PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 1
Strani 4–7

Ivan Vidav:

ULOMKI S ŠTEVCEM 1

Ključne besede: matematika, teorija števil, ulomki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/14/800-Vidav.pdf

ULOMKI S ŠTEVCEM 1

Vsako racionalno število r se da zapisati v obliki ulomka $r = a/b$, kjer sta a in b celi števili. Kakor vemo, je takih zapisov celo nešteto. Če je r pozitiven, smemo vzeti, da sta števec a in imenovalec b naravni števili.

Včasih so imeli za ulomek samo tak ulomek, ki ima števec 1, npr. 1/2, 1/3, 1/7 so ulomki. Druga pozitivna racionalna števila pa so izrazili z vsoto ulomkov s števcem 1, npr.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Na desni imajo vsi ulomki isti imenovalec. Pišemo pa lahko tudi takole:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Imenovalca na desni sta zdaj različna. Podobno je

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

2/3 se da izraziti tudi takole:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

Tudi tu so vsi imenovalci na desni med seboj različni.

Naravno se zdaj vsiljuje tole vprašanje:

(A) Ali se da vsako pozitivno racionalno število zapisati kot vsota ulomkov, ki imajo števec 1, imenovalci pa so med seboj različni?

Ulomke s števcem 1 zapišimo lepo po vrsti

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \tag{1}$$

V tem zaporedju se ulomki manjšajo in postanejo sčasoma poljubno majhni. Racionalno število, ki je vsota ulomkov s števcem 1 in različnimi imenovalci, pri čemer noben imenovalec ni večji od n, je manjše ali kvečjemu enako številu

(2) $$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Število s_n je vsota prvih n ulomkov zaporedja (1). Če večamo n, se vsota s_n veča, njeni sumandi pa postajajo vse manjši. Zato je umestno tole vprašanje:

(B) Ali je vsota s_n poljubno velika, če je n dovolj velik?

Z drugimi besedami povedano: Ali je vsota dovolj velikaga števila ulomkov zaporedja (1) večja od 10, ali celo večja od 1000?

Odgovor na vprašanje (B) je pritrdilen. Vsota s_n je poljubno velika, če je le n dovolj velik. Torej dobimo tako velike vsote, kakor želimo, če le seštejemo dovolj členov iz (1). Tega dejstva tu ne bomo dokazovali. Hitro pa se s poskusi prepričamo, da se vsote s_n zelo počasi večajo. Če bi npr. hoteli dobiti vsoto, ki je večja od 10, bi morali sešteti okoli 10 000 ulomkov iz (1)!

Pozitivni odgovor na vprašanje (B) še ne pomeni, da je tudi odgovor na vprašanje (A) pozitiven. Res je sicer, da s seštevanjem ulomkov zaporedja (1) dobimo poljubno velike vsote. Ne vemo pa še, ali dobimo za vsoto vsako pozitivno racionalno število.

Pa si oglejmo metodo, s katero bi izrazili pozitivno racionalno število r kot vsoto ulomkov s števcem 1 in z različnimi imenovalci. Odštejmo od r najprej prvi ulomek zaporedja (1). Nato odštejmo od razlike $r - 1/2$ drugi ulomek 1/3. Tako nadaljujmo. Ker dobimo s seštevanjem ulomkov zaporedja (1) poljubno velike vsote, se odštevanje po nekaj korakih gotovo konča. Kdaj se konča? Dvoje je mogoče: Ali pridemo z odštevanjem do razlike 0 ali pa dobimo razliko r_1, ki je manjša od prvega ulomka v vrsti (1), ki ga nismo še odšteli. V prvem primeru smo nalogo rešili: število r smo izrazili kot vsoto zaporednih ulomkov iz (1). V drugem primeru odštevanje nadaljujemo. V zaporedju (1) poiščemo prvi ulomek, ki je manjši od zadnje razlike r_1. Tega spet odštejemo od r_1 in tako nadaljujemo, dokler ne dobimo razlike 0.

Vzemimo za zgled število $r = 21/20$. Najprej odštejemo 1/2

$$\frac{21}{20} - \frac{1}{2} = \frac{11}{20}$$

Nato odštejemo 1/3

$$\frac{11}{20} - \frac{1}{3} = \frac{13}{60}$$

Dobljena razlika 13/60 je manjša od naslednjega ulomka 1/4. Prvi ulomek v zaporedju (1), ki je manjši od 13/60, je 1/5. Odštejmo ga

$$\frac{13}{60} - \frac{1}{5} = \frac{1}{60}$$

Razlika je ulomek s števcem 1. Zato smo postopek končali in dobili

$$\frac{21}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{60}$$

S to metodo naj skuša bralec sam izraziti število 2 kot vsoto ulomkov s števcem 1 in različnimi imenovalci.

Doslej smo tiho privzeli, da je dano število r večje od 1/2. Če je $r < 1/2$, odštejemo od r prvi ulomek iz (1), ki je manjši od r. Potem z odštevanjem nadaljujemo kakor prej.

Seveda se zastavlja vprašanje, ali je naša metoda pri vsakem pozitivnem racionalnem številu r uspešna. Poskusi pri večjih r pokažejo, da se števci v razlikah nekaj časa večajo. Kljub temu pa nas postopek v vsakem primeru privede do cilja. Odgovor na vprašanje (A) je namreč pritrdilen, ker velja **izrek:**

Vsako pozitivno racionalno število se da zapisati kot vsota ulomkov s števcem 1 in med seboj različnimi imenovalci.

Dokazali bomo ta izrek na koncu.

Izrek zagotavlja, da se da vsako pozitivno racionalno število zapisati na opisani način. Toda pri nekoliko večjem r je število sumandov izredno veliko. Pri zapisu števila $r = 100$ je npr. število sumandov tako veliko, da računa verjetno ne bi zmogli niti z največjim računalnikom. Pa tudi papirja za zapis bi nam zmanjkalo. Število sumandov se namreč izraža s številko, ki ima okoli 40 cifer.

Z opisano metodo izrazimo vsako pozitivno racionalno število tudi kot vsoto ulomkov s števcem 1, kjer so vsi imenovalci med seboj različni in vsi večji od naprej danega števila m. Namesto z 1/2 začnemo v tem primeru odštevati z ulomkom $1/(m+1)$. Kot zgled zapišimo 1 kot vsoto ulomkov, kjer so vsi imenovalci večji od 2:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20}$$

Bralec pa naj sam izrazi število 1 kot vsoto ulomkov, kjer so vsi imenovalci večji od 3 oziroma večji od 4!

Dokaz izreka. Po opisani metodi odštevamo od danega števila r zaporedne ulomke iz (1) tako dolgo, dokler ne pridemo do razlike – imenujmo jo r_1, ki je manjša od naslednjega ulomka v (1). Razlika r_1 je seveda racionalno število. Naj bo npr. $r_1 = a_1/b_1$, kjer sta a_1 in b_1 naravni števili. Pojdimo zdaj v zaporedju (1) do prvega ulomka, ki je manjši ali enak številu r_1. Denimo, da je ta ulomek $1/n$. Prejšnji ulomek $1/(n-1)$ pa je še večji od r_1. Imamo torej tale vrstni red:

(3) $$\frac{1}{n} \leqslant \frac{a_1}{b_1} \text{ in } \frac{a_1}{b_1} < \frac{1}{n-1}$$

Iz prve neenačbe dobimo $b_1 \leqslant na_1$, iz druge pa $na_1 < a_1 + b_1$. Torej

(4) $$0 \leqslant na_1 - b_1 < a_1$$

Odštejmo zdaj od r_1 ulomek $1/n$

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{n} = \frac{na_1 - b_1}{nb_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

Tu pomeni $a_2 = na_1 - b_1$ in $b_2 = nb_1$. Po (4) je $a_2 < a_1$. Torej smo dobili z odštetjem člena $1/n$ ulomek $r_2 = a_2/b_2$, ki ima manjši števec kakor prejšnji ulomek $r_1 = a_1/b_1$.

Če je $n \geqslant 3$, je dobljeno racionalno število r_2 manjše od naslednjega ulomka $1/(n+1)$ v (1). Po (3) je namreč

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Pri $n \geqslant 3$ je produkt $n(n-2) > 1$. Za tak n je potemtakem $n(n-1) > n + 1$. Zato je $r_2 < 1/(n+1)$.Pri nadaljevanju postopka torej spet preskočimo v zaporedju (1) vsaj en člen. Tako dobimo pri naslednjem koraku razliko $r_3 = a_3/b_3$, kjer je zopet $a_3 < a_2$. Od trenutka torej, ko prvič preskočimo v (1) vsaj en člen, se števci v razlikah stalno manjšajo. Ker so naravna števila, pridemo po nekaj korakih do razlike 0. S tem pa smo r izrazili kot vsoto ulomkov s števcem 1 in med seboj različnimi imenovalci. Tako smo dokazali izrek. Iz dokazovanja pa je razvidno, da je naša metoda vselej uspešna.

Ivan Vidav