REŠEVANJE TREH VELIKIH STAROGRŠKIH PROBLEMOV

MARJAN JERMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A20, 12F05, 97H40

Trije klasični starogrški problemi, podvojitev kocke, kvadratura kroga in trisekcija kota, niso rešljivi samo z uporabo neoznačenega ravnila in šestila. V prispevku so opisane nekatere zanimive antične nestandardne rešitve teh treh problemov.

SOLVING THE THREE CLASSICAL GREEK PROBLEMS

The three classical ancient Greek problems, doubling the cube, squaring the circle and trisecting an angle cannot be solved using ruler and compass only. Some interesting ancient non-standard solutions of these problems are described.

Uvod

Teon iz Smirne[1] je med komentarji izgubljene Eratostenove[2] knjige *Platonicus* zapisal zgodbo, ki je kasneje postala znana kot *problem z Delosa.* Okrog leta 430 pr. Kr. je približno četrtino prebivalcev grškega otoka Delosa pomorila kuga. Kot je bilo takrat običajno, so šli predstavniki otoka po nasvet k oraklju v Apolonov tempelj v Delfe. Odgovoril jim je, da se bodo kuge znebili, če podvojijo prostornino Apolonovega oltarja [v obliki kocke]. Različne zgodbe govorijo o tem, da so rokodelci najprej nad oltarjem zgradili še en enak oltar, tako podvojili prostornino, a s tem pokvarili njegovo obliko. Ko so nato poskusili s podvojitvijo vseh stranic, so prostorino povečali za osemkrat. Po dolgotrajnih neuspešnih poskusih so za pomoč prosili Platona.[3] Ta jim je povedal, da si orakelj v resnici ni želel večjega oltarja, je pa želel s to nalogo osramotiti Grke zaradi njihovega zanemarjanja matematike in prezira do geometrije.

Zgodbo s podobno matematično vsebino najdemo tudi v Evtocijevem[4] komentarju Arhimedove[5] razprave *O sferi in valju.* V sicer ponarejenem

[1]Teon iz Smirne (75–135), grški matematik, ki je v večini svojih del komentiral dela starejših matematikov in filozofov, predvsem pitagorejcev in Platona.

[2]Eratosten iz Kirene (276–195 pr. Kr.), grški matematik, geograf, pesnik, astronom in atlet.

[3]Platon (424–348 pr. Kr.), Sokratov študent, grški filozof in matematik.

[4]Evtocij iz Aškalona (480–540), grški matematik.

[5]Arhimed iz Sirakuze (287–212 pr. Kr.), grški matematik, fizik in astronom.

pismu, ki naj bi ga Eratosten pisal kralju Ptolemaju, je zapisan mit o užaloščenem kralju Krete Minosu.[6] Njegov sin Glavk je med lovljenjem miši padel v vrč medu in se utopil. Ko je kralj videl, da je vsaka stranica sinove grobnice dolga le 100 čevljev, se mu je zdela premajhna za zadnje počivališče kraljevskega potomca. Zato je obrtnikom naročil, naj ohranijo njeno obliko, prostornino pa podvojijo.

Druga dva velika problema, kvadratura kroga in trisekcija kota, nimata tako slikovitega izvora, sta pa zagotovo zelo stara in razvpita. Že v Rhindovem papirusu,[7] ki je bil napisan leta 1650 pr. Kr., je zastavljena naloga, kako konstruirati stranico kvadrata, ki je ploščinsko enak danemu krogu. Iz Aristofanove[8] igre *Ptiči* iz leta 414 pr. Kr. celo izvira poimenovanje "kvadratura kroga" za neplodne poskuse doseči nemogoče. Tudi trisekcija kota je zelo star problem. Antični matematiki, med njimi tudi Hipokrat[9] in Nikomed,[10] so se intuitivno zavedali, da problema ni mogoče rešiti samo z ravnilom in šestilom, zato so se reševanja lotili s pomočjo dodatnih orodij. Izumili so mehanične naprave in nove krivulje, s pomočjo katerih je bila trisekcija mogoča.

Da je samo z neoznačenim ravnilom in šestilom v splošnem nemogoče skonstruirati stranico kocke, ki ima dvakratno prostornino, je ob obilni zlorabi opija in kofeina pokazal šele Pierre Wantzel[11] leta 1837. V istem delu je tudi dokazal, da ni možna trisekcija kota, in karakteriziral vse pravilne večkotnike, ki se dajo narisati samo z ravnilom in šestilom.[12] Problem kvadrature kroga je bil dokončno dokazan kot nerešljiv šele leta 1882, ko je Carl Lindemann[13] pokazal, da je število π transcendentno.

Poenostavljeno rečeno, konstruktibilna števila so rešitve sistema dveh enačb, od katerih je lahko vsaka linearna (enačba premice skozi že konstruirani točki) ali kvadratna (enačba krožnice s središčem v že konstruirani točki, ki ima za polmer razdaljo med že narisanima točkama), za koeficiente pa imata konstruktibilna števila, ki smo jih dobili v prejšnjih korakih. Tako je 1 konstruktibilno število, vsa preostala pa so dobljena s smiselnim končnim zaporedjem štirih osnovnih računskih operacij in kvadratnih kore-

[6] Glede na arheološke najdbe v Knososu je morda v zgodbi nekaj resnice.

[7] Rhindov papirus je prepis dokumenta iz leta 1850 pr. Kr., verjame pa se celo, da njegova vsebina izvira iz let približno 3400 pr. Kr.

[8] Aristofan (446–386 pr. Kr.), pisec komedij. Še danes je v celoti ohranjenih 40 njegovih del.

[9] Hipokrat s Hiosa (470–410 pr. Kr.), grški matematik (in ne znani zdravnik).

[10] Nikomed (280–210 pr. Kr.), grški matematik, ki je izumil *konhoido*, s pomočjo katere je mogoča trisekcija kota.

[11] Pierre Wantzel (1814–1848), francoski matematik.

[12] Samo z ravnilom in šestilom je možno skonstruirati natanko tiste pravilne večkotnike, katerih število stranic je produkt dvojk in Fermatovih praštevil. Nekateri štejejo konstrukcijo pravilnega sedemnajstkotnika za četrti veliki starogški problem. Drugače od prejšnjih treh ga je rešil C. F. Gauss (1777–1855) leta 1796. Rešitev je v skladu z Wantzlovo ugotovitvijo: $17 = 2^{2^2} + 1$ je praštevilo.

[13] Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939), nemški matematik.

nov. V jeziku moderne algebre pravimo, da imajo konstruktibilna števila minimalni polinom z racionalnimi koeficienti in stopnjo 2^n.

Število $\sqrt[3]{2}$ je ničla v $\mathbb{Q}[x]$ nerazcepnega polinoma $x^3 - 2 = 0$, število π pa ni ničla nobenega polinoma z racionalnimi koeficienti. Nekatere kote se seveda da tretjiniti, možna je recimo trisekcija pravega kota, običajno pa pokažemo, da ni možna trisekcija kota $60°$. Če bi bila trisekcija možna, bi lahko s pomočjo pravokotne projekcije narisali tudi daljico dolžine $\cos 20°$. Zaradi enakosti

$$\tfrac{1}{2} = \cos(60°) = \cos(3 \cdot 20°) = 4\cos^3(20°) - 3\cos(20°)$$

je $\cos 20°$ ničla polinoma $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Lahko je videti, da je ta polinom v $\mathbb{Q}[x]$ nerazcepen, zato trisekcija kota $60°$ ni možna.

V nadaljevanju prispevka bodo navedene nekatere zanimive nestandardne rešitve teh treh problemov. Bralca vabim, naj pri vsaki od njih ugotovi, zakaj ni izvedljiva le z ravnilom in šestilom.

Podvojitev kocke

Že Hipokrat je spoznal, da je za podvojitev kocke dovolj najti daljici dolžin x in y v *vmesnem sorazmerju*: če je

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

potem je

$$\left(\frac{y}{b}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b}.$$

V primeru, ko izberemo $a = 2b$, velja $y^3 : b^3 = 2 : 1$.

Daljici v iskanem vmesnem sorazmerju je na najbolj impresiven način našel Arhitas.[14] Rešitev najdemo med Evtocijevimi komentarji, kjer morda citira Evdemovo[15] *Zgodovino geometrije*. Arhitas si je pri rešitvi genialno pomagal z gibanjem in s tretjo razsežnostjo prostora. Plutarh[16] piše, da je ta nekonvencionalna rešitev zelo ujezila idealističnega Platona, ki je dovoljeval le ravninsko uporabo ravnila in šestila.

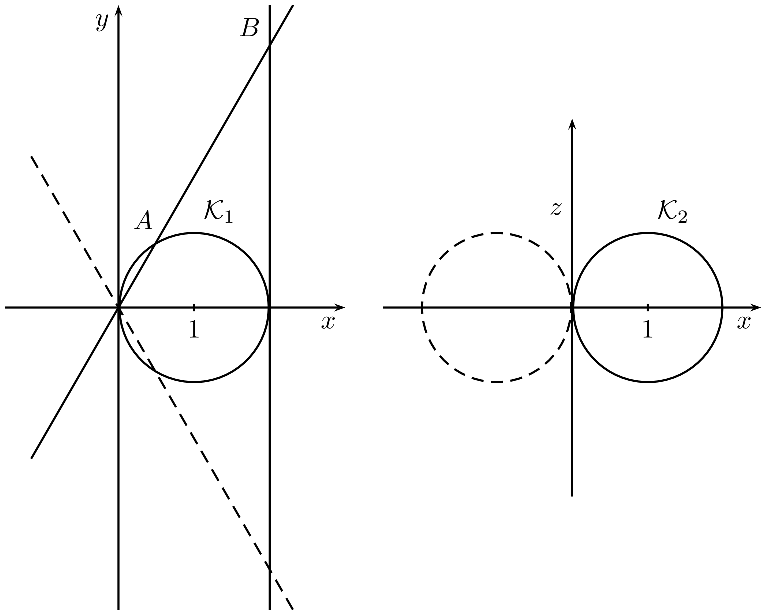
Zaradi lažjega opisa in utemeljitve pravilnosti Arhitove rešitve si bomo pomagali z analitično geometrijo. Zavedati pa se je treba, da je koordinatni sistem, ki je učinkovita povezava med evklidsko geometrijo in algebro, odkril šele René Descartes[17] v 17. stoletju. Zgodovinsko je pomembno, da lahko celotni analitični račun nadomestimo z dobro geometrijsko predstavo

[14] Arhitas (428–347 pr. Kr.), pripadnik pitagorejcev, začetnik mehanike.

[15] Evdem z Rodosa (370–300 pr. Kr.), Aristotelov učenec.

[16] Plutarh (46–120), zgodovinar, biograf in esejist.

[17] René Descartes (1596–1650), francoski filozof in matematik.



Slika 1. Arhitova podvojitev kocke.

in nekaterimi elementarnimi geometrijskimi premisleki, ki so zapisani že v Evklidovih Elementih. Večkrat je treba zvito uporabiti podobnosti trikotnikov in potenco točke na krog.

Vsi opisi bodo potekali v običajnem kartezičnem koordinatnem sistemu v $\mathbb{R}^3$. Pokazali bomo, kako podvojiti kocko s prostornino 1.

V ravnini $z = 0$ imejmo krožnico $\mathcal{K}_1$ s središčem $(1, 0, 0)$ in polmerom 1. Ploskev $\mathcal{V}$ je pokončni valj, ki ima krožnico $\mathcal{K}_1\colon\ (x-1)^2 + y^2 = 1$ na svojem plašču,

$$\mathcal{V}\colon\ x^2 + y^2 = 2x.$$

Krožnico $\mathcal{K}_2$ dobimo z vrtežem krožnice $\mathcal{K}_1$ okrog abscisne osi za pravi kot. Leži v ravnini $y = 0$. Če krožnico $\mathcal{K}_2$ zavrtimo okrog osi z, dobimo torus $\mathcal{T}$ brez sredinske luknje. Kot je običajno pri rotacijskih telesih, enačbo za $\mathcal{T}$ najlažje napišemo v cilindričnih koordinatah. Pri vsakem polarnem kotu dobimo enako krožnico:

$$(r-1)^2 + z^2 = 1, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

zato je enačba torusa

$$\mathcal{T}\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Točka $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ leži na krožnici $\mathcal{K}_1$ in je od izhodišča $O(0,0,0)$ oddaljena za 1. Premica

$$p\colon\ x = 2, \quad z = 0,$$

ki je tangenta na krožnico $\mathcal{K}_1$, seka poltrak z začetkom v O in skozi A v točki B. Če zavrtimo OB okrog abscisne osi, dobimo del plašča stožca z enačbo $x\sqrt{3} = \sqrt{y^2 + z^2}$, ki leži na neskončnem dvojnem stožcu

$$\mathcal{S}\colon\ x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2.$$

Točka $C(x, y, z)$ naj bo presečišče vseh treh ploskev $\mathcal{V}$, $\mathcal{T}$ in $\mathcal{S}$ v prvem oktantu, točka $D(x, y, 0)$ pa njena pravokotna projekcija na ravnino $z = 0$.

Enačba torusa $\mathcal{T}$ pove, da za koordinate točke C velja

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

iz enačbe valja $\mathcal{V}$ in stožca $\mathcal{S}$ pa dobimo

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2x)^2 = \left(x^2 + y^2\right)^2.$$

Tako smo našli iskano vmesno sorazmerje med OC in OD:

$$\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{1}.$$

Če pomnožimo zgornje tri ulomke, namreč dobimo

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 = 2,$$

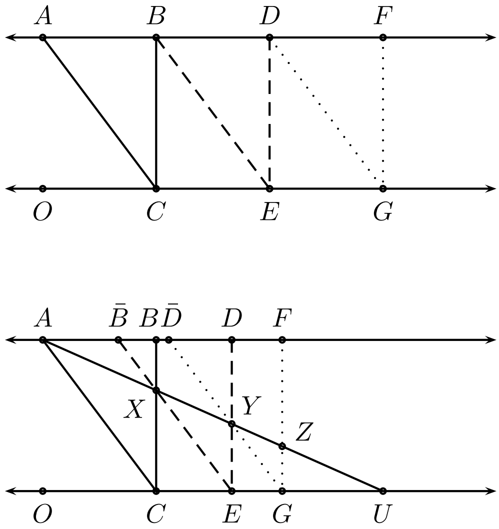
kar pomeni, da je OD stranica podvojene kocke s prostornino 2.

Še bolj nezadovoljen bi bil Platon z Eratostenovo mehanično napravo, imenovano *mesolab*,[18] prav tako namenjeno podvojitvi kocke.

Naprava je sestavljena iz dveh vzporednih vodil in treh skladnih pravokotnih trikotnikov (slika 2). Trikotnik ACB je fiksen, trikotnika BED in DGF pa se lahko premikata levo in desno po vodilih. Na spodnjem delu slike je primer premaknjenih trikotnikov $\bar{B}ED$ in $\bar{D}GF$. Z O označimo pravokotno projekcijo točke A na spodnje vodilo.

Na stranici FG si izberimo točko Z tako, da bo $ZG = \frac{1}{2}OA$. Z X označimo presečišče stranice BC s stranico $\bar{B}E$ premaknjenega trikotnika $\bar{B}ED$, z Y pa presek stranice DE premaknjenega trikotnika $\bar{B}ED$ in stranice $\bar{D}G$

[18]Napravo je prvič omenil veliki grški matematik Papos iz Aleksandrije (290–350).



Slika 2. Eratostenova naprava.

premaknjenega trikotnika $\bar{D}GF$. Trikotnika BDE in DGF je treba pomakniti v levo, tako da bodo točke A, X, Y in Z ležale na isti premici p.[19] Naj bo U presek premice p s spodnjim vodilom po zahtevanem premiku trikotnikov.

Najprej po Talesovem izreku o razmerjih v trikotniku AOU velja

$$\frac{AO}{XC} = \frac{OU}{CU} = \frac{AU}{XU}.$$

Razmerja v trikotnikih ACU in XCU nam zaporedoma povejo, da je

$$\frac{AU}{XU} = \frac{CU}{EU} = \frac{XC}{YE}.$$

Z enakim premislekom dobimo $\frac{XC}{YE} = \frac{YE}{ZG}$. Tako smo našli vmesno sorazmerje

$$\frac{AO}{XC} = \frac{XC}{YE} = \frac{YE}{ZG}$$

in $AO : XC = \sqrt[3]{2} : 1$. V primeru, ko vzamemo $AO = 2$ in $ZG = 1$, je $YE = \sqrt[3]{2}$ stranica podvojene kocke.

[19] Bralci se lahko z napravo poigrajo na spletni strani `demonstrations.wolfram.com/-TheEratosthenesMachineForFindingTheCubeRootOfTwo/`. Simulacijo je prispeval slovenski matematik dr. Izidor Hafner.

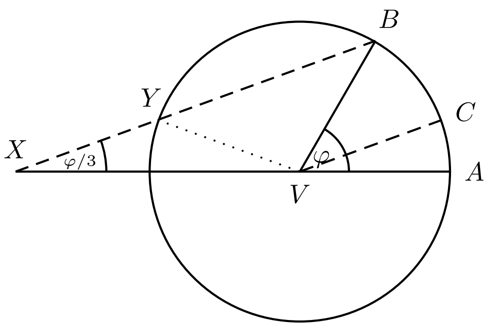
Eratosten je še dodal, da lahko napravi dodamo nove skladne trikotnike in s tem dobimo dodatna vmesna sorazmerja.[20] Prav tako je svetoval, da se zaradi enostavnosti njegove naprave ni vredno mučiti z Arhitovimi zapletenimi preseki ploskev.

S podvojitvijo kocke so se ukvarjali tudi drugi veliki matematiki. Menajhmos[21] si je pomagal s presekom parabole in hiperbole. Nikomed[22] je v ta namen izumil novo krivuljo *konhoido*,[23] Diokles[24] pa *cisoido*.[25] Apolonij[26], Heron[27] in Filon[28] pa so izumili metodo, pri kateri je treba ravnilo zasukati tako, da so določene daljice, ki jih ravnilo odreže, enako dolge.

Trisekcija kota

Veliko bolj enostavna in mehanično lažje izvedljiva je antična trisekcija kota, skicirana na sliki 3. Zelo verjetno jo je izumil Arhimed, zanjo pa vemo iz Tabitovega[29] arabskega prevoda *Knjige lem*, ki jo s pridržki štejejo za Arhimedovo delo.

Naj bo φ kot z vrhom V, ki ga želimo razdeliti na tri dele. Če je kot φ top, ga lahko razrežemo na pravi kot in ostri kot. Pravi kot se da enostavno razdeliti na tri dele, zato lahko brez škode za splošnost privzamemo, da je kot φ oster.

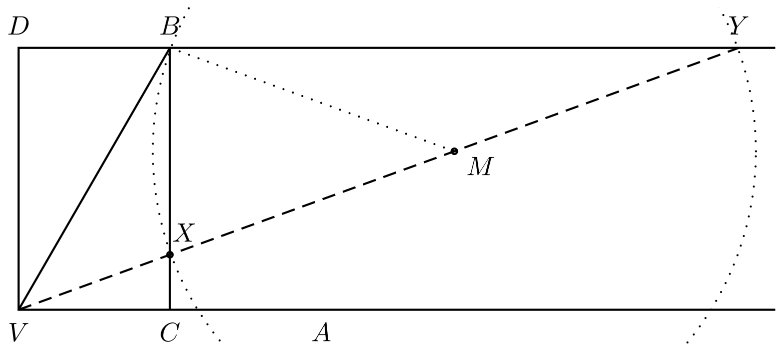


Slika 3. Arhimedova trisekcija kota.

[20] To se enostavno vidi iz zadnje izpeljave.
[21] Menajhmos (380–320 pr. Kr.), grški matematik in geometer.
[22] Nikomed (280–210 pr. Kr.), grški matematik.
[23] Parametrična enačba konhoide je $x = a + b\cos t$, $y = a \operatorname{tg} t + b\sin t$, $a \neq 0$.
[24] Diokles (240–180 pr. Kr.), grški matematik in geometer.
[25] Cisoido lahko podamo z enačbo $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.
[26] Apolonij iz Perge (262–190 pr. Kr.), grški geometer in astronom.
[27] Heron iz Aleksandrije (10–70), grški matematik in inženir.
[28] Filon (pribl. 4. stoletje pr. Kr.), grški arhitekt.
[29] Tabit Ibn Kora (826–901), arabski matematik, fizik, astronom in prevajalec.

Najprej narišimo krožnico s središčem V in poljubnim polmerom. Krožnica naj seka kraka kota φ v točkah A in B. Levo od V potegnimo poltrak iz V, ki leži na isti premici kot polmer VA. Sedaj vzmemimo ravnilo in ga fiksirajmo v točki B. Ravnilo naj odreže poltrak v točki X in seka krožnico v točkah Y in B. Vrtimo ga okrog B, dokler razdalja XY ne postane enaka polmeru krožnice. Na koncu narišemo poltrak iz V, ki leži v notranjosti kota φ in je vzporeden ravnilu. Če poltrak seka krožnico v točki C, trdimo, da je kot $\angle CVA$ tretjina kota φ.

Najprej zaradi izmeničnih kotov velja $\angle CVB = \angle VBY$. Trikotnik BVY je enakokrak, zato je $\angle VBY = \angle BYV$. Zunanji kot $\angle BYV$ trikotnika XVY pri oglišču Y je enak vsoti notranjih nepriležnih kotov $\angle YXV + \angle YVX$, ki pa sta zaradi našega izbora $XY = YV$ enaka. Tako zaradi vzporednosti ravnila in daljice VC dobimo $\angle CVB = 2\angle YXV = 2\angle CVA$, to pa smo želeli pokazati.



Slika 4. Hipokratova trisekcija kota.

Na sliki 4 je skicirana še ena simpatična metoda za trisekcijo kota, ki jo je poznal že Hipokrat. Naj bo φ kot z vrhom V in krakoma VA in VB. Narišimo pravokotnik $VCBD$ z diagonalo VB in osnovnico VC na kraku VA. Iz točke D potegnimo poltrak v smeri B. Ravnilo, ki ga fiksiramo v V, naj seka stranico CB v X in poltrak iz D v Y. Vrtimo ga okrog V, dokler ne postane razdalja XY dvakratnik razdalje VB. Trdimo, da je kot $\angle XVA$ tretjina kota φ.

To vidimo recimo takole: Najprej s točko M razpolovimo daljico XY. Glede na lego ravnila je $XM = MY = VB = BM$. Zadnja enakost velja, ker je trikotnik XYB pravokoten in je po Talesovem izreku MB polmer njegove očrtane krožnice. Zato sta trikotnika VMB in BMY enakokraka. Velja:

$$\angle BVM = \angle VMB = \angle MBY + \angle MYB = 2\angle MYB = 2\angle YVA,$$

to pa je bilo treba pokazati.

Trisekcija kota je možna tudi z Nikomedovo *konhoido* in s Hipijevo[30]

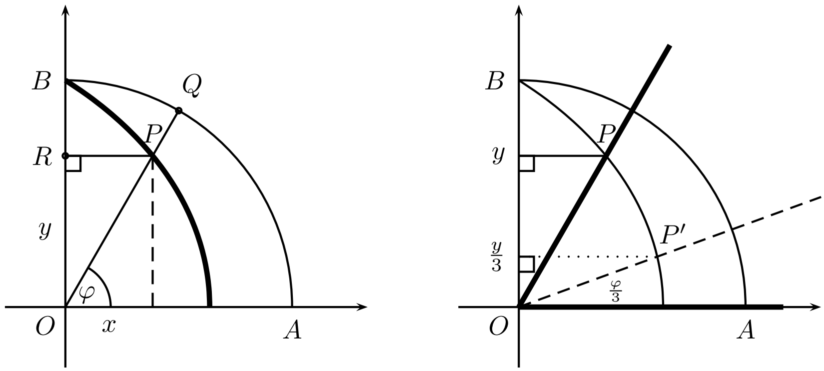
[30]Hipija (živel v 5. stoletju pr. Kr.), sofist.

kvadratriso, ki je bila prvotno namenjena kvadraturi kroga.

Kvadratura kroga

Okrog leta 420 pr. Kr. je grški sofist Hipija izumil novo krivuljo, za katero je kasneje Dinostrat[31] pokazal, da omogoča kvadraturo kroga, zato so jo poimenovali *kvadratrisa*.

Vzemimo pravokotni krožni izsek OAB z vrhom O in polmerom 1. Točka Q naj z enakomerno hitrostjo potuje po loku AB, točka R pa po kraku OB. Točki Q in R naj začneta potovati istočasno proti točki B, R iz točke O in Q iz točke A, premikata pa naj se tako hitro, da hkrati prispeta v točko B. Kvadratrisa je krivulja, ki jo sestavljajo preseki daljice OQ s pravokotnico na OB v točki R v vsakem trenutku tega gibanja.



Slika 5. Na levi sliki je skicirana definicija Hipijeve kvadratrise. Desna skica pa kaže, kako si s kvadratriso pomagamo pri tretjinjenju kota.

Kvadratriso najlažje opišemo, če postavimo krožni izsek v pravokotni koordinatni sistem takole: $O(0,0)$, $A(1,0)$ in $B(0,1)$. Presek daljice OQ in pravokotnice v $R(0,y)$ označimo s P, kot $\angle AOQ$ pa s φ. Po definiciji kvadratrise je $y:\varphi = 1:\frac{\pi}{2}$. Zato koordinati točke $P(x,y)$ na kvadratrisi za $y \in (0,1]$ zadoščata enačbi

$$x = y \operatorname{ctg} \varphi = y \operatorname{ctg} \tfrac{\pi y}{2}.$$

V primeru $y=0$ kvadratriso zvezno razširimo:

$$x(0) = \lim_{y \searrow 0} y \operatorname{ctg} \tfrac{\pi y}{2} = \lim_{y \searrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{2}} = \lim_{y \searrow 0} \frac{\cos^2 \frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{2}{\pi}.$$

Tako bi s pomočjo kvadratrise lahko narisali število $\frac{2}{\pi}$. Z uporabo podobnosti je možno z ravnilom in šestilom risati produkte in kvociente že konstruiranih števil, s pomočjo Talesovega izreka pa se da risati tudi korene. Zato

[31]Dinostrat (390–320 pr. Kr.), grški matematik in geometer, Menajhmov brat.

bi lahko v nekaj korakih iz števila $\frac{2}{\pi}$ dobili tudi število $\sqrt{\pi}$, ki je stranica kvadrata s ploščino π.

Antifon[32] je poskušal priti do kvadrature kroga z zaporednim včrtovanjem pravilnih večkotnikov s čedalje več stranicami, Arhimed si je pomagal s spiralo, Apolonij pa je za kvadraturo izumil novo krivuljo, ki se je žal izgubila skozi zgodovino.[33]

S kvadratriso je možna tudi trisekcija kota. Spet se lahko omejimo na primer, ko je kot, ki ga želimo tretjiniti, oster. Kot φ postavimo tako, da se eden od krakov pokriva z nosilko daljice OA, drugi krak pa seka kvadratriso v točki $P(x, y)$. Po definiciji kvadratrise je $\varphi = y \cdot \frac{\pi}{2}$. Naj bo $R(0, y)$ pravokotna projekcija točke P na ordinatno os. Daljico OR lahko tretjinimo samo s šestilom in ravnilom, naj bo $R'(0, \frac{y}{3})$. Pravokotnica na OB iz R' seka kvadratriso v točki $P'(x', \frac{y}{3})$. Ponovno uporabimo definicijo kvadratrise in dobimo

$$\angle P'OA = \frac{y}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\varphi}{3}.$$

Zanimivo je, da v zapuščini grške antične matematike ne najdemo prav nobenega napačnega dokaza o možnosti rešitve katerega od opisanih treh problemov z ravnilom in šestilom. To priča o idealistični naravi starogrških matematikov, ki so skušali strogo slediti Platonovi viziji matematike. Praktične zemljemerske, davčne in celo verske potrebe pa so skozi zgodovino prinesle kar nekaj približnih rešitev. Prispevek končajmo z egipčansko in indijsko aproksimacijo kvadrature kroga.

Naloga številka 50 v Rhindovem papirusu sprašuje po ploščini krožnega polja s premerom 9 khetov.[34] Pisar Ahmes je napisal odgovor takole: Odvzemi devetino premera, dobiš 8. Sedaj število 8 pomnoži samo s sabo. Ploščina je 64.

Egipčani še niso poznali simboličnega zapisa in so splošne formule razlagali s primeri. Danes bi egipčansko formulo za ploščino napisali takole:

$$p = \left(\frac{8}{9} \cdot 2r\right)^2 = \frac{256}{81} r^2.$$

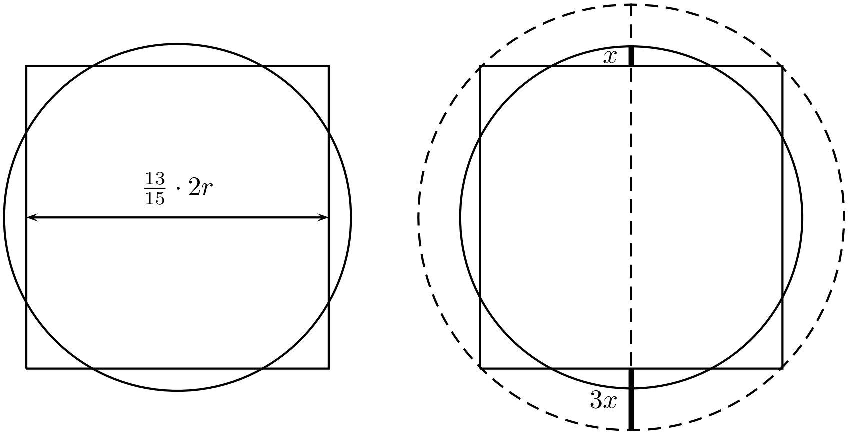
Od tod vidimo, da so za π uporabljali približek $\frac{256}{81} \doteq 3{,}16$. Stranica kvadrata, ki je ploščinsko enak danemu krogu, pa je približno $a = \frac{16}{9} r$.

Indijsko rešitev najdemo v *Sulbasutrah*, dodatku k indijskim *Vedam*, ki izvirajo iz let med 15. in 5. stoletjem pr. Kr. Vede opisujejo žrtvovalne rituale, ki so bili pomemben del tedanje vere, Sulbasutre pa vsebujejo navodila za konstrukcije oltarjev. Veliko konstrukcij, ki so izvedene z vlečenjem vrvi, je popolnoma korektnih. Zelo navdušujoča je na primer metoda, ki poišče kvadrat, ki je ploščinsko enak danemu pravokotniku.

[32] Antifon (konec 5. stoletja pr. Kr.), sofist.

[33] O krivulji je ostal le podatek, da je „sestra“ kohloide.

[34] 1 khet = 100 kubitov, 1 kubit = 6 dlani, 1 dlan = 4 prste, 1 prst = 1,88 cm.



Slika 6. Indijska kvadratura kroga.

Njihova metoda za kvadraturo kroga pa ni točna. Za stranico ustreznega kvadrata so vzeli $\frac{13}{15}$ premera danega kroga. To ustreza približku

$$\pi \doteq \frac{676}{225} \doteq 3.$$

V istem delu obravnavajo tudi obraten problem. Krog, ki naj bi bil ploščinsko enak danemu kvadratu, najdejo takole: Najprej kvadratu očrtaj krog. Nato skozi središče kroga potegni pravokotnico na eno od stranic kvadrata. Del pravokotnice zunaj kvadrata in v notranjosti kroga razdeli na tri enake dele. Iskani krog gre čez prvo tretjino, ki je bližja kvadratu, torej

$$r = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} = \frac{a}{6}\left(2 + \sqrt{2}\right).$$

Zanimivo je, da nam konstrukcija tokrat da drugačen približek za

$$\pi \doteq \left(\frac{6}{2+\sqrt{2}}\right)^2 \doteq 3{,}088.$$

LITERATURA

[1] J. J. O'Connor in E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk`

[2] E. W. Hobson, *„Squaring the circle", a history of the problem*, Cambridge University Press, 1913.

[3] L. Houghtalin in S. Sumner, *Lessons for classics from the history of mathematics*, The Classical Journal **104** (2009) 4, 315–362.

[4] C. A. Huffman, *Archytas of Tarentum: Pythagorean, philosopher and mathematician king*, Cambridge University Press, 2005.

[5] T. W. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1974.

[6] Stanford encyclopedia of phylosophy, *Archytas*, `http://plato.stanford.edu/entries-/archytas`