PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **9** (1981/1982)
Številka 3
Strani 156–159

Milan Hladnik:

SAJ NI RES. . . PA JE

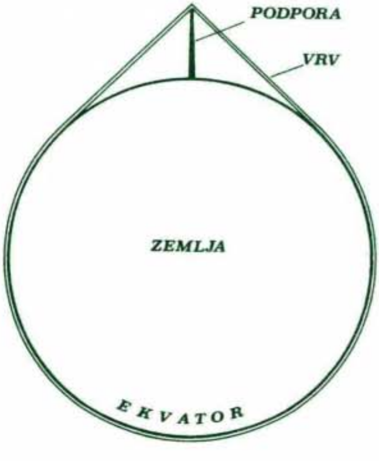
Ključne besede: matematika, aritmetika, geometrija, formule za podobne trikotnike, enačbe, približki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/9/9-3-Hladnik.pdf

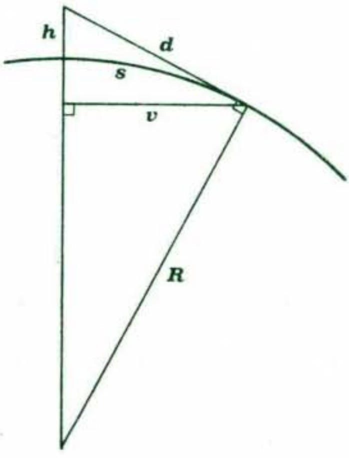
BOLJ ZA ŠALO KOT ZARES

SAJ NI RES... PA JE!

Predstavljajmo si, da je Zemlja idealna krogla in da je vzdolž ekvatorja okrog in okrog položena tanka neraztegljiva sklenjena vrv, ki je 2 mm daljša od obsega ekvatorja. Ker dolžina vrvi presega obseg Zemlje, vrv v eni točki podpremo z navpično letvijo, tako da je potem lepo napeta in seveda v okolici podpore dvignjena od tal (glejte sliko 1).



Slika 1



Slika 2

Sedaj pa pride glavno vprašanje: ali lahko odrasel človek zleze pod vrvjo, ne da bi se vrvi dotaknil?

Marsikdo bo seveda takoj vzkliknil, da je to nemogoče, saj imamo viška vrvi le za bore 2 mm. Toda ne prenaglimo se z odgovorom. Raje poskušajmo priti do njega "znanstveno", to je s kar se da natančnim izračunom. Popolne natančnosti pri računanju seveda ne bomo mogli doseči, ker se bomo (poleg nujnega zaokroževanja pri računskih operacijah) dvakrat morali zadovoljiti s približnimi vrednostmi, vendar to na rezultat ne bo vplivalo; odgovor bo v vsakem primeru enak.

Dajmo zgornjemu vprašanju matematično obliko! V skladu z oznakami na sliki 2 bi radi določili višino podpore h in lok s, če poznamo polmer Zemlje (R = 6370 km = $6{,}37.10^6$ m) in seveda razliko med dolžino vrvi in obsegom Zemlje ($\varepsilon = 2\eta$ = 2 mm = = 2.10^{-3}m)

Najprej si poglejmo kako bi čim natančneje ocenili dolžino loka s . S slike 2 je očitno, da je $v < s < d$. Vemo tudi, da je $d - s = \varepsilon/2 = \eta$. Ker lahko predpostavljamo, da je η majhno število v primeri z ostalima količinama d in s, je s približno enako d. Toda tega seveda pri računaju ne smemo uporabiti, to je predpostaviti $\eta = 0$, saj je dolžina $\varepsilon = 2\eta$, čeprav je zelo majhna, bistvenega pomena za nalogo (brez nje si problema sploh ne bi mogli zastaviti!). Lahko bi vzeli, da je $s = v$, še bolje pa je na primer postaviti $s = (v + d)/2$ ali $s = 2v/3 + d/3$. Zadnja enakost je najboljši linearni približek za lok, izražen s pomočjo dela tetive in tangente. V dokaz tega dejstva se ne bomo spuščali; zanj bi potrebovali že košček višje matematike. Za Zemljo in naš problem bi lahko videli, da je formula $s = 2v/3 + d/3$ natančna na eno desetinko milimetra, če sta d in v manjša od 40 km.

Odslej bomo torej za s vzeli izraz $s = 2v/3 + d/3$. Iz njega in iz zveze $d - s = \eta$ izračunamo $d = v + 3\eta/2$. Ker pa iz podobnosti pravokotnih trikotnikov na sliki 2 dobimo še

$$v/d = R/(R + h) = (\sqrt{R^2 - v^2})/R \quad .$$

s pomočjo zveze $d = v + \frac{3}{2}\eta$, najdemo $hv = \frac{3}{2}R\eta$

Prvo enakost lahko zapišemo v obliki $hv = R(d - v)$, oziroma $hv = 3R\eta/2$, če se spomnimo, da je $d - v = 3\eta/2$. Drugo formulo z upoštevanjem zadnjega rezultata izrazimo takole:

$$1/(1 + h/R) = \sqrt{1 - (v/R)^2} = \sqrt{1 - (3\eta/2h)^2} =$$
$$= \sqrt{1 - (3\eta/2R)^2(R/h)^2}$$

Postavimo $a = 3\eta/2R$ in $x = h/R$, pa moremo zapisati

$$1/(1 + x) = \sqrt{1 - a^2/x^2}$$

To je enačba z eno neznanko x, ki pa jo še nekoliko preuredimo. Če kvadriramo in odpravimo ulomke, dobimo $x^2 = (1 + x)^2(x^2-a^2) = (1 + x(x + 2))(x^2-a^2) = x^2 - a^2 + x(x + 2)(x^2-a^2)$, oziroma po krajšanju

$$x(x + 2)(x^2 - a^2) = a^2$$

Če bi iz te enačbe mogli neznanko x natančno izračunati, bi bilo seveda lepo (potem bi poznali tudi $h = Rx$), toda to žal ne gre. Vemo pa nekaj: število a je zelo majhno (manjše od $(3/2).(10^{-3}/$ $/6.10^6) = 2,5.10^{-9}$) in zato mora biti tudi x precej majhen, če naj bo rešitev zgornje enačbe. Števila a seveda ne smemo kar zanemariti, saj bi v primeru $a = 0$ dobili $x^3(x + 2) = 0$ in od tod $x = 0$. Privoščimo pa si lahko naslednjo poenostavitev. V enačbo

$$x(x + 2)(x^2 - a^2) = a^2$$

vstavimo $x = y\sqrt[3]{a^2}$, tako, da nam po krajšanju na obeh straneh z a^2 ostane

$$y(y\sqrt[3]{a^2} + 2)(y^2 - \sqrt[3]{a^2}) = 1$$

Za vsako realno rešitev y te enačbe mora veljati $1/2 < y < 1$. Res: iz $y \geq 1$ bi takoj sledilo, da je leva stran večja od 1; iz $y \leq 1/2$ pa bi dobili, da je leva stran manjša od 1/2. To so seveda zelo grobe ocene, kljub temu pa nam povedo, da je a v primeri z rešitvijo y zanemarljivo majhno število. V zadnji enačbi torej povsod izpustimo $\sqrt[3]{a^2}$ in dobimo $2y^3 = 1$ oziroma $y = 1/\sqrt[3]{2}$, kar je dovolj dober približek za rešitev. Potem pa lahko postopoma izračunamo še

$$x = \sqrt[3]{a^2/2} = (1/2)\sqrt[3]{9\eta^2/R^2}$$

$$h = xR = (1/2)\sqrt[3]{9\eta^2 R}$$

$$v = (3/2)(R\eta/h) = \sqrt[3]{3\eta R^2}$$

Seveda so to le približne formule, toda njihova natančnost je precejšnja. Za točno oceno napake bi spet potrebovali malo večje znanje.

Pripomba. Iz formule za h in v lahko eliminiramo η in tako dobimo še zvezo $v = \sqrt{2Rh}$, ki nam pri dani višini h določa razdaljo do obzorja, saj je v našem primeru v skoraj do milimetra natančno enako d. Primerjajte tudi članek [1]!

Sedaj pa končno izračunajmo numerične vrednosti za h in v ter odgovorimo na vprašanje, zastavljeno v začetku! Upoštevajmo, da je $R = 6{,}37.10^6$ m in $\eta = \varepsilon/2 = 10^{-3}$ m, pa je pred nami rezultat

$$h = (1/2)\sqrt[3]{9.10^{-6}\ \mathrm{m}^2.6{,}37.10^6\ \mathrm{m}} = (1/2)\sqrt[3]{57{,}33}\ \mathrm{m} =$$
$$= 3{,}86/2\ \mathrm{m} = 1{,}93\ \mathrm{m}$$

$$v = \sqrt[3]{3.10^{-3}\mathrm{m}.6{,}37^2.10^{12}\mathrm{m}^2} = \sqrt[3]{121{,}73}\ .10^3\mathrm{m} = 4{,}96.10^3\mathrm{m} =$$
$$= 4{,}96\ \mathrm{km}$$

Odgovor je torej lahek: Odrasel človek v bližino podpore brez težav preide z ene strani na drugo (če ni posebno visoke rasti, se mu še skloniti ni treba). Še več, hkrati bi lahko pod vrvjo prestopilo ekvator okrog 1330 do 1,8 m visokih ljudi ali pod njo prevozilo to črto okrog 1100 vozil, visokih do 1,5 metra (vzeli smo, da vsak človek zavzame pol metra ekvatorja, če stoji na njem, vsako vozilo pa dva metra). Presenetljivo, kajne? Pa naj še kdo reče, da dva milimetra ne pomenita dosti!

Milan Hladnik

[1] K. Bajc, *Kako daleč je do obzorja?* , Presek 6 (1978/79) str. 4