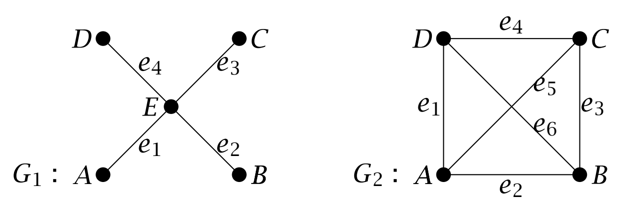
Barvanje grafov in njegova uporaba

Tjaša Paj Erker

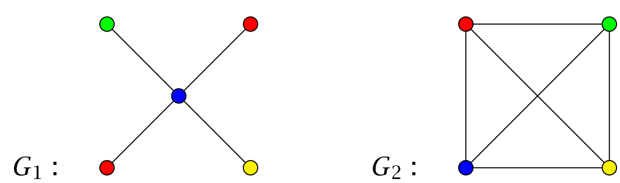
→ Poglejmo, s kakšnimi težavami se srečujejo organizatorji popoldanskih športnih dejavnosti, ki bi radi, da bi bila športna dvorana na voljo čimveč uporabnikom različnih športov. Pri tem bi radi ustregli tudi individualnim željam posameznikov, ki bi se hkrati radi redno udeleževali dveh ali več športov, pa ne na isti dan. Poleg tega bi morali upoštevati še dogovor z lokalnim klubom, da bo telovadnica prosta ob sredah in med vikendom.

Rešitev zgornjega problema lahko matematično enostavno prikažemo z barvanjem grafov. Preden se tega lotimo, si oglejmo osnovne pojme iz teorije grafov, ki jih pri tem potrebujemo.

Graf je množica **vozlišč** in množica **povezav** med njimi. Označujemo ga z $G = (V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ množica vozlišč in $E(G)$ množica povezav med njimi. Na sliki 1 je tako $V(G_1) = \{A, B, C, D, E\}$ in $E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ter $V(G_2) = \{A, B, C, D\}$ in $E(G_2) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.



SLIKA 1.
Primera grafov G_1 in G_2



SLIKA 2.
Pravilno 4-barvanje grafov G_1 in G_2

Barvanje vozlišč grafa G je dodelitev neke barve vsakemu vozlišču v grafu. Zanimivo je predvsem **pravilno barvanje vozlišč.** To je barvanje, ki vsakemu paru sosednjih vozlišč dodeli različni barvi. Pravilno k-barvanje je barvanje grafa, za katerega porabimo k barv. Na sliki 2 je primer pravilnega 4-barvanja grafov G_1 in G_2.

Seveda lahko graf G z n vozlišči vedno pravilno pobarvamo z n barvami, zato nas bolj zanima najmanjše možno število barv, ki jih moramo uporabiti, da graf s temi barvami pravilno pobarvamo. Število povezav iz vozlišča v imenujemo **stopnja vozlišča**. Največjo stopnjo vozlišča grafa G označimo z $\Delta(G)$. V zgornjih dveh primerih je $\Delta(G_1) = 4$ in $\Delta(G_2) = 3$. Izkaže se, da lahko vsak graf pobarvamo z $\Delta(G) + 1$ barvami. Hitro pa vidimo, da lahko graf G_1 pravilno pobarvamo celo z dvema barvama, medtem ko grafa G_2 ne moremo pravilno pobarvati z manj kot štirimi barvami. Najmanjše število, za katerega obstaja pravilno k-barvanje vozlišč, imenujemo **kromatično število grafa** in ga označimo z $\chi(G)$. Tako je $\chi(G_1) = 2$ in $\chi(G_2) = 4$.

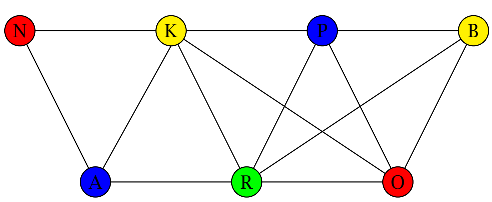
Sedaj lahko na primeru predstavimo problem iz uvoda in ga rešimo s pomočjo barvanja grafov.

Primer 1. *Tabela 1 nam prikazuje, kdo se je prijavil na posamezno športno dejavnost. Ker mora biti telovadnica v sredo in čez vikend prosta, bi vse dejavnosti radi razporedili v štiri dni. Ali jih je mogoče razporediti tako, da bi se vsi lahko udeležili vseh željenih športov in se hkrati nihče ne bi udeležil dveh različnih športov istega dne?*

košarka	Darko, Darja, Aljaž, Bor, Tia, Klara, Žan
nogomet	Aljaž, Darko, Tine, Gal, Rok
plezanje	Darja, Gregor, Bor
rokomet	Meta, Darja, Tia, Maša, Iza, Klara, Jan
odbojka	Bor, Darja, Žan, Ajda, Gregor, Iza
aerobika	Meta, Maša, Tia, Tine, Aljaž, Jan
badbinton	Iza, Ajda, Gregor

TABELA 1.
Tabela prijav na posamezno dejavnost

Rešitev. Problem predstavimo s pomočjo grafa na sliki 3. Vozlišča naj predstavljajo športne dejavnosti. V primeru, da se želi ista oseba udeležiti dveh športnih dejavnosti, vozlišči povežemo. Npr., vozlišči, ki predstavljata nogomet in košarko, povežemo, ker se Darko in Aljaž želita udeležiti obeh dejavnosti. Tako dobimo graf. Sedaj nastali graf pobarvamo s čim manj barvami in pri tem pazimo, da poljubni sosednji vozlišči pobarvamo z različnima barvama. Barve predstavljajo dneve v tednu.



SLIKA 3.
Graf, ki predstavlja Primer 1.

Zanima nas, z najmanj koliko barvami lahko pravilno pobarvamo vsa vozlišča. Ker so vozlišča P, O in R povezana v trikotnik, bomo za njihovo barvanje potrebovali tri različne barve, npr. modro, rdečo in zeleno. Poleg tega sta z vsemi temi vozlišči povezani vozlišči B in K. Ker ti dve nista sosednji, ju lahko pobarvamo z enako barvo, npr. z rumeno. Ostaneta nam še vozlišči N in A, za kateri pa lahko ponovno uporabimo rdečo in modro barvo. Dobimo graf na sliki 3.

Graf smo pobarvali s štirimi barvami in hkrati ugotovili, da ga ni mogoče pobarvati z manj barvami. Torej je $\chi(G) = 4$. To pomeni, da lahko vse dejavnosti razporedimo v štiri dni, kot prikazuje spodnja tabela:

prvi dan	nogomet, odbojka
drugi dan	košarka, badbinton
tretji dan	plezanje, aerobika
četrti dan	rokomet

TABELA 2.
Razporeditev dejavnosti po dnevih

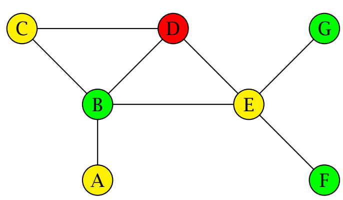
Na številnih področjih lahko najdemo podobne naloge. Tako lahko s pomočjo barvanja vozlišč rešimo npr. problem radijski oddajnikov. Frekvence radijskih oddajnikov se namreč lahko med sabo motijo, če so preblizu skupaj. Problem, ki se nam pojavi je, kako razdeliti frekvence množici oddajnikov, da se medsebojno ne bodo motile. Najmanj koliko frekvenc je za to potrebno?

Primer 2. *V tabeli 3 so razdalje med posameznimi kraji, označenimi s črkami A – G. Koliko frekvenc je potrebno, če krajema, ki sta oddaljena manj kot 500 km, ne moremo dodeliti iste frekvence?*

Rešitev. Problem predstavimo z grafom. Pri tem so vozlišča kraji. Če sta kraja oddaljena manj kot 500 km, ju povežemo in dobimo povezave. Graf lahko pravilno pobarvamo s tremi barvami (kot na sliki 4), pri čemer barve predstavljajo frekvence. Torej potrebujemo le tri frekvence.

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	450	550	700	600	850	900
B	450	-	490	300	250	600	750
C	550	480	-	120	530	820	910
D	620	360	200	-	360	630	750
E	710	280	600	190	-	380	450
F	860	660	900	650	340	-	540
G	820	760	900	730	460	560	-

TABELA 3.
Šest načinov, šest zmnožkov



SLIKA 4.
Graf, ki predstavlja Primer 2.

Zelo znan problem je tudi problem barvanja zemljevidov. Pri tem problemu nas zanima, koliko barv potrebujemo, da zemljevid pobarvamo tako, da nobeni dve sosednji državi (ali regiji) ne bosta imeli enake barve.

Primer 3. Z najmanj koliko barvami lahko pobarvamo zemljevid držav v Južni Ameriki tako, da nobeni dve sosednji državi ne bosta imeli enake barve?

Rešitev. Problem predstavimo z grafom, kjer so vozlišča države. Če imata dve državi skupno mejo, ustrezni vozlišči povežemo. Zemljevid lahko pobarvamo s štirimi barvami.

Grafe z majhnim številom vozlišč lahko pobarvamo zelo hitro. Kaj pa, kadar moramo pobarvati zahtevnejši graf? Kadar je število vozlišč večje, seveda ni tako enostavno poiskati vrednosti $\chi(G)$. Obstajajo sicer algoritmi za poljubno velike grafe, ki pa se izkažejo za zelo zamudne že pri malo večjem problemu.

SLIKA 5.
Države Južne Amerike

Literatura

[1] D. Brown Smithers, *Graph Theory for the Secondary School Classroom*, Electronic Theses and Dissertations, Paper 1015, 2005.

[2] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, Third Edition, New York, 1985.

[3] J. Žerovnik, *Osnove teorije grafov in diskretne optimizacije*, druga izdaja, Univerza v Mariboru, 2005.

[4] Dostopno na `www.pinterest.com/pin/546272629772915227/`, ogled: 14. 9. 2018.

× × ×