DOLOČITEV GEOMETRIJSKEGA SREDIŠČA OBČINE ŠKOCJAN

DETERMINATION OF THE GEOMETRIC CENTRE OF THE MUNICIPALITY OF ŠKOCJAN

Aleš Marjetič, Goran Turk

UDK: 528.3/.5(497,14 Škocjan)

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.02

POVZETEK

Prispevek obravnava analitično določitev geometrijskega središča manjšega območja na površini Zemlje, v obravnavanem primeru izbrane občine Škocjan. Ob predpostavki o homogenem ravninskem območju moramo določiti težišče homogenega ravninskega lika, ki ga imenujemo geometrijsko središče.

KLJUČNE BESEDE

težišče, geometrijsko središče, ravninsko območje

ABSTRACT

The article describes the analytical determination of the geometric centre of a small area on Earth's surface, in our case the municipality of Škocjan. According to the assumption of a homogeneous planar region only the centroid, i.e. geometrical centre, of such area needs to be determined.

KEY WORDS

mass centre, geometric centre, planar region

1 UVOD

Ideja o določitvi geometrijskega središča občine Škocjan je bila glavni vzrok za nastanek tega prispevka. Gre za manjšo občino v jugovzhodnem delu Slovenije, ki je letos praznovala 10. obletnico obstoja. Prebivalci te občine so želeli, da se po zgledu Geometričnega središča Slovenije (GEOSS) tudi v njihovi občini postavi trajno obeležje, ki bi bilo postavljeno v središču občine.

V primeru GEOSS-a je potekala določitev geometričnega središča z grafično analitično metodo. V obeh primerih izračuna je ključna aproksimacija območja na površini Zemlje s homogenim ravninskim likom, katerega meje so znane. V našem primeru je bila želja, da se geometrijsko središče določi popolnoma analitično na podlagi meje območja, ki je podano s poligonalno črto.

2 GEOMETRIJSKO SREDIŠČE

Geometrijsko središče je točka, ki predstavlja masno težišče poljubne homogene ravninske ali prostorske ploskve ali poljubnega homogenega prostorskega telesa.

Masno težišče je fizikalno definirano z naslednjo enačbo:

$$težišče = \frac{statični\ moment}{masa\ telesa} \tag{1}$$

Pri obravnavi v ravnini, v našem primeru v ravnini kartografske projekcije, izhajamo pri izračunu težišča iz osnovnih lastnosti ploskovnih in krivuljnih integralov.

$$m = \iint_B \rho \, dx \, dy ,$$
$$y_T = \frac{\iint_B \rho \, y \, dx \, dy}{\iint_B \rho \, dx \, dy} = \frac{S_x}{m},$$
$$x_T = \frac{\iint_B \rho \, x \, dx \, dy}{\iint_B \rho \, dx \, dy} = \frac{S_y}{m}. \tag{2}$$

kjer so:

y_T, x_T – koordinati težišča,

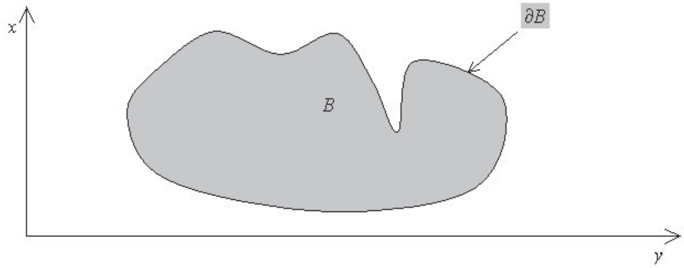
B – obravnavan ravninski lik oziroma območje,

m – masa obravnavanega lika,

ρ – gostota lika na enoto površine,

S_x – statični moment glede na os x,

S_y – statični moment glede na os y.



Slika 1: Obravnavano ravninsko območje B.

Upoštevamo, da je obravnavano območje homogeno, zato je ρ = konst. in lahko zapišemo:

$$S = \iint_B dx\, dy\,,$$

$$y_T = \frac{\iint_B y\, dx\, dy}{\iint_B dx\, dy} = \frac{S_x'}{S}\,, \tag{3}$$

$$x_T = \frac{\iint_B x\, dx\, dy}{\iint_B dx\, dy} = \frac{S_y'}{m}\,.$$

kjer so:

S – ploščina obravnavanega lika,

S_x' – statični moment glede na os x za ρ = 1,

S_y' – statični moment glede na os y za ρ = 1.

Z uporabo Greenove formule (Bronštejn et al., 1997) lahko poljubni ploskovni integral $\iint_B f(y,x)\, dy\, dx$ izrazimo s krivuljnim integralom:

$$\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_{\partial B} (P\, dx + Q\, dy), \tag{4}$$

kjer so:

∂B – orientirani rob ploskve B (orientirani rob pomeni, da če hodimo po robu, mora biti območje B na levi strani),

Q in P – zvezni in zvezno odvedljivi funkciji na celotnem ravninskem območju B,

$\oint_{\partial B}$ – zaključeni krivuljni integral po orientiranem robu ploskve B.

Iz enačb (3) vidimo, da moramo v našem primeru izračunati tri ploskovne integrale:

a) ploščina ravninskega območja B → $S = \iint_B dx\, dy$,

b) statični moment glede na os x $\rightarrow S_x' = \iint\limits_B y\,dx\,dy$,

c) statični moment glede na os y $\rightarrow S_y' = \iint\limits_B x\,dx\,dy$.

Glavna naloga je torej za vsak posamezen ploskovni integral določiti dve taki zvezni in zvezno odvedljivi funkciji $P(y,x)$ ter $Q(y,x)$, da bo prehod na krivuljni integral po robu območja B preprost.

a) ploščina ravninskega območja *B* $\rightarrow P = \iint\limits_B dx\,dy$

$P = y$, $Q = 0$;

$$S = \iint\limits_B dx\,dy = -\oint\limits_{\partial B}(y\,dx + 0\cdot dy) = -\oint\limits_{\partial B} y\,dx\,; \tag{5}$$

b) statični moment glede na os *x* $\rightarrow \iint\limits_B y\,dx\,dy$

$P = y^2/2$, $Q = 0$;

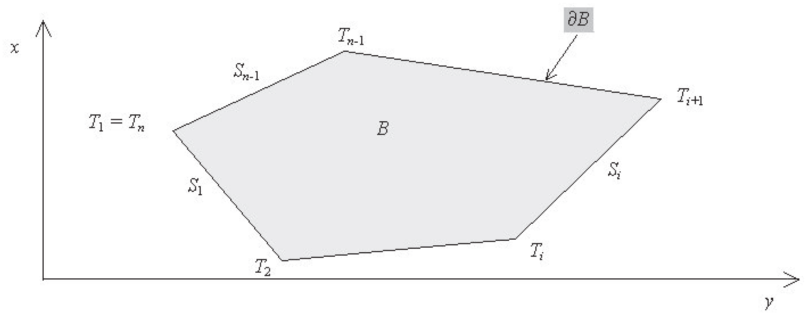
$$S_x' = \iint\limits_B y\,dx\,dy = -\oint\limits_{\partial B}\left(\frac{y^2}{2}dx + 0\cdot dy\right) = -\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial B} y^2 dx\,; \tag{6}$$

c) statični moment glede na os *y* $\rightarrow \iint\limits_B x\,dx\,dy$

$P = 0$, $Q = x^2/2$;

$$S_y' = \iint\limits_B x\,dx\,dy = \oint\limits_{\partial B}\left(0\cdot dx + \frac{x^2}{2}dy\right) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial B} x^2 dy. \tag{7}$$

V našem primeru imamo podano mejo občine v obliki niza lomnih točk obodne linije.



Slika 2: *Obravnavano območje B, podano z lomnimi točkami obodne linije.*

Območje občine lahko obravnavamo kot homogen ravninski lik, katerega meja je podana z ravninskimi Gauß-Krügerjevimi koordinatami (y, x) v ravnini kartografske projekcije (Gauß-Krügerjeva projekcija). Opis območja občine z ravninskim likom je smiselna, ker gre za lokalno območje, kjer ukrivljenost Zemlje nima znatnega vpliva. S tem se izračun zelo poenostavi.

V našem primeru imamo opravka z odsekoma zveznim robom (slika 2). Posamezen odsek i na tem robu predstavlja del premice od točke T_i do točke T_{i+1}. Če poznamo koordinate vseh obodnih lomnih točk, lahko na dokaj preprost način izračunamo iskane količine iz enačb (5), (6) in (7). Pri izračunu upoštevamo, da je enačba premice med točkama T_i in T_{i+1} dana z enačbo:

$$y = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\left(x - x_i\right) + y_i \tag{8}$$

oziroma:

$$x = \frac{x_{i+1} - x_i}{y_{i+1} - y_i}\left(y - y_i\right) + x_i. \tag{9}$$

Z upoštevanjem, da gre za odsekoma zvezen in zvezno odvedljiv rob ploskve oz. območja B ter enačbe (5) do (9), izpeljemo izraz za ploščino lika B:

$$S = -\oint_{\partial B} y\,dx = -\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} y\,dx = -\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\left(x - x_i\right) + y_i\right]dx = \ldots \tag{10}$$

V enačbi (10) uvedemo novo spremenljivko

$$t = x - x_i \;\ldots$$

in dobimo

$$S = -\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^{x_{i+1}-x_i}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}t + y_i\right]dt = -\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\cdot\frac{t^2}{2} + y_i\,t\right)\Bigg|_0^{x_{i+1}-x_i}. \tag{11}$$

Po krajši izpeljavi dobimo izraz za ploščino lika B:

$$S = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i+1} - x_i\right)\cdot\left(y_{i+1} + y_i\right). \tag{12}$$

Podobno naredimo tudi za oba statična momenta $S_x{}'$ in $S_y{}'$ ter ob upoštevanju izrazov v enačbah (8) in (9) dobimo:

$$S_y{}' = +\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i+1}^2 + x_i\cdot x_{i+1} + x_i^2\right)\cdot\left(y_{i+1} - y_i\right), \tag{13}$$

$$S_x' = -\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_{i+1}^2 + y_i \cdot y_{i+1} + y_i^2\right)\cdot\left(x_{i+1} - x_i\right). \quad (14)$$

Zgornji izrazi za S, S_x' ter S_y' so zelo primerni za izračun v primeru, ko je lik podan z velikim številom lomnih točk. V računalniškem smislu gre torej za enostavno ponavljajoče množenje in seštevanje vrednosti na posameznem odseku od točke T_i do T_{i+1}.

Koordinati geometrijskega središča sta podani z izrazoma:

$$y_T = \frac{S_x'}{S}, \quad (15)$$

$$x_T = \frac{S_y'}{S}. \quad (16)$$

3 PRIMER IZRAČUNA ZA OBČINO ŠKOCJAN NA DOLENJSKEM

Izračun geometrijskega središča nekega omejenega območja je bil izveden na primeru občine Škocjan na Dolenjskem.

Najprej je bilo treba pridobiti podatke o meji občine. Mejo definira niz 1617 lomnih točk obodne linije, ki predstavljajo vhodni podatek za izračun geometrijskega središča.

koordinata *y*	koordinata *x*	oznaka
523793.94	90650.69	1
523812.69	90664.77	2
523841.91	90693.89	3
523864.50	90715.40	4
523884.69	90726.80	5
	.	
	.	
	.	
523821.81	90635.43	1616
523793.94	90650.69	1617

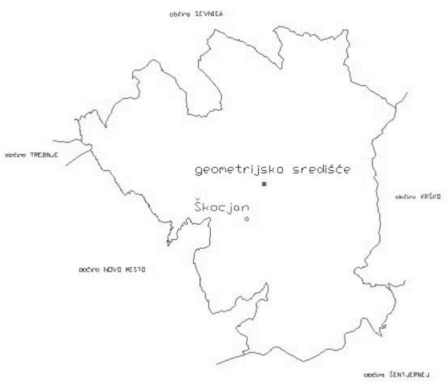
Preglednica 1: ***Izsek iz datoteke s podatki o lomnih točkah obodne linije.***

Na podlagi izrazov, podanih z enačbami (13), (14), (15) in (16), lahko na dokaj enostaven način izvedemo izračun s programskim paketom Matlab®. Rezultat sta koordinati geometrijskega središča.

IZRAČUNANI PODATKI		
Gauß-Krügerjeve koordinate	y = 523512.73 m	x = 5085878.34 m
geografske koordinate	$\ddot{o}$ = N 45° 55' 01.145″	$\ddot{e}$ = E 15° 18' 11.333″
obseg občine	56 518 m	
površina občine	60 445 404 m^2	

Preglednica 2: *Izračunani koordinati geometrijskega središča občine Škocjan.*

Položaj geometrijskega središča lahko predstavimo glede na mejo občine:



Slika 3: *Položaj geometrijskega središča občine Škocjan.*

Opomba: Podatki o meji občine so bili pridobljeni na uradni spletni strani Geodetske uprave RS (http://www.gu.gov.si).

4 ZAKLJUČEK

Izračunane koordinate geometrijskega središča občine predstavljajo težišče občine v primeru, da jo aproksimiramo s homogenim ravninskim likom, katerega obod predstavlja meje občine. Taka poenostavitev omogoča enostavnejši izračun. V primeru računanja težišča poljubne ukrivljene prostorske ploskve bi bilo treba upoštevati reliefno razgibanost terena. To pomeni, da bi se težišče zaradi neenakomerne razgibanosti lahko nahajalo popolnoma drugje. Dodatno upoštevanje zemeljskih mas za izračun težišča bi imelo podoben učinek pa še težavnost določitve bi bila neprimerno večja, če sploh mogoča, ker ne razpolagamo z natančnimi podatki o njihovi razporeditvi.

Zakoličba tako izračunanega geometrijskega središča je bila izvedena na klasičen geodetski način z navezavo na že obstoječo državno geodetsko mrežo. Obeležje geometrijskega središča je bilo postavljeno v letošnjem letu in svečano odkrito 6. 7. 2004, na dan občinskega praznika.

Slika 4: *Obeležje geometrijskega središča občine Škocjan.*

Geometrijsko središče je obeleženo s kamnitim stebrom, na katerem je vklesan grb občine. Na vrhu stebra je jeklena plošča z označenimi smermi neba. Steber stoji na kamnitem podstavku, pri katerem gre za ˝kolaž˝ vseh vrst kamnin, ki jih je mogoče najti na območju občine. Podstavek je izrezan v obliki občine.

Literatura in viri:

Bronštejn, I. N. et al. (1997). Matematični priročnik. Tehniška založba Slovenije.

Spletni naslov Geodetske uprave RS: http://www.gu.gov.si.

asist. Aleš Marjetič, univ. dipl. inž. geod.
FGG - Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana
E-pošta: amarjeti@fgg.uni-lj.si, tel.: (01) 4768 658

izr. prof. dr. Goran Turk, univ. dipl. inž. grad.
FGG - Katedra za mehaniko, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana
E-pošta: gturk@fgg.uni-lj.si, tel.: (01) 4768 614

Prispelo v objavo: 27. avgust 2004