PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 5
Strani 310–314

Janez Strnad:

VZTRAJNOST IN TRENJE

Ključne besede: fizika, trenje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1097-Strnad.pdf

VZTRAJNOST IN TRENJE

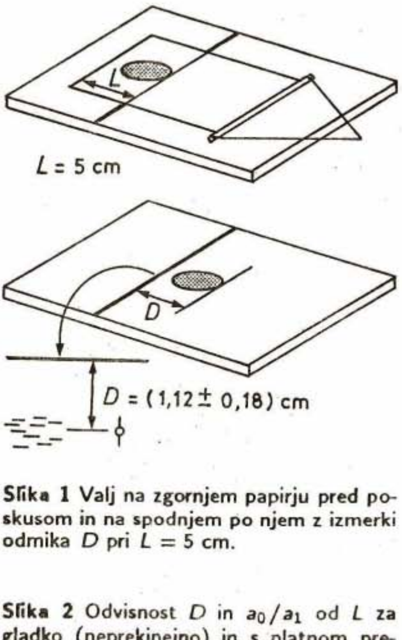
Pogovor o vztrajnosti, preden vpeljemo maso, pogosto spremljamo s preprostimi poskusi. Pri enem od njih izpod telesa hitro potegnemo prt, ne da bi telo padlo z mize. Poskus radi pokažejo tudi rokohitrci. V ameriški srednješolski fizikalni reviji The Physics Teacher je H.T.Hudson pred časom opozoril na to, da ima pri pojavu pomembno vlogo trenje (*There's more to it than inertia*, **23** (1985) 163). Izid poskusa je odvisen od koeficienta trenja med telesom in prtom in ni odvisen od mase. V isti reviji sta ga pred kratkim dopolnila U.Haber-Schaim in J.H.Dodge (*There's more to it than friction*, **29** (1991) 56). Ni pomemben samo koeficient trenja med telesom in prtom, ampak tudi koeficient trenja med telesom in mizo. Misel sta podprla s poskusom in ob tem zapisala nekaj enačb. Njun poskus, pri katerem sta uporabila neposredno priključeni računalnik, je mogoče narediti na moč preprosto.

Namesto prta uporabimo pisarniški papir, ki se ne guba kot prt. Papirji ene vrste se med seboj razlikujejo precej manj kot prti. Poleg tega lahko mizo obložimo z drugim papirjem enake vrste, tako da je pomemben samo koeficient trenja med telesom in papirjem. Misel, da bi poskus naredili s kovanci, se ni obnesla. Koeficient trenja med kovancem in papirjem je za obe strani kovanca skoraj enak in z njim ni mogoče izvesti dveh vrst merjenj. V delavnici Oddelka za fiziko so izdelali za poskus štiri enake ploske medeninaste valje z maso 15 gramov in premerom 2,7 centimetra, ki so bili na eni strani zglajeni, na drugi pa hrapavi. Tudi poskusi z njimi niso zadovoljili. Zglajena in hrapava stran sta se glede na koeficient trenja na papirju še premalo razlikovali. Zato je imel pri končnih merjenjih valj na hrapavi strani nalepljeno platno. Smirkov papir se ni obenesel, ker se je prehitro zrabil, guma pa je imela prevelik koeficient trenja. Poleg tega se je pokazalo, da so odstopanja med izidi večja pri poskusih z vsemi valji kot pri ponavljajočih se poskusih z enim samim valjem.

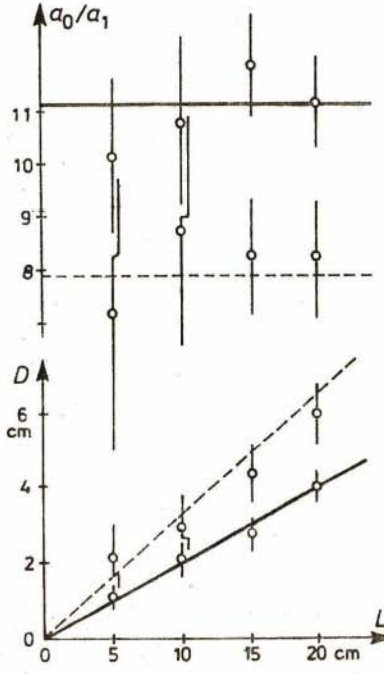
Zato sem delal poskuse z enim samim valjem. Postavil sem ga na papir v razdaljo L od krajišča papirja (slika 1). Na drugo krajišče papirja sem z lepilnim trakom prilepil aluminijevo letev in na njeni krajišči pritrdil vrvico. Z roko sem prijel sredino vrvice in jo napel. Nato sem jo na vso moč sunkovito potegnil v vodoravni smeri. Ni bilo lahko vleči ves čas s kolikor mogoče enakomernim pospeškom v vodoravni smeri. Toda po vrsti poskusov sem si pridobil dovolj vaje. Nisem popustil želji, da bi upošteval samo "dobra merjenja", ampak sem upošteval vsa. Ne morem jamčiti, da nisem podzavestno kako vplival na izid merjenj. Pri resnejših poskusih bi bilo treba bolje poskrbeti, da bi se gibal papir vselej z enakim in enakomernim pospeškom. Vendar bi bilo treba v to vložiti precej dela. Preprost mehanizem, pri katerem naj bi padajoča utež zagotovila enak in enakomerni pospešek, se ni obnesel.

Potem, ko se je valj na spodnjem papirju ustavil, sem zaznamoval lego in izmeril odmik. V nizu merjenj sem po desetkrat potegnil papir pri vsaki izmed štirih začetnih leg valja, izmeril odmik, izračunal povprečno vrednost in efektivni odmik. Najprej sem naredil niz merjenj z valjem z gladko stranjo na papirju in ga potem ponovil s platneno stranjo na papirju. Izide kaže graf (slika 2).

Poskusimo pojasniti izid z nekaj preprostimi računi. Papir začnemo vleči ob času $t = 0$ s konstantnim pospeškom $a_0 > k_l g$, če je k_l koeficient lepenja valja na papirju in g težni pospešek. Če za izhodišče vzamemo začetno lego tistega roba kovanca, ki leži v smeri vleke, opiše gibanje krajišča papirja enačba $x_0 = a_0 t^2 - L$. Dokler se giblje valj po zgornjem papirju, deluje nanj samo vodoravna komponenta sile $F = kgm_t$, če je m_t *težna masa* valja in k



Slika 1 Valj na zgornjem papirju pred poskusom in na spodnjem po njem z izmerki odmika D pri $L = 5$ cm.



Slika 2 Odvisnost D in a_0/a_1 od L za gladko (neprekinejno) in s platnom prevlečeno ploskev valja (črtkano). Napake, to so izračunani efektivni odmiki, ki jih kažejo navpične črtice, so večje v drugem primeru kot v prvem.

Iz niza izmerkov določene količine x_1, x_2, ... x_n dobimo izid, ki je najbližji neznanemu pravemu izidu, s *povprečno vrednostjo*

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Z *efektivnim odmikom povprečja*

$$\delta x = \frac{1}{n}\sqrt{(\overline{x} - x_1)^2 + (\overline{x} - x_2)^2 + \ldots + (\overline{x} - x_n)^2}$$

povemo, kako natančen je izid

$$x = \overline{x} \pm \delta x.$$

Dostikrat imenujemo δx kar *absolutno napako*. *Relativno napako* $\delta x/\overline{x}$ izražamo v odstotkih. Žepni računalnik ima poseben *statistični program*, ki hitro izračuna povprečje in efektivni odmik. Pogosto efektivnega odmika ne izračunamo, ampak ga ocenimo z absolutno vrednostjo razlike tipičnega izmerka od povprečja.

koeficient trenja med valjem in papirjem. Po Newtonovem zakonu $m_v a_1 = kgm_t$, v katerem je m_v *vztrajna masa* valja, se giblje valj s pospeškom

$$a_1 = kg\frac{m_t}{m_v}. \tag{1}$$

Hitrost valja glede na mizo je $v = a_1 t$ in premik $x = a_1 t^2$. Valj pade z zgornjega papirja ob času t_1 in poslej drsi po spodnjem papirju. Enačba $x(t_1) = x_0(t_1)$ pripelje do zveze

$$t_1 = \sqrt{\frac{2L}{a_0 - a_1}}.$$

V tem trenutku se giblje valj s hitrostjo $v_1 = a_1 t_1$ in je premaknjen za $s_1 = a_1 t_1^2$. Tu smo spregledali postopno spremembo sile od kgm_t na 0, ko se rob papirja premika prek valja. Če bi hoteli to spremembo dosledno upoštevati, bi računanje močno zapletli. Pri premikih, ki so veliki v primeri s premerom valja, s tem nismo zagrešili velike napake.

Med gibanjem valja po padcu deluje spodnji papir nanj z vodoravno komponento sile $F = -kgm_t$ in po Newtonovem zakonu je njegov pospešek

$$a_2 = -kgm_t/m_v = -a_1. \tag{2}$$

Hitrost valja je $v = a_2(t - t_1) + v_1$ in njegov skupni premik od začetka poskusa $s = a_2(t - t_1)^2 + v_1(t - t_1) + s_1$, $t > t_1$. Valj se zaustavi v trenutku t_2, ko je $v(t_2) = 0$, torej $t_2 = t_1 - v_1/a_2$. S tem dobimo odmik

$$D = a_1 t_1^2 (1 - \frac{a_1}{a_2}) = \frac{2a_1 L}{a_0 - a_1}. \tag{3}$$

Razmerje D/L določa razmerje pospeškov a_0 in a_1:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{2L}{D} + 1.$$

Pikolovsko smo razločevali vztrajno in težno maso samo zato, da smo izrecno pokazali vlogo vztrajnosti. Zaradi ekvivalentnosti obeh mas moramo postaviti $m_t/m_v = 1$. Od mase neodvisni izid ne pomeni, da vztrajnost ni pomembna, ampak da sta vztrajna in težna masa enaki. Podobno ravnamo na primer pri izvajanju enačbe za nihanje nitnega nihala. S telesom z vztrajno maso 0 poskusa ne bi mogli narediti ($m_v \to 0$ pripelje do $a_1 \to \infty$), kakor ga ne bi mogli narediti, če ne bi bilo trenja ($k \to 0$ pripelje do $a_1 \to 0$).

Izmerjeni premik $D(L)$ pri začetni razdalji $L = 5$ cm, 10 cm, 15 cm, in 20 cm za dano spodnjo ploskev valja kaže, do kolikšne mere je razmerje D/L konstantno. To velja v okviru napak pri merjenju (slika 1) in se sklada s privzetkom, da je razmerje a_0/a_1 konstantno. Iz merjenj sledi za to razmerje $11,1 \pm 0,6$ za gladko ploskev valja in $7,9 \pm 0,6$ in za ploskev, prevlečeno s platnom.

Da bi izboljšali natančnost, poskusimo meriti drugače. Valj spustimo po klancu z dolžino L_0 pri danem nagibu $\varphi > \varphi_0$. Klanec se konča v vodoravnem izteku, v katerem doseže valj razdaljo L_1, preden se zaustavi. Po izreku o kinetični in potencialni energiji se začetna potencialna energija $mgL_0 \sin\varphi$ porabi za delo sile trenja $L_0 kmg \cos\varphi + L_1 kgm$. Izračunamo *efektivni* koeficient trenja

$$k = \frac{L_0 \sin\varphi}{L_0 \cos\varphi + L_1}.$$

Pri našem poskusu meri dolžina klanca $L_0 = 15$ cm. Pri desetih ponovitvah izmerimo doseg L_1 bolje kot na 6 % natančno in koeficient trenja še natančneje. Toda ugotovimo, da je koeficient trenja odvisen od nagiba. Pri gladki ploskvi z nagibom narašča: 0,26 (nagib 20°), 0,28 (25°), 0,33 (30°), pri platneni pa pojema: 0,51 (30°), 0,47 (35°), 0,43 (40°). Pričakovali bi, da bi efektivni koeficient pojemal z naraščajočim nagibom, saj z nagibom narašča hitrost valja na dnu, s tem pa koeficient trenja pojema. Vse kaže, da moti trk valja z vodoravnim iztekom na koncu klanca, in to tem bolj, čim večja je hitrost valja. To pride do izraza pri gladki strani valja, ne pa pri platneni strani, pri kateri platno trk ublaži.

Pospešek a_0 lahko določimo, če poznamo koeficient trenja. Na klancu v mejnem nagibu φ_0, ko valj ravno drsi s konstantno hitrostjo, velja $k = \mathrm{tg}\varphi_0$. Za gladko ploskev valja dobimo $\mathrm{tg}14^\circ = 0,25$, za ploskev, prevlečeno s platnom pa $\mathrm{tg}24^\circ = 0,45$. Koeficienta lepenja k_l sta za nekaj desetink večja. Merjenja so dokaj nenatančna, mejni nagib je nenatančen do stopinje, koeficient trenja pa do 0,02, tako da doseže relativna napaka skoraj 10 %.

Zato se je najbolje zadovoljiti z nenatančnima koeficientoma trenja, ki smo ju dobili z mejnim nagibom 0,25 in 0,45. Z njima izračunamo z enačbo (1) pospešek valja za gladko stran $a_1 = 0,25 \cdot 9,8\ \mathrm{m/s^2} = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}$ in $a_1 \doteq 0,45 \cdot 9,8\ \mathrm{m/s^2} = 4{,}4\ \mathrm{m/s^2}$ za platneno stran. Z izmerjenim razmerjem a_0/a_1 lahko nato ocenimo pospešek papirja a_0: $a_0 = 11,1 \cdot 2,5\ \mathrm{m/s^2} = 28\ \mathrm{m/s^2}$ za gladko stran in $a_0 = 7,9 \cdot 4,4\ \mathrm{m/s^2} = 35\ \mathrm{m/s^2}$ za platneno. Oceni se razlikujeta za $\Delta a_0 = 7\ \mathrm{m/s^2}$. Delno to pojasnimo z nenatančnim merjenjem, delno pa z Newtonovim zakonom, ki ga to pot uporabimo za papir:

$$F_r - F_p - k m_t g = m^* a_0.$$

F_r je sila roke, F_p sila spodnjega papirja in m^* masa papirja, aluminijeve letve in vrvice. Če je sila roke pri vseh poskusih enaka, velja zveza $m^* \Delta a_0 = -m_t g \Delta k$. Z njo dobimo za razliko pospeškov papirja

$$m_t g(-\Delta k)/m^* = 15\ \mathrm{g} \cdot 9,8\mathrm{ms^{-2}} \cdot 0,2/11\ \mathrm{g} = 3\ \mathrm{m/s^2},$$

medtem ko smo prej dobili več kot dvakrat več.

Pri računanju napake razlike se absolutni napaki seštejeta in relativna napaka lahko močno naraste. Na eni strani poznamo koeficienta trenja z relativno napako 10 %, tako da je razlika $-\Delta k = (0,45 \pm 0,05) - (0,25 \pm 0,03) = 0,2 \pm 0,1$ in naraste relativna napaka na 50 %. Na drugi strani poznamo pospeška papirja približno z relativno napako 10 %, tako da je razlika $\Delta a_0 = (35 \pm 4)\ \mathrm{m/s^2} - (0,28 \pm 3)\ \mathrm{m/s^2} = (7 \pm 7)\ \mathrm{m/s^2}$ in naraste relativna napaka celo na 100 %.

Najbrž pa razkrije ta razlika tudi slabost privzetkov, na primer tistega, da je sila roke pri vseh poskusih enaka, ali tistega, da je pospešek papirja konstanten. S to ugotovitvijo se moramo zadovoljiti. Merjenja pri pojavih s trenjem so pogosto nenatančna. Uvideli pa smo, da je mogoče tudi z nenatančnimi podatki marsikaj koristnega ugotoviti. Ne smemo pozabiti, da so v fiziki vsi podatki bolj ali manj nenatančni in da so zaradi tega bolj ali manj nenatančni tudi vsi izidi.

Janez Strnad