Univerza v Mariboru

Fakulteta za logistiko

MATEMATIKA

Univerzitetni učbenik

AJDA FOŠNER IN MAJA FOŠNER

Junij, 2008

Kazalo

1 Množice **5**

1.1 Matematična logika 5

1.2 Množice 10

2 Preslikave **18**

2.1 Realne funkcije 18

2.2 Limita in zveznost 28

2.3 Pregled elementarnih funkcij 32

3 Zaporedja **44**

3.1 Definicija zaporedij 44

3.2 Konvergentna zaporedja 48

3.3 Aritmetično in geometrijsko zaporedje 52

3.4 Geometrijska vrsta 56

4 Odvod **60**

4.1 Definicija in geometrijski pomen odvoda 60

4.2 Računanje odvoda 62

4.3 Diferencial 68

4.4 Analiza realnih funkcij 69

4.5 Optimizacijske naloge 75

5 Matrike **80**

5.1 Osnovne lastnosti matrik 80

5.2 Determinanta 87

5.3 Inverzna matrika 92

5.4 Sistemi linearnih enačb 95

Avtor:
doc. dr. Ajda Fošner, doc. dr. Maja Fošner

Recenzent:
dr. Bojana Zalar

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)

FOŠNER, Ajda
Matematika [Elektronski vir] : univerzitetni učbenik / Ajda
Fošner in Maja Fošner. - Celje : Fakulteta za logistiko, 2008

Način dostopa (URL): http://fl.uni-mb.si/eknjige/matematika_univerz
itetni_ucbenik.pdf

ISBN 978-961-6562-22-5
1. Fošner, Maja
240560128

1

Množice

Kot že sam naslov pove bomo v tem poglavju predstavili množice in osnovne operacije z njimi. Še pred tem pa se bomo seznanili z osnovnimi prijemi iz matematične logike.

1.1 Matematična logika

Za razumevanje formul, izrekov, dokazov in izpeljav, s katerimi se bomo srečevali v tem učbeniku, je potrebno osnovno znanje iz logike, predvsem pravila sklepanja. Zato bomo v tem delu predstavili nekaj osnovnih pojmov matematične logike.

Osnovni pojem v matematični logiki je zagotovo *izjava*. Izjava je trditev, ki je lahko resnična ali neresnična. Izjave bomo v nadaljevanju označevali z malimi tiskanimi črkami $p, q, r, \ldots$

Primer 1.1 Poglejmo primer dveh izjav.

Izjava p: 55 *je liho število*. Ta izjava je resnična.

Izjava q: 55 *je praštevilo*. Ta izjava je neresnična.

Izjave glede na to, ali jih je mogoče razdeliti na enostavne sestavne dele, delimo na *enostavne izjave* in *sestavljene izjave.*

Primer 1.2 Izjavi p in q sta enostavni izjavi.

Primer 1.3 *Vsota števil* 3 *in* 5 *je osem* je enostavna izjava.
Če je bil včeraj četrtek, potem je danes petek je sestavljena izjava.

Enostavne izjave lahko z *logičnimi operacijami* povežemo v sestavljene izjave. Kako je s pravilnostjo sestavljene izjave najlažje prikažemo s *pravilnostno tabelo.* Tako bomo v nadaljevanju predstavili osnovne logične operacije in njihove pravilnostne tabele. Kot oznako za pravilnost oziroma nepravilnost izjav bomo uporabljali števili 1 oziroma 0.

NEGACIJA

Oznaka za negacijo je $\neg$. Negacija izjave $\neg p$ je resnična natanko tedaj, ko je p neresnična izjava.

p	$\neg p$
1	0
0	1

Primer 1.4

Izjava $\neg p$: 55 *je sodo število.* Ta izjava je neresnična.

Izjava $\neg q$: 55 *ni praštevilo.* Ta izjava je resnična.

DISJUNKCIJA

Oznaka za disjunkcijo je $\vee$. Sestavljena izjava $p \vee q$ je resnična natanko tedaj, ko je resnična vsaj ena od izjav p ali q.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Primer 1.5 Izjava $p \vee q$: 55 *je liho število ali praštevilo.* Ta izjava je resnična.

Primer 1.6
Ali so sestavljene izjave

1. $(\neg p) \vee q$,

2. $\neg(p \vee q)$,

3. $(\neg p) \vee (\neg q)$,

4. $\neg(p \vee (\neg q))$

resnične ali neresnične?

Hitro lahko preverimo, da je le tretja izmed naštetih izjav resnična, ostale pa so neresnične.

<u>KONJUNKCIJA</u>

Oznaka za konjunkcijo je $\wedge$ (v nekateri literaturi se za konjunkcijo izjav p in q uporablja tudi oznaka p & q.) Sestavljena izjava $p \wedge q$ je resnična natanko tedaj, ko sta resnični obe izjavi p in q.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Primer 1.7 Izjava $p \wedge q$: 55 *je liho število in hkrati praštevilo.* Ta izjava je neresnična.

Primer 1.8

Ali so sestavljene izjave

1. $(\neg p) \wedge q$,
2. $\neg(p \wedge q)$,
3. $(\neg p) \wedge (\neg q)$,
4. $\neg(p \wedge (\neg q))$

resnične ali neresnične?

Hitro lahko preverimo, da je le druga izmed naštetih izjav resnična, ostale pa so neresnične.

IMPLIKACIJA

Oznaka za implikacijo je $\Rightarrow$. Sestavljena izjava $p \Rightarrow q$ je neresnična natanko tedaj, ko iz resnične izjave p sledi neresnična izjava q. V vseh ostalih primerih je ta izjava resnična.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Primer 1.9

Izjava $p \Rightarrow q$: *če je* 55 *liho število, potem je* 55 *praštevilo.* Ta izjava je neresnična.

Izjava $q \Rightarrow p$: *če je* 55 *praštevilo, potem je* 55 *liho število.* Ta izjava je resnična.

Primer 1.10

Ali so sestavljene izjave

1. $\neg(q \Rightarrow p)$,

2. $(\neg p) \Rightarrow q$,

3. $(p \vee q) \Rightarrow p$,

4. $(p \Rightarrow q) \vee q$

resnične ali neresnične?

Prva in zadnja izjava sta neresnični, druga in tretja pa resnični.

<u>*EKVIVALENCA*</u>

Oznaka za ekvivalenco je $\Leftrightarrow$. Sestavljena izjava $p \Leftrightarrow q$ je resnična natanko tedaj, ko sta p in q obe resnični ali obe neresnični izjavi.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Primer 1.11 Izjava $p \Leftrightarrow q$: 55 *je liho število natanko tedaj, ko je* 55 *praštevilo.* Ta izjava je neresnična.

Primer 1.12
Ali so sestavljene izjave

1. $(\neg p) \Leftrightarrow (\neg q)$,

2. $(\neg(p \Leftrightarrow q)) \vee q$,

3. $(p \Leftrightarrow q) \wedge q$,

4. $((p \wedge q) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg q)$

resnične ali neresnične?

Druga in četrta izjava sta resnični, prva in tretja pa neresnični.

Za konec razdelka omenimo še dva kvantifikatorja, ki izhajata iz matematične logike. Prvi je *univerzalni kvantifikator*, ki ga označujemo z oznako $\forall$. Univerzalni kvantifikator srečujemo v izjavah, ki veljajo za vse elemente dane univerzalne množice. Drugi je *eksistenčni kvantifikator*, ki ga označujemo z oznako $\exists$. Eksistenčni kvantifikator uporabljamo, kadar hočemo povedati, da neka izjava velja za vsaj en element dane množice.

Primer 1.13 Zapis

$$\forall x \ : \ x \in \mathbb{N} \implies x^2 > 0$$

pove, da imajo vsa naravna števila pozitivne kvadrate.

Primer 1.14 Zapis

$$\exists x \ : \ x \in \mathbb{N} \ \wedge \ x^2 = 9$$

pove, da obstaja naravno število, katerega kvadrat je enak 9.

1.2 Množice

Množice bomo označevali z velikimi tiskanimi črkami $A, B, \ldots$, elemente množice pa z malimi črkami $a, b, \ldots$ Elemente množice lahko bodisi naštejemo

$$A = \{a, b, c, d\},$$

pogosto pa množico opišemo z lastnostjo, ki karakterizira njene elemente. Na primer, množico vseh sodih naravnih števil lahko opišemo na naslednji način

$$A = \{a \ : \ a = 2k, \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Če element a pripada množici A, to zapišemo kot $a \in A$. Če pa a ni element množice A, to zapišemo kot $a \notin M$. Množico, ki ne vsebuje nobenega elementa, imenujemo *prazna množica*. Prazno množico običajno označimo s simbolom $\emptyset$ ali $\{\}$.

Primer 1.15 Množica A vsebuje vsa naravna števila od 1 do 10. Potem pišemo

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\} \quad \text{ali} \quad A = \{a \mid a \leq 10,\ a \in \mathbb{N}\}.$$

Množica A je *podmnožica* množice B, če je vsak element množice A tudi element množice B

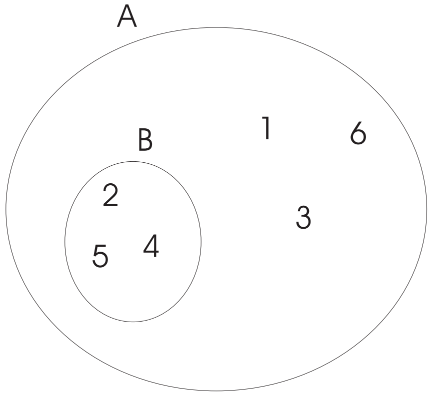
$$A \subseteq B \iff (\forall a)\ (a \in A\ \Rightarrow \in B).$$

Če želimo pri tem poudariti, da množica A ne izčrpa celotne množice B, potem pišemo

$$A \subset B.$$

V takem primeru pravimo, da je množica A *prava podmnožica* množice B.

Primer 1.16 Naj bosta dani množici $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in $B = \{2, 4, 5\}$. Potem je $B \subset A$.



Slika 1.1: $B \subset A$

Primer 1.17 Naj bo A množica vseh celih števil in naj bo B množica vseh sodih števil. Tedaj je B prava podmnožica množice A, saj je $B \subseteq A$ in $B \neq A$.

Primer 1.18 Prazna množica $\emptyset$ je prava podmnožica vsake množice A z vsaj enim elementom.

Pri obravnavi se vedno omejimo na elemente neke *univerzalne množice*, ki vsebuje vse objekte, ki nas pri nekem matematičnem premišljanju zanimajo. Univerzalno množico bomo označevali s simbolom $\mathcal{U}$. Univerzalna množica bo za nas največkrat kar množica vseh realnih števil.

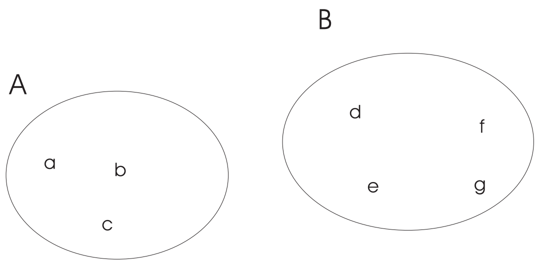
Operacije med množicami

Z množicami lahko tudi računamo. Osnovne operacije med množicami so unija, presek, razlika, komplement in kartezični produkt. V nadaljevanju bomo opisali vsako od naštetih operacij.

1. *Unija* množic A in B je množica vseh tistih elementov, ki so vsaj v eni od množic A ali B

   $$A \cup B = \{x \ : \ x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

   Primer 1.19 Naj bosta dani množici $A = \{a, b, c\}$ in $B = \{d, e, f, g\}$. Potem je $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ (slika 1.2).

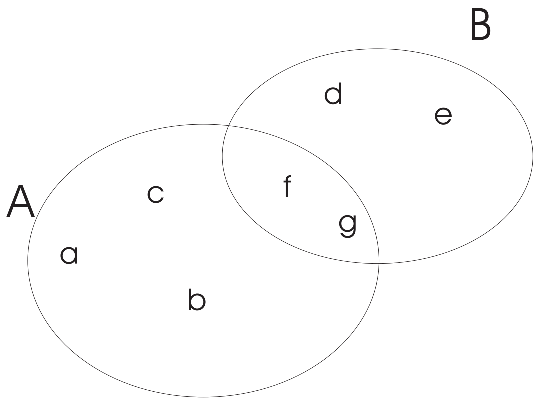


Slika 1.2: $A \cup B$

2. *Presek* množic A in B je množica vseh tistih elementov, ki so hkrati v množici A in v množici B

$$A \cap B = \{x \ : \ x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Primer 1.20 Naj bosta dani množici $A = \{a, b, c, f, g\}$ in $B = \{d, e, f, g\}$. Potem je $A \cap B = \{f, g\}$ (slika 1.3).

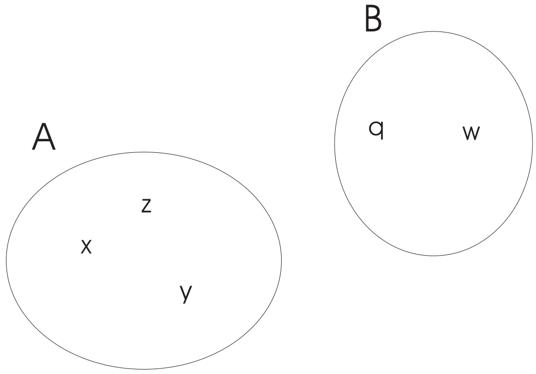


Slika 1.3: $A \cap B$

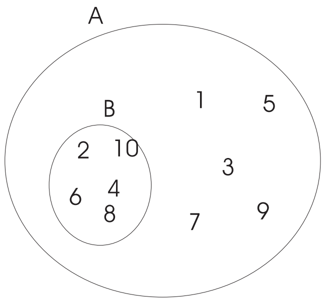
Če je presek množic A in B prazen ($A \cap B = \emptyset$), pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*.

Primer 1.21 Množici iz primera 1.2 sta disjunktni.

Primer 1.22 Naj bosta dani množici $A = \{x, y, z\}$ in $B = \{q, w\}$. Potem je $A \cap B = \emptyset$ (slika 1.4). Torej sta množici disjunktni.



Slika 1.4: Disjunktni množici



Slika 1.5: $A \setminus B$

3. *Razlika* množic A in B je množica vseh tistih elementov, ki so v A in niso v B
$$A \setminus B = \{x \ : \ x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$
V nekateri literaturi se za razliko množic A in B uporablja oznaka $A-B$.

Primer 1.23 Naj $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ in naj bo $B = \{2,4,6,8,10\}$. Potem je $A \setminus B = \{1,3,5,7,9\}$ (slika (1.5)).

Primer 1.24 Naj bo A množica vseh naravnih večkratnikov števila 3 in B množica vseh sodih naravnih števil. Potem je $A \setminus B$ množica vseh lihih naravnih večkratnikov števila 3.

Primer 1.25 Naj bo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ in naj bo $B = \{2, 4, 10\}$. Določimo naslednje množice $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ in $B \setminus A$.

(i) $A \cap B = \{2, 4\}$,

(ii) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 10\}$,

(iii) $A \setminus B = \{1, 3\}$,

(iv) $B \setminus A = \{10\}$.

Hitro lahko pokažemo, da velja

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{in} \quad A \cup B = B \cup A.$$

Ta lastnost seveda ne velja za razliko množic, kar se lepo vidi na zgornjem primeru.

Prav tako velja

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{in} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Ta lastnost ponovno ne velja za razliko množic.

4. *Komplement* množice A (glede na univerzalno množico $\mathcal{U}$) je množica vseh tistih elementov, ki so v $\mathcal{U}$ in niso v A

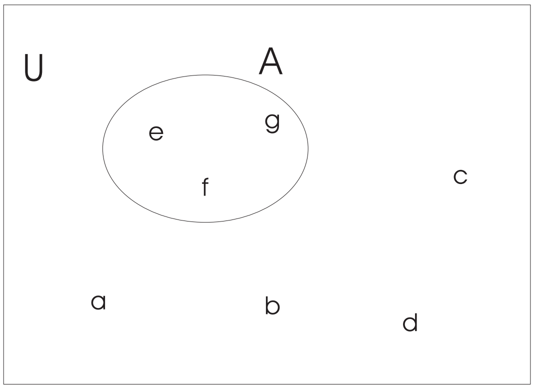
$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \ : \ x \notin A\}.$$

Torej je

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A.$$

Primer 1.26 Naj bo sedaj univerzalna množica množica vseh naravnih števil in A množica vseh sodih naravnih števil. Potem je seveda A^c množica vseh lihih naravnih števil.

Primer 1.27 Naj bo dana univerzalna množica $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ in naj bo dana množica $A = \{e, f, g\}$. Hitro lahko vidimo, da je $A \subset \mathcal{U}$ in $A^c = \{a, b, c, d\}$ (slika 1.6).



Slika 1.6: A^c

5. *Kartezični produkt* množic A in B je množica vseh urejenih parov (a, b), kjer je prva komponenta a iz množice A in druga komponenta b iz množice B

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Pri tem je potrebno poudariti, da urejen par (a, b) v splošnem ni enak urejenemu paru (b, a).

Primer 1.28 Naj bo $A = \{1, 2, 3\}$ in $B = \{a, b\}$. Potem je

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, a), (3, a)\}, \\ B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}. \end{aligned}$$

Ker se z zamenjavo vrstnega reda množic spremenijo urejeni pari, kartezični produkt $A \times B$ v splošnem ni enak kartezičnemu produktu $B \times A$.

Zapišimo še nekaj preprostih lastnosti operacij z množicami.

$A \subseteq (A \cup B)$	$B \subseteq (A \cup B)$
$(A \cap B) \subseteq A$	$(A \cap B) \subseteq B$
$(A \cap A) = A$	$(A \cup A) = A$
$(A \cap \emptyset) = \emptyset$	$(A \cup \emptyset) = A$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Primer 1.29 Naj bodo $A = \{6, 9, 11, 12, 14, 21\}$, $B = \{2n \ : \ n \in \mathbb{N} \wedge n < 8\}$ in $C = \{4n-1 \ : \ n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 4\}$. Določimo množici $(C \cap B) \setminus A$ in $(A \cup B) \cap C$.

Najprej moramo seveda zapisati elemente množice B in elemente množice C. Ker je $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ in so v množici B elementi oblike $2n$, je $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$. Podobno razmišljamo v primeru množice C. Ker je $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ in so v množici C elementi oblike $4n-1$, je $C = \{3, 7, 11, 15\}$. Torej je

$$(C \cap B) \setminus A = \emptyset$$

in

$$(A \cup B) \cap C = \{11\}.$$

Družino vseh podmnožic množice A imenujemo *potenčna množica* množice A in jo označimo s simbolom $\mathcal{P}(A)$. Hitro lahko opazimo, da vsaka potenčna množica vsebuje prazno množico in celotno množico A, saj za vsako množico A velja $\emptyset \subseteq A$ in $A \subseteq A$.
Denimo, da ima množica A natanko n elementov. Pri vsaki od podmnožic dane množice imamo za vsak element množice A natanko dve možnosti: ali ga vključimo v podmnožico ali ne. Iz tega hitro sledi, da je vseh podmnožic natanko 2^n.

Primer 1.30 Naj bo $A = \{1, 2\}$. Potem je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Vseh podmnožic množice A je $2^2 = 4$.

Primer 1.31 Naj bo $A = \{a, b, c\}$. Potem je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Vseh podmnožic množice A je $2^3 = 8$.

2

Preslikave

Naj bosta A in B dve neprazni množici. Preslikava f, ki slika iz množice A v množico B, je predpis, ki vsakemu elementu iz prve množice priredi element iz druge množice. Pri tem uporabljamo zapis

$$f : A \to B.$$

Množici A pravimo *definicijsko območje* preslikave f. Označevali ga bomo z oznako $\mathcal{D}_f$. Definicijsko območje funkcije je torej množica, na kateri je funkcija definirana. *Zaloga vrednosti* preslikave f pa je podmnožica množice B, v kateri so slike vseh elementov iz množice A (torej iz definicijskega območja funkcije). Označevali jo bomo z oznako $\mathcal{Z}_f$.

V nadaljevanju bomo obravnavali le preslikave, ki slikajo iz neke podmnožice realnih števil v množico realnih števil. Takim preslikavam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pravimo *realne funkcije*.

2.1 Realne funkcije

Realna funkcija je preslikava $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Najbolje je opisana analitično s svojo eksplicitno enačbo

$$f(x) = y.$$

Število y je torej vrednost funkcije f v točki x. Včasih realno število x imenujemo tudi *neodvisna spremenljivka*, število y pa *odvisna spremenljivka*. Kot smo zapisali pred začetkom tega poglavja, je definicijsko območje realne funkcije f podmnožica realnih števil, na kateri je funkcija definirana

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Zaloga vrednosti funkcije f pa je množica vseh vrednosti, ki jih funkcija zavzame

$$\mathcal{Z}_f = \{y \in \mathbb{R} \ : \ \exists x \in \mathcal{D}_f, f(x) = y\}.$$

Graf funkcije f (označili ga bomo z $\mathcal{G}_f$) je množica vseh urejenih parov oblike $(x, f(x))$. Torej velja

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \ : \ x \in \mathcal{D}_f, y = f(x)\}.$$

To množico urejenih parov navadno grafično predstavimo v pravokotnem koordinatnem sistemu. Na ta način najbolje upodobimo funkcijski odnos med odvisno in neodvisno spremenljivko.

Primer 2.1 Naj bo $f(x) = x + 3$. To je linearna funkcija in njen graf je premica. Definicijsko območje in zaloga vrednosti funkcije f so vsa realna števila

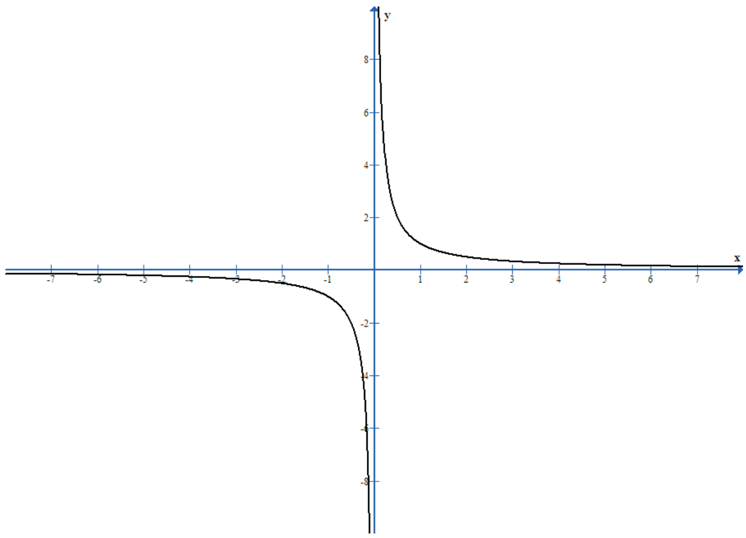
$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}, \quad \mathcal{Z}_f = \mathbb{R}.$$

Primer 2.2 *Naj bo* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Potem je*

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathcal{Z}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Primer 2.3 Določimo definicijsko območje funkcije

$$f(x) = \sqrt{\ln \frac{4x - x^2}{3}}.$$



Slika 2.1: $f(x) = \frac{1}{x}$

Takoj lahko opazimo, da mora biti izraz pod korenom nenegativen, kar lahko zapišemo kot

$$\ln \frac{4x - x^2}{3} \geq 0.$$

Ker je logaritem nenegativen natanko tedaj, ko je njegov argument večji ali enak 1, velja

$$\frac{4x - x^2}{3} \geq 1.$$

Torej mora veljati

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) \leq 0.$$

Rešitev zgornje neenačbe je $1 \leq x \leq 3$. Definicijsko območje funkcije f je zaprti interval $[1, 3]$.

Naj bo f realna funkcija. Potem je funkcija f *naraščajoča*, če je

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

in je *strogo naraščajoča*, če je

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Funkcija f je *padajoča*, če je

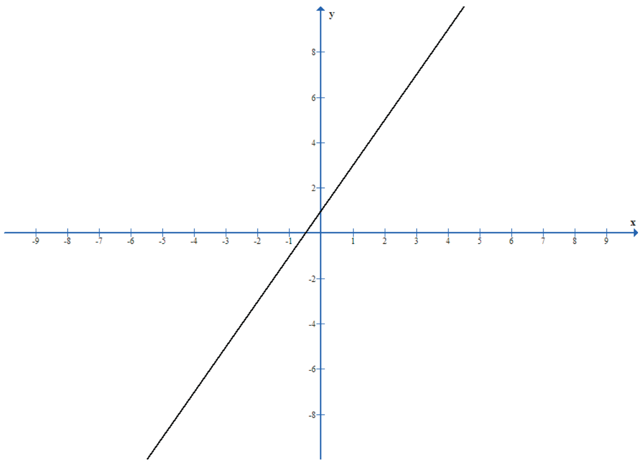
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

in je *strogo padajoča*, če je

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Pravimo, da je funkcija f *monotona*, če je (strogo) naraščajoča ali (strogo) padajoča.

Primer 2.4 Naj bo $f(x) = 2x + 1$. To je linearna funkcija s pozitivnim smernim koeficientom $k = 2$ in je zato strogo naraščajoča.



Slika 2.2: $f(x) = 2x + 1$

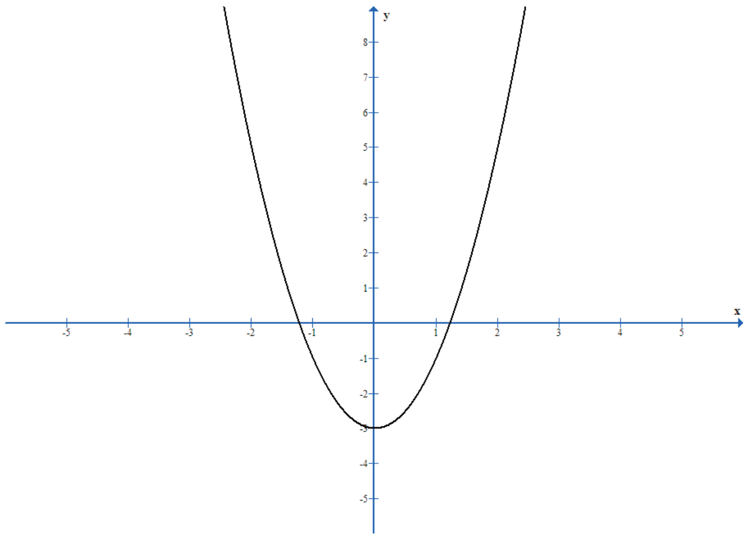
Primer 2.5 Naj bo $f(x) = 2x^2 - 3$. Na intervalu $(-\infty, 0]$ je funkcija padajoča, na intervalu $[0, \infty)$ pa naraščajoča.

Realna funkcija f je na intervalu I *navzgor omejena*, če obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$f(x) \leq M, \quad \forall x \in I.$$

Funkcija f je *navzdol omejena* na intervalu I, če obstaja tak $m \in \mathbb{R}$, da je

$$m \leq f(x), \quad \forall x \in I.$$



Slika 2.3: $f(x) = 2x^2 - 3$

Pravimo, da je M *zgornja meja*, m pa *spodnja meja* funkcije f na intervalu I. Funkcija f je na intervalu I *omejena*, če je navzgor in navzdol omejena. Najmanjšo zgornjo mejo M funkcije f imenujemo *natančna zgornja meja.* Največjo spodnjo mejo m funkcije f imenujemo *natančna spodnja meja.*

Če je natančna zgornja meja M funkcije f tudi funkcijska vrednost, potem je M *maksimum* funkcije f na I

$$M = \max_{x \in I} f(x).$$

Če je natančna spodnja meja m funkcije f tudi funkcijska vrednost, potem je m *minimum* funkcije f na I

$$m = \min_{x \in I} f(x).$$

Primer 2.6 Naj bo $f(x) = x^2 + 2$. Maksimum funkcije f na intervali $[-1, 1]$ je 3 in minimum 2.

Točka $T(x_0, f(x_0))$ je *lokalni maksimum* funkcije f, če v poljubno majhni okolici realnega števila x_0 velja $f(x) < f(x_0)$. Točka $T(x_0, f(x_0))$ je *lokalni minimum* funkcije f, če v poljubno majhni okolici realnega števila x_0 velja $f(x) > f(x_0)$. Lokalni maksimum in lokalni minimum sta *lokalna ekstrema* funkcije f.

Definirajmo še ničlo, pol in asimptoto realne funkcije f. Realno število x_0 je *ničla* funkcije f, če je $f(x_0) = 0$. Točka x_0 je *pol* funkcije f, če funkcija f v x_0 ni definirana, v poljubno majhni okolici točke x_0 pa se funkcija približuje pozitivni ali negativni neskončnosti. *Asimptota* funkcije f je krivulja h kateri se funkcija f približuje, ko gre x priti pozitivni ali negativni neskončnosti.

Primer 2.7 Naj bo $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$. Funkcija f ima dve ničli $x = 1$ in $x = -1$. Pol funkcija f doseže pri realnem številu $x = -2$. Njeno asimptoto pa izračunamo tako, da delimo polinom v števcu s polinomom v imenovalcu $(x^2 - 1) : (x + 2)$ in dobimo $x - 2$ ter ostanek 3. Asimptota je torej premica $y = x - 2$.

Funkcija f definirana na simetričnem intervalu I (na primer $I = (-a, a)$ ali $I = [a, -a]$) je *soda*, če je

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \in I,$$

in je *liha*, če je

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in I.$$

Spodnji primeri bodo pokazali, da je graf sode funkcije simetričen glede na y os, graf lihe funkcije pa je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

Primer 2.8 Naj bo $f(x) = x^2$. Ker je

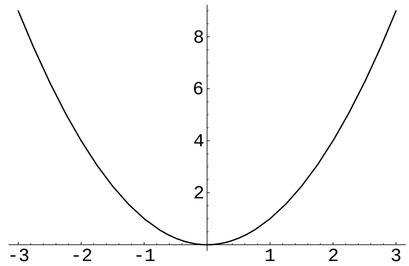
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x),$$

je f soda funkcija.

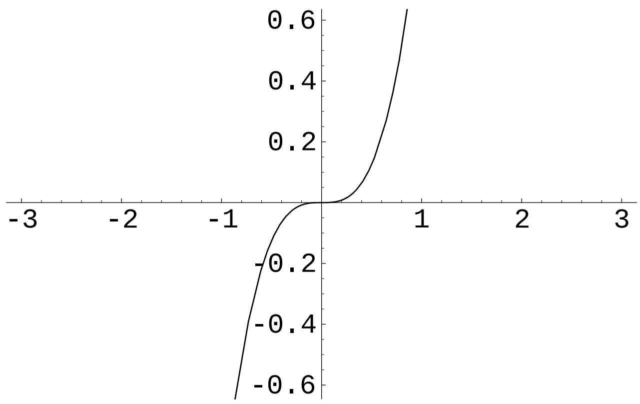
Primer 2.9 Naj bo $f(x) = x^3$. Ker je

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x),$$

je f liha funkcija.



Slika 2.4: $f(x) = x^2$



Slika 2.5: $f(x) = x^3$

Primer 2.10 Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(x) = x + 2$, ni niti soda niti liha. Namreč, $f(-x) = -x + 2$ in $-f(x) = -x - 2$. Iz tega sledi, da je $f(-x) \neq f(x)$ in $f(-x) \neq -f(x)$.

Če obstaja tako število $\omega \in \mathbb{R}$, da za vsako realno število x velja

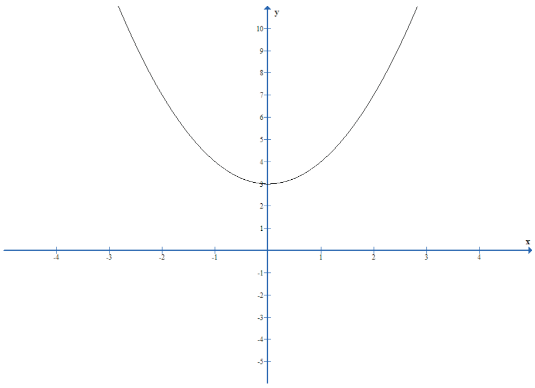
$$f(x + \omega) = f(x),$$

potem je f *periodična* funkcija s periodo ω. Najmanjšo pozitivno periodo imenujemo *osnovna perioda*. Funkcija f je torej periodična, če njen graf vsakih ω enot začne ponavljati nek vzorec.

Primer 2.11 Naj bo $f(x) = \sin x$. Ker je $f(x) = f(x + 2\pi) = f(x + 4\pi) = f(x - 2\pi) \ldots$, je f periodična funkcija z osnovno periodo 2π. Podobno lahko razmislimo za funkcijo $g(x) = \cos x$.

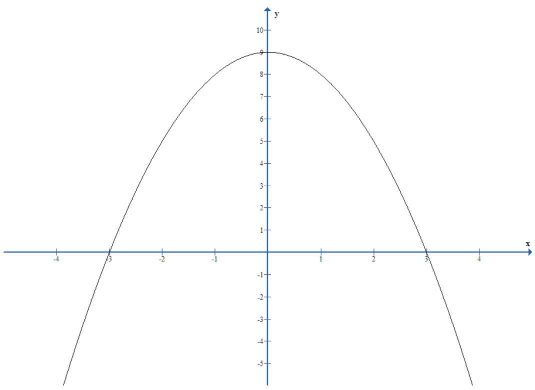
Ukrivljenost funkcij

Funkcija f je na intervalu I *konveksna*, če je njena vrednost v vsaki točki manjša od sekante grafa funkcije f.



Slika 2.6: $f(x) = x^2 + 3$, konveksna funkcija

Funkcija f je na intervalu I *konkavna*, če je njena vrednost v vsaki točki večja od sekante grafa funkcije f.



Slika 2.7: $f(x) = -x^2 + 9$, konkavna funkcija

Iz definicije lahko opazimo, da je funkcija f konveksna natanko tedaj, ko je $-f$ konkavna.

Primer 2.12 Kvadratna funkcija $f(x) = 2x^2+2$ je ne celi realni osi konveksna. Kvadratna funkcija $f(x) = -2x^2 + 2$ je ne celi realni osi konkavna.

Funkcija f ima v x_0 prevoj, če obstaja taka okolica točke x_0, da je f na eni strani te točke konveksna, na drugi pa konkavna.

Primer 2.13 Funkcija $f(x) = x^3$ ima v točki $T(0,0)$ prevoj, saj je na intervalu $(-\infty, 0)$ konkavna, na intervalu $(0, \infty)$ pa konveksna.

Kompozitum funkcij

Naj bosta $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$ realni funkciji ($X, Y, Z \subseteq \mathbb{R}$). *Kompozitum* funkcij f in g je funkcija $g \circ f : X \to Z$ definirana s predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

za vsak $x \in X$. Pri tem moramo paziti, da kompozitum $g \circ f$ ni nujno enak funkciji $f \circ g$. Kompozitum $f \circ g$ v določenih primerih sploh ne moremo definirati, kar je odvisno od množic Z in X.

Primer 2.14 Podani sta funkciji $f(x) = x^2$ in $g(x) = \sqrt{x^3 - 2}$. Potem je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{(x^2)^3 - 2} = \sqrt{x^6 - 2}.$$

Po drugi strani pa je

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^3 - 2}) = x^3 - 2.$$

Inverzna funkcija

Naj bosta X in Y podmnožici realnih števil. Funkcija $f : X \to Y$ je *injektivna*, če se dva različna elementa iz množice X vedno preslikata v dva različna elementa iz množice Y. Torej,

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_2) \neq f(x_2).$$

Funkcija $f : X \to Y$ je *surjektivna*, če je vsak element iz množice Y slika vsaj enega elementa iz množice X. Funkcija f je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Primer 2.15 Naj bo $f(x) = 3x - 4$. Kot predstavnik linearnih funkcij je funkcija f bijektivna funkcija, torej je injektivna in tudi surjektivna.

Primer 2.16 Naj bo $f(x) = 2x^2$. Ta funkcija ni injektivna, saj je $f(-1) = f(1) = 2$. Prav tako ni surjektivna, saj so njene funkcijske vrednosti nenegativna realna števila.

Primer 2.17 Naj bo $f(x) = x^3 + 1$. Ta funkcija je injektivna in prav tako surjektivna. Torej je f bijektivna funkcija.

Naj bo $f : X \to Y$ bijektivna funkcija. Potem obstaja taka funkcija $f^{-1} : Y \to X$, da velja

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

za vsak $x \in X$ in

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

za vsak $y \in Y$. Funkcijo f^{-1} imenujemo *inverzna funkcija* funkcije f. Pri tem poudarimo, da je funkcija obrnljiva (ima inverzno funkcijo), natanko tedaj, ko je bijektivna.

Primer 2.18 Naj bo $f(x) = 2x+3$. To je linearna funkcija, je bijektivna in je zato tudi obrnljiva. Njeno inverzno funkcijo izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk x in y ter zapišemo

$$x = 2y + 3.$$

Če iz zgornje enakosti izrazimo y, dobimo

$$y = \frac{1}{2}(x - 3).$$

Torej je $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$.

Primer 2.19 Naj bo $f(x) = \frac{x-4}{5-x}$. Poiščimo njeno inverzno funkcijo. Tako kot v prejšnjem primeru, bomo najprej zamenjali vlogi spremenljivk x in y in nato iz tako dobljene enakosti izrazili y. Torej,

$$x = \frac{y - 4}{5 - y}.$$

Če zgornjo enakost pomnožimo z $5-y$, dobimo

$$(5-y)x = y-4,$$

oziroma

$$5x+4 = y+yx.$$

Iz tega sledi, da je $y = \frac{5x+4}{x+1}$. Torej je $f^{-1}(x) = \frac{5x+4}{x+1}$.

2.2 Limita in zveznost

V tem razdelku bomo spoznali dva temeljna pojma iz teorije realnih funkcij. Najprej bomo definirali limito in zapisali nekaj osnovnih limit. Nato pa bomo s pomočjo limite definirali še zveznost realnih funkcij.

Naj bo realna funkcija f definirana v okolici točke a, razen morda v sami točki a. Realno število L imenujemo limita funkcije f v točki a, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tako število $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \epsilon$ za vsak $x \neq a$ z lastnostjo $|x-a| < \delta$. Pri tem pišemo

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

Pri iskanju limite si lahko pomagamo z naslednjim vprašanjem: *H kateri vrednosti se $f(x)$ približa, če se z vrednostjo x z leve ali z desne strani dovolj približamo a?* Pa si kar na konkretnih primerih oglejmo, kako računamo limite.

Primer 2.20 Naj bo dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \frac{x^2-81}{x-9}$. Potem je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 9} f(x) &= \lim_{x\to 9} \frac{x^2-81}{x-9} \\
&= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(x+9)}{x-9} \\
&= \lim_{x\to 9} (x+9) \\
&= 18.
\end{aligned}$$

Primer 2.21 Naj bo dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$. Potem je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} f(x) &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+2} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Primer 2.22 Naj bo dana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}$. Potem je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} (\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8}) \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Analogno kot zgoraj lahko definiramo limiti v neskončnem.

Naj bo f definirana na intervalu (a, ∞). Funkcija f ima limito L, ko gre x proti neskončno, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $M > 0$, da je neenakost $|f(x) - L| < \epsilon$ izpolnjena za vsak $x > M$.

Naj bo f definirana na intervalu $(-\infty, b)$. Funkcija f ima limito L, ko gre x proti negativni neskončnosti, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $m < 0$, da je neenakost $|f(x) - L| < \epsilon$ izpolnjena za vsak $x < m$.

Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in naj bo $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Potem velja

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, če je $B \neq 0$.

Zapišimo nekaj pomembnejših limit.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
4. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

Na primerih bomo pokazali, kako uporabiti zgoraj zapisane enakosti.

Primer 2.23 Izračunajmo $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x)}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2\sin(2x)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(2x)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Primer 2.24 Izračunajmo $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{2}{2x}} \\
&= (\lim_{2x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}})^2 \\
&= e^2
\end{aligned}$$

Primer 2.25 Izračunajmo $\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{x}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{5(e^{5x}-1)}{5x} \\
&= 5 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{5x} \\
&= 5\ln e = 5
\end{aligned}$$

Zveznost funkcij

Naj bo funkcija f definirana na okolici točke a. Pravimo, da je f zvezna v točki a, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tako število $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, če je $|x - a| < \delta$.

V definiciji zveznosti funkcije f v točki a se skrivajo naslednje tri zahteve.

1. Obstajati mora limita $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

2. Funkcija mora biti definirana v točki a.

3. $L = f(a)$.

Funkcija f je torej zvezna v točki a, če je njen graf v tej točki nepretrgan. Pri tem nepretrganost grafa pomeni, da je funkcija f definirana v točki a in da obstaja ustrezna limita, ki je enaka funkcijski vrednosti $f(a)$.

Če sta funkciji f in g zvezni v točki a, potem so v tej točki zvezne tudi funkcije $f \pm g$, fg, cf, $\frac{f}{g}$. V zadnjem primeru mora biti seveda $g(a) \neq 0$.

Realna funkcija f je zvezna, če je zvezna v vsaki točki svojega definicijskega območja. Oziroma, povedano bolj ohlapno, funkcija je zvezna, če je njen graf nepretrgana krivulja.

Podajmo še nekaj primerov nezveznih funkcij.

Primer 2.26 Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} x + 2; & x \leq 1 \\ x^3; & x > 1 \end{cases} .$$

Funkcija f ni zvezna v točki $x = 1$.

Primer 2.27 Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

ni zvezna v točki $x = 0$.

Primer 2.28 Naj bo funkcija f definirana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 8; & x \leq 4 \\ \log_3(x + a + 1); & x > 4 \end{cases}.$$

Določimo parameter a tako, da bo funkcija f zvezna.
Funkcija f bo zvezna, če bo zvezna v vsaki točki svojega definicijskega območja, torej na vsej realni osi. Tako lahko takoj opazimo, da bo realno število 4 tista točka, s pomočjo katere bomo določili parameter a. Ker je $f(4) = 3 \cdot 4 - 8 = 4$, mora veljati

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \log_3(x + a + 1) = \log_3(4 + a + 1) = 4,$$

oziroma

$$5 + a = 3^4.$$

Iz tega sledi, da je $a = 76$.

2.3 Pregled elementarnih funkcij

V zadnjem delu poglavja o realnih funkcijah bomo na kratko preleteli osnovne lastnosti elementarnih funkcij. Pri tem se ne bomo spuščali v same podrobnosti, saj predvidevamo, da jih je bralec spoznal v okviru srednješolke snovi.

Polinomi

Polinomi so funkcije definirane s predpisom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kjer so $a_i \in \mathbb{R}$ (imenujemo jih *konstante*) za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. Če je $a_n \neq 0$, pravimo, da je f polinom stopnje n. Število a_n imenujemo *vodilni koeficient* polinoma. Rešitvam polinomske enačbe

$$f(x) = 0$$

pravimo *koreni* polinoma f. Običajno namesto o korenih govorimo kar o *ničlah* polinoma.

Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (ne nujno različne) ničle polinoma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Potem lahko f zapišemo kot produkt faktorjev

$$f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Če se faktor $(x - x_k)$ pojavi m-krat v razcepu, pravimo, da je x_k *m-kratna ničla* polinoma f (npr. $f(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)^m \cdots (x - x_n)$).

Primer 2.29 Polinom $f(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x$ je četrte stopnje in ga lahko zapišemo kot $f(x) = x(x - 4)(x - 1)(x + 1)$. Polinom ima štiri ničle: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Korene polinoma druge stopnje

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ poiščemo s pomočjo formul

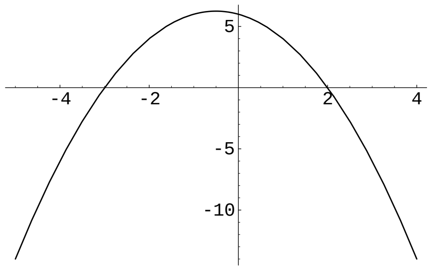
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Izraz pod korenom imenujemo *diskriminanta*

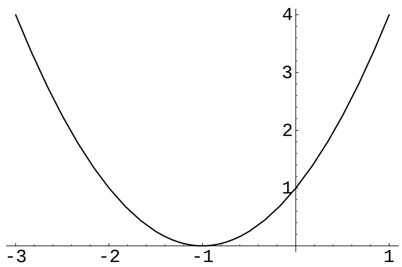
$$D = b^2 - 4ac.$$

Glede na vrednost diskriminante ločimo tri možnosti.

1. Če je $D > 0$, potem je $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$.
2. Če je $D = 0$, potem je $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$.
3. Če je $D < 0$ potem je $x_1 = \overline{x_2} \in \mathbb{C}$. V tem primeru polinom nima realnih ničel.



Slika 2.8: $f(x) = -x^2 - x + 6$, $D > 0$

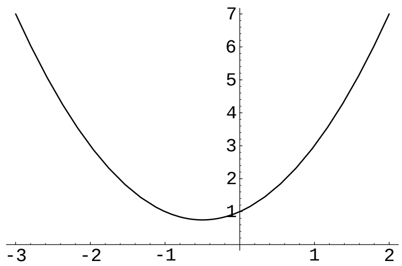


Slika 2.9: $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $D = 0$

Primer 2.30 Naj bo $f(x) = -x^2 - x + 6$. Potem je $D = \sqrt{b^2 - 4ac} = 25 > 0$. Ničli sta $x_1 = 2$ in $x_2 = -3$.

Primer 2.31 Naj bo $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Potem je $D = 0$. Ničla je $x = -1$.

Primer 2.32 Naj bo $f(x) = x^2 + x + 1$. Ker je $D < 0$, polinom nima realnih ničel.



Slika 2.10: $f(x) = x^2 + x + 1$, $D < 0$

Racionalne funkcije

Kvocient dveh polinomov p in q imenujemo *racionalna funkcija*

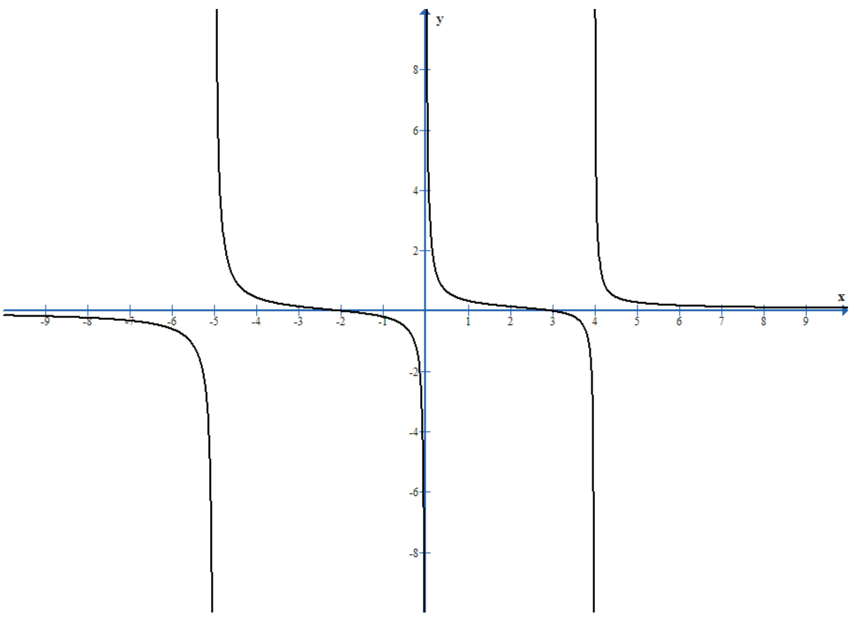
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Racionalna funkcija je definirana povsod, kjer je $q(x) \neq 0$. Ničle ima v tistih realnih številih x, ki zadoščajo enakosti $p(x) = 0$. V točkah, kjer pa je $q(x) = 0$, pa ima funkcija f pole. Asimptoto funkcije f določimo tako, da polinom p delimo s polinomom q.

Primer 2.33 Naj bo

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + x^2 - 20x}.$$

Ničli funkcije f sta $x_1 = 3$ in $x_2 = -2$. Definicijsko območje je $\mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 4\}$.



Slika 2.11: $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^3+x^2-20x}$

Eksponentna funkcija

Eksponentna funkcija je funkcija definirana s predpisom

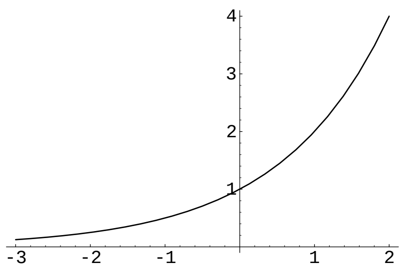
$$f(x) = a^x, \quad a > 0.$$

Ker je $1^x = 1$, naj bo osnova $a \neq 1$. Eksponentna funkcija je definirana za vsa realna števila ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$) in je povsod pozitivna ($\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}^+$).

1. Če je $\underline{a > 1}$, je $f(x) = a^x$ strogo naraščajoča funkcija, saj velja

$$x_1 < x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Primer 2.34 Graf eksponentne funkcije $f(x) = 2^x$ vidimo na sliki (2.12).

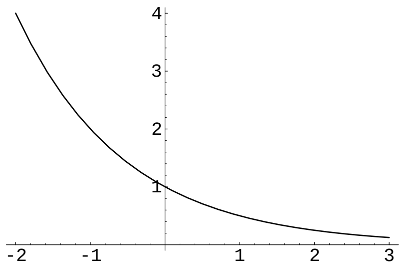


Slika 2.12: $f(x) = 2^x$

2. Če je $\underline{a < 1}$, je $f(x) = a^x$ strogo padajoča funkcija, saj velja

$$x_1 < x_2 \implies a^{x_1} > a^{x_2}.$$

Primer 2.35 Graf eksponentne funkcije $f(x) = (\frac{1}{2})^x$ vidimo na sliki (2.13).



Slika 2.13: $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

Logaritemska funkcija

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eksponentna funkcija, torej

$$f(x) = a^x, \quad a > 0, a \neq 1.$$

Ker je f bijektivna funkcija, obstaja njej inverzna funkcija $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Imenujemo jo *logaritemska funkcija* in pišemo

$$f^{-1}(x) = \log_a x.$$

Torej velja

$$f(f^{-1}(x)) = a^{\log_a x} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

in

$$f^{-1}(f(x)) = \log_a a^x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Potemtakem velja

$$y = \log_a x \iff a^y = x.$$

Logaritemska funkcija ima ničlo v točki 1, saj velja

$$0 = \log_a x \iff a^0 = 1 = x.$$

Izpeljimo nekaj lastnosti logaritma.

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $x, y > 0$,

$$a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $x, y > 0$,

$$\log_a x = \log_a (x\frac{y}{y}) = \log_a (\frac{x}{y}y) = \log_a (\frac{x}{y}) + \log_a y$$

3. $\log_a x^y = y \log_a x$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$,

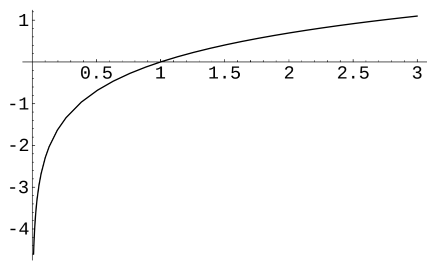
$$a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x}$$

Kadar je osnova enaka številu e govorimo o *naravnem logaritmu* in pišemo

$$\log_e x = \ln x.$$

Graf logaritemske funkcije dobimo z zrcaljenjem eksponentne funkcije preko premice $y = x$.

Primer 2.36 Graf funkcije $f(x) = \ln x$ ($\mathcal{D}_f = (0, \infty)$, $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$) vidimo na sliki (2.14).



Slika 2.14: $f(x) = \ln x$

<u>*Trigonometrijske funkcije*</u>

V nadaljevanju bomo definirali trigonometrijske funkcije sinus, kosinus, tangens in kotangens, in sicer najprej za kote na intervalu $[0, 2\pi]$.

Na enotski krožnici (s polmerom 1 in središčem v koordinatnem izhodišču) si izberemo poljubno točko $T(a, b)$. Če skozi to točko potegnemo poltrak z začetkom v koordinatnem izhodišču, je med tem poltrakom in med pozitivno smerjo osi x določen natanko en kot, ki ga označimo z x (dogovorimo se, da bomo kote vedno merili od pozitivnega dela osi x v smeri nasprotni gibanju urinega kazalca).

Kotne funkcije definiramo na naslednji način:

- kosinus $\cos x = a$,
- sinus $\sin x = b$,
- tangens $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$,
- kotangens $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$.

Za poljubne kote definiramo trigonometrijske funkcije na sledeč način:

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi),$$

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi),$$

$$\tan x = \tan(x + k\pi),$$

$$\cot x = \cot(x + k\pi),$$

kjer je k poljubno celo število ($k \in \mathbb{Z}$). Opazimo, da so vse štiri funkcije periodične, prvi dve z osnovno periodo 2π, drugi dve pa z osnovno periodo π. Prav tako lahko opazimo, da je kosinus soda funkcija,

$$\cos x = \cos(-x),$$

sinus pa liha funkcija,

$$\sin x = -\sin(-x).$$

Iz tega sledi, da sta tangens in kotangens lihi funkciji,

$$\tan x = -\tan(-x), \quad \cot x = -\cot(-x).$$

Poglejmo si še nekaj najpogostejših zvez med kotnimi funkcijami. Po Pitagorovem izreku velja, da je

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Izračunajmo

$$1+\tan^2 x = 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Podobno velja za kotangens, zato imamo zvezi

$$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Zapišimo še adicijska izreka

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

Od tod izpeljemo

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \sin(x+(-y))\\ &= \sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)\\ &= \sin x\cos y-\cos x\sin y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= \cos(x+(-y))\\ &= \cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y)\\ &= \cos x\cos y+\cos x\sin y.\end{aligned}$$

Iz adicijskih izrekov izpeljemo tudi sinus in kosinus dvojnih kotov

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= \sin(x+x)\\ &= \sin x\cos x+\cos x\sin x\\ &= 2\sin x\cos x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x+x)\\ &= \cos x\cos x-\sin x\sin x\\ &= \cos^2 x-\sin^2 x.\end{aligned}$$

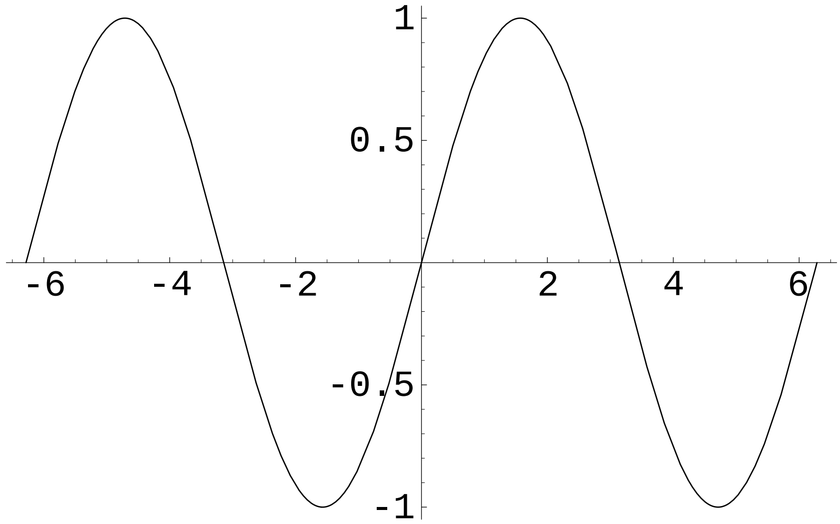
Prav tako nam adicijski izreki dajo naslednji zvezi:

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = \cos x,$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x.$$

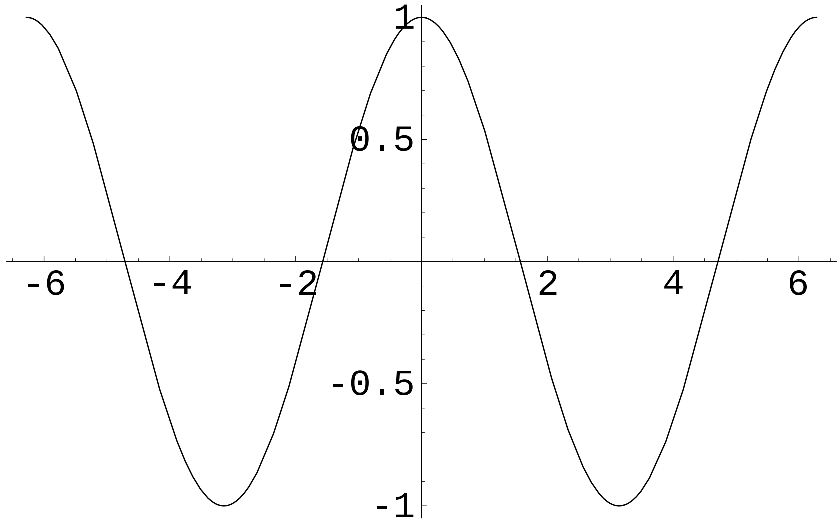
Podobno velja

$$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$
$$\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - x)} = \tan x.$$

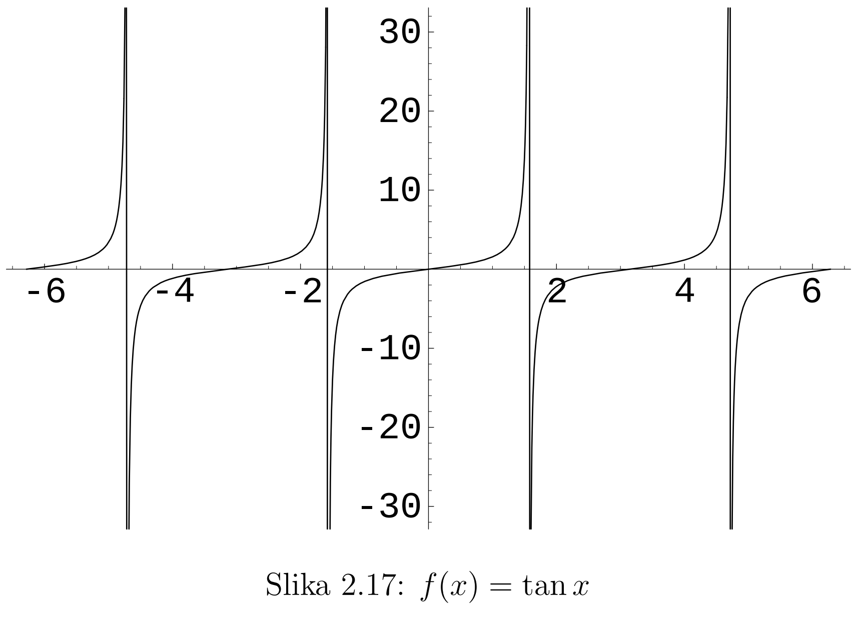
Poglejmo si grafe trigonometrijskih funkcij. Kosinus in sinus sta definirana na celi realni osi, medtem ko tangens ni definiran v ničlah cosinusa ($x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$), kotangens pa v ničlah sinusa ($x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$).



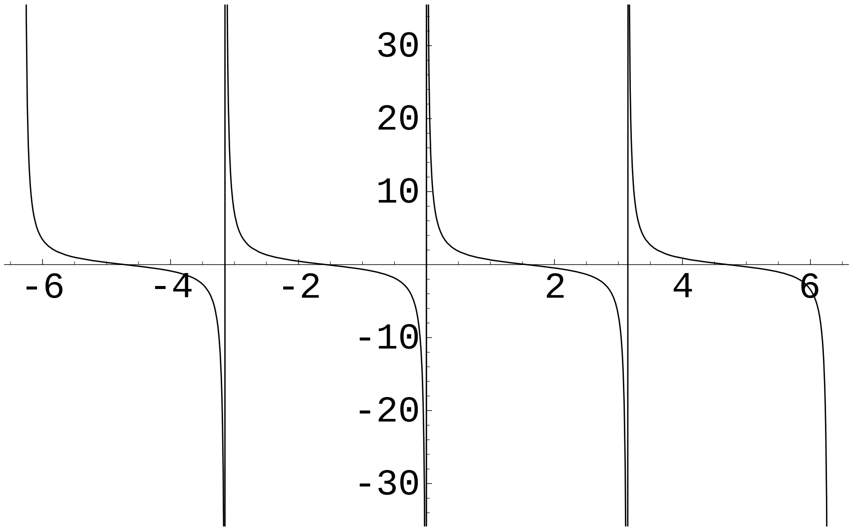
Slika 2.15: $f(x) = \sin x$



Slika 2.16: $f(x) = \cos x$



Slika 2.17: $f(x) = \tan x$



Slika 2.18: $f(x) = \cot x$

3

Zaporedja

V tem poglavju se bomo posvetili preslikavam, ki slikajo iz množice naravnih števil v množico realnih števil. Take preslikave imenujemo *zaporedja realnih števil* ali kar *zaporedja*.

3.1 Definicija zaporedij

V tem razdelku bomo spoznali definicijo zaporedij in njihove osnovne lastnosti.

Naj bo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ preslikava množice naravnih števil v množico realnih števil. Funkcija f nam torej vsako naravno število n preslika v neko realno število $f(n) \in \mathbb{R}$. Dogovorimo se, da namesto $f(n)$ pišemo enostavneje a_n, torej

$$a_1 = f(1), a_2 = f(2), \ldots, a_n = f(n), \ldots$$

Števila $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tvorijo *zaporedje*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

s prvim členom a_1, drugim členom a_2, ... ter *splošnim členom* a_n. Števila $1, 2, \ldots, n, \ldots$ so *indeksi* členov. Če imamo podan splošni člen a_n, potem izračunamo posamezne člene zaporedja tako, da namesto n vstavljamo konkretne vrednosti $1, 2, \ldots$

Zaporedje s splošnim členom a_n bomo na kratko označili z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Primer 3.1

1. $a_n = n$: $\quad (1, 2, 3, \ldots) = \{n\}_{n=1}^{\infty}$
2. $a_n = (-1)^n$: $\quad (-1, 1, -1, 1, \ldots) = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
3. $a_n = \frac{n+1}{n^2}$: $\quad (2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \ldots) = \{\frac{n+1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$

Naj bo M neka podmnožica naravnih števil. Potem členi a_m, $m \in M$, tvorijo *podzaporedje* zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Če je množica M končna, potem je podzaporedje $\{a_m\}_{m\in M}$ končno, če pa je množica M neskončna, pa je to podzaporedje neskončno. Če je zaporedje končno (ustrezna preslikava je definirana na neki končni podmnožici naravnih števil), lahko njegove člene preprosto naštejemo. S takimi zaporedji se ne bomo posebej ukvarjali. Za nas bodo pomembnejša neskončna zaporedja.

Primer 3.2 Naj bo $(-1, 1, -1, 1, \ldots) = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ in M množica vseh sodih naravnih števil. Potem je $\{a_m\}_{m\in M} = (1, 1, 1, \ldots)$.

Omejenost zaporedij

Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *navzdol omejeno*, če obstaja tako realno število m, da noben člen zaporedja ni manjši od tega števila. Število m imenujemo *spodnja meja* zaporedja. Največjo med spodnjimi mejami imenujemo *natančna spodnja meja* zaporedja.

Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *navzgor omejeno*, če obstaja tako realno število M, da noben člen zaporedja ni večji od tega števila. Število M imenujemo *zgornja meja* zaporedja. Najmanjšo med zgornjimi mejami imenujemo *natančna zgornja meja* zaporedja.

Zaporedje, ki je navzgor in navzdol omejeno, imenujemo *omejeno* zaporedje. Za omejeno zaporedje torej obstajata taki realni števili m in M, da za vsako naravno število n velja ocena

$$m \leq a_n \leq M.$$

Primer 3.3 Poiščimo natančno zgornjo in natančno spodnjo mejo zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \frac{n+2}{n+3}.$$

Zapišimo splošni člen zaporedja v obliki

$$a_n = \frac{n+3-1}{n+3} = 1 - \frac{1}{n+3}.$$

Ker se vrednost ulomka $\frac{1}{n+3}$ z večanjem števila n zmanjšuje, se členi zaporedja večajo. Tako lahko takoj rečemo, da je prvi člen zaporedja $a_1 = \frac{3}{4}$ hkrati tudi natančna spodnja meja tega zaporedja. Noben člen zaporedja ni manjši od $\frac{3}{4}$. Če pa bi k številu $\frac{3}{4}$ prišteli poljubno majhno pozitivno število ϵ , bi bil prvi člen zaporedja manjši od števila $\frac{3}{4} + \epsilon$.
Kako pa je z zgornjo mejo zaporedja? Natančna zgornja meja zaporedja je zagotovo število 1, saj noben člen zaporedja ni večji od 1. Če od števila 1 odštejemo poljubno pozitivno število ϵ, obstajajo členi zaporedja, ki so večji od števila $1 - \epsilon$. Kako pa lahko to dokažemo? Rešimo neenačbo

$$1 - \epsilon < a_n.$$

Vstavimo splošni člen v zgornjo neenakost

$$1 - \epsilon < 1 - \frac{1}{n+3}.$$

Iz tega sledi, da je

$$\frac{1}{n+3} < \epsilon,$$

oziroma

$$\frac{1}{\epsilon} < n + 3.$$

Torej lahko zapišemo
$$\frac{1}{\epsilon} - 3 < n.$$
Če je n večji od števila $\frac{1}{\epsilon} - 3$, je pripadajoči a_n večji od $1 - \epsilon$. Takih členov pa je v danem zaporedju neskončno mnogo.
Omenimo še, da je natančna spodnja meja $\frac{3}{4}$ člen zaporedja, natančna zgornja meja 1 pa ni člen zaporedja, saj so vsi členi strogo manjši od 1.

Monotonost zaporedij

Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *naraščajoče*, če za vsako naravno število n velja
$$a_n \leq a_{n+1}.$$
Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *padajoče*, če za vsako naravno število n velja
$$a_n \geq a_{n+1}.$$
Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *strogo naraščajoče*, če za vsako naravno število n velja
$$a_n < a_{n+1}.$$
Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *padajoče*, če za vsako naravno število n velja
$$a_n > a_{n+1}.$$
Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *konstantno*, če za vsako naravno število n velja
$$a_n = a_{n+1}.$$

Primer 3.4 Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n+2}{n+3}$. To zaporedje je strogo naraščajoče, saj za vsako naravno število n velja
$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{n+4} - \frac{n+2}{n+3} = \frac{1}{(n+4)(n+3)} > 0,$$
oziroma $a_{n+1} > a_n$.

Večina zaporedij pa je takih, da niso niti naraščajoča, niti padajoča. Tako je na primer zaporedje $(-1, 1, -1, 1, \ldots) = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

3.2 Konvergentna zaporedja

V tam razdelku se bomo ukvarjali z neskončnimi zaporedji, pri katerih se začno dovolj pozni členi približevati nekemu številu. Definirali bom pojem stekališča ter si pogledali, kdaj je zaporedje konvergentno.

Stekališče zaporedja

Naj bo $\epsilon > 0$ neko pozitivno realno število. Potem odprti interval $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ imenujemo ϵ-okolica točke a.

Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje. Število s imenujemo *stekališče* zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, če poljubna ϵ-okolica točke s vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja. Pri tem je pomembno omeniti, da je lahko izven te okolice končno ali neskončno mnogo členov zaporedja.

Primer 3.5 Dano naj bo zaporedje s splošnim členom

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}.$$

Pri tem zaporedju se členi s sodim indeksom obnašajo kot zaporedje s splošnim členom $\frac{n}{n+2}$, členi z lihim indeksom pa kot zaporedje s splošnim členom $-\frac{n}{n+2}$. Iz tega sledi, da ima dano zaporedje dve stekališči: 1 in -1 (členi s sodim indeksom se kopičijo pri 1, členi z lihim indeksom pa pri -1).

Naslednji izrek, katerega dokaz bomo izpustili, povezuje zgornjo definicijo z omejenimi zaporedji.

Izrek 3.1 *Vsako neskončno omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.*

Limita in konvergenca

V nadaljevanju se bomo posvetili zaporedjem, ki imajo natanko eno stekališče.

Število a je limita zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, če poljubna ϵ-okolica točke a vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja, izven te okolice pa je le končno mnogo členov zaporedja. Na kratko to zapišemo na naslednji način

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Pravimo tudi, da zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k številu a, zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentno.*

Limita, je torej edino stekališče zaporedja. Zaporedje, ki nima limite, imenujemo *divergentno* zaporedje.

Primer 3.6 Hitro lahko pokažemo, da zaporedje $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k številu 0, oziroma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Enako velja za zaporedje s splošnim členom $\frac{1}{n^k}$, kjer je k poljubno naravno število

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

V nadaljevanju si bomo ogledali nekaj lastnosti konvergentnih zaporedij, ki nam bodo pomagale pri računanju limit.

Izrek 3.2 *Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentno zaporedje z limito a. Potem velja*

1. *Če zaporedju dodamo ali odvzamemo končno mnogo členov, ima novo zaporedje spet limito a.*

2. *Vsako neskončno podzaporedje je konvergentno in ima limito a.*

3. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = k \cdot a$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{a}, \quad (a_n \neq 0, a \neq 0)$

Izrek 3.3 *Naj bosta $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentni zaporedji*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \ , \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Potem velja

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$

2. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b$

3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \quad (b_n \neq 0, b \neq 0)$

Primer 3.7 Zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{n^2 + 2n - 3}{4n^2}$$

je konvergentno, saj je

$$a_n = \frac{n^2(1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2})}{4n^2} = \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{4}$$

in je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 4} = \frac{1 + 0 - 0}{4} = \frac{1}{4} \ .$$

Primer 3.8 Izračunajmo limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \sqrt{n^2 - n} - n \ .$$

Zapišimo najprej splošni člen v obliki kvocienta

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2 - n} - n)(\sqrt{n^2 - n} + n)}{\sqrt{n^2 - n} + n} = \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n} \ .$$

Po deljenju števca in imenovalca z n dobimo

$$a_n = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1} \ .$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1} = \frac{-1}{\sqrt{1 - 0} + 1} = \frac{1}{2} \ .$$

V nadaljevanju bomo omenili še posebno število, ki je definirano s pomočjo limite.

Število e

Število, ki ga označimo s črko e, igra v matematiki in tudi v drugih vedah pomembno vlogo. To število je definirano z limito zaporedja, ki ima splošni člen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Torej

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Brez dokaza omenimo, da je zaporedje $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno in monotono rastoče.

Primer 3.9 Izračunajmo limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n+1}.$$

Zapišimo splošni člen v obliki

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Ker je $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2n}) = 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1.$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \cdot 1 = e,$$

saj je $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$.

Primer 3.10 Izračunajmo limito zaporedja s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Zapišimo splošni člen v obliki

$$a_n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}.$$

Ker je $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}) = 0$, je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = 1.$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot 1 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\cdot(-1)} = e^{-1},$$

saj je $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)} = e$.

3.3 Aritmetično in geometrijsko zaporedje

V tem razdelku bomo posvetili pozornost dvema posebnima predstavnikoma zaporedij: *aritmetičnemu in geometrijskemu zaporedju.* Ti dve zaporedji sta še posebej pomembni za ekonomiste, saj sta sestaven del finančne matematike.

Aritmetično zaporedje

Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ imenujemo *aritmetično zaporedje*, če je razlika (diferenca) dveh zaporednih členov stalna

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_4 = \ldots = a_{n+1} - a_n = \ldots = d$$

Splošni člen aritmetičnega zaporedja je torej

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Vidimo, da je vsak člen aritmetičnega zaporedja določen s prvim členom in diferenco. Torej lahko aritmetično zaporedje zapišemo kot

$$(a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_1 + (n-1)d, \ldots).$$

Če je $d > 0$, je zaporedje navzgor neomejeno, zato ni konvergentno. Podobno, če je $d < 0$, je zaporedje navzdol neomejeno in zato ni konvergentno. Če pa je $d = 0$, vsi členi sovpadajo s prvim členom in je zato zaporedje konvergentno z limito a_1.

Izračunajmo še vsoto s_n prvih n členov aritmetičnega zaporedja

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

oziroma

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$$

ali

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-1)d).$$

Po seštetju zadnjih dveh enačb dobimo

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n).$$

Dvočlenik $a_1 + a_n$ se na desni strani enakosti pojavi n-krat, zato je

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)).$$

Primer 3.11 Določimo število x tako, da bodo števila x, $2x+2$ in x^2+4x+4 prvi trije členi aritmetičnega zaporedja.

Po definiciji aritmetičnega zaporedja mora veljati

$$(2x + 2) - x = (x^2 + 4x + 4) - (2x + 2).$$

Če zgornjo enakost malo preuredimo, dobimo enačbo

$$x^2 + x = 0,$$

oziroma
$$x(x+1)=0.$$
Imamo torej dve rešitvi: $x=0$ in $x=-1$. Če je $x=0$, potem dobimo zaporedje $(0,2,4,\ldots)$. To je aritmetično zaporedje s prvim členom 0 in diferenco $d=2$. Če je $x=-1$, potem dobimo zaporedje $(-1,0,1,\ldots)$. To je aritmetično zaporedje s prvim členom -1 in diferenco $d=1$.

Geometrijsko zaporedje

Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ imenujemo *geometrijsko zaporedje*, če je kvocient dveh zaporednih členov stalen
$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\ldots=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ldots$$
Če označimo kvocient s q, je splošni člen geometrijskega zaporedja
$$a_n=a_1q^{n-1}.$$
Vidimo, da je podobno kot pri aritmetičnih zaporedjih vsak člen geometrijskega zaporedja določen s prvim členom in kvocientom. Torej lahko geometrijsko zaporedje zapišemo kot
$$(a_1,a_1q,a_1q^2,\ldots,a_1q^{n-1},\ldots)$$
Če je $0\leq q<1$, je zaporedje potenc
$$(1,q,q^2,\ldots,q^{n-1},\ldots)$$
monotono padajoče in omejeno. Torej je natančna spodnja meja m tega zaporedja tudi njegova limita. Če pomnožimo vsak člen zgornjega zaporedja s q, dobimo njegovo podzaporedje
$$(q,q^2,q^3,\ldots,q^n,\ldots)$$
Limita tega podzaporedja je po eni strani enaka limiti zaporedja $\{q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$, po drugi strani pa je njegova limita mq (glej izreke o konvergentnih zaporedjih). Tako imamo enačbo
$$m=mq,$$

iz katere dobimo $m = 0$. S tem smo pokazali, da je

$$\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$$

za $0 \leq q < 1$. Za vrednosti $-1 < q < 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$$

in zato je tudi

$$\lim_{n\to\infty} |q^n| = 0,$$

saj je $|q^n| \leq |q|^n$ za vsa naravna števila n. Torej je tudi v tem primeru

$$\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0.$$

Če pa je $q = 1$, velja

$$\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} 1^{n-1} = 1.$$

S tem smo pokazali, da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & ;\ |q| < 1 \\ 1 & ;\ q = 1 \end{array} \right. .$$

Če je $q = -1$, zaporedje

$$(1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots) = (1, -1, 1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots)$$

ni konvergentno. V primeru, ko pa je $|q| > 1$, je zaporedje s splošnim členom $|q|^n$ neomejeno in je zato geometrijsko zaporedje $\{a_1 q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ divergentno.

Poiščimo še vsoto s_n prvih n členov geometrijskega zaporedja

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Če pomnožimo obe strani enakosti s q in novo enakost odštejemo od zgornje, dobimo

$$s_n(1 - q) = a_1(1 - q^n).$$

Če je $q \neq 1$, potem je

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

če pa je $q = 1$, je

$$s_n = n a_1.$$

Primer 3.12 V geometrijskem zaporedju je četrti člen 24 in količnik 2. Zapišite splošni člen zaporedja in izračunajte vsoto prvih 5 členov zaporedja.

Po definiciji geometrijskega zaporedja velja

$$a_1 \cdot q^3 = a_1 \cdot 8 = 24.$$

Torej je $a_1 = 3$. Po zgornji enačbi je

$$s_5 = 3 \cdot \left(\frac{1 - 2^5}{1 - 2} \right) = 3 \cdot \left(\frac{-31}{-1} \right) = 93.$$

3.4 Geometrijska vrsta

Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ poljubno neskončno zaporedje. Če povežemo člene tega zaporedja z znakom $+$, dobimo **vrsto**

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$

Člen a_n imenujemo *splošni člen* vrste.

Vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ priredimo *zaporedje delnih vsot*

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n$$

$$\vdots$$

Zaporedje $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je lahko konvergentno ali pa tudi ne. Če je in je njegova limita S, pravimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentna*, število S pa imenujemo *vsota vrste*. Če pa zaporedje delnih vsot divergira, potem pa pravimo, da je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentna*.

Primer 3.13 Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ je divergentna, saj je njeno zaporedje delnih vsot $(1, 2, 3, \ldots)$ neomejeno in zato nima limite.

Iz definicije limite sledi, da morajo v konvergentni vrsti posamezni členi konvergirati proti 0, oziroma

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ .$$

Pri tem poudarimo, da je to samo potreben pogoj, ne pa tudi zadosten pogoj za konvergenco vrste. Vzemimo na primer vrsto

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Ocenimo n-to delno vsoto

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \ .$$

Zaporedje delnih vsot torej z naraščajočim n raste preko vseh meja in zato vsota ni konvergentna. Po drugi strani pa je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \ .$$

V nadaljevanju bomo posvetili pozornost le posebni vrsti in sicer *geometrijski vrsti*. Prav zato se tukaj ne bomo ukvarjali s splošno teorijo. Tako tudi ne bomo omenili kriterijev, ki nam pomagajo presoditi, ali je neka vrsta konvergentna ali ne. Radovedni bralci pa se seveda lahko s splošno teorijo seznanijo v navedeni literaturi.

Naj bo $(a, aq, aq^2, \ldots) = \{aq^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ geometrijsko zaporedje s prvim členom a in kvocientom q. Potem vrsto

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = a \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

imenujemo *geometrijska vrsta*, q pa *kvocient* geometrijske vrste.

Vemo že, da je n-ta delna vsota geometrijskega zaporedja $\{aq^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ enaka

$$s_n = a\frac{1 - q^n}{1 - q} \ .$$

Naj bo $|q| < 1$. Potem je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, in je zato

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q} \ .$$

Če pa je $|q| \geq 1$, limita $\lim_{n\to\infty} q^n$ ne obstaja in zato tudi limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ ne obstaja. Torej, če je $|q| < 1$, potem je geometrijska vrsta $a\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konvergentna in je njena vsota $S = \frac{a}{1-q}$, če pa je $|q| \geq 1$, je vrsta $a\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ divergentna.

Primer 3.14 Ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergentna?

Hitro lahko opazimo, da je zgornja vrsta geometrijska vrsta s prvim členom $\frac{1}{2}$ in kvocientom $q = \frac{1}{2}$. Ker je izpolnjen pogoj $|q| = \frac{1}{2} < 1$, je vrsta konvergentna, njena vsota pa je

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Primer 3.15 Ugotovimo, za katera realna števila x je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$$

konvergentna, ter izračunajmo njeno vsoto.
Zgornja vrsta je seveda geometrijska vrsta s prvim členom in kvocientom $a = q = \frac{x-1}{x+1}$. Konvergentna je za vsa realna števila x, ki zadoščajo naslednjemu pogoju

$$|q| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$$

oziroma

$$|x-1| < |x+1| \ .$$

Zgornjo neenakost analiziramo.

1. Za $x \leq -1$ neenačba preide v neenačbo $1 - x < -x - 1$, ki ne velja.

2. Za $-1 < x < 1$ neenačba preide v neenačbo $1 - x < x + 1$, iz katere dobimo $0 < x$.

3. Za $x \geq 1$ neenačba preide v neenačbo $x - 1 < x + 1$, ki ne velja.

Torej naši neenačbi ustrezajo vsa pozitivna realna števila x. Iz tega sledi, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x-1}{x+1})^n$ konvergentna za vse $x > 0$. Njena vsota je po obrazcu

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{x-1}{x+1}} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+1-x+1} = \frac{x-1}{2} \ .$$

4

Odvod

V tem poglavju se bomo ukvarjali s tako imenovanim *diferencialnim računom*. Spoznali bomo definicijo odvoda, njegov geometrijski pomen in tehnike računanja. S pomočjo odvoda bomo analizirali realne funkcije ter poglavje zaključili s praktičnimi primeri optimizacijskih nalog.

4.1 Definicija in geometrijski pomen odvoda

Naj bo f neka realna funkcija in x_0 število iz definicijska območja funkcije f. V praksi pogosto opazujemo dinamiko funkcije f na nekem majhnem intervalu od x_0 do $x_0 + h$. Označimo prirastek neodvisne spremenljivke x z

$$\Delta x = h$$

in prirastek odvisne spremenljivke y z

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Nas bo v nadaljevanju zanimalo predvsem razmerje (količnik) med prirastkom odvisne in neodvisne spremenljivke

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

in ga imenujemo *diferenčni količnik*.

Če obstaja limita diferenčnega količnika

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0},$$

pravimo, da je funkcija f v točki x_0 *odvedljiva*. Vrednost limite $f'(x_0)$ imenujemo *odvod* funkcije f v točki x_0. Če je funkcija odvedljiva v vsaki točki svojega definicijskega območja, pravimo, da je *odvedljiva*.

Naj bo f odvedljiva funkcija. Potem je na definicijskem območju s predpisom

$$x\mapsto f'(x)$$

definirana nova preslikava, ki ji rečemo *odvod funkcije f*.

Primer 4.1 Pokažimo, da je funkcija $f(x)=x^3$ odvedljiva na celi realni osi. Če upoštevamo zgornjo definicijo, je potrebno pokazati, da za vsako realno število x obstaja limita

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}.$$

Torej je

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2.$$

Zgornji račun velja pri poljubni vrednosti neodvisne spremenljivke x, s čimer smo trditev pokazali.

Podobno kot v zgornjem primeru bi prišli do zaključka, da je za vsak $n\in\mathbb{N}$

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Potenčne funkcije so torej odvedljive na celi realni osi.

Geometrijski pomen odvoda

Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x_0. Potem je enačba sekante na graf funkcije f skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0+h, f(x_0+h))$ enaka

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - h}(x - x_0) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

Če si narišemo primerno sliko in opazujemo, kaj se dogaja s šopom sekant, ko gre h po pozitivnih ali negativnih vrednostih proti 0, lahko hitro opazimo, da je z vrednostjo odvoda v točki x_0 enolično določen smerni koeficient tiste premice, v katero preideta oba dela omenjenega šopa sekant. Premico, ki jo dobimo po opisanem limitnem postopku, imenujemo *tangenta* na graf funkcije f v točki x_0.

Torej velja ugotovitev: Če je funkcija f v proučevani točki x_0 odvedljiva, je z vrednostjo odvoda enolično določen smerni koeficient tangente na graf funkcije v proučevani točki. Enačba tangente je

$$y - f(x_0) = k(x - x_0)$$

oziroma

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\ .$$

Ko bomo znali računati z odvodom, bomo uporabili zgornjo ugotovitev v konkretnih primerih. Pa se kar lotimo pravil, ki nam bodo pomagala pri računanju.

4.2 Računanje odvoda

Odvod funkcije $y = f(x)$ izračunamo načeloma tako, da upoštevamo zgoraj zapisano definicijo (izračunamo limito ustreznega diferenčnega količnika). Iz definicije pa lahko izpeljemo naslednja splošnejša pravila.

1. $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$,

2. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$,

3. $(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$,

4. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,

5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Z neposrednim računanjem po definiciji in uporabo zgoraj zapisanih pravil dobimo naslednjo tabelo odvodov najpomembnejših elementarnih funkcij:

1. $y = k \implies y' = 0$,

2. $y = x^n \implies y' = nx^{n-1}$,

3. $y = a^n \implies y' = a^n \ln a$,

4. $y = e^n \implies y' = e^n$,

5. $y = \log_a x \implies y' = \frac{1}{x \ln a}$,

6. $y = \ln x \implies y' = \frac{1}{\ln x}$.

Zapišimo še odvode trigonometrijski in ciklometričnih funkcij:

1. $y = \sin x \implies y' = \cos x$,

2. $y = \cos \implies y' = -\sin x$,

3. $y = \mathrm{tg}x \implies y' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

4. $y = \mathrm{ctg}x \implies y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,

5. $y = \arcsin x \implies y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

6. $y = \arccos \implies y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

7. $y = \mathrm{arctg}x \implies y' = \frac{1}{1+x^2}$,

8. $y = \mathrm{arcctg}x \implies y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Primer 4.2 Izračunajmo odvod funkcije

$$y = \sqrt{x}.$$

Če funkcijo napišemo na naslednji način

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

je po zgornjem pravilu

$$y' = x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ .$$

Primer 4.3 Naj bo $f(x) = x^3 \ln x + \sqrt{x}$. Potem je

$$f'(x) = (x^3 \ln x + x^{\frac{1}{2}})' = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} + \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} = x^2(3 \ln x + 1) + \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}}.$$

Primer 4.4 Naj bo $f(x) = \frac{x^2-1}{\cos x}$. Potem je

$$f'(x) = (\frac{x^2-1}{\cos x})' = \frac{2x \cos x - x^2(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{x(2 \cos x + x \sin x)}{\cos^2 x}.$$

Odvod inverzne funkcije

Naj bo $x = g(y)$ inverzna funkcija odvedljive funkcije $y = f(x)$ in naj bosta oba odvoda $\frac{dy}{dx}$ in $\frac{dx}{dy}$ različna od nič. Potem velja

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

oziroma

$$x' = \frac{1}{y'}\ .$$

Odvod posredne funkcije

Naj bo $y = f(g(x))$ in naj bosta $u = g(x)$ in $y = f(u)$ odvedljivi funkciji. Potem velja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

oziroma

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Primer 4.5 Izračunajmo odvod funkcije

$$y = \ln \sqrt{1 - x^3}.$$

Po zgornjem pravilu je

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}} \cdot (-3x^2) = -\frac{3x^2}{2(1-x^3)} \ .$$

Ker je odvod naravnega logaritma x recipročna vrednost te spremenljivke, je odvod poljubnega izraza recipročna vrednost tega izraza (v našem primeru $\sqrt{1-x^3}$). Ker pa v tem izrazu še nastopa x (izraz je funkcija neodvisne spremenljivke x), recipročno vrednost izraza pomnožimo z njegovim odvodom. Tako postopno nadaljujemo dokler ne pridemo do neodvisne spremenljivke.

Primer 4.6 Naj bo $f(x) = e^{x^4+x^3+2}$. Potem je

$$f'(x) = e^{\boxed{x^4 + x^3 + 2}}(\boxed{x^4 + x^3 + 2})' = e^{x^4+2x^3+7}(4x^3 + 3x^2).$$

Primer 4.7 Naj bo $f(x) = \sin(x^{\frac{2}{3}} + x)$. Potem je

$$f'(x) = \cos(\boxed{x^{\frac{2}{3}} + x})(\boxed{x^{\frac{2}{3}} + x})' = (\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}} + 1)\cos(x^{\frac{2}{3}} + x).$$

Oglejmo si še dva primera uporabe geometrijskega pomena odvoda.

Primer 4.8 Zapišimo enačbo vzporednice k tangenti na graf funkcije

$$f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^2 + 7x + 6}$$

v točki $T(1, y_0)$, ki poteka skozi koordinatno izhodišče.
Ker je smerni koeficient tangente na graf funkcije v točki $T(1, y_0)$ enak odvodu funkcije v izbrani točki, moramo najprej izračunati odvod

$$f'(x) = \frac{32x^2 + 46x - 31}{(x^2 + 7x + 6)^2}.$$

Če vstavimo v zgornjo enakost $x = 1$, dobimo

$$k_t = f'(1) = \frac{47}{196}.$$

Torej je smerni koeficient tangente $\frac{47}{196}$ in je enačba tangente oblike

$$y = \frac{47}{196}x + n.$$

Ker pa imata vzporedni premici enak naklonski koeficient in iščemo premico skozi točko $O(0, 0)$, velja

$$0 = \frac{47}{196} \cdot 0 + n,$$

iz česar sledi, da je $n = 0$. Enačba vzporednice je torej

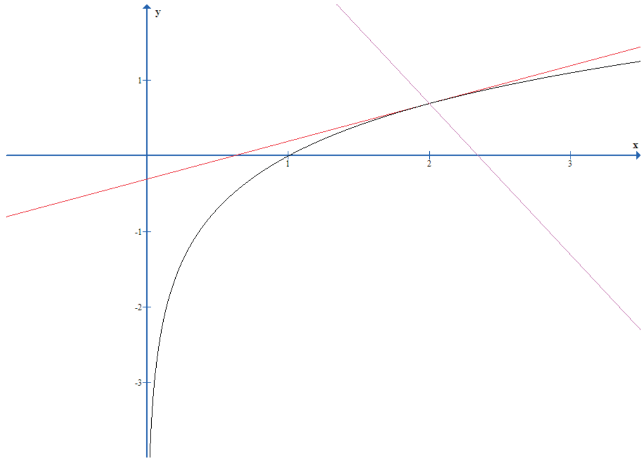
$$y = \frac{47}{196}x.$$

Primer 4.9 Naj bo $f(x) = \ln x$. Zapišimo enačbo tangente in normale na graf funkcije f v točki $x_0 = 2$.
Ker je $f'(x) = \frac{1}{x}$, je smerni koeficient tangente $f'(2) = \frac{1}{2}$, smerni koeficient normale pa $-\frac{1}{f'(2)} = -2$. Enačba tangente je

$$y = \frac{1}{2}(x - 2) + \ln 2,$$

enačba normale pa

$$y = -2(x - 2) + \ln 2.$$



Slika 4.1: $y = \ln x$, $y = \frac{1}{2}(x-2) + \ln 2$, $y = -2(x-2) + \ln 2$

Odvodi višjega reda

Če je za odvedljivo funkcijo f tudi njen *prvi odvod* f' odvedljiva funkcija, potem s ponovnim odvajanjem dobimo odvod drugega reda, oziroma *drugi odvod* funkcije f in pišemo f''. Analogno dobimo tretji odvod f''', ... Torej je n-ti odvod funkcije f odvod funkcije $f^{(n-1)}$, oziroma

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) \ .$$

Primer 4.10 Izračunajmo tretji odvod funkcije $f(x) = x^5$.
Po pravilu za odvajanje potenc je

$$f'(x) = 5x^4,$$

$$f''(x) = 20x^3$$

in

$$f'''(x) = 60x^2.$$

Sami lahko doma preverite, da ima funkcija f vse odvode od šestega dalje enake 0. V splošnem imajo vsi polinomi le končno mnogo od nič različnih odvodov, saj se z vsakim odvajanjem stopnja polinoma za eno zniža.

Primer 4.11 Naj bo $f(x) = xe^{x+1}$. Izračunajmo drugi odvod funkcije f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x+1} + xe^{x+1} = e^{x+1}(1+x) \\ f''(x) &= e^{x+1}(1+x) + e^{x+1}(1+x) = 2e^{x+1}(1+x). \end{aligned}$$

4.3 Diferencial

Diferencial neodvisne spremenljivke x je enak njenemu prirastku, torej

$$dx = \Delta x.$$

Diferencial funkcije f pa je produkt

$$dy = df = f'(x)dx.$$

Pri majhnih spremembah neodvisne spremenljivke x je pri odvedljivih funkcijah tangenta blizu grafa funkcije. Zato lahko diferencial funkcije df uporabimo kot približek za spremembo funkcijske vrednosti Δf, ki jo povzroči sprememba neodvisne spremenljivke za dx. Zapisano z matematičnimi znaki

$$\Delta f \approx df = f'(x)dx$$

oziroma

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx\ .$$

Kako pa to pravilo uporabimo v praktičnih primerih? Za začetno vrednost spremenljivke x izberemo tako vrednost, da je računanje funkcijske vrednosti in vrednosti odvoda funkcije v tej točki čim enostavneje. Poleg tega naj bo dx čim manjši, da bo aproksimacija dobra.

Primer 4.12 S pomočjo diferenciala izračunajmo približno vrednost $\sqrt{98}$.

Funkcija, katere vrednost ocenjujemo, je $\sqrt{x}$, njen odvod pa $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Torej ima v našem primeru zgornji obrazec obliko

$$\sqrt{x + dx} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx\ .$$

Točka, v kateri znamo izračunati vrednost funkcije in njenega odvoda, je $x = 100$. Ustrezna sprememba neodvisne spremenljivke je tedaj $dx = -2$. Tako je

$$\sqrt{98} \approx \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}}(-2) = 10 - \frac{1}{10} = 9,9 \ .$$

4.4 Analiza realnih funkcij

V tem razdelku se bomo spopadli z izreki, s katerimi bomo opisali najpomembnejše lastnosti odvedljivih funkcij. S Taylorjevo vrsto bomo spoznali aproksimacijo poljubne (dovoljkrat odvedljive) funkcije s pomočjo polinoma. Dobljene rezultate bomo na koncu uporabili pri analizi realnih funkcij. Tako bomo ilustrirali uporabnost diferencialnega računa in se na praktični ravni lotili risarskih nalog. Omenimo še, da bomo dokaze zapisanih izrekov izpustili, saj bo za nas pomembna predvsem praktična uporaba odvoda pri reševanju ekonomskih problemov.

Bralec lahko sam doma poskusi dokazati naslednji izrek.

Izrek 4.1 *V vseh točkah, kjer je funkcija f odvedljiva, je tudi zvezna.*

Izrek 4.2 *(Fermat) Naj bo funkcija f definirana na intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b) ter naj bo $c \in (a, b)$. Če funkcija f zavzame v točki c lokalni maksimum ali lokalni minimum, potem je $f'(c) = 0$.*

Fermatov izrek nam pove, da ima tangenta na graf funkcije f v lokalnem maksimumu oziroma lokalnem minimumu smerni koeficient 0, torej je vzporedna z abscisno osjo. Točkam, v katerih je prvi odvod enak 0, imenujemo *stacionarne točke.* Velja torej: *če ima funkcija f v točki c lokalni ekstrem, potem je c stacionarna točka.* Obratno ni nujno res.

Primer 4.13 Naj bo $f(x) = x^3$. Potem je $f'(x) = 3x^2$ in $f'(x) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = 0$. Vendar v stacionarni točki $x = 0$ funkcija f nima lokalnega ekstrema.

S pomočjo Fermatovega izreka lahko dokažemo različne *izreke o povprečni vrednosti.*

Izrek 4.3 *(Rolle) Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na intervalu (a, b). Če je $f(a) = f(b)$, tedaj obstaja vsaj ena taka točka $c \in (a, b)$, da je $f'(c) = 0$.*

Izrek 4.4 *(Lagrange) Naj bo funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$ in odvedljiva na intervalu (a, b). Potem obstaja taka točka $c \in (a, b)$, da je*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Izrek 4.5 *(Cauchy) Naj bosta funkciji f in g zvezni na intervalu $[a, b]$ in odvedljivi na intervalu (a, b). Potem obstaja taka točka $c \in (a, b)$, da je*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Taylorjeva formula

V nadaljevanju bomo zapisali Taylorjevo formulo, s pomočjo katere bomo aproksimirali odvedljive funkcije s polinomi. To nam bo pomagalo pri računanju vrednosti zapletenih funkcij.

Izrek 4.6 *(Taylorjeva formula) Naj bo f vsaj $n+1$ krat odvedljiva funkcija na odprtem intervalu I in naj bo $a \in I$. Potem za vsak $x \in I$ obstaja tak $z \in I$, ki leži med a in x, da je*

$$f(x) = f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x - a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x - a)^n}{n!} + R_n(x),$$

kjer je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)(x - a)^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

V Taylorjevi formuli imenujemo $R_n(x)$ ostanek, izraz na desni pa razvoj funkcije f v Taylorjevo formulo v okolici točke a. Če je f polinom, je $R_n(x) = 0$ in je

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x - a)^k}{k!}.$$

Taylorjevo formulo imenujemo tudi *Taylorjeva vrsta*. Če je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, je vrsta konvergentna.

Primer 4.14 Razvijmo funkcijo $f(x) = e^{-x}$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $a = 0$. Izračunajmo najprej odvode:

$$f'(x) = -e^{-x},\ f''(x) = e^{-x},\ f'''(x) = -e^{-x}, \dots$$

Izračunajmo še vrednosti v točki 0

$$f(0) = 1,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = 1,\ f'''(0) = -1, \dots$$

Torej je Taylorjeva vrsta za funkcijo f

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Zapišimo še nekaj primerov razvoja funkcij v Taylorjevo vrsto v okolici točke $a = 0$.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$
4. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \dots$
5. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$

V nadaljevanju bomo povezali prvi odvod odvedljivih funkcij z monotonostjo.

Izrek 4.7 *Naj bo funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva. Tedaj velja*

1. $f'(x) \geq 0$ *za vsak* $x \in (a, b) \Longleftrightarrow f$ *naraščajoča,*
2. $f'(x) > 0$ *za vsak* $x \in (a, b) \Longrightarrow f$ *strogo naraščajoča,*
3. $f'(x) \leq 0$ *za vsak* $x \in (a, b) \Longleftrightarrow f$ *padajoča,*
4. $f'(x) < 0$ *za vsak* $x \in (a, b) \Longrightarrow f$ *strogo padajoča.*

Naslednji primer pokaže, zakaj v drugi točki izreka ne velja "ekvivalenca".

Primer 4.15 Naj bo $f(x) = x^3$. Potem je $f'(x) = 3x^2$. Funkcija je strogo naraščajoča na definicijskem območju, vendar ne velja $f'(0) > 0$.
Torej, če je f strogo naraščajoča funkcija na intervalu I, ne sledi nujno, da je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in I$. Podobno, če je f strogo padajoča na intervalu I, ne sledi nujno, da je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in I$.

Kako pa poiščemo in določimo lokalne minimume in lokalne maksimume funkcije?

Izrek 4.8 *Naj bo funkcija f $(n+1)$-krat zvezno odvedljiva na neki okolici točke x_0 in naj bo $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ter $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potem velja*

1. *če je n sodo število in je $f^{(n)}(x_0) < 0$, potem ima f v x_0 lokalni maksimum,*
2. *če je n sodo število in je $f^{(n)}(x_0) > 0$, potem ima f v x_0 lokalni minimum,*
3. *če je n liho število, potem f v x_0 nima lokalnega ekstrema (v tej točki je prevoj funkcije f).*

Za nas bo pomembna predvsem naslednja trditev.

Naj bo f odvedljiva na neki okolici točke x_0 in naj bo $f'(x_0) = 0$. Tedaj velja

1. če je $f''(x_0) < 0$, potem ima f v x_0 lokalni maksimum,
2. če je $f''(x_0) > 0$, potem ima f v x_0 lokalni minimum.

Primer 4.16 Poiščimo lokalne ekstreme funkcije

$$f(x) = xe^{3x+1}.$$

Najprej poiščimo stacionarne točke. Ker je $f'(x) = e^{3x+1}(1 + 3x)$, je $x = -\frac{1}{3}$ rešitev enačbe $f'(x) = 0$.
Ker je $f''(x) = e^{3x+1}(6 + 9x)$, je $f''(-\frac{1}{3}) > 0$, iz česar sledi, da ima f v $x = -\frac{1}{3}$ lokalni minimum.

Tudi ukrivljenost funkcij (konveksnost, konkavnost) je povezana z odvodom.

Izrek 4.9 *Naj bo funkcija f dvakrat odvedljiva na odprtem intervalu I. Potem velja*

1. $f''(x) \geq 0$ *za vsak* $x \in I \iff f$ *je konveksna na* I.
2. $f''(x) \leq 0$ *za vsak* $x \in I \iff f$ *je konkavna na* I.

Izrek 4.10 *Če odvedljiva funkcija v stacionarni točki nima lokalnega ekstrema, ima v njej prevoj.*

Primer 4.17 Naj bo $f(x) = xe^{3x+1}$. Določimo intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f.
Ker je $f''(x) = e^{3x+1}(6 + 9x)$, je po zgornji definiciji funkcija f konveksna na intervalu $[-\frac{2}{3}, \infty)$ ter konkavna na intervalu $(-\infty, -\frac{2}{3}]$. V točki $x = -\frac{2}{3}$ ima funkcija f prevoj.

Zdaj imamo že zadosti informacij, da se lahko lotimo podrobne analize odvedljivih funkcij.

Primer 4.18 Podrobno analizirajmo racionalno funkcijo z enačbo

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

in skicirajmo njen graf.

Poiščimo najprej ničle funkcije

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2} = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Ničla je torej $x = 1$ in je prvega reda. Ulomljena racionalna funkcija ima pole v ničlah svojega imenovalca (seveda ob predpostavki, da polinoma v števcu oziroma imenovalcu nimata skupnih linearnih faktorjev, ki je v našem primeru očitno izpolnjena). Ker je

$$x - 2 \iff x = -2,$$

ima funkcija f v $x = -2$ pol prvega reda. Kot že vemo, je pol edina točka na realni osi, v kateri ulomljena racionalna funkcija ni definirana, tako da velja

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

Če polinoma $x-1$ in $x+2$ delimo, dobimo

$$\frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \ .$$

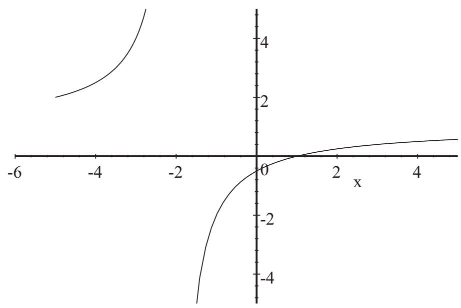
Torej je asimptota grafa funkcije f vodoravnica $y = 1$.
Lotimo se sedaj analize s sredstvi diferencialnega računa. Za prvi odvod izračunamo, da velja

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0,$$

kar pomeni, da je funkcija povsod na definicijskem območju naraščajoča. Prav tako lahko opazimo, da funkcija nima lokalnih ekstremov, saj je $f'(x) \neq 0$ za vse $x \in D_f$. Kako pa je s prevoji, konveksnostjo in konkavnostjo? Izračunajmo drugi odvod

$$f''(x) = -\frac{6}{(x+2)^3} \ .$$

Ker je $f''(x) > 0$ za vsa realna števila x, ki so manjša od -2, je na intervalu $(-\infty, -2)$ funkcija konveksna. Podobno je $f''(x) < 0$ za vsa realna števila x, ki so večja od -2. Torej je na intervalu $(-2, \infty)$ funkcija konkavna. Ker drugi odvod nikjer na definicijskem območju D_f ni enak nič, funkcija f nima prevojev.
Zdaj imamo zbrane vse informacije, potrebne za risanje grafa funkcije f.



Slika 4.2: $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

Primer 4.19 Podrobno analizirajmo racionalno funkcijo z enačbo

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$$

in skicirajmo njen graf.

Najprej poiščimo ničle in pole dane funkcije. Očitno ima funkcija samo eno ničlo v točki $x = 0$, ki je tretjega reda, ter nobenega pola, saj je $x^2 + 3 \neq 0$ za vsa realna števila x. Iz tega sledi, da je $D_f = \mathbb{R}$. Ker je

$$\frac{x^3}{x^2+3} = x - \frac{3x}{x^2+3} \ ,$$

je simetrala lihih kvadrantov $y = x$ asimptota.
Z odvajanjem je v tem primeru nekoliko več dela, je pa dobra vaja v premetavanju izrazov in izpostavljanju skupnih faktorjev, ki naj ga bralec opravi lastnoročno. Torej,

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2+9)}{(x^2+3)^2} \geq 0$$

za vsa realna števila x. Iz tega sledi, da je funkcija povsod naraščajoča. Ker je

$$f'(x) = 0 \iff x = 0,$$

je $T_1(0,0)$ stacionarna točka. Izračunajmo še drugi odvod

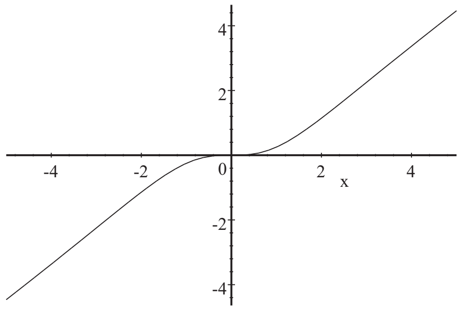
$$f''(x) = \frac{6x(3+x)(3-x)}{(x^2+3)^3} \ .$$

Ker je $6x(3+x)(3-x) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = 0$ ali $x = -3$ ali $x = 3$, so točke $T_1(0,0)$, $T_2(-3, f(-3))$ in $T_3(3, f(3))$ prevoji obravnavane funkcije. Na območju $(-\infty, -3) \cup (0,3)$ je funkcija konveksna, saj za $x \in (-\infty, -3) \cup (0,3)$ velja $f''(x) > 0$. Podobno je funkcija na intervalu $(-3,0) \cup (3,\infty)$ konkavna, saj je tam $f''(x) < 0$.

Zdaj se lahko lotimo risanja grafa funkcije.

4.5 Optimizacijske naloge

V tem poglavju bomo predstavili nekaj možnosti za uporabo matematičnih orodij pri iskanju optimalnih (minimalnih ali maksimalnih) vrednosti funkcij.



Slika 4.3: $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$

Da bomo lahko vse probleme rešili z metodami iz diferencialnega računa, ki smo jih spoznali, bodo vse funkcije zadosti pohlevne in odvedljive.

Primer 4.20 Poiščimo za funkcijo $f(x) = x^4 - 2x^2 + 6$ globalni minimum na intervalu $[-2, 0]$.

Poiščimo najprej stacionarne točke funkcije f

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0,$$

oziroma

$$4x(x^2 - 1) = 0.$$

Rešitve zgornje enačbe so $x = 0, 1, -1$. Ker pa iščemo minimum na intervalu $[-2, 0]$, sta za nas zanimivi le točki $x = -1$ in $x = 0$. Izračunajmo še drugi odvod funkcije f

$$f''(x) = 12x^2 - 4.$$

Ker je $f''(0) = -4 < 0$ in $f''(-1) = 8 > 0$, doseže funkcija f minimum le za $x = -1$. Iskana točka je torej $T(-1, 5)$.

Primer 4.21 Med vsemi pari števil, katerih vsota je S, najdimo tisti par, katerega vsota kvadratov je najmanjša.

Označimo iskani števili z x in y. Vemo torej, da je $x + y = S$. Iz te enakosti lahko izrazimo y: $y = S - x$. Poleg tega pa mora biti vsota

$$x^2 + y^2 = x^2 + (S - x)^2 = 2x^2 - 2xS + S^2$$

najmanjša. Iščemo torej minimum funkcije $f(x) = 2x^2 - 2xS + S^2$. Če to funkcijo odvajamo, dobimo $f'(x) = 4x - 2S$. Če prvi odvod enačimo z 0, dobimo $x = \frac{S}{2}$. Drugi odvod funkcije f je $f''(x) = 4$ in velja $f''(\frac{S}{2}) = 4 > 0$. Torej funkcija f doseže minimum v točki $x = \frac{S}{2}$. Iz tega sledi, da je iskani par $x = y = \frac{S}{2}$.

Primer 4.22 Med vsemi kvadri, pri katerih je dolžina dvakratnik širine, vsota višine, dolžine in širine pa je enaka 900, poiščimo tistega, ki ima največjo prostornino.

Označimo širino kvadra z x, dolžino z y in višino z z. Iz podatkov vemo, da je $y = 2x$ in $x + y + z = 900$. Če v zadnjo enakost vstavimo $y = 2x$, potem je $x+2x+z = 900$, oziroma $z = 900-3x$. Prostornina kvadra je enaka produktu $x \cdot y \cdot z$, oziroma $x \cdot 2x \cdot (900 - 3x) = 1800x^2 - 6x^3$. Iščemo torej maksimum funkcije $f(x) = 1800x^2 - 6x^3$. Izračunajmo prvi odvod

$$f'(x) = 3600x - 18x^2$$

in ga enačimo z 0

$$3600x - 18x^2 = 18x(200 - x) = 0.$$

Ker je x širina kvadra, je edina smiselna rešitev $x = 200$. Z drugi odvodom lahko preverimo, da funkcija f res zavzame maksimum pri $x = 200$ ($f''(200) < 0$). Torej ima iskani kvader širino 200, dolžino 400 in višino 300.

Zadnji primer nam bo pokazal, kako lahko metode iz diferencialnega računa uporabimo pri ugotavljanju učinkovitosti in uspešnosti poslovanja. Primer je povzet po (Čibej, 2005).

Primer 4.23 Neko podjetje proizvaja en sam izdelek. Odvisnost stroškov od obsega proizvodnje q je opisana s funkcijo

$$C(q) = 2q^2 + 16000000,$$

povpraševanje po njegovih proizvodih pa je dano z enačbo

$$q = -\frac{1}{2}p + 10000,$$

kjer p označuje ceno ene enote proučevanega proizvoda. Zanima nas, kakšen je optimalen obseg proizvodnje.

Kaj v tem primeru sploh pomeni izraz *optimalen*? Zavedati se moramo, da imajo različni ljudje lahko povsem različne cilje in s tem tudi različne poglede na optimalen obseg proizvodnje. V našem primeru bomo za namensko funkcijo izbrali kar razliko med izkupičkom od prodaje P in pripadajočimi stroški C, kar bi lahko imenovali kar dobiček D. Ta je odvisen od obsega proizvodnje q. Pri tem privzamemo, da celotno proizvedeno količino izdelkov tudi prodamo. Imamo torej enakost

$$D(q) = P(q) - C(q) = q \cdot p - C(q).$$

Ceno p lahko izrazimo iz enačbe povpraševanja

$$p = -2q + 20000,$$

kar nam da za dobiček naslednjo funkcijo obsega proizvodnje

$$D(q) = q \cdot (-2q + 20000) - (2q^2 + 16000000)$$

oziroma

$$D(q) = -4q^2 + 20000q - 16000000.$$

Zgornja funkcija ima stacionarno točko pri tistem obsegu proizvodnje, kjer je njen odvod enak 0

$$D'(q) = -8q + 20000 = 0,$$

iz česar sledi, da je $q = 2500$. Ker je $D''(2500) = -8$, ima funkcija D v stacionarni točki maksimum. Zato je

$$= D(2500) = -4 \cdot 2500^2 + 20000 \cdot 2500 - 16000000 = 9000000$$

maksimalni dobiček, ki ga podjetje pri danih pogojih lahko doseže, če proizvaja in seveda tudi prodaja 2500 enot svojega proizvoda; prodaja ga v skladu z enačbo povpraševanja po ceni

$$p(2500) = -2 \cdot 2500 + 20000 = 15000$$

za enoto.

V realnosti pa nas dostikrat zadovolji že to, da smo z obsegom proizvodnje na intervalu, kjer pokrivamo vse stroške

$$P(q) \geq C(q)$$

oziroma

$$-2q^2 + 20000q \geq 2q^2 + 16000000,$$

od koder dobimo z reševanjem zgornje kvadratne neenačbe interval

$$1000 \leq q \leq 4000.$$

5

Matrike

Teorija matrik je zagotovo eno izmed najpomembnejših področij matematike, ki v zadnjih desetletjih pridobiva na pomenu tudi na področju ekonomije, managementa, družboslovnih in drugih naravoslovnih znanosti, saj lahko s pomočjo matrik na enostaven način uredimo najrazličnejše podatke. Tako bomo zadnje poglavje v tem učbeniku posvetili matrikam. Spoznali bomo njihove osnovne lastnosti, seštevanje, odštevanje in množenje matrik, determinante matrik in inverzno matriko. Poglavje bomo zaključili z reševanjem sistemov linearnih enačb.

5.1 Osnovne lastnosti matrik

Pravokotno shemo števil, razvrščenih v vrstice in stolpce, imenujemo *matrika*. Tako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrika dimenzije $m \times n$. Prvi podatek m nam pove število vrstic, drugi n pa število stolpcev. Oba skupaj določata *dimenzijo* (ali red) matrike.

Primer 5.1 Matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$
je primer matrike dimenzije 2×3. Včasih ob imenu matrike označimo tudi njeno dimenzijo. V našem primeru bi torej uporabili oznako $A_{2\times 3}$.

Matriko, ki ima enako število vrstic kot stolpcev, imenujemo *kvadratna matrika*. Tako je
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$
kvadratna matrika dimenzije 3×3. V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko kvadratne matrike iste dimenzije med seboj seštevamo (odštevamo) in množimo, vsota (razlika) in produkt pa sta spet matriki iste dimenzije.

Za naše potrebe bomo elemente matrike izbirali le iz množice realnih števil, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Podatka i in j imenujemo *indeksa*: element a_{ij} leži na križišču i-te vrstice in j-tega stolpca. Tako je v zgornjem primeru $a_{12} = -1$ element, ki leži v prvi vrstici in drugem stolpcu matrike A.

Dve matriki sta enaki natanko tedaj, ko imata enaki dimenziji in so istoležni elementi v obeh matrikah enaki.

Primer 5.2 Matriki
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$$
nista enaki, saj $a_{22} \neq b_{22}$.

Kvadratna matrika je *zgoraj trikotna*, če je $a_{ij} = 0$ za vsak $i > j$, torej
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kvadratna matrika je *spodaj trikotna*, če je $a_{ij} = 0$ za vsak $i < j$, torej

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Poseben primer trikotnih matrik je *diagonalna matrika.* Kvadratna matrika je *diagonalna*, če so vsi elementi izven diagonale enaki 0, torej

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Diagonalna matrika, za katero je $a_{ii} = 1$ za vsak i, je *enotska matrika.* Ponavadi jo označimo z I,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

V množici matrik dimenzije $m \times n$ vpeljemo dve računski operaciji *množenje matrike s skalarjem* in *vsoto matrik*, ki ju bomo v nadaljevanju opisali.

Množenje matrik s skalarjem

Matriko množimo z realnim številom k tako, da vsak element matrike pomnožimo s k

$$kA = k \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primer 5.3

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

Primer 5.4

$$-5\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -15 \\ -20 & 5 \\ 15 & -10 \end{bmatrix}$$

Nasprotno matriko matrike A (označimo jo z $-A$) dobimo tako, da matriko A pomnožimo z -1. Tako je

$$-A = -1\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Seštevanje matrik

Matriki A in B dimenzije $m \times n$ seštejemo tako, da seštejemo vse istoležne elemente

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Podobno je tudi

$$A-B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primer 5.5 Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$A+B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

in

$$A-B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Za zgoraj opisani operaciji veljajo naslednja pravila.

1. $A+B = B+A$,

2. $k \cdot A = A \cdot k$,

3. $A + (B + C) = (A + B) + C$,

4. $k \cdot (h \cdot A) = (k \cdot h) \cdot A$,

5. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$,

6. $(k + h) \cdot A = k \cdot A + h \cdot A$,

kjer sta A in B matriki istega reda in k in h poljubni realni števili.

Označimo z 0 matriko, ki ima vse elemente enake 0, torej

$$O = O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Tako matriko imenujemo *ničelna matrika* in velja

$$A + O = A$$

za vsako matriko A iste dimenzije kot je matrika 0.

V nadaljevanju se bomo posvetili še eni operaciji med matrikami, to je *množenju matrik*, ki pa ni izvedljivo za vse pare matrik.

Množenje matrik

Matriki $A_{m\times p}$ in $B_{q\times n}$ lahko množimo, če je število stolpcev prve matrike enako številu vrstic druge matrike, torej $p = q$. Produkt

$$A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

je matrika reda $m \times n$, ki ima v i-ti vrstici in j-tem stolpcu element

$$(C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \ .$$

Primer 5.6 Naj bosta dani matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prva matrika je reda 2×3 in druga 3×2. Ker je število stolpcev matrike A enako številu vrstic matrike B, lahko izračunamo produkt $A \cdot B$. Če upoštevamo zgoraj zapisano pravilo za množenje matrik, dobimo

$$A \cdot B = C_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1\cdot2+2\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot(-3)+2\cdot(-4)+2\cdot0 \\ 1\cdot2+0\cdot2+(-1)\cdot1 & 1\cdot(-3)+0\cdot(-4)+(-1)\cdot0 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$C_{2\times2} = \begin{bmatrix} 8 & -11 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Podobno lahko izračunamo produkt $B \cdot A$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 7 \\ -2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primer 5.7 Naj bosta dani matriki

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 22 & -16 & -11 \\ 1 & -9 & -38 \\ -7 & 3 & -24 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 18 & -5 & -1 \\ -10 & -24 & 30 \\ -5 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Zgornja dva primera sta pokazala, da matrično množenje v splošnem ni komutativno

$$AB \neq BA.$$

Lahko se celo zgodi, da za matriki, ki ju lahko zmnožimo v danem vrstnem redu, produkt s faktorjema v obrnjenem vrstnem redu sploh ne obstaja. Če pa obstajata oba produkta ($A \cdot B$ in $B \cdot A$) in velja $AB = BA$, potem pravimo, da matriki *komutirata*.

Primer 5.8 Naj bosta dani matriki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 2 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}.$$

Ker je $AB = BA$, matriki A in B komutirata.

Za dani matriki A in B ter poljubno realno število k veljajo naslednja pravila.

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$,
2. $k(AB) = (kA)B$,
3. $A(BC) = (AB)C$,
4. $A(B + C) = AB + AC$,
5. $(A + B)C = AC + BC$,
6. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$,
7. $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Za konec omenimo še eno operacijo, ki jo lahko izvedemo na poljubni matriki A.

Transponiranje matrik

Matriko A *transponiramo* tako, da v matriki zamenjamo vrstice in stolpce. Naj bo A matrika dimenzije $m \times n$. *Transponirana matrika* matrike A je matrika

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Hitro lahko opazimo, da je ta matrika dimenzije $n \times m$.

Primer 5.9 Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Potem je $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zapišimo še nekaj lastnosti transponiranja.

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$,
2. $(kA)^T = kA^T$,
3. $(A^T)^T = A$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$,

kjer je A poljubna matrika in k poljubno realno število.

5.2 Determinanta

V nadaljevanju tega poglavja bomo definirali determinanto kvadratne matrike A in našteli nekaj njenih osnovnih lastnosti, ki jih bomo potrebovali v naslednjih poglavjih.

Determinanta matrike A je realno število, ki ga običajno označimo na naslednji način

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Pri tem je potrebno poudariti, da je determinanta definirana samo za kvadratne matrike. Determinanta je torej preslikava iz množice kvadratnih matrik v množico realnih števil: vsaki kvadratni matriki priredimo natanko določeno realno število.

Zaradi enostavnosti definirajmo najprej determinanto matrike A dimenzije 2×2.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinanto matrike A reda 2×2 izračunamo torej tako, da od produkta elementov na glavni diagonali odštejemo produkt elementov, ki ne ležita na njej.

Primer 5.10 Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Potem je $\det A = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = 8$.

Opišimo še postopek za izračun determinante matrike A dimenzije 3×3.

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right. \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{aligned}$$

Primer 5.11 Naj bo $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Potem je

$$\begin{aligned} \det A &= \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 1 & 5 & -2 \end{array} \right. \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot -1 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 \cdot (-2) \\ &\quad -(5 \cdot 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 3) \\ &= -7 + 16 = 9. \end{aligned}$$

V nadaljevanju bomo opisali postopek, kako izračunamo determinanto poljubne $n \times n$ matrike A.

Naj bo $n \geq 2$ in in A matrika dimenzije $n \times n$. Z D_{ij} označimo determinanto tiste matrike, ki jo dobimo, če v matriki A izpustimo i-to vrstico in j-ti stolpec. Determinante D_{ij} imenujemo *poddeterminante* matrike A. Determinanta matrike A je definirana s predpisom

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + \\ &\quad + \ldots + a_{1j}(-1)^{1+j}D_{1j} + \ldots + a_{1n}(-1)^{n+1}D_{1n}.\end{aligned}$$

Zgornjo enakost imenujemo *razvoj determinante po prvi vrstici.* Izkaže se, da lahko determinanto razvijemo po poljubni vrstici ali stolpcu - vrednost je vedno enaka. Če determinanto matrike A izračunamo z razvojem po i-ti vrstici, tedaj za vsak $k = 1, \ldots, n$ element a_{ik} pomnožimo s pripadajočo poddeterminanto D_{ik} katere predznak je določen z $(-1)^{i+k}$. Torej je

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik}.$$

Podobno lahko determinanto matrike A izračunamo s pomočjo razvoja po j-tem stolpcu

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} D_{kj}.$$

Ponavadi determinanto matrike izračunamo s pomočjo razvoja po tisti vrstici ali stolpcu, ki ima največ ničel, saj si tako delo olajšamo.

Poglejmo si sedaj bolj natančno, kako bi izračunali determinanto matrike A dimenzije 3×3 z razvojem po prvi vrstici.

$$
\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} a_{11} D_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} D_{12} + (-1)^{1+3} a_{13} D_{13} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).
\end{aligned}
$$

Bralec lahko sam preveri, da je tako dobljen rezultat enak številu, ki bi ga dobili, če bi računali determinanto matrike A po postopku, ki smo ga opisali v začetku poglavja.

Primer 5.12 Naj bo

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.
$$

Ker sta v drugem stolpcu dve ničli, je najlažje izračunati determinanto matrike A z razvojem po drugem stolpcu:

$$
\begin{aligned}
\det A &= (-1)^{1+2} 3 D_{12} + (-1)^{2+2} 0 D_{22} + (-1)^{3+2} 0 D_{32} \\
&= -3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\
&= -3((-1) \cdot (-3) - 2 \cdot 1) = -3.
\end{aligned}
$$

Torej je $\det A = -3$.

Primer 5.13 Naj bo

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Ker sta v tretji vrstici dve ničli, je najlažje izračunati determinanto matrike A

z razvojem po tretji vrstici:

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^{3+1}5D_{31} + (-1)^{3+2}0\cdot D_{32} + (-1)^{3+3}0\cdot D_{33} + (-1)^{3+4}3D_{34} \\
&= 5\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 5((-1)^{3+1}2D_{31} + (-1)^{3+2}(-1)D_{32} + (-1)^{3+3}0D_{33}) \\
&\quad -3((-1)^{1+1}2D_{11} + (-1)^{2+1}0D_{21} + (-1)^{3+1}1D_{31}) \\
&= 5(2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}) \\
&\quad -3(2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}) \\
&= 5(-18-3) - 9 = -114
\end{aligned}$$

Torej je $\det A = -114$.

Zapišimo še nekaj lastnosti determinant.

1. Če v matriki zamenjamo poljubni vrstici oziroma stolpca, se s tem determinanti spremeni predznak, njena absolutna vrednost pa se ohrani.

2. Če poljubni vrstici oziroma stolpcu prištejemo poljuben (neničelni) večkratnik kake druge vrstice oziroma stolpca, se determinanta ne spremeni.

3. Če v matriki pomnožimo vse elemente neke vrstice (nekega stolpca) z realnim številom k, je vrednost determinante dobljene matrike k-krat vrednost determinante prvotne matrike.

4. Vrednost determinante se ne spremeni, če stolpce matrike zamenjamo z vrsticami, oziroma, če matriko transponiramo

$$\det A = \det A^T.$$

5. Ker je $\det A = \det A^T$, lahko vse operacije, ki jih delamo na vrsticah, delamo tudi na stolpcih (in obratno).

6. Če so v dani matriki vsi elementi neke vrstice ali stolpca enaki 0, je tudi determinanta enaka 0.

7. Determinanta matrike je enaka 0, če sta v njej dva stolpca ali vrstici enaki.

8. Če je vrstica v matriki mnogokratnik kake druge vrstice, ima determinanta vrednost 0. Enako velja tudi za stolpce.

5.3 Inverzna matrika

S pomočjo determinante lahko za nekatere kvadratne matrike izračunamo pripadajočo *inverzno matriko.* Inverzna matrika kvadratne matrike A je taka matrika A^{-1}, da velja

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Če taka matrika A^{-1} obstaja, potem pravimo, da je matrika A *obrnljiva*, matriko A^{-1} pa imenujemo *inverzna matrika* matrike A.

Izkaže se, da obstajajo tudi take neničelne kvadratne matrike, ki niso obrnljive (torej, nimajo inverzne matrike). Iz pravila za računanje inverzne matrike (glej spodaj) pa takoj sledi naslednji pogoj: *kvadratna matrika je obrnljiva natanko tedaj, ko je njena determinanta enaka* 0.

V nadaljevanju bomo opisali postopek za izračun inverzne matrike.

Naj bo A kvadratna matrika in $\det A \neq 0$. Potem je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}D_{11} & (-1)^{1+2}D_{12} & \dots & (-1)^{1+n}D_{1n} \\ (-1)^{2+1}D_{21} & (-1)^{2+2}D_{22} & \dots & (-1)^{2+n}D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}D_{n1} & (-1)^{n+2}D_{n2} & \dots & (-1)^{n+n}D_{nn} \end{bmatrix},$$

kjer so D_{ij} poddeterminante matrike A^T.

Hitro lahko preverimo, da je po zgornji definiciji inverzna matrika 2×2 matrike A ($\det A \neq 0$) enaka

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Primer 5.14 Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$A^{-1} = \frac{1}{1\cdot(-3) - 5\cdot 0} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Primer 5.15 Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\det A = -6$, obratna matrika A^{-1} matrike A obstaja. Torej:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad D_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}D_{11} & (-1)^{1+2}D_{12} & (-1)^{1+3}D_{13} \\ (-1)^{2+1}D_{21} & (-1)^{2+2}D_{22} & (-1)^{2+3}D_{23} \\ (-1)^{3+1}D_{31} & (-1)^{3+2}D_{32} & (-1)^{3+3}D_{33} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ni težko preveriti, da je $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

Primer 5.16 Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -5 & 6 & 13 \end{bmatrix}.$$

Primer 5.17 Naj bosta dani matriki

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rešimo matrično enačbo $AX = B$. Torej, poiskati želimo matriko X, ki zadošča pravkar zapisani enakosti

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Ker je

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},$$

je

$$X = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}.$$

Primer 5.18 Naj bosta dani matriki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}.$$

Rešitev matrične enačbe $XA = B$ je

$$X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -21 & 15 \\ -29 & 21 \end{bmatrix}.$$

5.4 Sistemi linearnih enačb

Za konec bomo posvetili pozornost še sistemom linearnih enačb. Opisali bomo postopek, kako lahko s pomočjo matrik rešimo splošen sistem m linearnih enačb z n neznankami.

Sistem m linearnih enačb z n neznankami

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

lahko zapišemo z matrično enačbo

$$AX = B,$$

kjer je A *matrika koeficientov* sistema dimenzije $m \times n$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

stolpca

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

pa sta matriki neznank ter desne strani sistema. Če matriki A dodamo še stolpec B, dobimo *razširjeno matriko sistema*

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Rešitev sistema je vsaka taka n-terica števil $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ki ustreza vsem zgoraj zapisanim enačbam. Pravimo, da je sistem *rešljiv*, če ima vsaj eno rešitev. V nasprotnem primeru je *nerešljiv*.

Ena od metod reševanja sistemov linearnih enačb je tako imenovana *Gaussova eliminacijska metoda*: z množenjem enačb s primernimi faktorji in odštevanjem ene enačbe od druge postopoma eliminiramo posamezne neznanke. Na koncu nam ostane v eni od enačb samo še ena neznanka. Njeno vrednost izračunamo in vstavimo v drugo enačbo, iz nje določimo drugo neznanko, ... Ta postopek nadaljujemo tako dolgo, dokler ne izračunamo vrednosti vseh neznank.

Ključni element zgoraj opisanega postopka je eliminacija, ki jo bomo v bistvu nespremenjeno izvajali tudi sedaj, vendar v nekoliko bolj formalni obliki. Pa si oglejmo, kako lahko s pomočjo matrik rešimo sistem linearnih enačb.

V matriki $[A|B]$ najprej poiščemo vrstico, ki ima na skrajni levi neničelni element (lahko se zgodi, da ima matrika v prvih $i-1$ stolpcih same ničle in je iskani neničelni element šele v i-tem stolpcu) in jo zamenjamo s prvo vrstico. Če ima druga vrstica pod tem neničelnim elementom ničlo, jo pustimo, sicer od nje odštejemo prvo vrstico, ki jo pomnožimo s takim kvocientom obeh prvih členov, da bo na tem mestu v drugi vrstici ničla. Na podoben način "delamo" ničle na preostalih mestih v i-tem stolpcu. Prva vrstica in prvih i stolpcev so tako v željeni obliki, na preostalem delu matrike pa cel postopek ponovimo.

Pri tem postopku smemo narediti naslednje:

- zamenjati smemo poljubni vrstici med sabo,
- poljubno vrstico smemo množiti z neničenim realnim številom,
- poljubni vrstici smemo prišteti ali odšteti kako drugo vrstico ali večkratnik druge kake vrstice.

Pri teh operacijah se množica rešitev sistema ne spremeni.

Osnovna ideja zgoraj opisanega postopka je torej ta, da želimo izničiti elemente v levem spodnjem kotu razširjene matrike, da postane čimbolj podobna zgoraj trikotni matriki (glej matriko spodaj), nato pa izračunamo vrednosti neznank od spodaj navzgor.

$$[A|B] = \begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * & | & * \\ 0 & * & * & \dots & * & | & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * & | & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * & | & * \end{bmatrix}$$

Primer 5.19 Rešimo spodnji sistem enačb.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 3x + y + 2z &= -1 \\ x - 2z &= 2 \end{aligned}$$

Najprej zapišimo razširjeno matriko sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 3 & 1 & 2 & | & -1 \\ 1 & 0 & -2 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Drugo vrstico delimo s 3 in ji odštejemo prvo vrstico

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & | & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 & -2 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Nato še od tretje vrstice odštejemo prvo vrstico

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & | & -\frac{4}{3} \\ 0 & -2 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Drugo vrstico pomnožimo z -3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 5 & -5 & | & 4 \\ 0 & -2 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

V naslednjem koraku drugo vrstico pomnožimo z 2 in tretjo vrstico pomnožimo s 5

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 8 \\ 0 & -10 & -5 & 5 \end{array}\right].$$

Sedaj tretji vrstici prištejemo drugo in dobimo poravnano matriko

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 8 \\ 0 & 0 & -15 & 13 \end{array}\right].$$

Dobljeno matriko lahko zapišemo še v lepši obliki - drugo vrstico delimo z 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -15 & 13 \end{array}\right].$$

Rešitve sistema dobimo tako, da zaporedoma rešujemo enačbe, ki ustrezajo vrsticam od spodaj navzgor. Torej, iz tretje vrstice dobimo

$$-15z = 13,$$

iz česar sledi $z = -\frac{13}{15}$. Vrednost spremenljivke y dobimo iz druge vrstice

$$5y - 5z = 4.$$

Če upoštevamo vrednost spremenljivke z, sledi $y = -\frac{1}{15}$. Vrednost spremenljivke x dobimo iz prve vrstice

$$x + 2y - z = 1.$$

S pomočjo dobljenih rezultatov lahko izračunamo, da je $x = \frac{4}{15}$. Rešitev danega sistema je torej

$$x = \frac{4}{15}, \quad y = -\frac{1}{15}, \quad z = -\frac{13}{15}\ .$$

V splošnem ima lahko vsak sistem linearnih enačb $Ax = b$ neskončno mnogo rešitev, natanko eno rešitev ali pa nobene rešitve.

Primer 5.20 Rešimo naslednji sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 5x - y + 2z &= -3 \\ x - 2y + z &= 7. \end{aligned}$$

Zapišimo razširjeno matriko sistema

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 5 & -1 & 2 & | & -3 \\ 1 & -2 & 1 & | & 7 \end{bmatrix}.$$

Uporabimo Gaussovo eliminacijsko metodo.

- Drugi vrstici prištejemo prvo vrstico, ki jo pomnožimo z (-5).
- Tretji vrstici odštejemo prvo vrstico

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -11 & 7 & | & -8 \\ 1 & -2 & 1 & | & 7 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -11 & 7 & | & -8 \\ 0 & -4 & 2 & | & 6 \end{bmatrix}.$$

- Tretjo vrstico pomnožimo z 11 in ji prištejemo drugo vrstico, ki jo pomnožimo z (-4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -11 & 7 & | & -8 \\ 0 & 0 & -6 & | & 98 \end{bmatrix}.$$

Sistem ima natanko eno rešitev:

$$x = 4, \quad y = -\frac{29}{3}, \quad z = -\frac{49}{3}.$$

Primer 5.21 Rešitev sistema

$$\begin{aligned} 4x - 2y - 3z &= 2 \\ -2x - y + 5z &= 3 \\ -x + 2y - 4z &= 5 \end{aligned}$$

je

$$x = -7, \quad y = -9, \quad z = -4.$$

Literatura

[1] **J. A. Čibej**, Matematika za poslovneže (1. del), Založništvo Ekonomske fakultete, Ljubljana 2003.

[2] **J. A. Čibej**, Matematika za poslovneže (2. del), Založništvo Ekonomske fakultete, Ljubljana 2005.

[3] **J. A. Čibej**, Poslovna matematika (2. del), Državna založba Slovenije, Ljubljana 2004.

[4] **S. Indihar, I. Kavkler, M. Mastinšek**, Matematika za ekonomiste (1. del), Ekonomsko-poslovna fakulteta, Maribor 1997.

[5] **S. Indihar, I. Kavkler, L. Arih**, Matematika za ekonomiste (2. del), Ekonomsko-poslovna fakulteta, Maribor 1999.

[6] **J. Povh, S. Pustavrh**, Zbirka rešenih nalog iz operacijskih raziskav, Visoka šola za upravljanje in poslovanje, Novo mesto 2001.

[7] **W. Rudin**, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill in Kogakusha Co., Ltd., Tokyo - New York 1964.

[8] **J. Povh, S. Pustavrh**, Matematične metode (zbirka rešenih nalog), Visoka šola za upravljanje in poslovanje, Novo mesto 2003.

[9] **R. Strašek, B. Zalar**, Zbirka nalog iz matematike 1 za študente gradbeništva, Fakulteta za gradbeništvo, Maribor 2004.

[10] **J. Usenik**, Matematične metode v managementu (Poslovni račun), Visoka šola za management, Koper 2000.

[11] **I. Vidav**, Višja matematika I, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana 1987.

[12] **P. Zima, R. L. Brown**, Mathematics of Finance (3rd Edition), McGraw-Hill Ryerson Ltd., Toronto 1988.

[13] **L. Zornada**, Zbirka nalog iz poslovne matematike in statistike, Fakulteta za management, Koper 2003.