

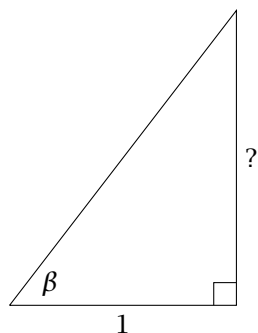
Tangens $7\pi/24$ na tri načine

↓↓↓

DRAGOLJUB M. MILOŠEVIĆ (PREVOD IN PRIREDBA BOŠTJAN KUZMAN)

→ Za nekatere matematične probleme poznamo le eno rešitev. So kot gorski vrh, ki je dostopen le z ene strani. Pri nekaterih drugih pa lahko k reševanju pristopimo iz različnih smeri. Tako spodbujamo duh raziskovanja in pridobivamo matematično zrelost. Kot zgled naj služi naslednja naloga, ki jo bomo rešili na tri načine.

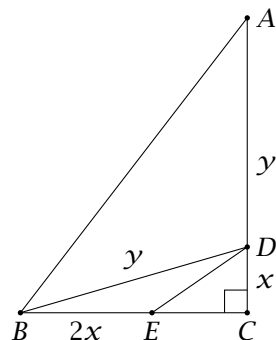
Naloga. V pravokotnem trikotniku ima ena od katet dolžino 1 in s hipotenuzo oklepa kot $\beta = \frac{7\pi}{24}$. Dokaži, da je dolžina druge katete enaka $2 + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$.



SLIKA 1.

1. način (enakokraki trikotniki in Pitagorov izrek). Označimo oglišča A, B, C kot na skici, tako da je kot pri B znani kot β , kot pri C pravi kot in ima stranica BC dolžino 1. Izberimo točko D na stranici AC tako, da bo trikotnik ABD enakokrak. Dolžini krakov označimo z y . Ker je $\angle ABD = \angle DAB$, je $\angle CBD = \pi/12 = 15^\circ$. Nato izberemo še točko E na stranici BC tako, da bo trikotnik EBD enakokrak. Sledi, da je $\angle CED = \pi/6 = 30^\circ$, zato je dolžina stranice $|ED|$ enaka dvakratniku dolžine $|CD|$, kar označimo z $2x$ in x . Zdaj uporabimo Pitagorov izrek v trikotniku CDE s katetama dolžin x in $1 - 2x$ ter hipotenuzo $2x$. Z rešitvijo kvadratne enačbe dobimo $x = 2 - \sqrt{3}$ (druga rešitev je prevelika, saj je $2x < 1$). Nato uporabimo še Pitagorov izrek v tri-

kotniku BCD , da podobno dobimo $y = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$. S kvadriranjem ni težko preveriti, da je zadnji izraz enak $y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, iskana dolžina pa je ravno $x + y$, kot smo želeli dokazati.



SLIKA 2.

2. način (trigonometrijske formule). Dolžina druge katete je enaka tangensu kota $\frac{7\pi}{24}$. Ker je $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} \right)$, lahko uporabimo formuli za tangens vsote $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ in tangens polovičnega kota $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$. Z nekaj računanja dobimo rezultat. S podobnim izračunom bi dobili rezultat tudi iz zvez $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8}$ ali $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{24}$.

3. način (kosinusni izrek). Kot prej označimo oglišča A, B, C in znana kota. Na stranici AB tokrat izberemo točko D tako, da je trikotnik BCD enakokrak z osnovnico 1. Potem je $\angle BDC = \frac{10\pi}{24} = 75^\circ$ in s pomočjo kosinusnega izreka za ta kot lahko izrazimo kvadrat dolžine $|BD|$. Pri tem izračunamo $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ z uporabo formule za sinus polovičnega kota. Označimo z E razpolovišče daljice BD in $x = |BE| = |BD|/2$. Iz doslej znanih podatkov lahko s Pitagorovim izrekom določimo še dolžino daljice $|CE| = y$. Ker je trikotnik BCE pravokoten, zaradi podobnosti sledi, da je iskana dolžina katete enaka $|CA| = \frac{y}{x}$. Bralke in bralce vabimo, da sami dodajo skico in manjkajoče podrobnosti.

× × ×