuljahres 185⁶/₇	43	28	17	10	11	6	6	7	128	—	—
Am Schlusse des Schuljahres 1857	43	29	17	10	11	6	6	7	129	304	204

Demnach hat sich die Gesammtzahl der Schüler dieses Jahres um 25 vermehrt.

Studenten-Stiftungen genossen 10 von diesen 129 Schülern, und bezogen zusammen 518 fl. 12 kr.

Aus der I. Classe 1 Schüler 31 fl.
„ „ II. „ 1 „ 42 „ 30 kr.
„ „ II. „ 1 „ 86 „
„ „ III. „ 1 „ 81 „
„ „ V. „ 1 „ 102 „

Aus der V. Classe 1 Schüler 18 fl.
„ „ V. „ 1 „ 27 „
„ „ VI. „ 1 „ 43 „ 18 kr.
„ „ VIII. „ 1 „ 46 „
„ „ VIII. „ 1 „ 41 „ 24 „

D. Ergebnisse der Maturitäts-Prüfung
im Schuljahre 1856.

Die Maturitäts-Prüfung fand im Schuljahre 1856 den 8. und 9. August statt; es haben sich ihr 5 Schüler unterzogen; von ihnen erhielten Josef Kreße von Prečna, Gustav Moll von Laibach, Mathias Grill von Čermošnic, Franz Kullavic von Maihau das Zeugniß der Reife und Georg Sterbenc von Altenmarkt mit Auszeichnung. Die zwei Ersten studieren die Theologie, die drei Andern die Jurisprudenz.

Die schriftlichen Prüfungen für die im heurigen Schuljahre abzuhaltende Maturitäts-Prüfung, welcher sich alle Schüler der 8. Classe unterziehen, fanden am 6., 7., 8. und 9. Juli statt; der mündliche Theil der Prüfung wird den 7. und 8. August vorgenommen.

E. Deutsche Themen,
gegeben den Schülern des Obergymnasiums.

V. Classe.

1. Inhalts-Angabe des I. Gesanges aus Klopstock's Messiade. 2. Das Leben der Schweizer in der Heimat. 3. Nicht Alles, was süß ist, ist auch gesund. 4. Freuden beim Ersteigen eines hohen Berges an einem angenehmen Frühlingstage. 5. Das Glück der ersten Menschen vor dem Falle. 6. Die Sündflut. Vom Fallen des Wassers angefangen. Eine Beschreibung. 7. Gefühle eines dankbaren Sohnes am Grabe seines Vaters. 8. Die Feuersbrunst in Seidendorf nächst Neustadtl. In Briefform. 9. Welchen Einfluß hat die Sonne auf die übrigen Weltkörper? 10. Das Landleben in Form einer Idylle. 11. Beschreibung der Luftpumpe.

VI. Classe.

1. Deutung und historische Begründung des Spruches: „Das Glück eine Klippe, das Unglück eine Schule." 2. Erklärung des Gedichtes: „Der Zauberlehrling" von Göthe; nach Form, Inhalt und besonders nach seinem ästhetischen Werthe. 3. „Iphigenie," Charakterschilderung nach Göthe's Tragödie. 4. Vergleich des menschlichen Lebens mit einem Flusse. 5. Die Festspiele der Griechen in Gesprächsform. 6. Betrachtung über die flüchtige Zeit beim Jahreswechsel. 7. Der Werth und die Nothwendigkeit der

Freundschaft. Motto: „Getheilte Freude ist doppelte Freude, getheilter Schmerz ist halber Schmerz.“ 8. Idyllische Bilder der Betrachtung des Landlebens beim Beginne des Frühlings entnommen. 9. Inhalts-Angabe von Schiller's Ballade: „Der Ring des Polykrates.“ 10. Der Zeitraum der römischen Könige in seinen Hauptmomenten. 11. Gedanken eines aus fernem Auslande rückkehrenden Studierenden beim Wiedersehen seiner Heimat.

VII. Classe.

1. Beschreibung der Reise nach der Lehranstalt mit Einflechtung eines unglücklichen Ereignisses. In der Form eines Briefes. 2. Welche sind die Ursachen, warum Städte, die einst blühend waren, nun nicht mehr blühen, oder gar nicht mehr bestehen. 3. Die Schändlichkeit eines undankbaren Gemüthes. 4. Durch schlechte Gesellschaft wird man sehr leicht schlecht. Abhandlung. 5. Der treulose Gastwirth. Eine Erzählung nach eigener Erfindung. 6. Die Gunst des Glückes gewährt viele Bequemlichkeiten des Lebens, aber nicht die Ruhe des Gemüthes. 7. Welcher Gebrauch des Reichthums wäre weise und vernünftig zu nennen? 8. Wie soll sich der Jüngling dankbar beweisen gegen seine Eltern, Lehrer und Andere, die seine Erziehung und Bildung besorgen? 9. Der Tod von der guten Seite angesehen. 10. Der Rheingraf. Prosaisch dargestellt. 11. Auch das schlechte Wetter hat sein Gutes.

VIII. Classe.

1. Der Schüler schildert den angenehmsten Tag aus seiner Ferienzeit. 2. Cimon's Freigebigkeit wird gepriesen. 3. Viriathus. Eine Charakterzeichnung. 4. Segensreiche Folgen der Arbeitsamkeit. Abhandlung. 5. Die edle Rache. Eine Erzählung nach eigener Erfindung. 6. Auch die Feindschaft gewährt Vortheile. 7. Von welchem Nutzen waren die Olympischen und die übrigen Spiele Griechenland's für die Theilnehmer und die Staaten. 8. Welche Vorzüge hat der Gebildete vor dem Ungebildeten in Bezug auf Verstand, Gemüth und das praktische Leben? 9. Thun und Treiben des Verschwenders mit satyrischer Färbung. 10. Wie kann der Spaziergang im Freien besonders gedeihlich werden? 11. Wie kann man den Spruch: „Man lebt nur einmal“ deuten, und zu welcher Lebensart führt er?

F. Lehrmittel.

a) Lehrerbibliothek.

Diese erhielt im Laufe dieses Jahres folgenden Zuwachs:

Aus der jährlichen Dotation von 50 fl. wurden angeschafft: Gymnasial-Zeitschrift für das Jahr 1857; Robisch's Geschichte der christlichen Kirche; Pisko's Lehrbuch der Physik für das Unter-Gymnasium; Stocker's mineralogische Anschauungslehre; Heyse's Leitfaden zum gründlichen Unterricht in der deutschen Sprache; Pütz's Grundriß der Geographie und Geschichte für die oberen Classen; Močnik's Algebra und Geometrie für das Ober-Gymnasium; Močnik's Arithmetik für das Unter-Gymnasium, 2. Abthl.; Schulz's lateinische Sprachlehre, 2 Exemplare; Esser's Psychologie; Bill's Grundriß der Botanik.

Die für die Ausbildung der Gymnasiallehrer P. Bernard Vouk und P. Ladislaus Hrovat auf Anordnung des h. k. k. Unterrichts-Ministeriums aus dem krain. Studienfonde angekauften 106 Werke in 132 Bänden wurden ihr auf h. Anordnung einverleibt.

Durch die Municifeenz des h. k. k. Unterrichts-Ministeriums erhielt sie die Scheda'schen Schul-Wandkarten: Europa, Mitteleuropa und Planiglobien; 1 Exemplar der Hefte 1, 5, 6 des I. Bandes von den Jahren 1849, 1850 und 1851 der statistischen Tafeln der österreichischen Monarchie.

Der Hochw. P. T. Herr Barthol. Arko, inful. Probst, Dechant und Stadtpfarrer in Neustadtl, schenkte ihr die Mittheilungen der k. k. Central-Commission zur Erforschung und Erhaltung der Baudenk, male nebst deren Jahrbuch für das Jahr 1856; sowie auch die Mittheilungen des historischen Vereins für Krain 8., 9., 10. und 11. Jahrgang sammt Diplomatorium Carniolicum.

Der Hochw. P. T. Herr Anton Strohen, Ehren-Canonicus, emeritirter Dechant und Pfarrer, ermöglichte durch Geldbeitrag den Ankauf des natur-historischen Werkes Wilhelm Tobias' in 27 Bänden.

Der Hochw. Herr Thomas Groesnik, Pfarrvikär in St. Veit bei Sittich, machte die großmüthige Spende von 100 fl., wofür für die Lehrerbibliothek angeschafft wurden: Mohs' Mineralogie, 2 Bde.; Marbach's physik. Lexikon 1.—50. Liefg; Forbiger's Virgil, 3 Bde.; Nägelbach's Homerische Theologie; Preller's griechische Mythologie, 2 Bde.; Schömann's Attischer Proceß; Hermann's Vigerius; Plato's Euthyph. Menon. Phaidros ed. Stallbaum; und für die Schülerbibliothek Jakobitz' und Seiler's griechisch-deutsches und deutsch-griechisches Wörterbuch, 3 Bde.

Herr Johann Navratil, k. k. Official des obersten Gerichtshofes in Wien: Beitrag zum Studium des slavischen Zeitwortes aller Dialecte.

Am Schlusse des Schuljahres 1857 enthält die Lehrerbibliothek 629 Werke in 1064 Bänden, 20 Hefte, 21 Atlanten und 2 Globen.

b) Schülerbibliothek.

Diese wurde heuer durch die Aufnahmstaxen von 88 fl., durch Unterstützung zahlreicher Jugendfreunde und durch Beiträge der hier studierenden Gymnasial-Jugend gegründet.

Aus den Aufnahmstaxen wurden angeschafft: Christoph Schmid's gesammelte Schriften, 25 Bdchen.; Ebersberg's Jugendschriften, 6 Bdchen.; Stoll's Handbuch der Religion und Mythologie der Römer und Griechen, 1 Bd.; Dielitz's Helden der Neuzeit, 1 Bd.; Hellas und Rom, 1 Bd.; Reise um die Erde mit der schwedischen Fregatte Eugenie, 1 Bd.; der Jugend Spiel und Vergnügen im Freien, 1 Bd.; Biermatzki's Seebilder; die Länder und Völker der Erde, geschildert in Reisen und Bildern, 1 Bd.; Land und Meer, 1 Bd.; Berier's Amalia oder Triumph der Gottesfurcht; Chimani's geschichtliche und belehrende Bücher für die Jugend, 18 Bdchen.; Gundinger's Verrechnung, 1 Bd.; Blum's Bilder des Schicksals, 1 Bd.; Schmetterlings-Sammler, 1 Bdchen.; Glückwunsch, Büchlein für die liebe Jugend, 1 Bdchen.; Bossert's 400 Räthsel und Charaden, 1 Bdchen.; Plutarch's vergleichende Lebensbeschreibungen von Lamey, 1 Bdchen.

Geschenke machten ihr die Hochw. Herren: Valentin Sežun, Pfarrer in St. Michael, 2 Werke in 8 Bdn.; Josef Grablovic, Pfarrer in St. Barthelmä, 1 Werk in 9 Bdn.; Jacob Jerin, Pfarrer in Weißkirchen, 4 Werke in 14 Bdn.; Johann Veršaj, Pfarrer in Stopizh, 8 Werke in 21 Bdn.; Johann Bačnik, Pfarrer in Prečna, 13 Werke in 20 Bdn.; Joseph Bonner, Pfarrer in Ratschach, 1 Werk in 9 Bdn. und 9 Hefte; P. Bernardin Osredkar, Gymnasiallehrer, 6 Werke in 8 Bdn.; P. Moriz Leiller, Gymnasiallehrer, 2 Werke in 4 Bdn.; Heinrich Sparovic, Coop. in Ratschach, 2 Werke in 4 Bdn. und 70 Heften; Martin Korošic, Coop. in St. Barthelmä, 1 Bd.; Johann Wolčič, Coop. in Semič, 1 Werk in 15 Bdn.; Primus Peterlin, Coop. in Großdorn, 4 Werke in 14 Bdn.; Herr Ernst von Lehmann, k. k. Kreisgerichtsrath und Staatsanwalt, 2 Werke in 3 Bdn.; Herr Johann Ogrinz, k. k. Kreisgerichtsrath in Neustadtl, 5 Werke in 20 Bdn.; Herr Josef Suppančič, k. k. Beamter in Černembl, 11 Werke in 20 Bdn. und 130 Heften; Herr Jacob Peer, k. k. Beamter in Laibach, 4 Werke in 7 Bdn.; Herr Max. Jabornigg, k. k. Beamter in Černembl, 4 Bde.; Herr Franz Schwinger, Besitzer des Gutes Freihof, 28 Bde.; Herr Josef Gallé, Abiturient des Agramer Gymnasiums, 11 Werke in 12 Bdn.; Herr Georg Sterbenc, Hörer der Jurisprudenz, 9 Werke in 10 Bdn. Ferner nachbenannte hiesige Gymnasialschüler: Josef Gerdešič 17 Werke in 19 Bdn.; Franz Papeš 1 Werk in 9 Bdn.; Eduard Deu 1 Bd.; Anton Jelenc 2 Bde.; Rainhard Badovinac 16 Bde. und 2 Hefte; Josef Spendal 3 Bde.; Josef Brodar 2 Bde.; Leopold Moll 1 Bd.; Victor Seraber 7 Werke in 14 Bdn.; Josef Telian 1 in 4 Bdn.; Adolf Treo

1 Bd.; Josef Unterluggauer 3 Werke in 5 Bdn.; Johann Velikajne 3 Bde.; Josef Lubič 4 Werke in 5 Bdn.; Wilhelm Pfeifer 4 Bde.; Ignaz Pirc 6 Bde.; Math. Absec 4 Bde.; Franz Darovic 2 Bde.; Josef Erjauc 2 Bde.; Ignaz Klučeušek 4 Bde.; Johann Klun 7 Werke in 9 Bdn.; Victor Kuhn 3 Bde.; Anton Močnik 6 Bde.; Ludwig Sterger 1 Bd.; Johann Thomaževič 1 Bd.; Matth. Vovk 3 Bde.; Franz Žagar 2 Bde; Josef Pokorny 6 Werke in 7 Bdn.; Alois Plut 4 Bde; Franz Kolenc 4 Werke in 6 Bdn.; Johann Pleškovič 1 Bd.; Martin Poč 1 Bd.; Johann Jenič 1 Bd.; Albin Schwinger 2 Bde.; Julius Smola 2 Bde.; Josef Sporn 3 Bde.; Franz Grablovic 1 Bd.; Johann Nadrah 1 Bd.; Josef Orešnik 3 Bde.; Franz Skaberne 4 Bde.

Diese 375 Werke in 570 Bänden und 215 Heften religiösen, philologischen, geographisch-historischen und natur-historischen Inhaltes wurden vom Lehrer P. Gratian Ziegler geordnet und katalogisirt.

c) Physikalisches Cabinet.

Im heurigen Schuljahre erhielt es folgenden Zuwachs: 1. Flasche mit luftdicht schließendem Trichter; 2. Smee's Batterie mit zwei großen Elementen; 3. Nikol's Prisma.

Die Anschaffung dieser Apparate wurde ermöglicht durch die Geschenke des Hochw. P. T. Herrn Franz Xav. Jellouscheg, Canonicus und fürstbischöflichen Commissärs beim hiesigen Gymnasium; des Hochw. P. T. Herrn Canonicus Josef Schagar in Neustadtl; der Madame Theresia Kuralt, k. k. Appellationsraths-Witwe und Besitzerin der Güter Thurn und Smuk; der Hochw. Herren Martin Skubic, Dechant und Pfarrer; Johann Kraškovic und Johann Wolčič, Coop. in Semič; Matth. Taučar, Coop. in St. Martin bei Litaj; Franz Nihar, Coop. in Lojč; Michael Komat, Coop. in Möttling.

d) Naturalien-Cabinet.

Die Erwerbungen desselben fielen in diesem Schuljahre sehr ergiebig aus.

Aus den vom h. k. k. Unterrichts-Ministerium bewilligten 175 fl. wurden ein natur-historischer Atlas, ein zusammengesetztes Mikroskop, eine aplanatische Loupe angeschafft, einige Exemplare von Säugethieren und Vögeln angekauft, welche, sowie die von nachbenannten Herren geschenkten, nämlich: 25 Säugethiere und 104 Vögel, unter der Leitung des Lehrers der Naturgeschichte von den Schülern der 2. Gymnasial-Classe ausgestopft wurden.

Die Herren, welche dabei Objecte dem Cabinet gespendet haben, sind: Josef Pokorny, k. k. Finanzrath; Carl Müller, k. k. Finanzwach-Obercommissär in Neustadtl; Werdovac, k. k. Amtsvorsteher in Treffen; Graf Albin Margheri, Inhaber der Herrschaften Wördt und Altenburg; Madame Theresia Kuralt, k. k. Appellationsraths-Witwe und Besitzerin der Güter Thurn und Smuk; Anton Smola, Besitzer der Güter Stauden und Graben; Alois Kuntara, Besitzer von Silberau; Franz Schwinger, Besitzer von Freihof; Carl Deschmann, k. k. Museal-Custos in Laibach; Josef Suppančič, k. k. Beamter in Černembl; Johann Weber, Forstadjunct zu Lacken; Anton Junc, Bürgermeister in St. Peter bei Weinhof.

Herr Carl Germ, Bürger und Realitätenbesitzer in Neustadtl, sowie einige Schüler der 1., 2. und 3. Gymnasial-Classe haben 60, mitunter schöne Exemplare, Conchilien und 17 Stück Reptilien geschenkt.

Leopold Gorenz und Alois Plut, Gymnasialschüler, haben ihre Herbarien, 700 und 800 Species gut getrockneter und sorgfältig conservirter Pflanzen der Flora Unterkrains enthaltend, dem Gymnasium überlassen.

Herr Johann Lapaine, k. k. Amtsvorsteher in Nassenfuß, schenkte 30 Stück Mineralien, darunter einige Halbedelsteine; die Hochw. Herren Jacob Jerin, Pfarrer in Weißkirchen, und Valentin Plemel, Localcaplan in Karner-Völlach, 50 Stück Petrefacten.

Die kleine Münzsammlung wurde durch 70 Silber-, 200 Kupfer-, 16 Messing- und 13 Denkmünzen vermehrt, und zwar durch Geschenke der Herren Anton Gerčer, k. k. Kreisgerichtsrath; Josef Pfeifer, k. k. Finanz-Bezirks-Commissär und Finanzwach-Inspector in Neustadtl; Josef Duller, Realitätenbesitzer in Lerchendorf; Georg Badovinac, Handelsmann in Carlstadt; Didinnus Kuralt; Alois Tuschek und Johann Sterger, Gymnasialschüler.

Auch wurden 174 Vorlegzeichnungen angeschafft.

Für die hier dargelegte Vermehrung der Lehrmittel wird allen P. T. Herren Gönnern und Wohlthätern der Anstalt vom Lehrkörper der aufrichtigste und wärmste Dank mit der Bitte um fernere gefällige Beiträge abgestattet.

Das Studienjahr 1857 wurde am 1. August mit einem feierlichen heiligen Dankamte in der Franciscanerkirche beschlossen, worauf im Gymnasial-Saale eine deutsche und slavische Rede folgte, und die Vertheilung der Preisbücher und der Studienzeugnisse.

Das Schuljahr 1857/8 wird am 1. October mit dem heiligen Geistamte eröffnet, zu welchem sämmtliche aufgenommene Schüler zu erscheinen haben. Die Aufnahme in das Gymnasium findet statt den 28., 29. und 30. September in den Vormittagsstunden. Die Schüler sind von den Eltern oder deren Stellvertretern vorzuführen, und haben, wenn sie neu eintreten, den Taufschein und das letzte Studienzeugniß vorzuweisen und eine Aufnahmstaxe von 2 fl. C. M. zu erlegen.

Namentliche Angabe

der Gymnasialschüler zu Neustadtl, in ihrer Rangordnung nach den 8 Klassen, am Schlusse des Schuljahres 1857.

VIII. *Kuralt Didimus, von Laibach; *Gerdešič Josef, von Zhernembl; Papeš Franz, von Nassenfuß; Czech Alois, von Haidenschaft; Rešek Peter, von Möttling; Bogalin Michael, von Haselbach; Knez Franz, von St. Ruprecht.

VII. *Legan Franz, von St. Veit bei Sittich; Deu Eduard, von Neustadtl; Bartel Josef, von Hönigstein; Golobič Anton, von Semizh; Jelénc Anton, von Prezhna; Knific Heinrich, von Neustadtl.

VI. *Spendal Josef, von Hönigstein; Badovinac Reinhardt, von Karlstadt; Žagar Ludwig, von Neustadtl; Koračin Ludwig, von Neudegg; Tušek Alois, von Laibach; Kuhn Anton, von Neustadtl.

V. *Unterluggauer Josef, von Neustadtl; Strucel Georg, von Zhernembl; Kraus Adalbert, von Neustadtl; Velikaine Johann, von Idria; Skrabar Viktor, von Sittich; Thelian Josef, von Gotschee; Kalin Johann, von Landstraß; Moll Leopold, von Prewald; Brodar Josef, von St. Michael; Treo Adolf, von Kleindorf; Guth Julius, von Seisenberg.

IV. *Pfeifer Wilhelm, von Gotschee; *Lubič Josef, von Prečna; Pirz Ignaz, von St. Barthelmä; Venedig Hermann, von Neustadtl; Wašič Ludwig, von Grailach; Kadunc Mathias, von Seisenberg; Cesar Johann, von Hönigstein; Tabourè Josef, von Adelsberg; Gorenc Leopold, von St. Ruprecht; Mogolič Michael, von Neustadtl.

III. *Klun Johann, von Feistriz; *Povše Josef, von Obernassenfuß; Tomaževič Johann, von Bresniz; Plut Alois, von Semizh; Močnik Anton, von Idria; Kuhn Viktor, von Neustadtl; Erjauc Josef, von Weizelberg; Vouk Matthäus, von Veldes; Absec Mathias, von Semizh; Sever Thomas, von St. Martin; Sterger Ludwig, von St. Barthelmä; Klučeušek Ignaz, von Mariathal; Žagar Franz, von Hönigstein; Pokorny Josef, von Klagenfurt; Stergar Johann, von Haselbach; Darovic Franz, von St. Michael; Maintinger Johann, von St. Michael.

II. *Sterger Gustav, von St. Barthelmä; *Poč Martin, von Semizh; *Ogrinč Wilhelm, von Treffen; *Lapaine Karl, von Krainburg; *Pašič Mathias, von Semizh; Gerčer Adalbert, von Neunmarktl; Vencais Johann, von St. Veit bei Sittich; Matičič Franz, von Stein; Springer Jakob, von Zhernembl; Sporn Josef, von Vodiz; Kraucer Anton, von Treffen; Švinger Albin, von St. Barthelmä; Hrovat Johann, von Vigaun; Ambrožič Franz, von Reifniz; Kolenc Franz, von Neudegg; Dolenc Jakob, von Loitsch; Drenik Matthäus, von Zirkniz; Wašič Franz, von Grailach; Surc Franz, von Seisenberg; Pleskovič Johann, von Nassenfuß; Bercer Josef, von St. Ruprecht; Jenič Johann, von Maihau; Smola Julius, von Stauden; Kuralt Eduard, von Laibach; Sever Nikolaus, von Landstraß; Sakraišek Anton, von Großlaschizh; Vehouc Johann, von Seisenberg; Achlin Ignaz, von Zirklach; Oražen Josef, von Landstraß.

I. *Duller Johann, von Neustadtl; *Sitar Franz, von Töpliz; *Gorenc Alois, von St. Ruprecht; *Sajic Johann, von Soderschizh; *Derganz Anton, von St. Michael; Ljubič Franz, von Prezhna; Nachtigall Raimund, von Seisenberg; Skaberne Franz, von Neustadtl; Buttler Josef, von Neustadtl; Dergane Jakob, von Semizh; Edlauer Georg, von Krainburg; Roblek Avellin, von Razbach; Bukovic Jakob, von Semizh; Potokar Josef, von Nassenfuß; Šušteršič Viktor, von Landstraß; Grablovic Franz, von Treffen; Stameer Johann, von Neustadtl; Petrič Johann, von Möttling; Lilek Josef, von Zhernembl; Kallan Jakob, von Möttling; Kamenšek Martin, von Semizh; Švinger Raimund, von St. Barthelmä; Nadrach Johann, von Sittich; Kurent Josef, von St. Ruprecht; Lesar Anton, von Zhernembl; Suhadobnik Leopold, von Laibach; Stenko Valentin, von Wazh; v. Gapp Vinzenz, von Laibach; Lesar Mathias, von Zhernembl; Bauška Michael, von Laibach; Luser Ludwig, von Neustadtl; Marolt Johann, von St. Ruprecht; Barle Anton, von Treffen; Dereani Anton, von Seisenberg; v. Poka Franz, von Seisenberg; Orcšnik Josef, von St. Kanzian; Piškur Johann, von Sonneg; Luzer Franz, von Neustadtl; Strittar Franz, von Haselbach; Peterlin Franz, von Prezhna; Omersa Franz, von Seisenberg; Grum Josef, von Seisenberg; Fiala Arthur, von Wadowize.

Die Schüler, deren Namen mit Sternchen bezeichnet sind, haben Zeugnisse mit Vorzug erhalten.