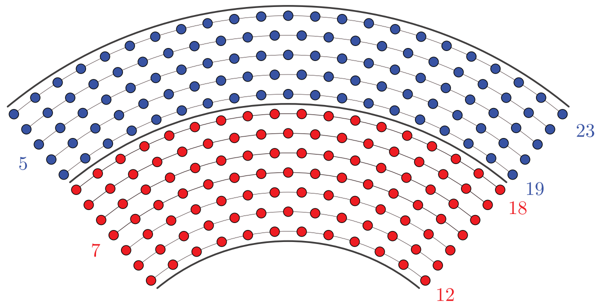


SLIKA 2.
Parter in balkon s skupno $2N = 210$ sedeži

Večjega dobimo z isto trojico za $\mu = 3$, in sicer $x = 1, y = 7, z = 10$ in $N = 27$.

Za pitagorejsko trojico $(12, 35, 37)$ in $\mu = 1$ je $x = 11, y = 18, z = 23$ in $N = 105$. S tem smo našli sedežni red z 210-imi sedeži, 105-imi v parterju in 105-imi na balkonu (slika 2).

Takih zgledov je nešteto. V poštev pride vsaka primitivna pitagorejska trojica (a, b, c) in liho število μ. Nekaj primerov je zbranih v tabeli 1, ki je urejena glede na naraščajoče N in je lahko direktorju gledališča v pomoč pri načrtovanem sedežnem redu.

Naloga. Dokaži, da je število N v naši nalogi vedno deljivo s 3.

Literatura

[1] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA, Ljubljana 1984.

[2] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.

× × ×

Srečanje

Ivan Lisac

Uvod

Skupina prijateljev živi vzdolž daljše lokalne ceste. Za skupna srečanja želijo izbrati tak kraj x, da bo skupna poraba oz. kar skupna prevožena razdalja čim manjša. Jim lahko pri izbiri tega kraja kako pomagamo?

Srečanje vzdolž premice

Zravnajmo v mislih cesto v premico in opremimo kraje ob tej cesti s koordinatami

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n. \tag{1}$$

Za poljuben realni x lahko izračunamo vsoto

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|, \tag{2}$$

ki nam pove vsoto razdalj točke x od točk a_i.

Primer. Vzemimo

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 4, 7, 8, 13).$$

Potem je npr. $S(5) = 3 + 1 + 2 + 3 + 8 = 17$.

Poskusimo poenostaviti izraz za $S(x)$. Točke $a_1, \ldots, a_n$ nam razdelijo premico na (največ) $n + 1$ intervalov. Od teh sta prvi in zadnji neomejena. Vzemimo k med 1 in $n - 1$ in si oglejmo zožitev $S_k(x)$ funkcije $S(x)$ na interval $[a_k, a_{k+1}]$. Za x na tem intervalu velja $a_k \le x \le a_{k+1}$ in zato (upoštevamo še definicijo absolutne vrednosti)

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \sum_{i=1}^{k} (x - a_i) + \sum_{j=k+1}^{n} (a_j - x) \\ &= (k - (n - k))x - \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{j=k+1}^{n} a_j \\ &= (2k - n)x - S_k + (S_n - S_k) \\ &= (2k - n)x + (S_n - 2S_k), \end{aligned} \tag{3}$$

kjer smo označili še $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ in podobno $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Opazimo lahko, da je zožitev $S_k(x)$ pravzaprav linearna funkcija spremenljivke x s koeficientom $(2k-n)$ in stalnim členom $(S_n - 2S_k)$. Zgornja izpeljava velja tudi za oba neomejena intervala in zožitev $S_0(x)$ na intervalu $(-\infty, a_1]$ ter zožitev $S_n(x)$ na intervalu $[a_n, \infty)$.

Funkcija $S(x)$ je torej *odsekoma* linearna. Sosednje zožitve $S_k(x)$ in $S_{k+1}(x)$ imajo v točki a_{k+1} *enako* vrednost, saj je razlika vrednosti enaka

$$\begin{aligned} &S_{k+1}(a_{k+1}) - S_k(a_{k+1}) \\ &= (2(k+1)-n)a_{k+1} + S_n - 2S_{k+1} \\ &\quad - (2k-n)a_{k+1} - S_n + 2S_k \\ &= 2a_{k+1} - 2S_{k+1} + 2S_k = 2a_{k+1} - 2a_{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Iz enakosti (3) razberemo tudi, da funkcija $S_k(x)$ pada na intervalu $[a_k, a_{k+1}]$ za $k \leq n/2$, saj je tam koeficient $2k-n$ ustrezne linearne funkcije negativen ali pa kvečjemu 0. Podobno $S_k(x)$ narašča na intervalih $[a_k, a_{k+1}]$ za $k \geq n/2$, saj je tam koeficient $2k-n$ pozitiven ali pa enak 0. Meja pa je ravno pri $k = n/2$ (ko je n sodo število).

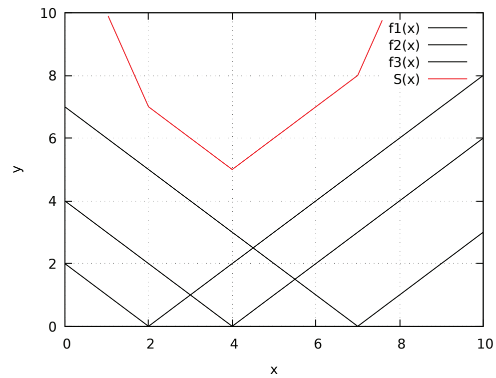
Funkcija $S(x)$ torej na nekaj levih intervalih pada, saj so zožitve $S_k(x)$ tam padajoče *in* nosijo sosednje zožitve v skupni točki *enako* vrednost. Na ostalih desnih intervalih pa funkcija $S(x)$ narašča (podoben razlog). Velja torej:

- Če je n liho število, potem funkcija $S(x)$ doseže minimum v točki $a_{(n+1)/2}$.
- Če je n sodo število, potem funkcija $S(x)$ doseže minimum na intervalu $[a_{n/2}, a_{n/2+1}]$.

Primer take funkcije $S(x) = |x-2|+|x-4|+|x-7|$ kaže slika 1. Na njej je razviden minimum v točki $x = 4$ in $S(4) = 2+0+3 = 5$. Zanimivo je, da je za lihi n optimalna točka odvisna samo od srednje vrednosti $a_{(n+1)/2}$, nič pa od ostalih vrednosti. Za sodi n pa je optimalna točka poljubna na intervalu med dvema srednjima točkama $[a_{n/2}, a_{n/2+1}]$.

Srečanje prijateljev krajanov

Vzemimo sedaj, da živi v kraju s koordinato a_i kar $p_i \in \mathbb{N}$ prijateljev. Skupaj je torej $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ vseh prijateljev, ki bi se radi srečali. Kako rešimo tak problem? Vzemimo npr. $(a_1, a_2, a_3) = (2, 4, 7)$ in



SLIKA 1.
$S(x) = |x-2| + |x-4| + |x-7|$

$(p_1, p_2, p_3) = (3, 1, 5)$. Problem prevedemo na prejšnjega tako, da prijatelje iz istega kraja navedemo večkrat: za prvi kraj trikrat, za drugi kraj enkrat, za tretji kraj petkrat. Tako dobimo zaporedje $b = (2, 2, 2, 4, 7, 7, 7, 7, 7)$ z rešitvijo $b_5 = 7$ in $S(7) = 3 \times 5 + 1 \times 3 + 5 \times 0 = 18$. Tako vidimo, da kraji z večjim številom prijateljev vlečejo optimalno točko x k sebi.

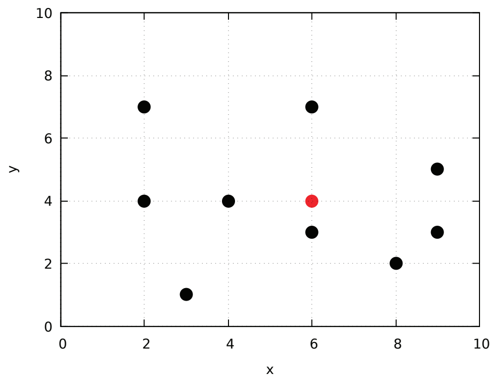
Kam postaviti šolo?

Vzemimo sedaj blokovsko naselje, po katerem se gibljemo zgolj v vodoravni in navpični smeri (slika 2 - tloris). V nekaterih točkah živijo dijaki, ki bodo obiskovali šolo. Kam jo postaviti, da bo skupna vsota razdalj do šole čim manjša? Tu ima vsaka točka dve koordinati, recimo (a_1, b_1). Razdalja do točke (a_2, b_2) je tu definirana kot $|a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|$. Pravimo ji tudi *Manhattan metrika*.

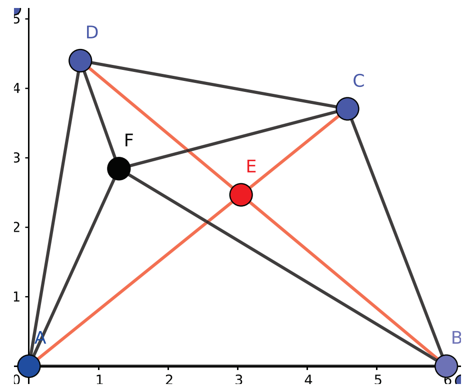
Kako poiščemo optimalno točko sedaj? Funkcija $S(x, y)$ ima sedaj dva argumenta in velja

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \sum_{k=1}^{n} (|x-a_k| + |y-b_k|) = \qquad (4) \\ &= \sum_{k=1}^{n} |x-a_k| + \sum_{k=1}^{n} |y-b_k| = \\ &= S_a(x) + S_b(y) \end{aligned}$$

kjer smo z $S_a(x)$ in $S_b(y)$ označili ustrezni dve vsoti. Vidimo, da dvorazsežni problem razpade na dva, med seboj neodvisna enorazsežna problema, ki



SLIKA 2.
Šola v blokovskem naselju



SLIKA 3.
Štirje prijatelji

ju že znamo rešiti od prej. Primer na sliki 2 ima devet (črnih) točk, katerih urejene a koordinate tvorijo zaporedje $(2, 2, 3, 4, \mathbf{6}, 6, 8, 9, 9)$, urejene b koordinate pa tvorijo zaporedje $(1, 2, 3, 3, \mathbf{4}, 4, 5, 7, 7)$. Optimalna (rdeča) točka za šolo nosi torej koordinati $(\mathbf{6}, \mathbf{4})$, funkcija $S(6, 4)$ pa ima vrednost $S_a(6) + S_b(4) = 21 + 14 = 35$. Podobno kot prej lahko razširimo problem optimalne točke na kraje, v katerih je po več dijakov hkrati.

Štirje prijatelji

Štirje skavti so se na obsežni ravnini oddaljili drug od drugega. Sedaj se želijo srečati tako, da bo njihova skupna hoja čim krajša. Razdalja je tukaj običajna evklidska razdalja, tj. dolžina zveznice dveh točk, ki jo izračunamo po Pitagorovem izreku. Privzemimo, da njihovi položaji A, B, C in D tvorijo oglišča konveksnega štirikotnika. Naj bo točka E presečišče diagonal AC in BD, F pa poljubna druga točka v notranjosti štirikotnika. Oglejmo si sliko 3.

Ker je točka E presečišče diagonal, gre najkrajša pot od točke A do točke C preko točke E. Poljubna druga pot od točke A preko točke F do točke C je daljša od prve (trikotniška neenakost). Podobno ugotovimo, da je pot od točke B preko točke E do točke D krajša kot pot od točke B preko točke F do točke D. Res je torej E iskana optimalna točka. Natančni bralec lahko premisli robni primer, ko je točka F na eni od diagonal. Primer nekonveksnega štirikotnika tu opustimo.

Trije prijatelji

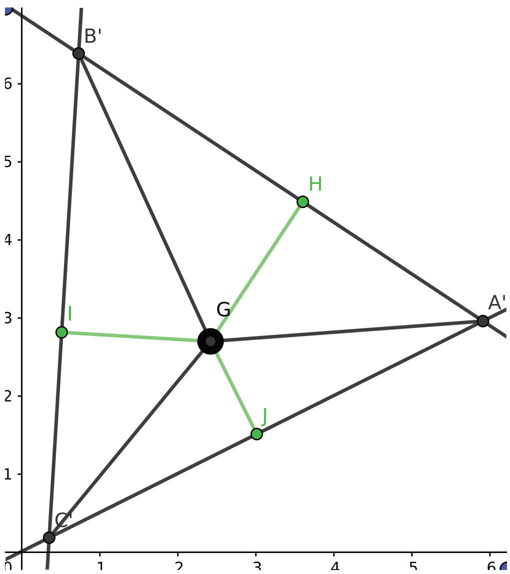
Poglejmo si še primer treh prijateljev. Ta bo težji od predhodnega. Denimo, da so se trije skavti oddaljili drug od drugega v točke A, B in C. Iščemo takšno optimalno točko F, da bo vsota razdalj $\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC}$ minimalna. Povejmo vnaprej:

- Iz optimalne točke F vidimo stranice trikotnika $\triangle ABC$ pod koti $120°$.

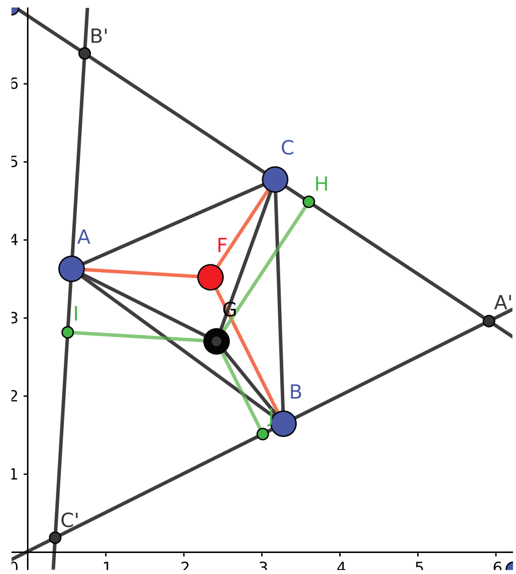
Oglejmo si najprej pomožni Vivianijev izrek. Vzemimo poljuben *enakostranični* trikotnik $\triangle A'B'C'$ in poljubno notranjo točko G.

- Vsota razdalj od točke G do stranic enakostraničnega trikotnika $\triangle A'B'C'$ je neodvisna od izbire točke G.

Res. Točka G porodi tri trikotnike $\triangle A'B'G$, $\triangle B'C'G$ in $\triangle C'A'G$, katerih vsota ploščin je očitno enaka ploščini enakostraničnega trikotnika $\triangle A'B'C'$ (slika 4). Višine teh treh trikotnikov zadoščajo enačbi $av_a + av_b + av_c = 2P$, kjer je a stranica trikotnika $\triangle A'B'C'$, P pa njegova ploščina. Enakost delimo z a ter preberemo: vsota višin je $2P/a$, kar je neodvisno od izbire točke G. Dokazano.



SLIKA 4.
Vivianijev izrek



SLIKA 5.
Fermat-Toricellijeva točka F

Poglejmo sedaj še sliko 5. Na njej je osnovni trikotnik $\triangle ABC$ ter točka F, iz katere že vidimo stranice trikotnika pod koti $120°$.

Trikotniku $\triangle ABC$ priredimo pomožni trikotnik $\triangle A'B'C'$ tako, da načrtamo v točkah A, B in C pravokotnice na daljice FA, FB in FC. Presečišča teh pravokotnic med sabo poimenujmo A', B' in C'. Kot pri točki A' je četrti kot v štirikotniku $A'CFB$ in meri $360° - 120° - 2 \times 90° = 60°$. Podobno ugotovimo za kota pri točkah B' in C'. Torej je $\triangle A'B'C'$ *enakostranični* trikotnik.

Opazimo, da so tri rdeče daljice s krajiščem F razdalje do oglišč A, B in C v trikotniku $\triangle ABC$, hkrati pa tudi razdalje do stranic trikotnika $\triangle A'B'C'$. Vzemimo sedaj še poljubno drugo točko G in iz nje potegnimo zelene daljice GH, GI in GJ pravokotno na stranice $A'B'$, $B'C'$ in $C'A'$.

Tri zelene daljice pa so prav tako razdalje do stranic trikotnika $\triangle A'B'C'$, zato po Vivianijevem izreku velja $\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC} = \overline{GH} + \overline{GI} + \overline{GJ}$. Zelene razdalje $\overline{GH}, \overline{GI}, \overline{GJ}$ pa so krajše od črnih razdalj $\overline{GC}, \overline{GA}, \overline{GB}$, saj je npr. $\overline{GI}$ pravokotna na $B'C'$, $\overline{GA}$ pa ne. Torej je $\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC} < \overline{GC} + \overline{GA} + \overline{GB}$, pri čemer je bila G poljubna druga notranja točka. Res je torej F optimalna točka. Pravimo ji tudi *Fermat-Toricellijeva* točka.

Opomba. Ta razmislek velja za trikotnike, ki imajo vse kote največ $120°$. Ostale primere tudi tu opustimo. Enostavno konstrukcijo točke F in nekaj dodatne analize najde bralec v viru [2].

Literatura

[1] D. R. Davis, *Modern college geometry*, Cambridge, Massachusetts: Addison-Wesley Press, Inc., 1949.

[2] *Fermat point*, dostopno na Wikipedia, `en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point`, ogled 24. 7. 2019.

× × ×