PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **29** (2001/2002)
Številka 4
Strani 233–237

Nada Razpet:

REZANJE IN SESTAVLJANJE PRAVILNEGA ČETVERCA

Ključne besede: matematika, geometrija, prostorska predstavljivost, tetraeder, četverec, prostornina.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/29/1482-Razpet.pdf

REZANJE IN SESTAVLJANJE PRAVILNEGA ČETVERCA

Štiri skladna telesa, iz katerih lahko sestavimo pravilni četverec, smo spoznali že v 5. številki lanskega letnika Preseka, str. 290. Tokrat poglejmo, kaj nastane, če enemu izmed teh teles dodajamo druga telesa.

Telesa, iz katerih sestavljamo pravilni četverec, bomo označili s T4. Najdaljši rob telesa T4 naj bo $3x$. V omenjenem članku smo videli, da lahko iz štirih skladnih teles T4 sestavimo pravilni četverec z osnovnim robom $4x$. Od tod lahko hitro izračunamo prostornino V_t telesa T4:

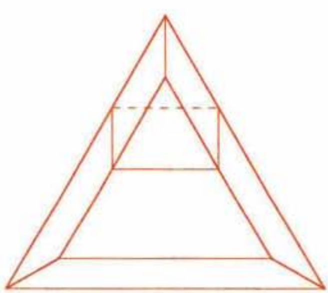
$$V_t = \frac{4x^3\sqrt{2}}{3}\,.$$

Telo T4 dopolnimo do prisekane piramide

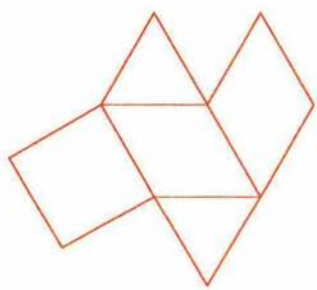
Poglejmo na telo T4 še drugače. Iz sestavljenega pravilnega četverca z robom $4x$ vidimo, da so stranski robovi telesa T4 vzporedni z robovi pravilnega četverca, torej lahko vzamemo, da je na vogalu telesa T4 pravilni četverec z robom x. Višina v_1 telesa T4 je enaka višini pravilnega četverca z robom x:

$$v_1 = \frac{x\sqrt{6}}{3}\,.$$

Če dodamo telesu T4 poševno prizmo, ki ima za osnovno ploskev enakostranični trikotnik, dobimo prisekano piramido, ki ima za osnovni ploskvi enakostranična trikotnika s stranicama $3x$ in $2x$ ter višino v_1 (slika 1).



Slika 1a. Telesu T4 dodamo prizmo in dobimo prisekano pravilno tristrano piramido.



Slika 1b. Mreža dodane poševne prizme. Sestavljajo jo: dva romba, kvadrat in dva enakostranična trikotnika. Vsi liki imajo vse robove enake x. Višina prizme je v_1.

Prostornina prisekane piramide je

$$V = \frac{19x^3\sqrt{2}}{12},$$

prostornina dodane prizme $V_d = \frac{x^3\sqrt{2}}{4}$, njuna razlika je enaka prostornini telesa T4: $V_t = V - V_d = \frac{4x^3\sqrt{2}}{3}$.

Telo T4 dopolnimo do pravilnega četverca

Dopolnimo telo T4 do pravilnega četverca z robom $3x$. Najprej dodajmo telo T21 (slika 2) s prostornino V_{21} na manjšo osnovno ploskev, nato pa še ob strani telo T22 (slika 3) s prostornino V_{22}.

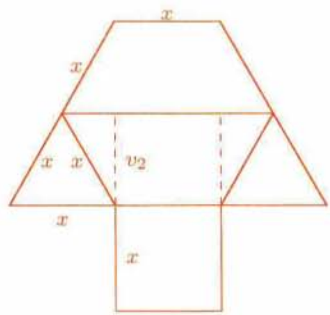
Telo T21 je sestavljeno iz treh delov: pokončne tristrane prizme in dveh polovic pravilnega četverca z robom x. Osnovna ploskev prizme je enakokraki trikotnik z osnovnico x in krakoma, ki sta višini (v_2) enakostraničnega trikotnika z osnovnico x. Višina prizme je x. Višina v_3 osnovne ploskve prizme je $v_3 = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ in od tod $V_{21} = \frac{x^3\sqrt{2}}{3}$.

Telo T22 pa dobimo, če prizmi iz telesa T21 podaljšamo višino na $2x$. Torej je $V_{22} = \frac{7x^3\sqrt{2}}{12}$.

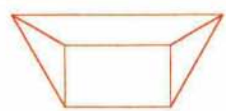
Vsota prostornin

$$V_t + V_{21} + V_{22} =$$
$$= \frac{4x^3\sqrt{2}}{3} + \frac{x^3\sqrt{2}}{3} + \frac{x^3\sqrt{2}}{3} = \frac{9x^3\sqrt{2}}{4}$$

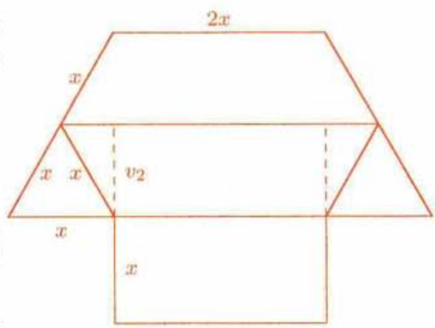
je seveda prostornina pravilnega četverca z robom $3x$.



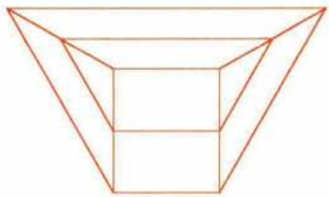
Slika 2a. Mreža telesa T21.



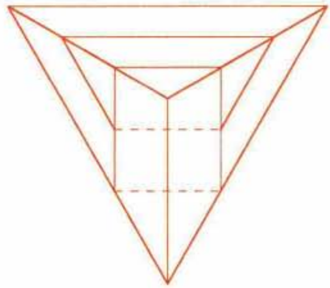
Slika 2b. Tloris telesa T21.



Slika 3. Mreža telesa T22.



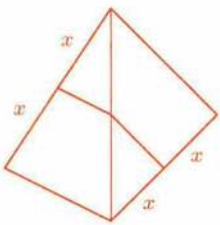
Slika 4a. Telesu T4 dodamo telo T21.



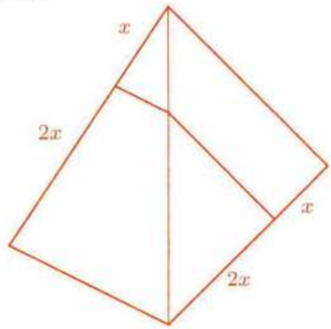
Slika 4b. Dodamo še telo T22.

Rezanje pravilnega četverca

Do teles T21 in T22 pridemo z rezanjem pravilnega četverca z robom $2x$ oz. $3x$ (slika 5). Dva robova pravilnega četverca, ki sta mimobežna in drug na drugega pravokotna, sta vzporedna s presečno ravnino. Presek ravnine in pravilnega četverca je v prvem primeru kvadrat s stranico x, v drugem pa pravokotnik s stranicama x in $2x$.



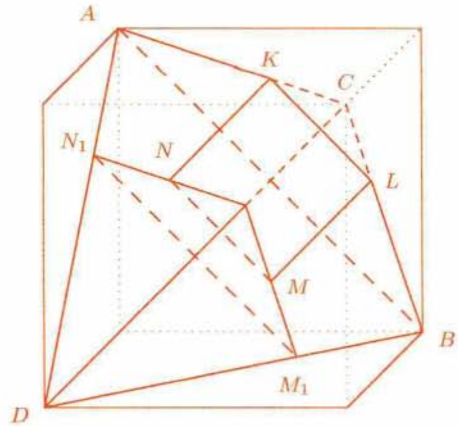
Slika 5a. Telo T21 je polovica pravilnega četverca z robom $2x$. Pravilni četverec razpade na dve skladni telesi.



Slika 5b. Telo T22 dobimo z rezanjem pravilnega četverca z robom $3x$.

Še nekaj lastnosti telesa T4

Izračunajmo še kote med ploskvami telesa T4. Najprej se dogovorimo za oznake. Osnovni ploskvi naj bosta enakokraka trapeza $ABLK$ in N_1M_1MN, stranske ploskve pa kvadrat $KLMN$ in trapezi $AKNN_1$, LBM_1M in ABM_1N_1 (slika 6). Dopolnimo telo T4 še s četvercem z robom $2x$. Dobimo četverec z robom $3x$, ki mu manjka poševna tristrana enakoroba prizma z robom $3x$. Četverec vložimo v kocko tako, kot kaže slika, in postavimo izhodišče koordinatnega sistema v središče kocke, osi pa vzporedno z robovi kocke.



Slika 6.

Zdaj lahko hitro izračunamo kote med ploskvami. Ploskev $AKNN_1$ leži na ploskvi ACD z normalo $\vec{n}_1 = (1, 1, -1)$, ploskev ABM_1N_1 pa na ploskvi ABD z normalo $\vec{n}_2 = (1, -1, -1)$. Torej je

$$\cos\delta_1 = \frac{1 - 1 + 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \qquad \text{in} \qquad \delta_1 = 70,52^\circ$$

kot med sosednjima ploskvama pravilnega četverca.

Ploskev $AKLB$ leži na ploskvi ABC z normalo $\vec{n} = (1, 1, 1)$. Ploskev $KLMN$ je ena od stranskih ploskev poševne prizme, zato je rob KN vzporeden z robom CD. Ploskev $KLMN$ ima normalni vektor $\vec{n}_3 = (1, 0, 0)$. Izračunajmo naklonski kot te ploskve proti osnovni ploskvi $AKLB$:

$$\cos\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{in} \qquad \delta_2 = 54,74^\circ\,.$$

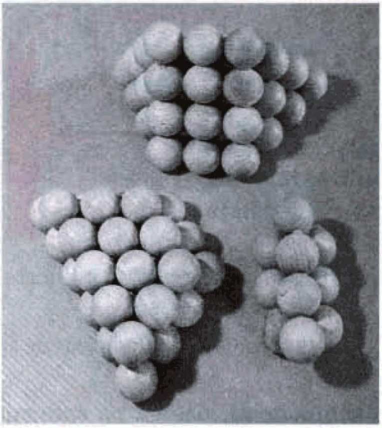
Kot med ravninama $AKNN_1$ in $KLMN$ je top, zato je

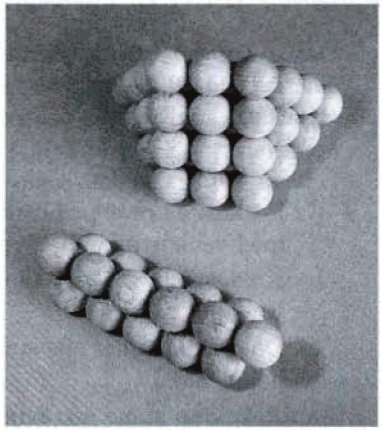
$$\cos\delta_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{in} \qquad \delta_3 = 125,26^\circ\,.$$

Iz slike in računa lahko razberemo, da je v našem primeru kvadrat $KLMN$ vzporeden s tisto ploskvijo kocke, na kateri leži rob AB.

Pravilni "četverec" sestavljen iz krogel

Tudi "četverce" iz krogel lahko sestavljamo tako, kot smo dopolnjevali telesa $T4$ (fotografije).





Nada Razpet