Littlov zakon

Gašper in Mateja Mrmolja

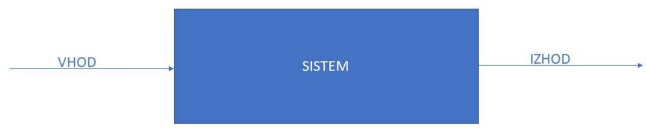
Verjetno ste se že znašli v situaciji, ko se vam je mudilo, hkrati pa ste bili zelo lačni. Vseeno ste imeli ravno dovolj časa, da zavijete v najbližjo restavracijo s hitro prehrano. V restavraciji ste želeli, da vas postrežejo čim hitreje, da bi lahko pohiteli po nadaljnjih opravkih. V današnjem času, ko se nam ves čas mudi, je odzivnost in kakovost postrežbe zelo pomembna. Tega se zavedajo tudi lastniki restavracij. Da bi si zagotovili svoj donos, morajo med drugim poskrbeti tudi za pretočnost ljudi v restavraciji z dobro organizacijo dela zaposlenih in arhitekturo prostora.

Poglejmo si primer restavracije, ki je odprta od 10h do 16h in je v enem dnevu postregla 120 obiskovalcev. Ali lahko izračunamo, koliko časa v restavraciji v povprečju preživi posamezni obiskovalec? Brez dodatnih podatkov tega ne moremo.

Za začetek si zato oglejmo primer, ko je v restavraciji ves čas deset obiskovalcev. Recimo, da pridejo hkrati in hkrati tudi odidejo, takrat pa pride novih deset obiskovalcev (torej na način, da se medsebojno izmenjujejo).

Potemtakem lahko sklepamo, da mora biti izmen $\frac{120}{10} = 12$, torej, da vsak obiskovalec v restavraciji preživi $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ure.

Naš problem lahko predstavimo tako, da ga razdelimo v tri faze (glej sliko 1): vhod, sistem in izhod. Pri zgoraj opisanemu problemu je vhod količina obiskovalcev, ki prihajajo v restavracijo, sistem je naša restavracija, kjer opazujemo dogajanje, izhod pa je količina obiskovalcev, ki je enaka vhodni.

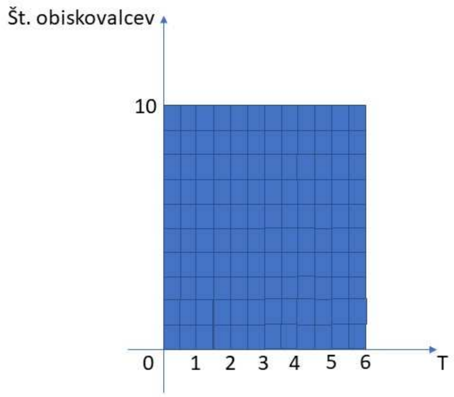


SLIKA 1.
Shema zastavljenega problema

Uporabimo prejšnji premislek in vpeljimo nekaj notacije za splošne podatke. Z N označimo točno število obiskovalcev v enem dnevu (v našem primeru je to 120). Z oznako T označimo celotni čas, ko je restavracija odprta. Če se odpre ob 10h in je odprta do 16h, je naš T enak šest ur; vse skupaj lahko zapišemo v časovni okvir $[0, T]$, torej $[0, 6]$. Predpostaviti pa moramo, da v trenutkih 0 in T v restavraciji ni obiskovalcev (oz. je natanko nič obiskovalcev). Veljati mora tudi, da restavracijo zapusti enako število obiskovalcev, kolikor jih je vstopilo vanjo. To enostavno pomeni, da v restavraciji nihče od obiskovalcev ne »ponikne«.

Če je v restavraciji (sistemu) hkrati L strank, mora biti izmen $\frac{N}{L}$, torej vsaka traja $W = \frac{T}{\frac{N}{L}} = \frac{L \cdot T}{N} = \frac{L}{\lambda}$, oz. $L = \lambda W$.

To lahko sedaj ponazorimo tudi geometrijsko. Naredimo stolpčni diagram, ki nam prikaže število obiskovalcev v restavraciji v trenutku t, kjer t preteče časovni interval $[0, T]$. Naj bo $t = 1$ prva ura odprtja restavracije, $t = 2$ druga ura odprtja restavracije in tako dalje. L naj označuje število obiskovalcev, ki so hkrati v restavraciji (ves čas enako), λ število obiskovalcev na uro, W pa čas, ki ga posamezni obiskovalec preživi v restavraciji (spet za vse enak). Ker se v restavraciji izmenjuje deset obiskovalcev, lahko izmene grafično prikažemo kot na sliki 2. Na sliki vsak pravokotniček oz. celica predstavljata obisk gosta.



SLIKA 2.
Število obiskovalcev v restavraciji

Geometrijski prikaz lahko služi tudi za alternativno rešitev problema. Za ta namen grafikon na sliki 2 preuredimo v dveh korakih, tako kot kaže slika 3.

Vsi trije grafikoni imajo enako ploščino, saj posamezni lik nastane samo s premeščanjem drugih brez prekrivanja.

Označimo to ploščino z S. Iz spodnjega grafikona na sliki 3 dobimo $S = LT$ oz. $L = \frac{S}{T}$, iz levega pa $S = NW$ oz. $W = \frac{S}{N}$. Ker je $L = \frac{S}{T}$, lahko zapišemo, da je $L = \frac{S}{T} \cdot \frac{N}{N} = \frac{N}{T} \cdot \frac{S}{N} = \lambda \cdot W$.

Zdaj pa nas zanima, ali to velja tudi v posplošenem primeru, ko gostje prihajajo kako drugače in se v restavraciji ne zadržujejo enako dolgo. Količina λ, intenzivnost prihajanja strank, ostane definirana kot $\lambda = \frac{N}{T}$, količini L in W pa je treba definirati na novo, saj število gostov v danem trenutku in čas bivanja posameznega gosta nista več konstanti. Pri definiciji nam bodo pomagali grafikoni, ki so lahko zdaj videti malo drugače, npr. tako, kot kažeta sliki 4 in 5.

Sedaj naj bo S ploščina diagrama (glej sliko 4). Iz slike 5 lahko ugotovimo, da se ploščina še vedno ohrani, saj en lik nastane iz drugega samo s premeščanjem pravokotnikov brez prekrivanja.

Definirajmo L *in* W kot povprečji: L naj bo torej povprečno število strank v sistemu, W pa povprečni čas bivanja posamezne stranke v sistemu.

Kako pa je definirano povprečje? Povprečna vrednost nenegativne funkcije na določenem intervalu je ploščina pod njenim grafom, deljena z dolžino intervala. Na ta način ima namreč lik, ki ga omejujejo graf funkcije, krajišči intervala in abscisna os, isto ploščino kot pravokotnik, ki ga dobimo, če graf funkcije zamenjamo z vodoravnico, ki leži v višini povprečja funkcije. V višji matematiki temu pravimo integral. Na sliki 4 je to povprečje označeno s črtkano črto.

Količina L je torej v resnici definirana kot $L = \frac{S}{T}$, količina W pa kot $W = \frac{S}{N}$.

Sedaj pa ugotovitve povežimo med sabo. Ko upoštevamo še zvezo $\lambda = \frac{N}{T}$, ki je v resnici definicija količine λ, sledi že dobljena zveza $L = \lambda W$. Torej zveza $L = \lambda W$ se ohrani, če L in W definiramo kot ustrezni povprečji.

Ni nujno, da sistem gledamo od začetka do konca, temveč lahko le v določenem časovnem oknu. V tem primeru moramo pri W gledati le trajanja bivanj v okviru danega časovnega okna, prihajanje pa razumemo tako, da kot prispele štejemo vse stranke, ki so v sistemu kadar koli znotraj danega časovnega okna (četudi so morda prišle že prej). Če gledamo tako, tudi ni nujno, da je bilo na koncu časovnega okna v sistemu enako število strank kot na začetku.

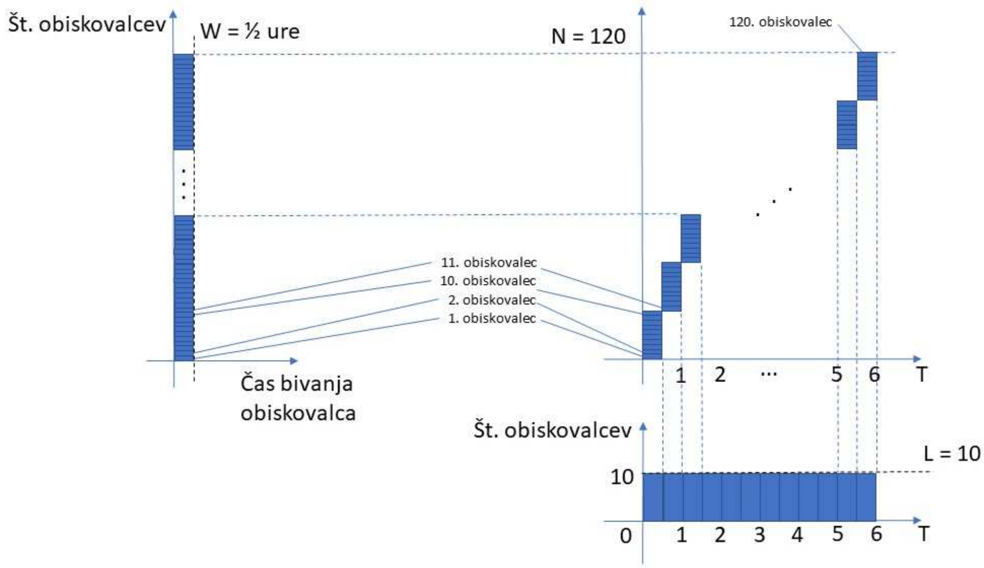
Izpeljana zveza je znana kot:

Littlov zakon: Če je dan sistem kot na sliki 1 in je λ intenzivnost prihajanja strank, L povprečno število strank v sistemu, W pa povprečni čas bivanja posamezne stranke v sistemu, vse v okviru določenega časovnega okna, velja zveza $L = \lambda W$.

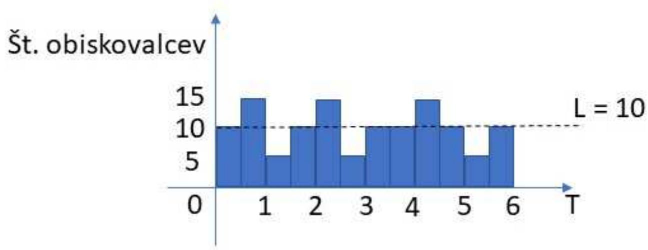
Obiskovalce lahko ločimo na dve podskupini. Na tiste, ki obedujejo, in na tiste, ki čakajo na postrežbo. Recimo, da v povprečju od desetih obiskovalcev, ki so hkrati v restavraciji, obeduje šest obiskovalcev. Zanima nas povprečni čas čakanja na postrežbo.

Označimo sedaj z L_1 število obiskovalcev, ki obedujejo, in z L_2 obiskovalce, ki čakajo na postrežbo. Nadalje lahko izračunamo, da $L_2 = L - L_1 = 10 - 6 = 4$ obiskovalci čakajo na postrežbo in je $W_2 = \frac{4}{20} = 0,2$ ure oz. 12 minut. To je čas, ki ga obiskovalec v povprečju porabi za čakanje na postrežbo. Littlov zakon smo tako uporabili za prvo škatlo obiskovalcev (glej sliko 6).

Tudi v transportu in logistiki lahko z Littlovo zakonitostjo opišemo nekatere procese. Pod drobnogled vzemimo pretok vozil na enem kilometru odseka avtoceste. Ta odsek naj bo tak, da nima nobenih



SLIKA 3.
Prikaz po posameznih obiskovalcih



SLIKA 4.
Različno število obiskovalcev v restavraciji

izvozov, da bi se število vozil v odseku spreminjalo. Kako bi skupaj povezali količine, kot so *gostota*, *pretok* in *hitrost* prometa?

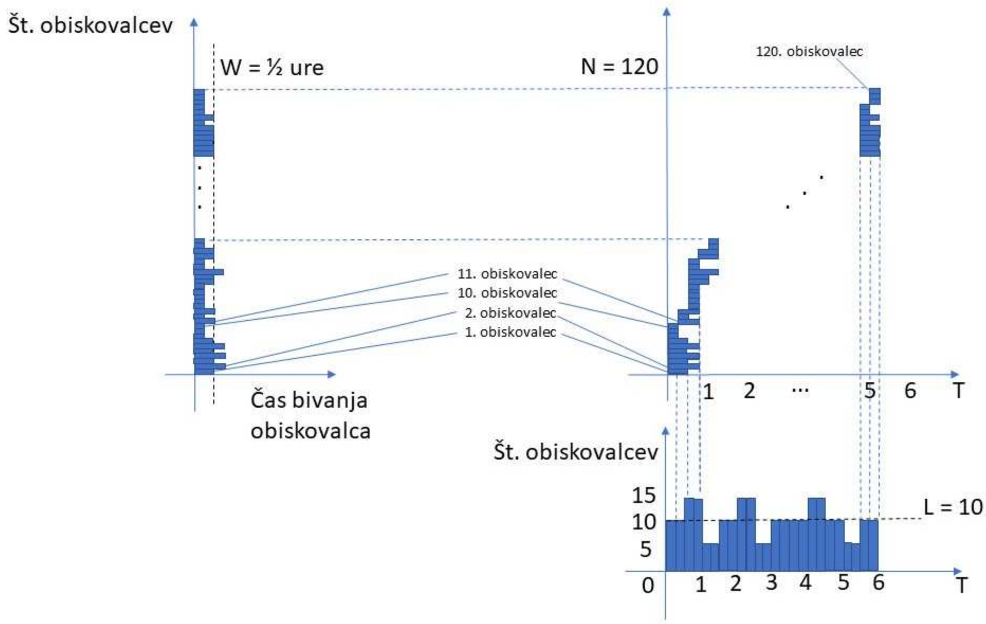
Najprej pojasnimo pojme. Gostoto prometnega toka lahko definiramo kot povprečno število vozil v odseku na razdaljo odseka. Pretok prometa pa določimo kot povprečno število vozil v odseku na enoto časa. Sedaj lahko povezavo med gostoto prometnega toka in pretoka prometa pokažemo s pomočjo Littlovega zakona.

Naj bo d dolžina odseka in ρ gostota prometnega toka. Potem lahko zapišemo, da je $\rho = \frac{L}{d}$, kjer je L povprečno število vozil v odseku. Če je v hitrost, je $W = \frac{d}{v}$, saj je W povprečni čas potovanja skozi odsek. Littlov zakon $L = \lambda W$ dobi obliko $\rho = \frac{\lambda}{v}$.

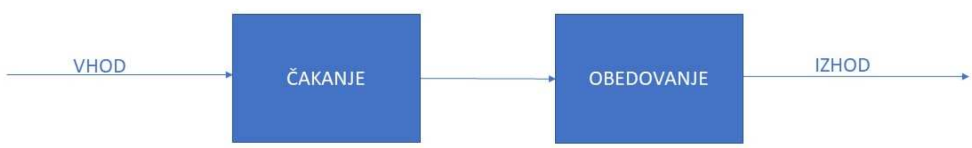
Od tod lahko tudi vidimo vzrok nastanka kolone vozil. Če se dotok vozil le rahlo poveča, se promet upočasni in po Littlovem zakonu se gostota prometa poveča – tako zaradi večjega dotoka kot zaradi zmanjšane hitrosti.

Take primere doživljamo lahko vsak dan na slovenskih avtocestah, še posebej v poletnih časih, ko se izvajajo velika vzdrževalna dela. Delavci omejijo pretok vozil na en pas, postavijo omejitev hitrosti na 80 km/h, nato pa je tu še dnevni tranzit iz tujine, ki odhaja na morje. Tako dobimo dolge, kilometrske kolone vozil zaradi prevelikega dotoka vozil v vzdrževalni odsek in zmanjšane hitrosti.

Ali obstaja kakšen način, s čimer bi zmanjšali take zastoje? S povečanjem varnostne razdalje bi lahko zmanjšali gostoto prometnega toka in s tem povečali hitrost vozil. Območje počasnejšega prometa bi se pri tem podaljšalo, zato pa bi promet tam potekal bolj tekoče. Če bi npr. ponovno popravljali viadukt na Ravbarkomandi in bi bila tam omejitev 80 km/h, bi, recimo, namesto prometa s hitrostjo 130 km/h do Unca in nato po polžje do Ravbarkomande imeli promet s hitrostjo 80 km/h že od Vrhnike naprej. Tako bi verjetno prišli do cilja hitreje, vendar je to možno samo teoretično, saj moramo upoštevati tudi človeški faktor.



SLIKA 5.
Prikaz različnega števila obiskovalcev v restavraciji glede na posameznega obiskovalca



SLIKA 6.
Shema problema podskupin obiskovalcev

Sklep

Littlov zakon opisujejo tri linearno povezane količine. Če poznamo dve izmed njih, lahko tretjo izračunamo brez težav. Ta zakonitost nam tudi pove, da npr. lastniki restavracij ne morejo zagotoviti velikega števila obiskovalcev in s tem tudi višjega dobička tako, da bodo (poleg marketinških potez) povečali samo prostorske kapacitete, ampak morajo poskrbeti tudi za ustrezno število zaposlenih v restavraciji (natakarjev, kuharjev). Če želimo varčevati pri zaposlenih, ne bomo ničesar dosegli. Čakalni čas se bo le povečal, obiskovalci bodo nezadovoljni in se ne bodo več vračali. Torej Littlov zakon skrbi, da, v našem primeru, lastniki restavracij niso preveč požrešni in da namesto optimuma za eno stran iščejo ravnovesje za obe strani.

Literatura

[1] *Little's law*, dostopno na `ie.technion.ac.il/serveng/Lectures/Little.pdf`, Service Engineering, 2007.

[2] J. D. Little, *Little's Law as Viewed on Its 50th Anniversary*, Operationsresearch **59** 2011, 3, 536–549.

[3] M. Batista, *Zvezni modeli prometnega toka*, dostopno na `www.fpp.edu/~milanb/tpmeh/tpt/tpt04_b5.pdf`, 2007.

× × ×