

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **24** (1996/1997)

Številka 6

Strani 322-327, XXI-XXIV

Primož Potočnik:

MANDELBROTOVA IN JULIAJEVE MNOŽICE

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/24/1320-Potocnik.pdf>

© 1997 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA - založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENSKE REPUBLIKE, 24(1996) 1-7
ISSN 0351-6652

**PRE
SEK**

6



Dokaz, da je na naslovnici res cvetača.

MANDELBROTOVA IN JULIAJEVE MNOŽICE

Matematika si ljudje ponavadi predstavljajo kot zamišljenega in raztrese-nega človeka, oblečenega v zastarela ter malce premajhna oblačila, kako zgolj s kredo v roki na tablo izpeljuje težavne in navadnemu smrtniku pov-sem nerazumljive matematične teorije. Kot ni dima brez ognja, je tudi v tej predstavi kanček resnice. Kljub temu pa je večina sodobnih matema-tikov odkrila, da je sem in tja poleg krede in lastnega genija koristno pri svojem delu uporabiti tudi modernejša sredstva, denimo računalnik. Hu-domušni bralec bi sicer pripomnil, da so do tega spoznanja prišli le tisti, ki jim primanjkuje bodisi krede bodisi genija, vendar ostaja dejstvo, da so se s pojavom in razvojem računalnikov pospešeno začela razvijati tudi nekatera matematična področja. Eno takšnih je tudi področje fraktalov in kaosa, kamor lahko uvrstimo tudi pričujoči prispevek.

Fraktali in kaos so se zelo hitro uveljavili tudi v nematematičnih kro-gih, saj jih ponavadi spremljajo presenetljivo lepe in zanimive slike, ki lahko navdušijo gledalca zgolj s svojo estetsko vrednostjo. Nekaj lepih primerkov fraktalov se je pojavilo tudi že v Preseku (glej prispevek Ma-tija Lokarja o praprotilih v 1. številki letnika 1995/96 in Milana Ambrožiča o Newtonovi metodi v 5. številki istega letnika).¹ Tokrat bomo predsta-vili fraktale, ki se imenujejo po matematikih Juliaju in Mandelbrotu. Ker je Presek tudi list za mlade matematike, je prav, da poskušamo mate-matično ozadje, ki se skriva za lepimi barvnimi slikami, čim razumljiveje predstaviti.

Naša zgodba se bo odvijala v množici kompleksnih števil $\mathbb{C}$, ki si jo bomo predstavljali kot ravnino – vsakemu kompleksnemu številu $x + iy$ pripada točka s koordinatami (x, y) v ravnini. S kompleksnimi števili znamo računati:

$$(x+iy)+(u+iv) = (x+u)+i(y+v), \quad (x+iy)(u+iv) = (xu-yv)+i(xv+yu)$$

in jim določiti absolutno vrednost

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ki v resnici predstavlja oddaljenost slike kompleksnega števila od koordi-natnega izhodišča.

¹ Fraktale nahajamo tudi v naravi. Zanimiv primerek kažeta fotografiji na naslov-nici in II. strani ovitka.

Juliajeve množice

Za izbrano število $c \in \mathbb{C}$ definirajmo kvadratni polinom

$$P_c(z) = z^2 + c.$$

Takšen polinom nam preslikuje točke kompleksne ravnine nazaj v kompleksno ravnino, zato lahko za poljubno število $z_0 \in \mathbb{C}$ opazujemo zaporedje

$$z_0, z_1 = P_c(z_0), z_2 = P_c(z_1), \dots, z_{n+1} = P_c(z_n), \dots$$

Temu zaporedju rečemo *orbita* točke z_0 , točki z_0 pa *seme* orbite.

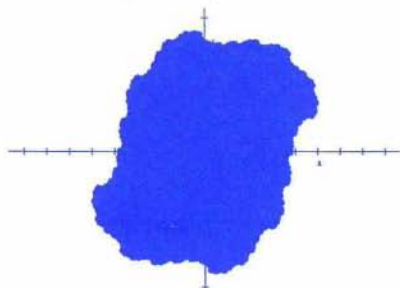
Dogodi se lahko dvoje:

1. orbita lahko sčasoma pobegne daleč od izhodišča, ali z drugimi besedami, množica $\{|z_0|, |z_1|, \dots\}$ je neomejena,
2. orbita ostane na nekem omejenem področju kompleksne ravnine, kar pomeni, da je množica $\{|z_0|, |z_1|, \dots\}$ omejena.

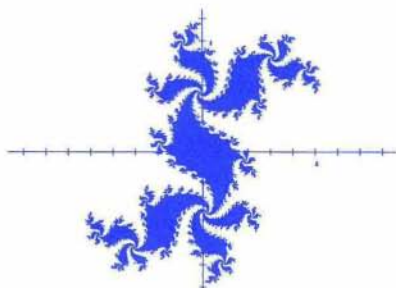
Množico tistih semen, katerih orbite so omejene, označimo z $\mathcal{J}_c$ in ji rečemo Juliajeva množica pri parametru c .

Za pokušino si oglejmo primer Juliajeve množice pri parametru $c = 0$. Tedaj je orbita poljubnega semena $z_0 \in \mathbb{C}$ enaka kar $z_0, z_0^2, z_0^4, z_0^8, \dots$, torej $z_n = z_0^{2^n}$. Od tod sledi analogna formula za absolutne vrednosti $|z_n| = |z_0|^{2^n}$. Če za seme izberemo število znotraj enotskega kroga ($|z_0| \leq 1$), bo očitno tudi za orbito veljalo $|z_n| = |z_0|^{2^n} \leq 1$, kar pomeni, da je takšno seme gotovo element Juliajeve množice, saj je njegova orbita omejena. Velja pa tudi obratno: če za seme izberemo število z_0 zunaj enotskega kroga ($|z_0| > 1$), se bo orbita (z_n) oddaljevala od izhodišča prek vseh mej z večanjem števila n . To pa pomeni, da je Juliajeva množica $\mathcal{J}_c$ pri parametru $c = 0$ enaka kar enotskemu krogu (s središčem v izhodišču in polmerom 1).

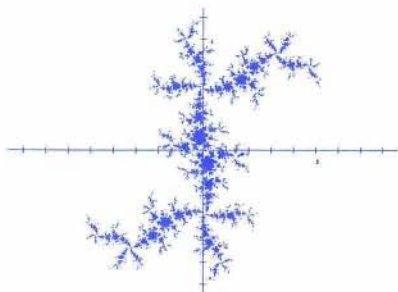
Nič posebnega, boste rekli, samo zelo zapleten način definiranja enotskega kroga. Mnogo bolj zanimivo pa postane, če za parameter c izberemo kakšno drugo kompleksno število.



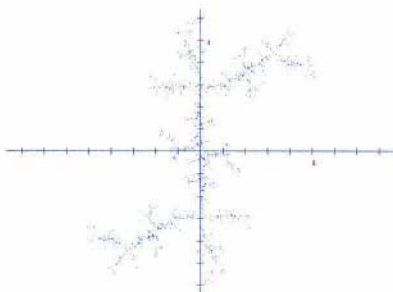
Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.

Poglejmo si slike 1, 2, 3 in 4. Struktura teh Juliajevih množic je že mnogo zapletenejša. Na sliki 1 imamo množico $\mathcal{J}_c$ pri parametru $c = 0.15 + 1.25i$, torej pri parametru, ki je relativno blizu izhodišču kompleksne ravnine. Tu je Juliajeva množica do neke mere še podobna krogu.

Precej drugačno situacijo imamo na sliki 2, kjer smo za parameter izbrali $c = 0.3 + 0.5i$. Tu je struktura že mnogo zapletenejša in rob množice $\mathcal{J}_c$ je dobil značilno fraktalno obliko – če bi sliko povečevali v okolici kakšne robne točke, bi odkrivali vedno finejše podrobnosti in strukture, ki bi na pogled zelo spominjale na začetno sliko. Ko parameter c oddaljujemo od izhodišča, postaja množica $\mathcal{J}_c$ vse tanjša in nekje se zgodi, da razpade na prah nepovezanih točk, ki se sčasoma skoraj popolnoma razkadi in izgine z naše slike.

Če slike 1, 2, 3 in 4 pogledamo podrobneje, opazimo, da so vse Juliajeve množice omejene. Ali je to zgolj naključje ali velja splošneje? V resnici velja splošno. Prepričajmo se!

Naj bo $c \in \mathbb{C}$ parameter množice $\mathcal{J}_c$ in $z \in R$ označimo večje od števil 2 in $|c|$. Vzemimo seme z_0 z lastnostjo $|z_0| > R$. Dokazali bomo, da je njegova orbita neomejena in da zato ne pripada Juliajevi množici $\mathcal{J}_c$. Tako se bomo prepričali, da je vsa množica $\mathcal{J}_c$ res znotraj kroga okoli izhodišča s polmerom R .

Definirajmo $q = |z_0| - 1$. Ker velja $|z_0| > R \geq 2$, velja tudi $q > 1$. Za poljubno naravno število k ocenimo

$$\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \frac{|z_k^2 + c|}{|z_k|} \geq \frac{|z_k|^2 - |c|}{|z_k|} = |z_k| - \frac{|c|}{|z_k|}. \quad (1)$$

S pomočjo te formule in indukcijo dokažimo, da za poljubno naravno število k velja

$$|z_{k+1}| \geq q|z_k|. \quad (2)$$

Za $k = 0$, nam (1) pravi:

$$\frac{|z_1|}{|z_0|} \geq |z_0| - \frac{|c|}{|z_0|} > |z_0| - 1 = q,$$

in če zgornjo neenakost še množimo s številom $|z_0|$, že dobimo trditev (2) za primer $k = 0$. Vzemimo sedaj poljubno naravno število n in predpostavimo, da trditev (2) drži za števila $k < n$. Če bomo s pomočjo te predpostavke dokazali, da velja tudi za število $k = n$, nam bo princip matematične indukcije zagotovil veljavnost formule (2) za vsa naravna števila k . Po indukcijski predpostavki velja

$$|z_n| \geq q|z_{n-1}| \geq q^2|z_{n-2}| \geq \dots \geq q^n|z_0| > z_0.$$

Zato velja tudi $-\frac{c}{|z_n|} \geq -\frac{c}{|z_0|}$. Upoštevajmo še formulo (1) za $k = n$ in ocenimo

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \geq |z_n| - \frac{|c|}{|z_n|} \geq |z_0| - \frac{|c|}{|z_0|} > |z_0| - 1 = q.$$

S tem je formula (2) dokazana za število $k = n$, in s tem za vsa naravna števila k . Od tod sledi zveza

$$|z_n| \geq q|z_{n-1}| \geq q^2|z_{n-2}| \geq \dots \geq q^n|z_0|$$

za vsako naravno število n . Ker geometrijsko zaporedje $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ raste prek vsake meje za $q > 1$, je orbita semena z_0 neomejena in zato takšno seme ne pripada Juliajevi množici. S tem smo omejenost Juliajevih množic dokazali.

To dejstvo nam zelo olajša risanje množice $\mathcal{J}_c$ s pomočjo računalnika. Če želimo za neko kompleksno število z_0 preveriti, ali je element Juliajeve množice, zaporedoma računamo elemente z_n njegove orbite in takoj, ko za neko naravno število n dobimo oceno $|z_n| > \max\{2, |c|\}$, lahko zatrdimo, da z_0 ni element Juliajeve množice.

Mandelbrotova množica

Kot vidimo na slikah 1 do 4, niso vse Juliajeve množice povezane. Če bi imeli na razpolago več primerov, bi opazili, da je Juliajeva množica povezana natanko tedaj, ko vsebuje točko 0. Na podlagi tega kriterija lahko ločimo parametre $c \in \mathbb{C}$ v dve družini:

1. na tiste $c \in \mathbb{C}$, za katere je $0 \in \mathcal{J}_c$, in je zato $\mathcal{J}_c$ povezana množica,
2. na tiste $c \in \mathbb{C}$, za katere $0 \notin \mathcal{J}_c$, in je zato $\mathcal{J}_c$ nepovezana množica.

Množico kompleksnih števil c iz prve družine imenujemo Mandelbrotova množica in jo označimo z $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C}; 0 \in \mathcal{I}_c\}.$$

Če torej želimo za dano kompleksno število c preveriti, ali pripada Mandelbrotovi množici, moramo preveriti, ali je orbita semena $z_0 = 0$ pri polinomu P_c omejena. Takšna orbita je oblike

$$z_0 = 0, \quad z_1 = 0^2 + c = c, \quad z_2 = c^2 + c, \quad z_3 = (c^2 + c)^2 + c, \quad \dots \quad (*)$$

Če ugotovimo, da absolutne vrednosti elementov takšne orbite ostanejo omejene (ne rastejo prek vsake meje), je število c element Mandelbrotove množice. Podobno kot pri Juliajevi množici se lahko tudi tu prepričamo, da takšna orbita gotovo ni omejena, če kateri od njenih elementov postane po absolutni vrednosti večji od števila 2. Zato je v resnici dovolj preveriti, ali so vsi elementi orbite omejeni s številom 2. Ker je število c samo tudi element orbite (*), lahko sklepamo, da se Mandelbrotova množica nahaja v krogu okoli izhodišča s polmerom 2.

Za zgled preverimo, ali je število -2 element Mandelbrotove množice. Oglejmo si orbito semena 0 pri $c = -2$:

$$0, -2, (-2)^2 - 2 = 2, 2^2 - 2 = 2, 2, 2, \dots$$

Orbita se ustali pri številu 2 in je zato omejena, to pa pomeni, da je $-2 \in \mathcal{M}$.

Oglejmo si sedaj sliko 5, kjer je Mandelbrotova množica predstavljena s črno barvo. Rob Mandelbrotove množice je fraktalen – bliže si ga ogledujemo, bogatejšo strukturo lahko opazimo. Na sliki 6 smo povečali del slike 5 okoli točke $-0.76315 - 0.08855i$ za približno 1000-krat. Množica $\mathcal{M}$ je sicer povezana, a jo vendar lahko razbijemo na več komponent, ki se med seboj dotikajo le v eni točki. Največja komponenta ima obliko krivulje srčnice, ostale pa so okrogle in so razporejene ob robu največje. Konci posameznih komponent so okrašeni še s tankimi laski, ki pa jih na sliki zaradi preslabe resolucije žal ni najboljše videti.

Kako narisati Mandelbrotovo ali Juliajevo množico?

Odgovor je preprost – z računalnikom. Kako? Presenetljivo enostavno, le definiciji obeh množic je treba upoštevati. Denimo, da želimo na zaslonu prikazati Juliajevo množico $\mathcal{I}_c$ pri izbranem $c \in \mathbb{C}$. Kot vemo, je zaslon razdeljen na $m \times n$ točk, ki je vsaka lahko obarvana z eno od barv $0, 1, 2, \dots, b$. Ponavadi pomeni 0 črno barvo in jo porabimo za barvanje

množice $\mathcal{J}_c$, ostale pa za barvanje zunanosti. Števila m, n, b so seveda odvisna od zmogljivosti računalnika in programskega jezika, v katerem programiramo. Vsaki točki zaslona priredimo ustrezno točko dela kompleksne ravnine, ki ga želimo predstaviti na zaslonu. Za vsako od teh $m \times n$ točk moramo preveriti, ali pripadajo množici $\mathcal{J}_c$ ali ne. V ta namen izberemo neko dovolj veliko naravno število N , ki bo predstavljalo maksimalno število iteracij, ki jih bo računalnik izvedel.

Za vsako od $m \times n$ točk kompleksne ravnine, denimo z_0 , pričnemo računati zaporedje

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

Določimo število R tako, da bo veljalo $R > 2$ in $R > |c|$. Če pri nekem številu k dobimo oceno $|z_k| > R$, to pomeni, da točka z_0 ni element množice $\mathcal{J}_c$ in računanje naslednjih členov zaporedja (z_n) lahko opustimo. Zanimive barvne učinke dosežemo, če takšno točko obarvamo z neko barvo, ki je odvisna od števila k , denimo z barvo $(k \bmod b) + 1$, lahko pa poskusimo tudi s kakšno drugo funkcijo števila k .

Če števila $|z_k|$ ostanejo omejena s številom R za vse $k \leq N$, lahko domnevamo, da točka z_0 pripada množici $\mathcal{J}_c$, in zato pripadajočo točko na zaslonu obarvamo z barvo 0 (črno).

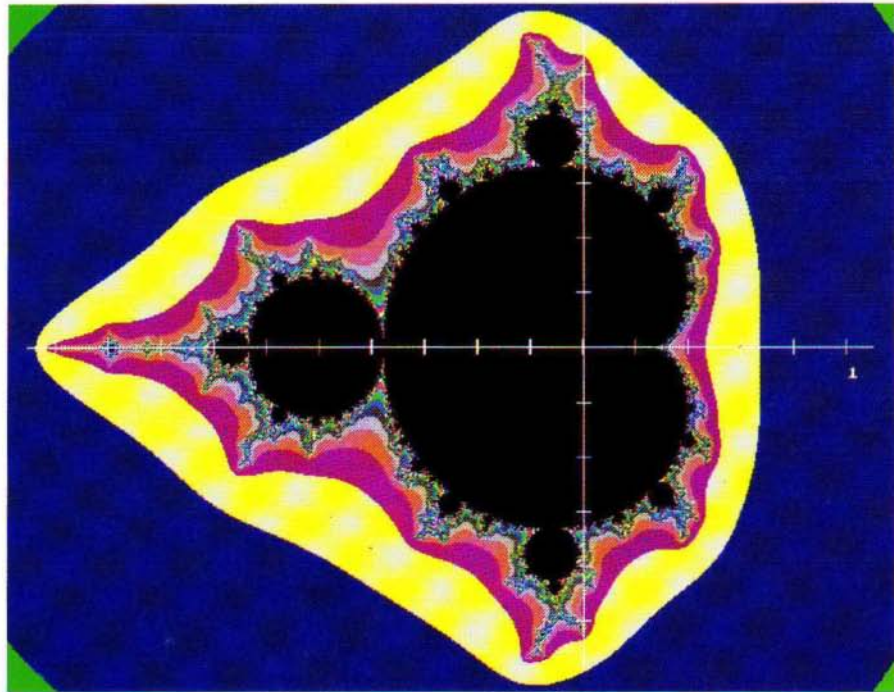
Podobno predstavimo na računalniku Mandelbrotovo množico $\mathcal{M}$. Vsaki točki zaslona zopet priredimo ustrezno točko kompleksne ravnine in za vsako od njih, denimo c , preverimo, ali ostaja zaporedje

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

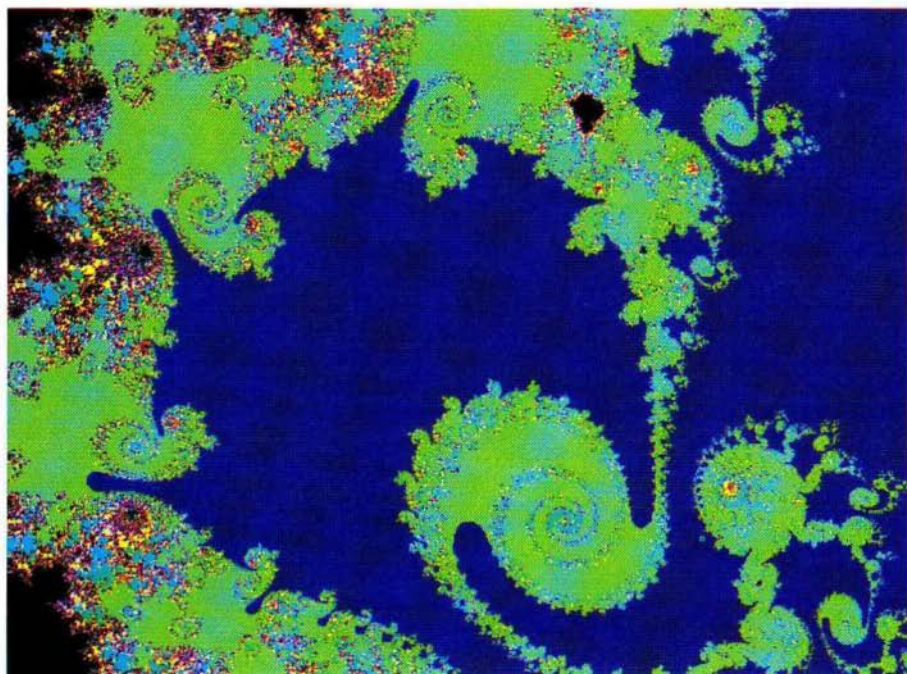
omejeno po absolutni vrednosti s številom 2. Če zaporedje pri nekem številu k pobegne iz kroga okoli izhodišča s polmerom 2, pobarvamo ustrezno točko na zaslonu neko barvo, ki naj bo odvisna od k , če pa zaporedje ostane omejeno z 2 za vse $k \leq N$, točko počrnilimo.

Na takšen način dobimo seveda le približno podobo Mandelbrotove in Juliajevih množic. Večje število iteracij N izberemo, bližje je podoba resnici. Tako smo pri sliki 7 postavili število iteracij na 100, pri sliki 8, kjer so nas zanimale finejše podrobnosti, pa kar na 1000.

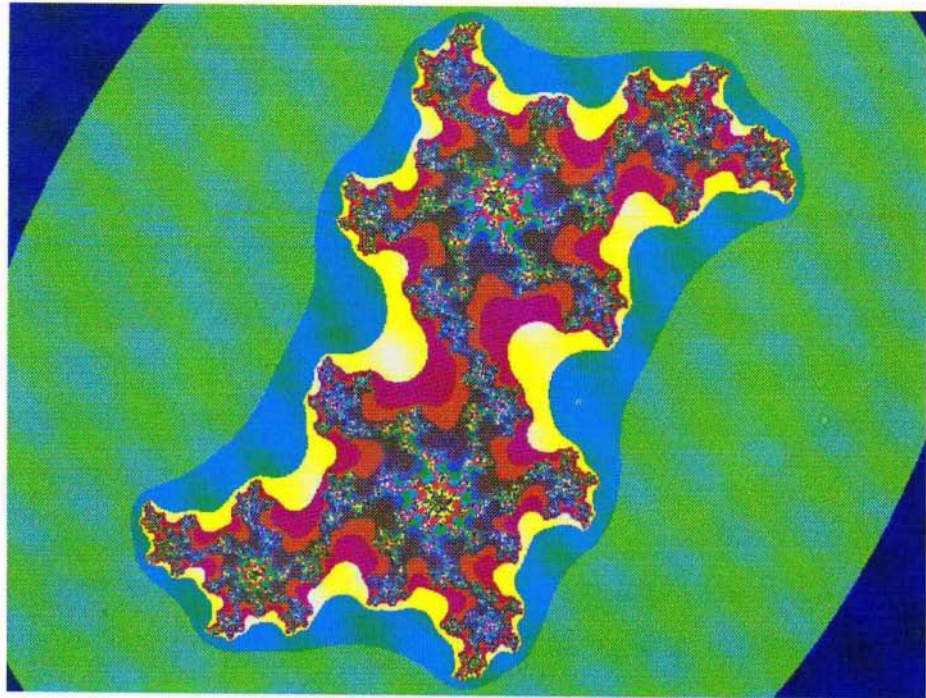
Primož Potočnik



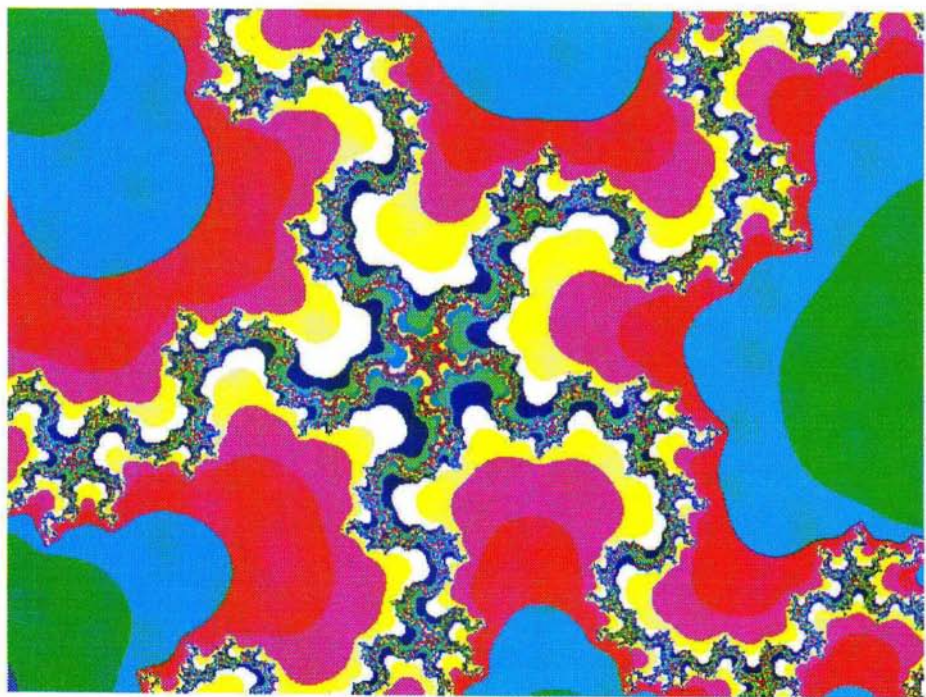
Slika 5.



Slika 6.



Slika 7.



Slika 8.