Njegovo veličanstvo detajl

ALEKSANDER KRON

Velika večina znanstvenikov nima nikakršnega razumevanja za raziskovanje v polju filozofije znanosti: zanje je to popolnoma samostojno področje, ločeno od znanosti, s katerimi se ukvarjajo filozofi. Ne znam si predstavljati znanstvenika, ki bi se strinjal z besedami, da filozofija znanosti daje opis tistega, kar se v znanosti dogaja. *Največji del znanstvene dejavnosti je iskanje detajlov.*

Namen mojega pisanja je, da gornjo trditev podkrepim z dvema ilustracijama iz matematične logike ter opozorim na še nekatere okoliščine, ki bodo to trditev napravile bolj razumljivo. Posebej pomembno je uvideti teoretski kontekst, v katerem se detajli pojavljajo.

Detajli, ki jih iščemo v znanosti, niso katerekoli ali kakršnekoli podrobnosti: v določenem smislu so nujni, pomembni in vedno neizogibni. Nikoli niso neposredno dani - pot do njih je treba navadno prehoditi s tistimi ingenioznimi koraki, ki se imenujejo znanstvena odkritja.

Znanstveniki se ukvarjajo z vprašanji, ki so vedno povsem določena. Odgovori nanje so detajli, ki manjkajo v zgradbi teorije ali slike nekega področja. Detajl je lahko tako pomemben, da se brez njega določena znanost zaustavi v svojem razvoju. V razvoju logike, na primer, je bil pojem kvantifikatorja detajl, ki je manjkal od Aristotela do Fregeja; njegovo odkritje je pomenilo pomemben korak v razvoju logike.

Iskanje detajlov pogosto poteka v bolj ali manj stabilnem teoretskem kontekstu, ki ima lahko tudi filozofsko motivacijo. Ta kontekst se lahko pod vplivom določenega detajla spreminja, prav tako pa po drugi strani sam vpliva na lastnosti iskanega detajla. Vendar pa v znanosti nič ne more nadomestiti reševanja in rešitve vprašanja, torej iskanja detajlov.

V najpomembnejših logičnih izrekih, kar jih je bilo dokazanih v našem stoletju (in morda najpomembnejših sploh), v izrekih o nepopolnosti Peanove aritmetike naravnih števil in algoritemski neodločljivosti elementarne logike, je bila inspiracija filozofska. Od Peana, Russela in Whiteheada do Hilbertovega programa se je oblikovala zavest o pomenu matematičnih objektov - aksiomatsko postavljenih teorij v natančno določenih formalnih jezikih. Takšnim teorijam interpretacija ni dana vnaprej, čeprav je historično in psihološko gledano v graditvi teorije najpogosteje prisotna. Hilbertov program je prinesel misel, naj se neprotislovnost matematičnih teorij dokazuje v okviru takšnih formalnih sistemov - v primeru, da so ti postavljeni finitarno. Temeljni problem je Hilbert predstavil v svojem znamenitem predavanju na Drugem svetovnem kongresu matematikov v Parizu leta 1900: "Dokazati, da (aritmetični aksiomi) niso protislovni, torej pomeni, da, če izhajamo iz njih, v končnem številu logičnih korakov ne moremo priti do rezultatov, ki bi bili eni drugim protislovni." Tedaj je imel v mislih aksiome, ki so se nanašali na aritmetiko realnih števil. Šele od dvajsetih let našega stoletja razmišljamo o tem vprašanju tako, kot da velja tudi za teorijo naravnih števil in za Peanove aksiome.

Ko je Hilbert oblikoval to vprašanje, so ga vodili naslednji vzgibi. V devetnajstem stoletju so izpeljali aritmetizacijo analize, kar pomeni, da so analizo omejili na aritmetiko z nekaj teorije množic in s tem tudi vprašanje neprotislovnosti matematike skrčili na vprašanje neprotislovnosti aritmetike. Razumljivo je bilo vprašanje neprotislovnosti za Hilberta tako pomembno zato, ker je tedaj, kakor tudi Poincare, verjel, da je matematična teorija pravilna, če in samo če je neprotislovna. Čeprav Hilbert pozneje ni povsem jasno določal svoje filozofske pozicije - ker je postal položaj v filozofiji matematike, kjer se je zastavljalo vprašanje neprotislovnosti, vse bolj zapleten - pa lahko trdimo, da je ostal blizu formalizmu, po katerem se matematični rezultati prav na nič ne nanašajo. Vendar pa tudi od konstruktivizma ni bil daleč in, ko je sprejemal sredstva klasične matematike, se je strinjal tudi s platonizmom.

V svojem prvem izreku o nepopolnosti je Gödel pokazal, da ni takšnega formalnega sistema, ki bi kodificiral vse dokaze intuitivne matematike. V vsakem neprotislovnem sistemu, ki vsebuje Peanove aksiome, obstaja finitarna formula, tako da niti nje same niti njene negacije ni mogoče dokazati v formalnem sistemu; rezultat, ki ustreza tej formuli, pa velja tudi v intuitivni finitistični aritmetiki.

V svojem drugem izreku o nepopolnosti aritmetike pa Gödel pravi, da neprotislovnosti nekega formalnega aritmetičnega sistema ni mogoče dokazati s sredstvi, ki so kodificirana v formalni aritemtiki.

Gödel sodi v veliko skupino matematikov, ki so zagovarjali platonizem. Matematični objekti obstajajo neodvisno od človekovega uma - človekov um jih ne vzpostavlja, temveč jih lahko le bolje ali slabše spoznava. Gödeju je bilo vprašanje pravilnosti matematičnih rezultatov povsem legitimno vprašanje, kakor sploh večini matematikov, ki so usmerjeni k teoriji modelov. Nemara prav Gödelov primer najlepše pokaže, kakšno vlogo ima določeno filozofsko stališče v znanosti: dokaz njegovega izreka popolnosti čistega računa predikat prvega reda je pravzaprav odgovor na vprašanje, kakšen je odnos med semantičnimi in sintaktičnimi logičnimi pojmi (ali sintaktična struktura točno opiše semantično dano matematično stvarnost, ki obstaja neodvisno od te sintakse). Tudi tu se je Gödelu postavilo podobno vprašanje: ali sintaktično dana formalna aritmetika dobro opiše semantično, intuitivno dano aritmetiko. Zanimiva je ugotovitev, da je bilo za Hilberta in Gödela vprašanje o odnosu med formalno in intuitivno aritmetiko smiselno, vendar pa so bile, kot je videti, filozofske utemeljitve za tako stališče precej različne.

Dobro vemo, da je temeljna misel Gödelovega dokaza *kodiranje*. V preučevanju te splošne misli pa se pride do zelo konkretnih vprašanj. Ali lahko, kadar sta dani funkcija kodiranja in neko naravno število *n*, ugotovimo, da je *n* kod neke formule? Če to velja, ali lahko tedaj ugotovimo, za katero formulo gre?

Preden bomo odgovorili, moramo reči, da je to vprašanje konkreten problem. Gödel je do njega prišel tako, da je postavil drugo konkretno vprašanje: ali je aritmetika neprotislovna. Na to vprašanje je želel odgovoriti tako, da bi s kodiranjem izraza formalne aritmetike o formalni aritmetiki govoril v njej sami - v formalni aritmetiki - in tako naletel na naslednje konkretno vprašanje: ali je kodiranje, kakršno je predlagal, sploh možno. In res, odgovor na to vprašanje je pritrdilen, če lahko na podlagi danega naravnega števila poiščemo formulo, katere kod je to število.

Odgovor na to vprašanje je detajl. Glasi se: vsako naravno število *n* je mogoče na natanko en način zapisati kot produkt stopnje nekaterih praštevil. To je *Osnovni aritmetični izrek*, ki omogoča kodiranje množic vseh formul formalne aritmetike.

Da bi mogel definirati predikate "biti term", "biti formula", in "biti dokaz" (ki so nujni, če želimo odgovoriti na postavljeno vprašanje o neprotislovnosti), pa je moral Gödel pokazati, da je mogoče kodirati tudi končne nize formul. V splošnem se ta problem omejuje na vprašanje, ali je možno kodiranje poljubnih končnih nizov naravnih števil.Tako pridemo do naslednjega kronskega detajla v vsem podvigu, *Kitajskega izreka o ostankih*, ki to kodiranje poljubnih končnih nizov naravnih števil sploh omogoča. Na podlagi *Kitajskega izreka o ostankih* je Gödel leta 1931 dokazal, da je v formalni aritmetiki mogoče izvesti kodiranje vseh izrazov in nizov izrazov formalne aritmetike. To mu je omogočilo dokazati njegove izreke o nepopolnosti.

Ta primer nam je pokazal, da je bil detajl *D*, ki smo ga iskali za rešitev problema *P*, že znan, vendar ne kot rešitev problema *P*. Predlog rešitve (kodiranje formalne aritmetike) problema *P* (ali obstaja formalna teorija, ki kodificira vse pravilne trditve aritmetike naravnih števil) je treba razčleniti do problema *Q* (ali je možno kodiranje poljubnih končnih nizov naravnih števil), potem bomo šele videli, ali je detajl *D* rešitev problema *Q*.

Tudi moj drugi primer je iz istega konteksta. Hilbertov Deseti problem iz omenjenega pariškega predavanja se glasi: *"Preverjanje rešljivosti neke diofantske enačbe.* Za dano diofantsko enačbo s katerimkoli številom neznanih vrednosti in z racionalnimi koeficienti iz obsega celih števil določiti postopek, s katerim bo mogoče določiti (s končnim številom operacij), ali ima ta enačba rešitve iz obsega celih števil."

V času, ko je Hilbert postavil ta problem, še ni bilo ustreznih matematičnih sredstev, ki bi pomagala do odgovora; pojavila so se šele v tridesetih letih, ko je Gödel uvedel pojem rekurzivne funkcije. Kmalu so se oblikovali tudi drugi sistemi, ki so definirali pojem efektivne izračunljivosti, kasneje pa je prišel še dokaz, da vsi ti sistemi definirajo tisti razred aritmetičnih funkcij, ki jih danes imenujemo *rekurzivne* (če velja, da je njihov obseg množica naravnih števil *N*) ali pa *parcialno rekuzivne* (če velja, da je njihov obseg podmnožica množice naravnih števil *N*). Upoštevaje ta dejstva je Church leta 1936 postavil naslednjo tezo: "Razred rekurzivnih funkcij je enak razredu intuitivno izračunljivih funkcij."

Če sprejmemo Churchovo tezo, tedaj dokaz, da ne obstaja efekten postopek, ki bi rešil zastavljeni problem, prevedemo v dokaz, da ni rekurzivne funkcije z določenimi lastnostmi.

Za namen tega članka je dovolj, če pod diofantsko enačbo razumemo *polinomsko enačbo* s koeficienti, eksponenti in spremeljivkami iz obsega celih števil. Tedaj lahko Hilbertov problem postavimo drugače: ali obstaja splošna metoda odločljivosti, s katero lahko ugotovimo, ali ima poljubna diofantska enačba rešitev. Pri tem moramo poudariti besedi *splošna* in *poljubna*, saj je jasno, da za nekatere razrede diofantskih enačb takšne metode obstajajo (na primer za linearne in nekatere kvadratne diofantske enačbe).

Na podlagi Lagrangeovega izreka (vsako naravno število lahko zapišemo kot vsoto kvadratov štirih naravnih števil) se Deseti Hilbertov problem omejuje na vprašanje, ali obstaja taka splošna metoda, ki nam pomaga ugotoviti, ali ima poljubna diofantska enačba rešitve v množici pozitivnih celih števil. Okrog leta 1961 sta H. Putnam in J. Robinson v svojih delih to vprašanje pripravila za dokončno rešitev.

M. Davis in J. Robinson sta ga nato zvedla na vprašanje, ali je graf eksponentne funkcije diofantska množica. Natančno rečeno, gre za vprašanje, ali obstaja diofantska enačba, katere rešitve iz obsega celih števil rastejo z eksponentno hitrostjo.

Preden bomo odgovorili na postavljeno vprašanje, si oglejmo, kakšna je bila pot od prve do zadnje formulacije Desetega Hilbertovega problema.

Prva (Hilbertova) formulacija je bila izrečena v jeziku intuitivne matematike. V naslednjih sedemdesetih letih so nastali matematični konteksti, v katerih so se pojavili povsem novi pojmi (pojem rekurzivne funkcije in drugi pojmi ustrezne teorije). Hilbertov problem je bil tako postavljen v nov kontekst, Chuchova teza pa ga je še precizirala. Pojme, ki so se pojavljali v forumulaciji problema, so začeli povezovati z novimi pojmi in znanimi matematičnimi rezultati. Vse to je naposled privedlo do povsem konkretnega vprašanja, ali obstaja diofantska enačba s povsem konkretnimi lastnostmi. Za rešitev tega vprašanja je treba poiskati vsaj eno takšno enačbo ali pa dokazati, da takšne enačbe ni. Vprašanje je torej, ali obstaja vsaj en tak detajl ali pa tak detajl *ne more* obstajati. Posebej poudarjamo tisti *ne more*, saj problema ne bomo rešili, če takšnega detajla samo nismo našli, je pa še vedno možnost, da obstaja.

Prvi iskani detajl je bil najden leta 1970. J. Matijašević je odkril sistem diofatnskih enačb, katerih diofantska množica ima eksponentno rast. Rešitve te množice enačb so Fibonaccijeva števila. In ne samo to: dokaz, da je dani sistem iskani detajl, je bistveno odvisen od definicije Fibonaccijevih števil.

Za Matijaševićem je Čudnovski odkril še en detajl z iskanimi lastnostmi rešitve. Pellove enačbe prav tako oblikujejo diofantsko množico, ki raste z eksponentno hitrostjo. Obstajajo torej diofantske množice, ki so rekurzivno števne, niso pa rekurzivne.

Na podlagi najdenih dejtajlov lahko sklepamo, da je odgovor na Deseti Hilbertov problem negative: ne obstaja takšen efektiven postopek, s katerim bi lahko v končnem številu operacij odgovorili na vprašanja, ali ima poljubno dana diofantska enačba rešitve v obsegu množice celih števil.

Opozoril bi na nekatere posledice negativnega odgovora na Deseti Hilbertov problem - pokazal jih je Ž. Mijajlović. S tem bi rad pokazal, kakšen je lahko pomen najdenega detajla: ne le, da takšen detajl pomeni rešitev nekega problema, ampak nam tudi dejstvo, da imamo to rešitev v rokah (odvisno seveda od tega, ali je pritrdilna ali nikalna), omogoča postavljati nova vprašanja. Kot bomo videli, so nekatera izmed njih lahko tudi zelo splošna.

Znano je, da lahko Peanovo aritmetiko izražamo v teoriji množic ZFC (Zermelo-Fraenkelova teorija z aksiomom izbire). Ker velja, da protislovnosti Peanove aritmetike ne moremo dokazati v formalni aritmetiki, ki Peanovo kodificira, tudi neprotislovnosti teorije ZFC ne moremo dokazati v ZFC. Gödelove rezultate lahko izrazimo v bolj splošni obliki in veljajo za vsako teorijo *T*, ki vsebuje Peanovo aritmetiko in ima rekurzivno množico aksiomov.

Naj bo *T* teorija, ki vsebuje ZFC; jasno je, da zanjo veljajo Gödelovi rezultati. Naj *Prov(T, u, v)* pomeni: "*u* je kod dokaza v *T* za formulo, katere kod je *v*". Če je množica aksiomov teorije *T* rekurzivna, tedaj je *Prov* odločljiv predikat, ker lahko za vsak končen niz formul ugotovimo, ali je dokaz za zadnjo formulo v tem nizu.

Naj bo Con (T) formalizacija pojma neprotislovnosti.

Iz strukture formule Con(T) in definicije diofantske množice izhaja, da obstaja tak polinom P, da je v množici naravnih števil N stavek Con(T) ekvivalenten $P \pi 0$.

Predpostavljamo, da je ZFC neprotislovna teorija in da je metateorija prav tako ZFC. Tedaj, izhajajoč iz Gödelovega drugega izreka o nepopolnosti, v ZFC ne moremo dokazati Con(ZFC), to pomeni, da v ZFC ne moremo dokazati $P \pi 0$, kar naprej pomeni, da v ZFC ne moremo dokazati, da diofantska enačba $P = 0$ nima rešitev v obsegu množice celih števil.

Ker smo predpostavili, da je ZFC neprotislovna teorija, v njem tudi ne-Con(T) ni dokazljiv, torej v ZFC ne moremo dokazati niti, da ima diofantska enačba P = 0 rešitve v obsegu množice celih števil.

Iz teh razmislekov sledi, da sta teoriji ZFC + Con(T) in ZFC + ne-Con(T) neprotislovni, zato obstajata dva modela, vzemimo M in N, v katerih veljajo naslednje trditve.

V M: "Diofantska enačba $P = 0$ ima rešitve v obsegu množice celih števil".

V N: "Diofantska enačba $P = 0$ nima rešitev v obsegu množice celih števil".

Opazujmo model M, ker ima diofantska enačba $P = 0$ rešitve v obsegu množice naravnih števil, naj bo dana ena njena rešitev iz množice naravnih števil. Če predpostavimo, da so rešitve te enačbe končna naravna števila (gledano zunaj modela M), tedaj lahko pokažemo ne samo, da je $P = 0$ v M, ampak tudi, da je $P = 0$, iz tega pa sledi ne-Con(ZFC), kar pomeni, da je ZFC protislovna teorija, kar je v nasprotju z našo predpostavko. Predpostavljena rešitev diofantske enačbe $P = 0$ torej ni končna, oziroma za vsaj eno število izmed tistih, ki predstavljajo njene rešitve, velja, da je neskončno naravno število v M. Na enak način sledi, da kod dokaza, da je ZFC protislovna teorija, ni končno število in torej ta dokaz ni finitaren.

Očitno je, da je bilo mogoče rešitev iz teh zagat poiskati v dejstvu, da v navadni (bourbakisti bi rekli *delovni*) matematiki ni neskončno velikih naravnih števil. Pa vendar - za kateri model naj se v delovni matematiki odločimo, za M ali za N? Na to vprašanje lahko odgovorimo v teoriji kardinalnih števil. V teoriji množic imamo aksiome, ki vzpostavljajo eksistence takoimenovanih *velikih kardinalnih števil*, kakršna so, na primer, *merljiva kardinalna števila*. Naj bo AX tak aksiom; če AX dodamo k teoriji ZFC, tedaj lahko v ZFC+AX dokažemo Con(ZFC). To pomeni, da v ZFC+AX diofantska enačba $P = 0$ nima rešitve. Vendar pa iz Gödelovih izrekov o nepopolnosti sledi, da v ZFC ne moremo dokazati Con(ZFC+AX), niti če predpostavimo Con(ZFC). Zato na aksiome, kakršen je AX, gledamo s pridržkom.

Po drugi strani pa aksiomi, ki postavljajo obstoj množic v hierarhiji kardinalnih števil zelo visoko, odločajo o nekaterih osnovnih aritmetičnih lastnostih (na primer o rešljivosti diofantskih enačb), te lastnosti pa so v omenjeni hierarhiji precej nizko; postavlja se torej vprašanje, kakšna je zveza med temi entitetami.

Kot sklep je Mijajlović zapisal, da ni dovolj razlogov, da bi se mogli opredeliti za en ali drug model, saj ta odločitev prinaša tudi vprašanje o odločljivosti diofantske enačbe $P = 0$. Na konec je tako postavil vprašanje, ali to pomeni, da iz prepričanja, da je enačbo mogoče rešiti, sledi, da je enačba v resnici rešljiva.

Vidimo torej, da je pot od splošne formulacije določenega vprašanja do odgovora nanj lahko zelo dolga in naporna; tlakovana je s preciziranjem pojmov iz dane formulacije, z njihovim povezovanjem s pojmi iz drugih kontekstov - vse dokler ne najdemo detajla, ki je rešitev problema. Tedaj se lahko prične nova pot, pot od detajla in rešenega problema do novega vprašanja, ki je spet lahko splošno in premalo določeno.

LITERATURA

Mijajlović, Z., Marković, Z., Došen, K., Hilbertovi problemi in logika, Beograd, 1986.
Manin, Yu., A Coruse in Mathematical Logic, Springer, 1977.
Davis, M., Computability & Unsolvability, McGraw-Hill Inc., 1958.