ANALIZA VPLIVA RAZPOKANOSTI NA TOGOST UPOGIBNO OBREMENJENEGA OJAČANEGA BETONSKEGA NOSILCA Z MODELOM RAZMAZANE RAZPOKE

ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF CRACKING ON THE STIFNESS OF REINFORCED CONCRETE ELEMENT USING SMEARED CRACK CONCEPT

izr. prof. dr. Sebastjan Bratina, univ. dipl. inž. grad.
sebastjan.bratina@fgg.uni-lj.si
Univerza v Ljubljani, FGG, Jamova 2, Ljubljana

Znanstveni članek
UDK 624.012.45:624.072.2(078.9)

Povzetek | V članku predstavimo enodimenzionalni (1D) mehanski model za analizo vpliva razpokanosti na togost ojačenega betonskega nosilca pri kratkotrajni statični obtežbi. Betonski ovoj modeliramo z geometrijsko nelinearnim Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca, ojačilno armaturo pa z modelom vrvi. Armatura in betonski ovoj se lahko na medsebojnem stiku zamakneta, ne moreta pa se razmakniti. V modelu upoštevamo nelinearni zakon stika ter nelinearne konstitucijske zakone za beton, jeklo za armiranje in jeklo za prednapenjanje. Razpokanost betona modeliramo z modelom »razmazane« razpoke. Neobčutljivost rezultatov analize od izbire mreže končnih elementov rešimo v skladu s priporočili iz literature, in sicer z vpeljavo t. i. »crack-band« elementa ter karakteristične dolžine območja razpokanosti kot materialnega parametra. Učinkovitost in natančnost predstavljenega mehanskega modela prikazujemo s primerjavo z rezultati upogibnih preizkusov prednapetega in armiranobetonskega nosilca. Ugotovimo zelo dobro ujemanje rezultatov. Rezultati so kvalitativno primerljivi z rezultati drugih raziskovalcev, ki so opravili analize podobnih nosilcev z bistveno bolj zahtevnimi mehanskimi 2D- in 3D-modeli.

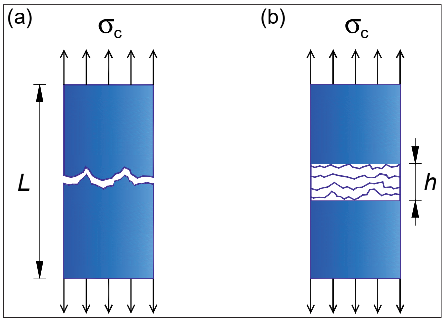
Ključne besede: armirani beton, prednapeti beton, natezna togost, zdrs, razmazana razpoka, metoda končnih elementov

Summary | This paper presents a one-dimensional (1D) mechanical model for the analysis of the influence of cracking on the stiffness of reinforced concrete element under short-term static load. The Reissner geometrically non-linear planar beam theory is used to model each subcomponent of the beam. The bending stiffness of the tendon is neglected. The tangential slip between the tendon and concrete is fully accounted for, while the normal separation is not allowed. The non-linear material law of concrete, reinforcing and prestressing steel is considered. Cracking of concrete is accounted for using smeared crack model. In the numerical solution the mesh dependence is resolved by using the crack-band element, the dimension of which is related to the fracture energy of concrete. The validity of the presented mechanical model is verified on reinforced and prestressed concrete beam previously studied in literature. It is determined that the results of the present 1D model are well in line with the experimental results. The results are also qualitatively comparable with those obtained with significantly more complex 2D and 3D mechanical models.

Key words: reinforced concrete, prestressed concrete, tension stiffening, slip, smeared crack, finite element method

1 • UVOD

Beton je krhek heterogen material, za katerega je med drugim značilen pojav razpok, ki so posledica majhne natezne trdnosti betona. Če pa je beton ojačan z armaturo ali prednapetimi kabli, kljub nastanku razpok še vedno nudi določen odpor nateznim obremenitvam v območju med razpokami zaradi sprijemnih napetosti med betonom in armaturo. V literaturi zasledimo različne možne rešitve, s katerimi v mehanskih modelih upoštevamo omenjeno natezno nosilnost betona v območju med razpokami (npr. (Fib, 2013)). Pri najpreprostejših to storimo z modificiranim konstitucijskim diagramom betona v nategu (npr. (Bergan, 1979)). Za natančnejše modeliranje razpokanosti betona pa sta se v literaturi uveljavila dva različna modela, ki temeljita na mehaniki loma. V prvem primeru razpokanost betona modeliramo z diskretnimi razpokami (glej sliko 1(a)), to pomeni, da razpoko obravnavamo kot diskontinuiteto v geometriji elementa (npr. ((Dias-da-Costa, 2009), (Bajc, 2013), (Yang, 2008) in drugi)). V drugem primeru pa razpokanost modeliramo z modelom t. i. razmazane razpoke (glej sliko 1(b)), kjer je razporeditev razpok namišljena in ne ustreza dejanskemu stanju (npr. ((Bažant, 1989), (Bažant, 1997), (Yang, 2008) in drugi)). Ker pa so v tem primeru rezultati analize odvisni od mreže končnih elementov (Bažant, 1997), ta nezaželeni vpliv relativno uspešno rešimo s sočasno vpeljavo »crack-band« elementa ter karakteristične dolžine območja razpokanosti kot materialnega parametra (dolžina h na sliki 1(b)).



Slika 1 • **Modeliranje razpokanosti betona z modeli, ki temeljijo na mehaniki loma: (a) model diskretne razpoke, (b) model »razmazane« razpoke.**

Takšni mehanski modeli, ki temeljijo na mehaniki loma, so v splošnem zelo zahtevni. To lahko razberemo tudi iz objav v znanstveni literaturi. Tako je Dias-da-Costa s sodelavci (Dias-da-Costa, 2009) analiziral vpliv razpokanosti na togost upogibno obremenjenega AB-nosilca, dodatno ojačanega z jekleno ploščo na spodnji strani. Pri tem je uporabil model diskretne razpoke. Polovico nosilca je modeliral s 360 ploskovnimi končnimi elementi in dobil rezultate, ki so se zelo dobro prilegali izmerjenim. Yang s sodelavci (Yang, 2008) je vpliv razpokanosti podobnega upogibno obremenjenega AB-nosilca analiziral tako z modelom razmazane kot z modelom diskretne razpoke. V prvem primeru je nosilec modeliral v komercialnem programu Diana 8, v drugem primeru pa v programu Abaqus. Pri tem je spreminjal tudi gostoto mreže končnih elementov, in sicer je uporabil od 350 do največ 5000 končnih elementov 2D. Ugotovil je, da metodi dajeta primerljive rezultate.

V primeru, ko razpoko obravnavamo kot diskontinuiteto v geometriji elementa, so v zadnjem času brez mrežne (mreže proste) metode (angl. »mesh free methods«) dobra alternativa metodi končnih elementov. Mednje spada elementov prosta metoda Galerkina (angl. »element free Galerkin method«). Takšno metodo je v okviru proučevanja razpokanosti upogibno obremenjenega AB-elementa uporabil tudi že omenjeni Yang (Yang, 2008). Ugotovil je, da je metoda bistveno bolj učinkovita kot primerljiva metoda diskretne razpoke, zasnovana na MKE. Elementov proste metode Galerkina se je poslužil tudi Rabczuk s sodelavci (Rabczuk, 2008), in sicer je za 3D-analizo razpokanosti upogibno obremenjenega prednapetega nosilca uporabil 30.000 oziroma 180.000 t. i. delcev. Izračunani rezultati so se zelo dobro prilegali izmerjenim.

V članku bomo predstavili relativno preprost mehanski 1D-model za analizo vpliva razpokanosti na togost ojačenega betonskega nosilca pri delovanju kratkotrajne statične obtežbe. Pri tem bomo razpokanost betona modelirali z modelom razmazane razpoke. Uporabili bomo razširjeno družino linijskih deformacijskih končnih elementov, ki vključuje tudi »crack-band« element (Markovič, 2013). Betonski ovoj bomo modelirali ločeno od armaturnih palic oziroma prednapetih kablov. Upoštevali bomo, da se palica oziroma kabel in betonski nosilec na medsebojnem stiku lahko zamakneta. Učinkovitost in natančnost predstavljenega mehanskega modela bomo prikazali na primeru upogibno obremenjenega armiranobetonskega oziroma prednapetega betonskega nosilca, za katera obstajajo v literaturi rezultati obremenilnih preizkusov.

Članek ima poleg uvodnega poglavja še šest poglavij. V drugem poglavju natančneje predstavimo razviti mehanski model za analizo razpokanosti ojačanih betonskih linijskih nosilcev. V tretjem poglavju na kratko opišemo postopek reševanja enačb linijskega nosilca z metodo končnih elementov. V četrtem poglavju na primeru dveh ojačanih nosilcev, za katera so v literaturi na voljo rezultati upogibnih preizkusov, prikažemo učinkovitost in natančnost predstavljenega mehanskega modela. Nato sledijo zaključki, zahvala in nabor uporabljene literature.

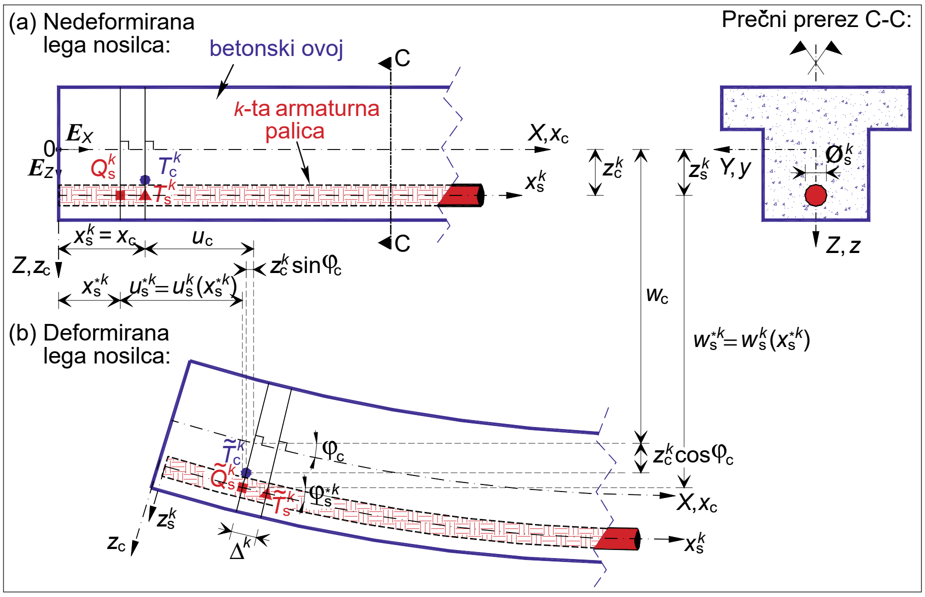
2 • MEHANSKI MODEL

2.1. Osnovne predpostavke

Predstavljeni mehanski model je primeren za analizo napetostnega in deformacijskega stanja razpokanih armiranobetonskih (AB) in predhodno prednapetih betonskih elementov, ki so izpostavljeni kratkotrajni statični obtežbi. V nadaljevanju osnovne predpostavke modela prikažemo na primeru AB-nosilca. Pri prednapetem betonskem nosilcu kabel obravnavamo na enak način kot armaturno palico, le da je preddeformiran.

AB-nosilec dolžine L in konstantnega prečnega prereza A_c je armiran z n_s ravnimi armaturnimi palicami, pri čemer je ϕ_s^k premer, z_s^k oddaljenost od referenčne osi betonskega dela nosilca, A_s^k pa površina prečnega prereza k-te palice ($k = 1,\dots, n_s$). Pri tem z $(\bullet)_c$ označimo količine, ki pripadajo betonskemu delu nosilca, z $(\bullet)_s^k$ pa količine, ki pripadajo k-ti armaturni palici. Na sliki 2 prikazujemo nedeformirano in deformirano lego AB-nosilca. Zaradi preglednosti prikazujemo nosilec, armiran le z eno armaturno palico.

Izpeljavo osnovnih enačb poenostavimo z vpeljavo nove materialne koordinate x_s^{*k}, ki določa tisti delec k-te armaturne palice v nedeformirani legi (točka Q_s^k na sliki 2 z oznako »■«), ki je v deformirani legi v stiku z delcem



Slika 2 • **Upogibno obremenjeni AB-element. Oznake pomembnih geometrijskih količin.**

v betonu z materialno koordinato x_c (točka T_c^k na sliki 2 z oznako »●«). To pomeni, da se delca betona (točka T_c^k) in k-te armaturne palice (točka T_s^k na sliki 2 z oznako »▲«), ki sta bila v nedeformirani legi sobežna, v deformirani legi zamakneta za zamik $\Delta^k(x_c)$. Glede na dejstvo, da so tudi zamiki med betonom in armaturno palico relativno majhni ($|\Delta^k| << 1$), lahko pri izpeljavi osnovnih enačb dodatno upoštevamo sledeče:

$$(\bullet)_s^{*k} \approx (\bullet)_s^k \quad \text{in} \quad \int_{0^*}^{L^*} (\bullet)_s^{*k} dx^* \approx \int_0^L (\bullet)_s^k \, dx,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n_s). \tag{1}$$

Zaradi relativno majhne dimenzije armaturnih palic v primerjavi z betonskih ovojem upoštevamo tudi $z_c^k = z_s^k$ (glej sliko 2).

V nadaljevanju predstavimo osnovne enačbe linijskega AB-nosilca. Pri tem betonski ovoj in armaturne palice (in/ali prednapete kable) modeliramo ločeno, pri čemer armaturo modeliramo z modelom vrvi. Zaradi obsežnosti podrobnosti izpeljave ne navajamo, prikažemo le zapis z že upoštevanimi predpostavkami. Več informacij je na voljo v literaturi (Markovič, 2013).

2.2. Vezne enačbe

Z veznimi enačbami opišemo interakcijo na stiku med betonom in k-to armaturno palico. Ker smo pri izpeljavi mehanskega modela predpostavili, da se beton in armaturna palica na stiku samo zamakneta, ne moreta pa se razmakniti oziroma vtisniti drug v drugega, na stiku velja (k=1,2,...,n_s):

$$x_c + u_c + z_c^k \sin\varphi_c = x_s^{*k} + u_s^k \quad \text{in}$$

$$w_c + z_c^k \cos\varphi_c = w_s^k. \tag{2}$$

2.3. Kinematične enačbe

Kinematične enačbe zapišemo v skladu z Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca (Reissner, 1972). Deformiranje nosilca opišemo z membranskimi in upogibnimi deformacijami, ki lahko skupaj s pomiki in zasuki zavzamejo številčno poljubne velike vrednosti. Strižno deformiranje nosilca pa zanemarimo. Ob upoštevanju predpostavke (1) ter veznih enačb (2) se zapis nekoliko poenostavi. Tako dobimo tri enačbe za betonski del nosilca (enačbe (3)–(5)) in eno enačbo za armaturno palico (enačba (6)).Torej:

$$1 + u_c' - (1 + \varepsilon_{c0}) \cos\varphi_c = 0, \tag{3}$$

$$w_c' + (1 + \varepsilon_{c0}) \sin\varphi_c = 0, \tag{4}$$

$$\varphi_c' - \kappa_c = 0, \tag{5}$$

$$1 + u_s^{k\prime} - (1 + \varepsilon_s^k) \cos\varphi_c = 0,$$

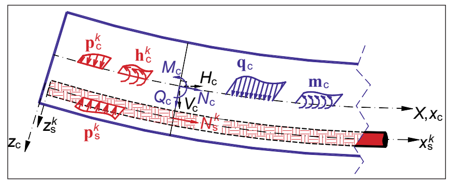
$$(k = 1, 2, \ldots, n_s). \tag{6}$$

V enačbah (2)–(6) je ε_{c0} specifična sprememba dolžine in κ_c psevdoukrivljenost referenčne osi betonskega dela nosilca, ε_s^k pa je specifična sprememba dolžine referenčne osi k-te armaturne palice. Z u_c in w_c označimo vodoravni in prečni pomik referenčne osi betonskega dela nosilca, z u_s^k pa vodoravni pomik referenčne osi k-te armaturne palice. φ_c je zasuk prečnega prereza betonskega dela nosilca. Zamik na stiku med betonom in k-to armaturno palico pa izračunamo z izrazom:

$$\Delta^k(x_c) = \int_{x_s^{*k}(x_c)}^{x_c} (1 + \varepsilon_s^k) \, dx, \quad (k = 1, 2, \ldots, n_s). \tag{7}$$

2.4. Ravnotežne enačbe

Z ravnotežnimi enačbami predstavimo zvezo med notranjimi statičnimi količinami AB-nosilca in zunanjo obtežbo. Predpostavimo, da zunanja obtežba deluje v referenčni osi betonskega dela nosilca, in sicer kot linijska obtežba $\mathbf{q}_c = q_{X,c} \boldsymbol{E}_X + q_{Z,c} \boldsymbol{E}_Z$ oziroma kot momentna obtežba $\mathbf{m}_c = m_{Y,c} \boldsymbol{E}_Y$ (glej sliko 3). Na stiku med armaturno palico in betonskim ovojem pa upoštevamo kontaktno obtežbo. Tako linijska in momenta obtežba $\mathbf{p}_c^k = p_{X,c}^k \boldsymbol{E}_X + p_{Z,c}^k \boldsymbol{E}_Z$ in $\mathbf{h}_c^k = p_{X,c}^k z_c^k \boldsymbol{E}_Y$ predstavljata vpliv ekscentrične k-te armaturne palice na betonski ovoj. Po drugi strani pa vpliv betonskega ovoja na k-to armaturno palico izrazimo kot linijsko obtežbo $\mathbf{p}_s^k = p_{X,s}^k \boldsymbol{E}_X + p_{Z,s}^k \boldsymbol{E}_Z$.



Slika 3 • **Zunanja obtežba AB-nosilca in notranje statične količine v betonskem ovoju oziroma armaturni palici.**

Na stiku mora veljati ravnotežje kontaktnih oziroma sprijemnih sil. Kontaktne sile na stiku merimo glede na nedeformirano dolžino skladno z Reissnerjevim modelom nosilca. V tem primeru ob upoštevanju tretjega Newtonovega zakona o akciji in reakciji na stiku ter ob upoštevanju predpostavk v enačbi (1) zapišemo ravnotežje v prostorski bazi (X, Y, Z):

$$p_{X,s}^k + p_{X,c}^k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n_s), \tag{8}$$

$$p_{Z,s}^k + p_{Z,c}^k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n_s). \tag{9}$$

Tako kot kinematične tudi ravnotežne enačbe zapišemo ločeno za betonski del nosilca (enačbe (10) do (12)) in armaturno palico (enačbi (13) in (14)), pri kateri uporabimo enačbi vrvi:

$$H_c' + q_{X,c} + \sum\nolimits_{k=1}^{n_s} p_{X,c}^k = 0, \tag{10}$$

$$V_c' + q_{Z,c} + \sum\nolimits_{k=1}^{n_s} p_{Z,c}^k = 0, \tag{11}$$

$$M_c' - (1 + \varepsilon_{c0}) Q_c + m_{Y,c} + \sum\nolimits_{k=1}^{n_s} p_{X,c}^k z_c^k = 0, \tag{12}$$

$$N_s^{k\prime} + p_{t,s}^k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n_s), \tag{13}$$

$$-N_s^k \frac{(1 + \varepsilon_s^k)\,\kappa_c}{1 + \varepsilon_{c0} + z_c^k \kappa_c} + p_{n,s}^k = 0,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n_s). \tag{14}$$

V enačbah (10)–(14) predstavljata H_c in V_c vodoravno in navpično komponento ravnotežne notranje sile v betonskem delu nosilca, M_c pa je ravnotežni upogibni moment. Z N_c in Q_c označimo ravnotežno osno in prečno silo v betonskem delu nosilca, N_s^k pa je osna sila v k-ti armaturni palici (glej sliko 3). V enačbah (13) oziroma (14) sta $p_{t,s}^k$ (=– $p_{t,c}^k$) in $p_{n,s}^k$ (=– $p_{n,c}^k$) strižna in normalna komponenta kontaktne linijske obtežba na stiku v k-ti armaturni palici (oz. v betonskem ovoju).

2.5. Konstitucijske enačbe

S konstitucijskimi enačbami ravnotežne količine povežemo z deformacijskimi količinami, in sicer:

$$N_c = N_{c,c} = \int_{A_c} \sigma_c \, dA_c \quad \text{in} \quad M_c = M_{c,c} =$$

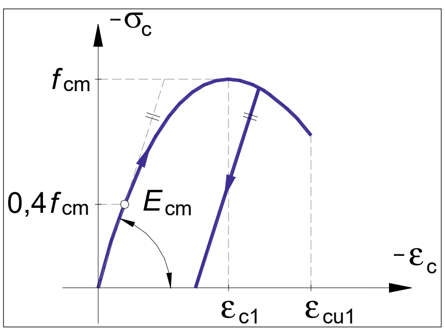
$$= \int_{A_c} \sigma_c \, z \, dA_c \tag{15}$$

$$N_s^k = N_{s,c}^k = \sigma_s^k \, A_s^k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n_s). \tag{16}$$

V enačbah (15)–(16) so $\sigma_c(\varepsilon_{c0}, \kappa_c)$ in $\sigma_s^k(\varepsilon_s^k)$ normalne napetosti v betonu in *k*-ti armaturni palici. Odvisne so od deformacij, zvezo pa določimo z izbranim materialnim modelom (konstitucijskim zakonom). V nadaljevanju predstavimo izbrane konstitucijske zakone za beton, za jeklo za armiranje (in prednapenjanje) ter zakon stika.

2.5.1. Konstitucijski zakon betona v tlaku

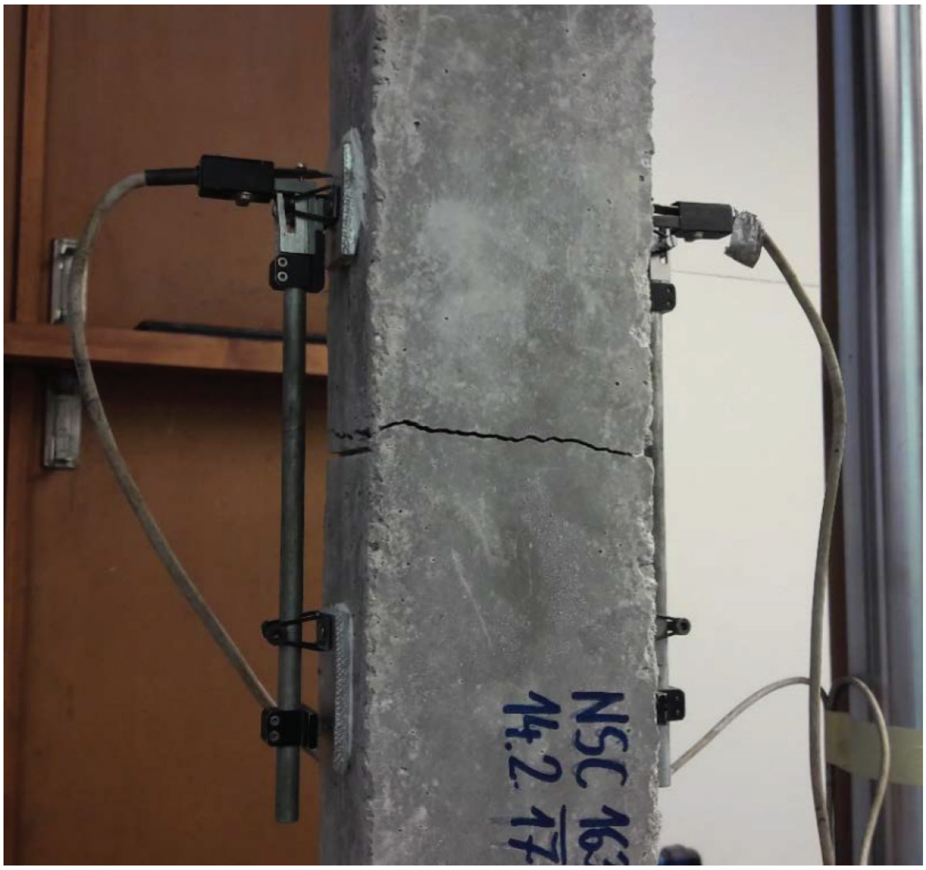
Obnašanje betona v tlaku opišemo z nelinearnim konstitucijskim zakonom, ki ga podaja standard evrokod 2 (SIST, 2005) in je namenjen analizi konstrukcij. Zakon prikazujemo na sliki 4. f_{cm} je povprečna tlačna trdnost betona, dosežena pri deformaciji ε_{c1}, ε_{cu1} pa je mejna tlačna deformacija betona. E_{cm} je sekantni modul elastičnosti betona. Upoštevamo izotropno utrjevanje betona.



Slika 4 • **Konstitucijski zakon betona v tlaku (SIST, 2005).**

2.5.2. Konstitucijski zakon betona v nategu

Dokler so natezne napetosti v betonu manjše od natezne trdnosti betona f_{ct} (pripadajoča deformacija je ε_{ct1}; glej sliko 7), je beton nerazpokan in obnašanje betona je linearno elastično. Ko pa beton razpoka, le-to modeliramo z modelom razmazane razpoke. Pri tem moramo definirati obnašanje natezno obremenjenega betona v območju mehčanja, tj. na območju, kjer ob nadaljnjem večanju deformacij odpornost betona pade, ter karakteristično dolžino območja razpokanosti kot materialnega parametra (dolžina *h* na sliki 1(b)). V nadaljevanju najprej podrobneje opišemo eksperimentalne ugotovitve pri nateznem preizkusu betonskega vzorca, ki služijo za teoretično osnovo pri določitvi karakteristične dolžine območja razpokanosti *h*.



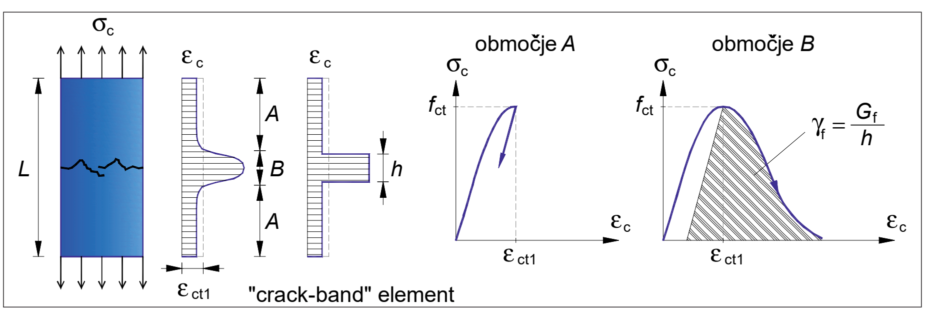
Slika 5 • **Natezno obremenjeni betonski preizkušanec. Glavna natezna razpoka je pravokotna na smer natezne obremenitve (osebni arhiv).**

V natezno obremenjenem betonskem vzorcu se porušitev začne z velikim številom mikrorazpok. Z naraščanjem deformacij se razpoke odpirajo, formira se glavna razpoka, ki je običajno pravokotna na smer natezne obremenitve (glej sliko 5).

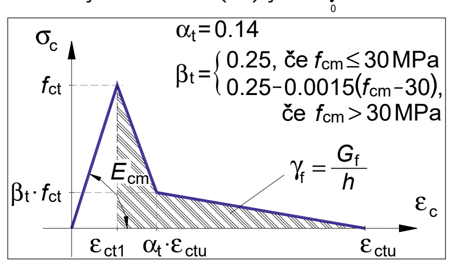
Preizkusi kažejo, da se poškodbe betona lokalizirajo le na območju v okolici glavne razpoke (območje *B* na sliki 6), beton zunaj tega območja pa je praktično nepoškodovan (območje *A* na sliki 6). Tako je skupno vloženo delo W_f (v (Nm)), ki je potrebno za porušitev vzorca, enako delu, ki ga potrebujemo za porušitev poškodovanega območja *B,* ki je izpostavljeno mehčanju. Torej (Bažant, 1997):

$$W_f = A_c \, h \int_0^\infty \sigma_c \, d\varepsilon_{c,pl} = A_c \cdot h \cdot \gamma_f \,. \tag{17}$$

Pri tem je A_c prečni prerez vzorca, $\varepsilon_{c,pl}$ pa so natezne deformacije betona v območju mehčanja. V enačbi (17) je $\gamma_f = \int_0^\infty \sigma_c \, d\varepsilon_{c,pl}$ delo



Slika 6 • **Poškodovanost betona v nategu se pojavi na omejenem območju (Bažant, 1997).**



Slika 7 • **Konstitucijski zakon betona v nategu (Rabczuk, 2005).**

(v (N/m^2)), ki je potrebno za porušitev enote volumna vzorca in predstavlja površino ploskve pod napetostno-deformacijsko zvezo betona v območju mehčanja (območje B na sliki 6). Pri tem je skladno z Bažantom in sodelavci G_f energija loma (v (Nm/m^2)) in je definirana kot (Bažant, 1997):

$$G_f = \frac{W_f}{A_c} = h \cdot \gamma_f \,. \qquad (18)$$

To pomeni, da lahko ob znani energiji loma betona (npr. (CEB-FIP, 1993)) in predpostavljenemu poteku konstitucijskega zakona betona v nategu ocenimo karakteristično dolžino območja razpokanosti betona ($h=G_f/\gamma_f$) in jo uporabimo kot dolžino »crack-band« elementa v modelu razmazane razpoke. Pri tem znotraj območja dolžine h predpostavimo konstanten potek nateznih deformacij betona (glej sliko 6).

Torej v okviru predstavljenega mehanskega modela obnašanje betona v nategu opišemo s trilinearnim konstitucijskim zakonom, ki ga povzamemo po literaturi (Rabczuk, 2005). Prikazujemo ga na sliki 7.

2.5.3. Konstitucijski zakon jekla za armiranje in jekla za prednapenjanje

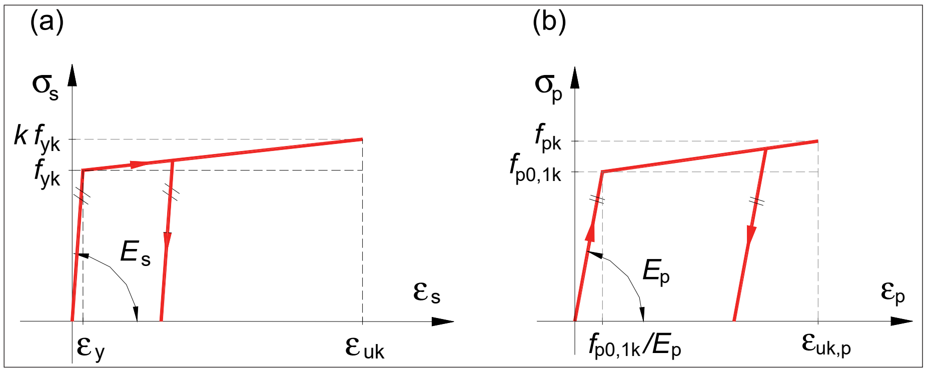
Obnašanje jekla za armiranje oziroma jekla za prednapenjanje opišemo z idealiziranima bilinearnima modeloma, skladnima z evrokodom 2 (SIST, 2005). Prikazujemo ju na sliki 8.

2.5.4. Konstitucijski zakon stika

Kot smo že omenili, na stiku med betonom in armaturno palico lahko nastane zamik, razmik pa je preprečen. V predstavljeni analizi konstitucijski zakon stika opišemo z zvezo med zamikom $\Delta^k = \Delta$ in sprijemno (strižno) napetostjo $\tau_c^k = \tau$ na stiku med betonom in k-to armaturno palico. Formalno to zapišemo na naslednji način:

$$\tau = f(\Delta)\,, \qquad (19)$$

kjer je f funkcija, ki opisuje zakon stika in jo določimo s preizkusi. Uporabljeni konstitucijski zakoni so podrobneje predstavljeni v računskih primerih. Zveza med sprijemno napetostjo τ_c^k in strižno komponento kontaktne linijske obtežbe p_{tc}^k pa je naslednja: $\tau_c^k = \dfrac{p_{tc}^k}{\pi \phi_s^k}$.



Slika 8 • **Konsitucijski zakon (a) jekla za armiranje in (b) jekla za prednapenjanje (SIST, 2005).**

3 • NUMERIČNO REŠEVANJE ENAČB Z METODO KONČNIH ELEMENTOV

Sistema enačb linijskega AB-nosilca z upoštevanjem zdrsa v splošnem ne moremo rešiti analitično. Problem je izrazito nelinearen, predvsem v pogledu obnašanja materiala. Da bi prišli do rešitve, uporabimo metodo končnih elementov (lastni program NFIRA, ki deluje v programskem okolju MATLAB (MathWorks, 2014))), in sicer deformacijski končni element, katerega formulacija temelji na interpolaciji deformacijskih količin betonskega ovoja oziroma armature. Podrobnosti numeričnega reševanja enačb z metodo končnih elementov smo predstavili drugje (Markovič, 2013), zato na tem mestu na kratko opišemo le najpomembnejše značilnosti razvitega končnega elementa. V nasprotju s klasičnimi elementi, ki temeljijo na interpolaciji pomikov, so deformacijski elementi bistveno bolj stabilni in odporni proti vsem blokiranjem. Pri označevanju končnih elementov vpeljemo naslednje oznake: standardni deformacijski končni element označimo z $E_{m\text{-}n}$, kjer indeks m označuje stopnjo Lagrangejevega interpolacijskega polinoma, s katerim interpoliramo deformacijske količine vzdolž elementa, n pa stopnjo numerične Lobattove integracije, s pomočjo katere izvrednotimo integralske enačbe vzdolž končnega elementa. »Crack-band« element s karakteristično dolžino h, s katerim modeliramo razmazano razpoko, pa označimo z $E_{0\text{-}1}$. Indeks m = 0 pomeni, da so pri betonskem delu nosilca osne in upogibne deformacije vzdolž elementa $E_{0\text{-}1}$ konstantne (polinom stopnje 0), indeks n=1 pa, da izbrane integralske enačbe betonskega dela nosilca zadoščamo le v prečnem prerezu na sredini elementa $E_{0\text{-}1}$.

4 • RAČUNSKA PRIMERA

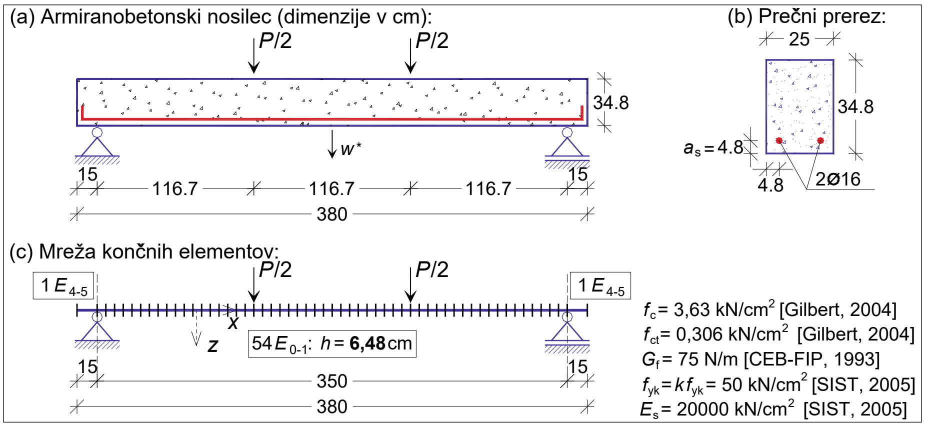
V nadaljevanju sledita dva računska primera, s katerima prikažemo natančnost in učinkovitost predstavljenega numeričnega modela za analizo vpliva razpokanosti na togost AB oziroma prednapetega betonskega elementa.

4.1. Gilbertov armiranobetonski nosilec

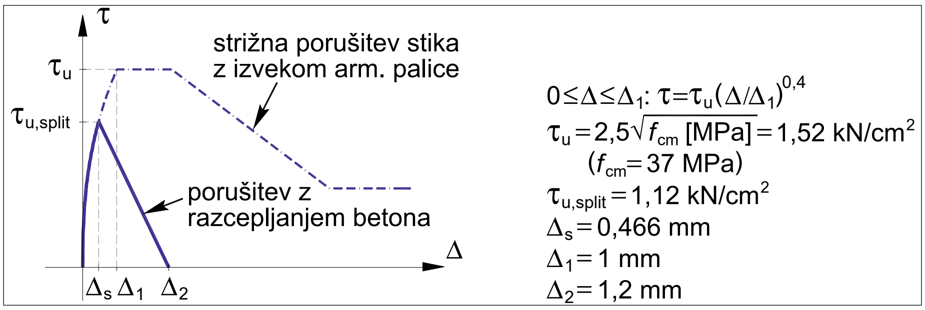
4.1.1. Osnovni podatki

V prvem računskem primeru obravnavamo prostoležeči AB-nosilec s pravokotnim prečnim prerezom, za katerega obstajajo v literaturi rezultati upogibnega preizkusa (Gilbert, 2004). V okviru preizkusa sta bila analizirana dva enaka nosilca z oznakama B1-a in B1-b. Nosilca sta bila v polju obtežena z dvema koncentriranima silama $P/2$ v prečni smeri, ki sta se med preizkusom monotono povečevali. Oba nosilca sta bila armirana z dvema armaturnima palicama ∅16. Osnovne geometrijske in materialne podatke povzamemo po literaturi (Gilbert ,2004) in jih prikazujemo na sliki 9.

Nosilec modeliramo s 56 linijskimi končnimi elementi, kot prikazujemo na sliki 9(c). Izmed teh sta dva končna elementa tipa $E_{4\text{-}5}$, ki ju uporabimo na previsnih delih nosilca, 54 elementov pa je tipa $E_{0\text{-}1}$ (»crack-band« element), ki jih uporabimo v polju nosilca. Tu namreč pričakujemo nastanek razpok, lokalizacijo deformacij in materialno mehčanje betona v nategu. Dolžina posameznega elementa $E_{0\text{-}1}$ je h = 6,48 cm in ustreza ocenjeni energiji loma betona G_f = 75 N/m (CEB-FIP, 1993)



Slika 9 • **Gilbertov AB-nosilec. Geometrijski in materialni podatki in mreža končnih elementov.**



Slika 10 • **Upoštevana sovisnost med sprijemno napetostjo in zamikom na stiku med armaturno palico in betonom (Fib, 2013) pri analizi Gilbertovega AB-nosilca.**

ter izbranim parametrom konstitucijskega modela betona v nategu (Rabczuk, 2005): f_{ct} = 0,306 kN/cm², ε_{ct1} = 0,088 ‰, ε_{ctu} = 2,28 ‰, α_f = 0,14 in β_f = 0,24 (glej sliko 7). V tlaku pa upoštevamo naslednje parametre betona (SIST, 2005): E_{cm} = 3300 kN/cm², ε_{c1} = –2,2 ‰ in ε_{cu1} = –3,5 ‰. Konstitucijski zakon stika med armaturno palico in betonom povzamemo po literaturi (Fib, 2013). Pri tem predpostavimo, da porušitev stika nastopi z razcepljanjem betona, saj je debelina krovnega sloja manjša od 5∅ (Fib, 2013), podatkov o vgrajeni stremenski armaturi pa ni na voljo. Upoštevani zakon stika in pripadajoče parametre prikazujemo na sliki 10.

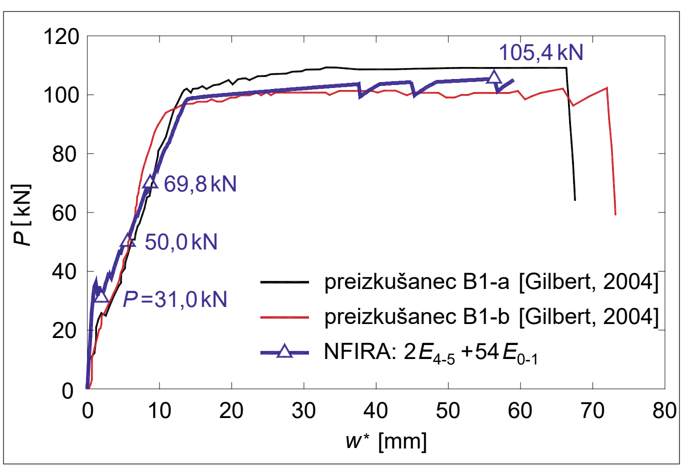
4.1.2. Obtežno-deformacijska krivulja

Najprej analiziramo mehanski odziv nosilca. Zanimata nas spreminjanje navpičnega pomika na sredini razpona nosilca w^* v odvisnosti od velikosti obtežbe P in primerjava z rezultati meritev preizkušanca B1-a oziroma B1-b (Gilbert, 2004). Vpliv lastne teže nosilca v analizi zanemarimo. Obtežno-deformacijsko krivuljo prikazujemo na sliki 11.

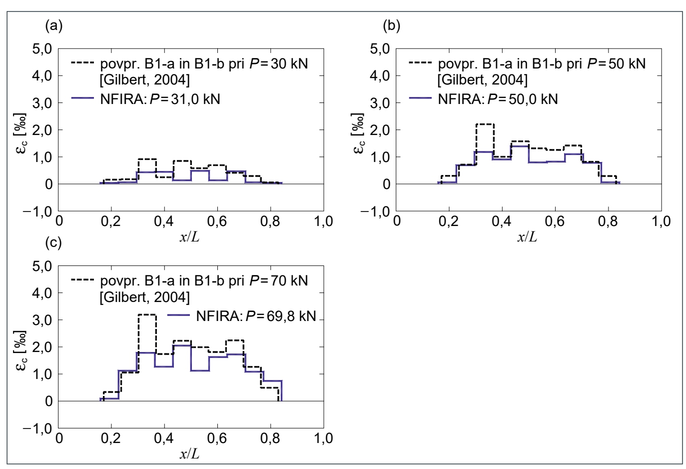
Izračunani mehanski odziv nosilca se zelo dobro prilega izmerjenima. Lahko ga razdelimo v tri faze: v prvi fazi, t.j. do sile pribl. P = 30 kN, je nosilec še nerazpokan. V drugi fazi, ki sega do platoja pri sili pribl. 100 kN, v nosilcu nastanejo upogibne razpoke, kar se odraža v nenadnih skokih obtežno-deformacijske krivulje. V drugi fazi se armatura obnaša še elastično. V tretji fazi mehanskega odziva pridemo z obtežno-deformacijsko krivuljo na plato. Armatura je sedaj že plastificirana in togost nosilca se zelo zmanjša. Računska vrednost mejne obtežbe znaša P_{max} = 105,4 kN pri navpičnem pomiku w^* = 56,3 mm. Hitro po tem se račun ustavi zaradi težav s konvergenco. Izmerjeni mejni obtežbi sta znašali 109 kN za preizkušanec B1-a oziroma 103 kN za B1-b (Gilbert, 2004).

4.1.3. Napetostno in deformacijsko stanje pri različnih nivojih obtežbe

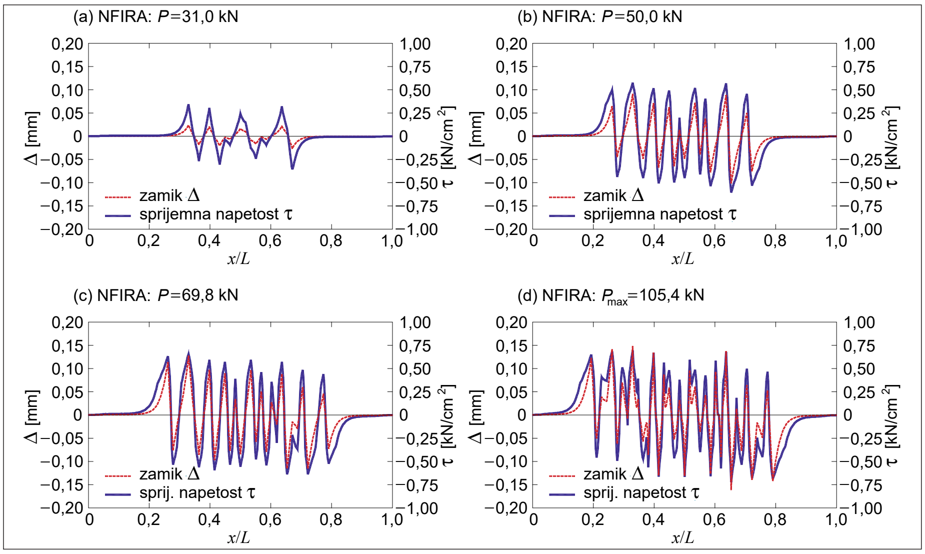
V nadaljevanju predstavimo še rezultate analize napetostno-deformacijskega stanja v razpokanem nosilcu ter jih primerjamo z rezultati meritev. Najprej analiziramo spreminjanje nateznih deformacij na površini betona na mestu armaturnih palic za različne nivoje obtežbe. Med obremenilnim preizkusom je bilo namreč na obeh nosilcih nameščeno večje število posebnih merilnih naprav za merjenje povprečnih deformacij na betonski površini, in sicer na odsekih dolžine 250 mm (Gilbert, 2004). Ugotovimo, da se izračunani potek deformacij betona relativno dobro prilega izmerjenim vrednostim, in sicer za vse tri analizirane nivoje obtežb (glej sliko 12).



Slika 11 • **Primerjava izračunane in izmerjenih obtežno-deformacijskih krivulj Gilbertovega AB-nosilca.**



Slika 12 • **Izmerjena in izračunana razporeditev nateznih deformacij na površini betona na mestu armaturnih palic za tri različne nivoje obtežbe Gilbertovega AB-nosilca: (a) P = 30 kN, (b) P = 50 kN in (c) P = 70 kN.**



Slika 13 • **Izračunani potek zamikov in sprijemnih napetosti na stiku med armaturno palico in betonom za štiri različne nivoje obtežbe Gilbertovega AB-nosilca: (a) P = 30 kN, (b) P = 50 kN, (c) P = 70 kN in (d) P_{max} = 105,4 kN.**

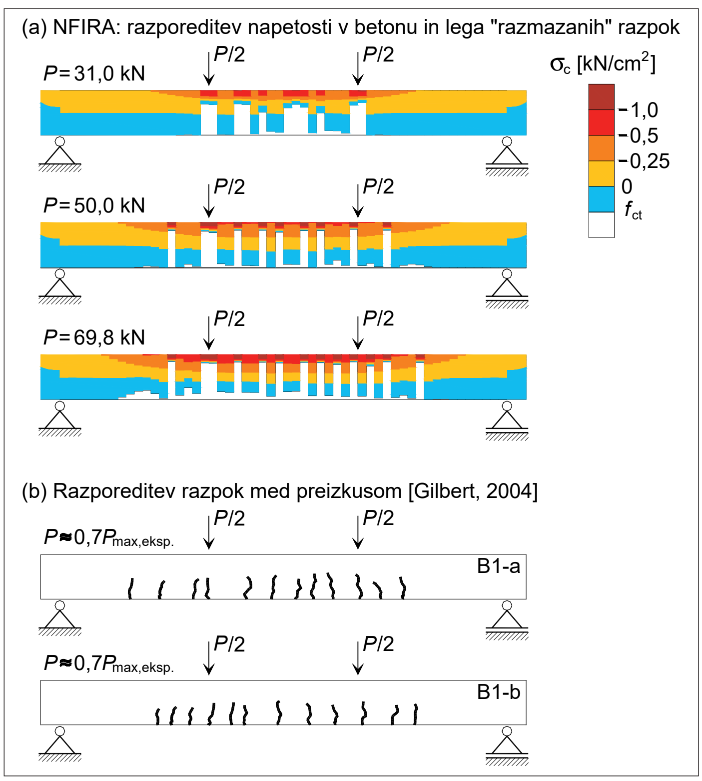
Upoštevani nivoji obtežb so na obtežno-deformacijski krivulji na sliki 11 označeni z znakom »Δ« in so izbrani tako, da se po velikosti čim bolj prilegajo izmerjenim. Znotraj nekaterih 250-mm odsekov sta med obremenilnim preizkusom nastali tudi dve upogibni razpoki (Gilbert, 2004), kar se je odražalo v precej večji izmerjeni povprečni natezni deformacije v teh odsekih. Zaradi lažje primerjave na sliki 12 prikazujemo povprečje izmerjenih nateznih deformacij obeh preizkušancev B1-a in B1-b.

Predstavljeni numerični model omogoča tudi izračun razporeditve zamikov »Δ« in sprijemnih (strižnih) napetosti τ vzdolž stika med armaturo in betonom, saj armaturne palice in betonski ovoj modeliramo ločeno. Tako na sliki 13 prikazujemo izračunani potek zamikov in sprijemnih napetosti na stiku za štiri različne nivoje obtežbe nosilca.

Na začetku, ko nosilec še ni razpokan, so zamiki in sprijemne napetosti vzdolž stika zanemarljivi. Z naraščanjem obtežbe pa napetosti v betonu prekoračijo natezno trdnost betona f_{ct} in le-ta razpoka. V uporabljenem numeričnem modelu, kjer razpoke modeliramo »razmazano«, se to odrazi v materialnem mehčanju in lokalizaciji deformacij v betonu v nekaterih končnih elementih $E_{0\text{-}1}$ v polju nosilca, zato se na stiku med armaturno palico in betonom tam pojavi zdrs in aktivirajo se sprijemne napetosti. To je lepo vidno na sliki 13(a). S povečevanjem obtežbe se materialno mehčanje betona in lokalizacija deformacij pojavita še v novih elementih $E_{0\text{-}1}$, v obstoječih pa se lokalizirane deformacije povečujejo, prav tako tudi zamiki in sprijemne napetosti (slike 13(b) do 13(d)). Tako znaša pri mejni računski obtežbi P_{max} = 105,4 kN največja absolutna vrednost zamika na stiku Δ_{max} = 0,16 mm, pripadajoča sprijemna napetost pa τ_{max} = 0,72 kN/cm² (glej sliko 13(d)). Ugotovimo, da pri mejni obtežbi P_{max} stik še ni polno izkoriščen, saj je največja sprijemna napetost manjša od sprijemne trdnosti stika, ki je $\tau_{u,split}$ = 1,12 kN/cm² (glej sliko 10).

4.1.4. Razpokanost nosilca pri različnih nivojih obtežbe

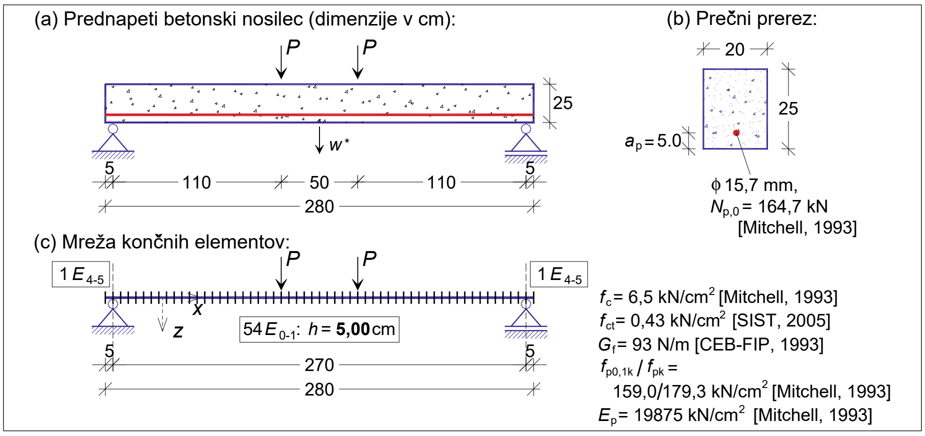
Na koncu prikažemo še primernost predstavljenega mehanskega modela za oceno razpokanosti upogibno obremenjenega Gilbertovega AB-nosilca. Kot smo že predhodno omenili, razpokanost in materialno mehčanje betona v nategu modeliramo s t. i. razmazanimi razpokami. S tem modelom predpostavimo, da so razpoke razmazane na dolžini »crack-band« elementa $E_{0\text{-}1}$. Zato v teh elementih prihaja do materialnega mehčanja in lokalizacije deformacij v betonu (tako osnih ε_c kot upogibnih κ_c). To je lepo razvidno na sliki 14(a), na kateri prikazujemo razporeditev vzdolžnih napetosti v betonu σ_c za tri različne nivoje obtežbe nosilca. Modro obarvana območja predstavljajo dele nosilca, kjer je beton natezno obremenjen, vendar še ni razpokan, ker so napetosti manjše od natezne trdnosti (σ_c < f_{ct}). Bela območja pa predstavljajo dele nosilca, kjer je beton že razpokan, saj so deformacije v betonu večje od deformacije pri natezni trdnosti (ε_c > ε_{ct1}). Na tem območju zato opazimo tudi pojav lokalizacije napetosti v betonu kot posledico lokalizacije deformacij. Ta območja predstavljajo t. i. razmazane razpoke. Ponovno ugotovimo,



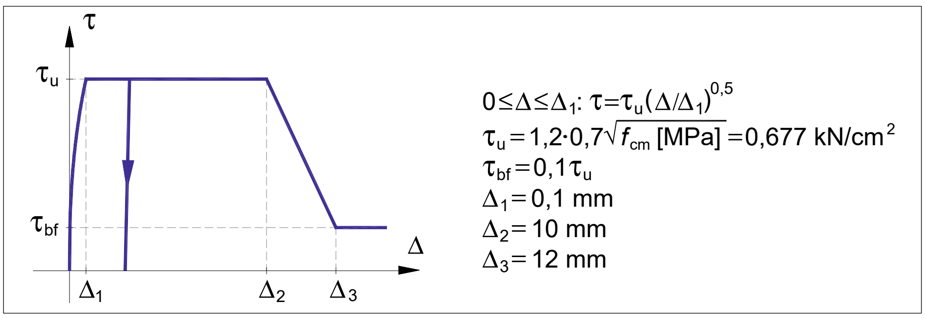
Slika 14 • **(a) Razporeditev napetosti v betonu za tri različne nivoje obtežbe nosilca in prikaz lege razmazanih razpok, (b) razporeditev upogibnih razpok v polju nosilca med obremenilnim preizkusom (Gilbert, 2004).**

da se z naraščanjem obtežbe nosilca povečuje število lokaliziranih območij in s tem tudi število razmazanih razpok. Tako lahko pri obtežbi P = 69,8 kN naštejemo 13 takšnih razpok, medtem ko je bilo med preizkusom pri podobnem nivoju obtežbe zabeleženih pri obeh preizkušancih po 12 razpok (glej sliko 14(b)). Dodatno ugotovimo, da s predstavljenim modelom dobro zajamemo tudi širino območja, kjer je nosilec med preizkusom upogibno razpokal.

4.2. Mithcellov prednapeti betonski nosilec



Slika 15 • **Mitchellov prednapeti betonski nosilec. Geometrijski in materialni podatki in mreža končnih elementov.**



Slika 16 • **Upoštevana sovisnost med sprijemno napetostjo in zamikom na stiku med prednapetim kablom in betonom ((Fib, 2013), (Orr, 2017)) pri analizi Mitchellovega prednapetega betonskega nosilca.**

4.2.1. Osnovni podatki

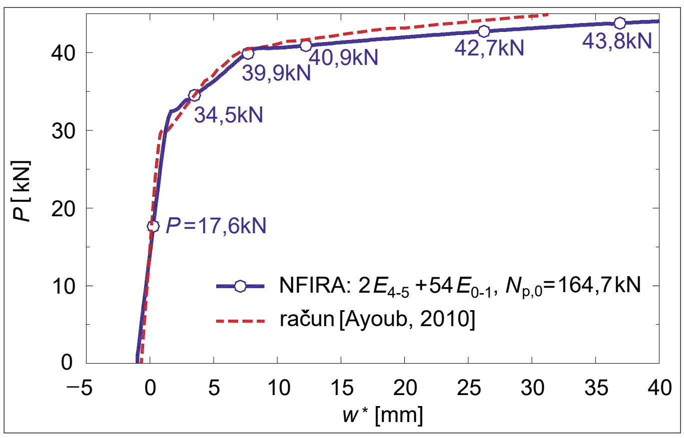
V drugem računskem primeru pa obravnavamo prostoležeči nosilec s pravokotnim prečnim prerezom, ki je bil predhodno prednapet z ravnim kablom nazivnega premera 15,7 mm. Tudi za ta element v literaturi obstajajo rezultati obremenilnega preizkusa (Mitchell, 1993). Nosilec je bil v polju obtežen z dvema koncentriranima silama P v prečni smeri, ki sta se med preizkusom monotono povečevali. Natezna sila v kablu je pred preizkusom znašala $N_{p,0}$ = 164,7 kN. Osnovne geometrijske in materialne podatke povzamemo po literaturi (Mitchell, 1993) in jih prikazujemo na sliki 15.

Tudi v tem primeru nosilec modeliramo s 56 linijskimi končnimi elementi, kot prikazujemo na sliki 15(c). Na vsakem previsnem delu uporabimo po 1 končni element tipa $E_{4\text{-}5}$, v polju nosilca pa 54 »crack-band« elementov tipa $E_{0\text{-}1}$ z dolžino h = 5,0 cm. Izbrana dolžina ustreza ocenjeni energiji loma betona G_f = 93 N/m (CEB-FIP, 1993) ter naslednjim parametrom konstitucijskega modela betona v nategu (Rabczuk, 2005): f_{ct} = 0,43 kN/cm², ε_{ct1} = 0,106 ‰, ε_{ctu} = 2,95 ‰, α_t = 0,14 in β_t = 0,1975. V tlaku pa upoštevamo naslednje parametre betona (SIST, 2005): E_{cm} = 3840 kN/cm², ε_{c1} = −2,54 ‰ in ε_{cu1} = −3,12 ‰. Konstitucijski zakon stika med prednapetim kablom in okoliškim betonom povzamemo po literaturi ((Fib, 2013), (Orr, 2017)) in ga skupaj z upoštevanimi parametri prikažemo na sliki 16. Pri tem sprijemno trdnost stika prilagodimo rezultatom meritev, in sicer tako, da jo povečamo za 20 % glede na priporočila iz literature (Orr, 2017).

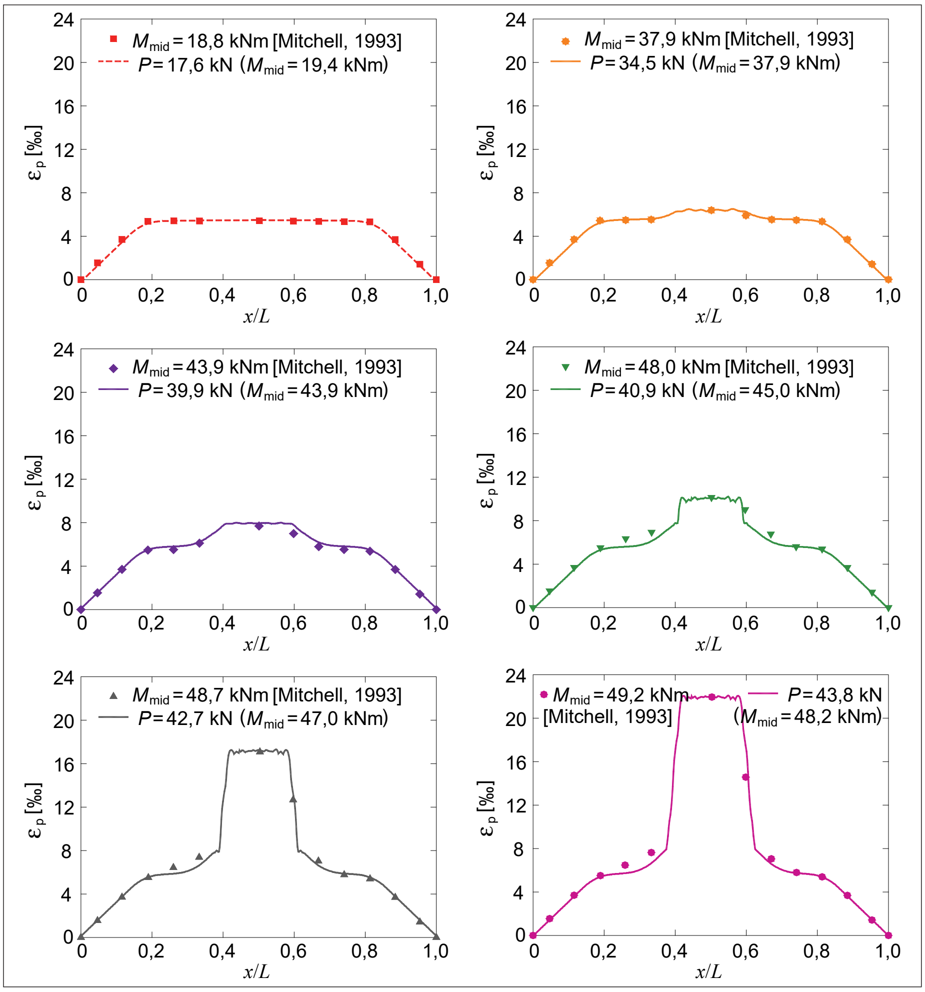
4.2.2. Obtežno-deformacijska krivulja

Tudi v tem primeru najprej analiziramo mehanski odziv nosilca, in sicer nas zanima spreminjanje navpičnega pomika na sredini razpona w^* v odvisnosti od velikosti obtežbe P. Tokrat nimamo na razpolago rezultatov meritev pomika, so pa v literaturi na voljo rezultati računske analize Ayouba in sodelavcev (Ayoub, 2010). Obtežno-deformacijsko krivuljo za navpični pomik prikazujemo na sliki 17. Pri tem vpliv lastne teže nosilca zanemarimo. Tudi v tem primeru lahko krivuljo razdelimo v tri faze: v prvi je nosilec še nerazpokan (pribl. do sile 30 kN), v drugi upogibno razpoka (med 30 in 40 kN), v tretji fazi pa pride do plastifikacije kabla in togost nosilca se zelo zmanjša.

Ugotovimo, da je izračunani razvoj navpičnega pomika nosilca primerljiv z rezultati, ki so jih predstavili Ayoub in sodelavci (Ayoub, 2010). Manjše odstopanje med izračunanima krivuljama je posledica različnih začetnih sil prednapetja v kablu. Računska vrednost mejne obtežbe znaša P_{max} = 44,1 kN pri navpičnem pomiku w^* = 40,8 mm in je nekoliko manjša od izmerjene med preizkusom $P_{max,eksp}$ = 44,7 kN (Mitchell, 1993), ko je nastopila upogibna porušitev nosilca.



Slika 17 • **Izračunana obtežno-deformacijska krivulja Mitchellovega prednapetega betonskega nosilca in primerjava z rezultati analize Ayouba in sodelavcev (Ayoub, 2010).**



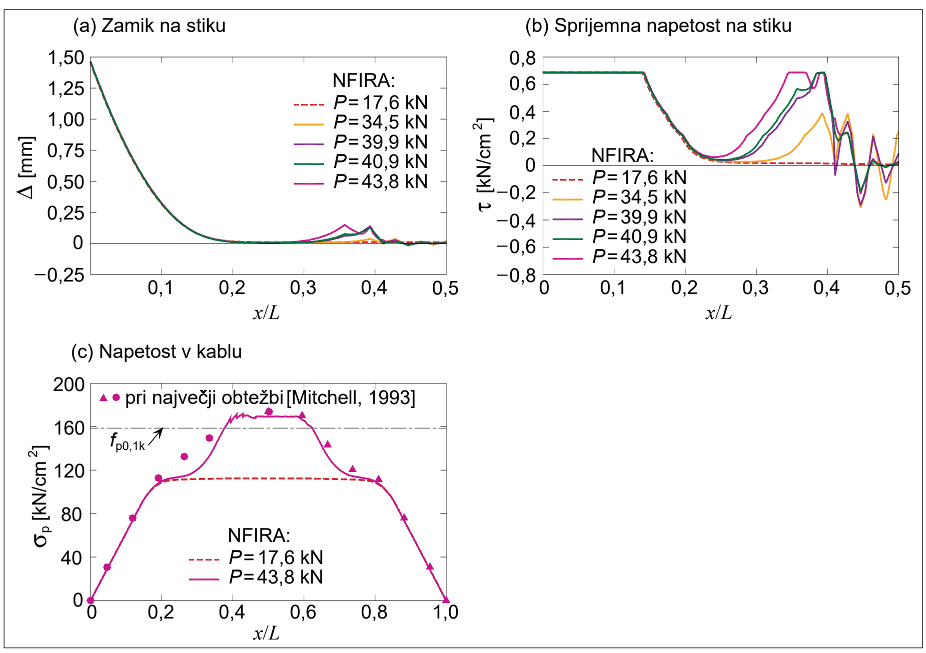
Slika 18 • **Izmerjeni in izračunani potek osnih deformacij vzdolž kabla za različne nivoje obtežbe Mitchellovega prednapetega betonskega nosilca.**

4.2.3. Napetostno in deformacijsko stanje pri različnih nivojih obtežbe

V tem razdelku predstavimo rezultate analize napetostno-deformacijskega stanja v prednapetem nosilcu. Najprej na sliki 18 prikažemo potek osnih deformacij ε_p vzdolž kabla pri različnih nivojih obtežbe P ter rezultate primerjamo z rezultati meritev (Mitchell, 1993). Nivoje obtežbe iz predstavljene analize izberemo tako, da se izračunane deformacije v kablu na območju konstantne upogibne obremenitve (v polju med silama) prilegajo rezultatom iz eksperimenta. Lege posameznih nivojev obtežb so na obtežno-deformacijski krivulji na sliki 17 označene z znakom »O«. Ugotovimo, da se izračunani poteki deformacij vzdolž celotne dolžine kabla zelo dobro prilegajo izmerjenim deformacijam. Dodatno ugotovimo, da dobimo pri nižjih nivojih obtežbe nosilca primerljiv potek deformacij pri enakih silah (P = 17,6; 34,5 oz. 39,9 kN), pri višjih nivojih obtežb pa pri nekoliko nižjih silah. Na sliki 18 M_{mid} označuje vrednost konstantne upogibne obremenitve med silama (M_{mid} = 1,1· P). Pri najvišjih nivojih obtežbe opazimo tako pri rezultatih meritev kot pri rezultatih analize pojav lokalizacije deformacij kabla v osrednjem delu nosilca, in sicer zaradi njegove plastifikacije ($\varepsilon_p > f_{y0,1k}/E_p$ = 8 ‰).

Kot smo že omenili, lahko s predstavljenim mehanskim modelom izračunamo tudi razporeditev zamikov Δ in sprijemnih napetosti τ vzdolž stika med kablom in okoliškim betonom. Tako na sliki 19(a) prikazujemo potek zamikov, na sliki 19(b) pa potek sprijemnih napetosti za že prej omenjene nivoje obtežbe nosilca. Sočasno na sliki 19(c) prikažemo še potek napetosti vzdolž kabla za dva nivoja obtežbe in rezultate primerjamo z rezultati meritev (Mitchell, 1993).

Glede poteka zamikov in sprijemnih napetosti v polju nosilca veljajo enake ugotovitve kot pri analizi Gilbertovega AB-nosilca iz 1. računskega primera. Na začetku, ko nosilec še ni razpokan (na sliki 19(a) in (b) je to pri sili P = 17,6 kN), so sprijemne napetosti in zamiki v polju nosilca zanemarljivi. Ker pa je obravnavani nosilec predhodno (adhezijsko) prednapet, se zamiki in sprijemne napetosti sedaj pojavijo na obeh koncih nosilca, tj. na mestih vnosa sile prednapetja v beton. Tu so zamiki tolikšni, da je dosežena celo sprijemna trdnost stika ($\tau = \tau_u$ = 0,677 kN/cm^2). Dodatno ugotovimo, da so na območju vnosa prednapetja tako zamiki, sprijemne napetosti kot deformacije in napetosti v kablu neodvisni od velikosti zunanje obtežbe.



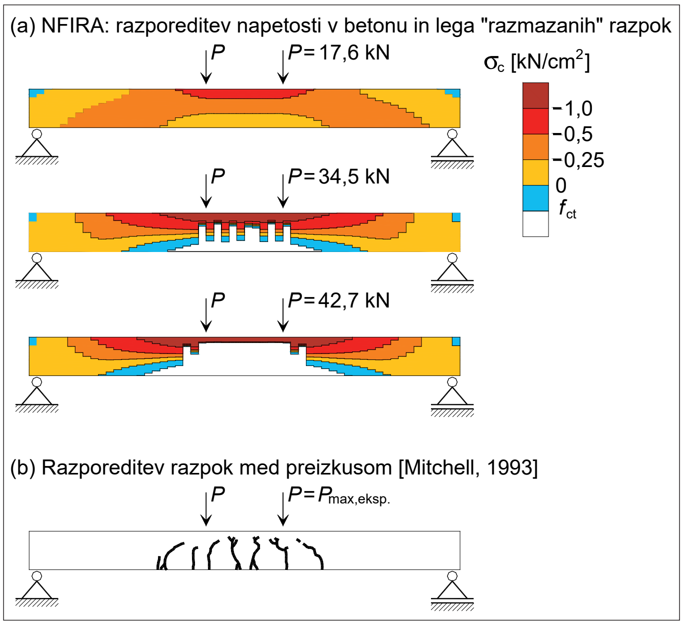
Slika 19 • **(a) Izračunani potek zamikov, (b) sprijemnih napetosti na stiku med kablom in betonom ter (c) napetosti v kablu za različne nivoje obtežbe Mitchellovega prednapetega betonskega nosilca.**

V polju nosilca pa s povečevanjem obtežbe beton razpoka, kar se v uporabljenem modelu odrazi v materialnem mehčanju in lokalizaciji deformacij v betonu v nekaterih končnih elementih $E_{0\text{-}1}$. Sočasno se na stiku med kablom in okoliškim betonom pojavijo zdrsi in posledično se aktivirajo sprijemne napetosti. To je lepo vidno na slikah 19(a) in 19(b) pri sili P = 34,5 kN ter pri večjih silah. Pri najvišjih nivojih obtežbe tudi sprijemne napetosti v polju nosilca dosežejo sprijemno trdnost stika.

4.2.4. Razpokanost nosilca pri različnih nivojih obtežbe

Na koncu, tako kot pri prvem računskem primeru, prikažemo še primernost predstavljenega mehanskega modela za oceno razpokanosti upogibno obremenjenega prednapetega betonskega nosilca. Na sliki 19(a) prikazujemo razporeditev vzdolžnih napetosti v betonu σ_c za tri različne nivoje obtežbe nosilca. Pri sili P = 17,6 kN, ki se nahaja še v prvi fazi obtežno-deformacijske krivulje (glej sliko 17), nosilec še ni razpokan.

Pri ostalih dveh obtežbah, ki sta v drugi oz. tretji fazi obtežno-deformacijske krivulje, pa v polju nosilca zopet opazimo pojav lokalizacije napetosti v betonu kot posledico lokalizacije deformacij. Ta območja predstavljajo t. i. razmazane razpoke. Tako lahko pri obtežbi P = 34,5 kN naštejemo 7, pri obtežbi P = 42,7 kN pa 14 takšnih razmazanih razpok. Med preizkusom je bilo pri mejni obtežbi zabeleženih 8 izrazitih razpok, pri čemer so se nekatere še dodatno cepile (glej sliko 20(b)). Dodatno ugotovimo, da s predstavljenim modelom zopet dobro ocenimo tudi širino območja, kjer nosilec med preizkusom upogibno razpoka.



Slika 20 • **(a) Razporeditev napetosti v betonu za tri različne nivoje obtežbe prednapetega nosilca in prikaz lege razmazanih razpok, (b) razporeditev upogibnih razpok v polju prednapetega betonskega nosilca med obremenilnim preizkusom (Mitchell, 1993).**

5 • SKLEP

V članku smo predstavili učinkovit in relativno preprost enodimenzionalni (1D) mehanski model za analizo vpliva razpokanosti na togost ojačanega betonskega nosilca pri kratkotrajni statični obtežbi. Pri tem smo razpokanost betona modelirali z modelom t. i. razmazane razpoke, ki temelji na mehaniki loma. V ta namen smo uporabili razširjeno družino geometrijsko točnih deformacijskih 1D-končnih elementov, ki vključuje tudi »crack-band« element, ki ga potrebujemo za uspešno modeliranje razmazanih razpok. Betonski ovoj smo modelirali ločeno od ojačilne armature. Upoštevali smo, da se armatura in betonski ovoj na medsebojnem stiku lahko zamakneta, zamiki pa so majhni. Učinkovitost in natančnost predstavljenega mehanskega modela smo prikazali na primeru dveh upogibno obremenjenih ojačanih betonskih elementov, za katera obstajajo v literaturi rezultati preizkusov. Pokazali smo, da lahko z razvitim modelom učinkovito ocenimo pomike, napetosti in deformacije v betonskem delu nosilca kot tudi v ojačilni armaturi, lahko pa izračunamo tudi razporeditev zamikov ter sprijemnih napetosti na njunem stiku. To velja tako za armirani kot tudi za prednapeti betonski nosilec. Ugotovili smo, da so izračunani rezultati kvalitativno primerljivi z rezultati drugih raziskovalcev, ki so opravili analize podobnih ojačanih betonskih nosilcev z bistveno bolj zahtevnimi mehanskimi 2D- in 3D-modeli (Diana 8, Abaqus ...).

6 • ZAHVALA

Predstavljeni rezultati so pridobljeni v sklopu dela programskih skupin Gradbene konstrukcije in gradbena fizika (P2-0158) ter Mehanika konstrukcij (P2-0260), ki ju financira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije. Za finančno pomoč se ji iskreno zahvaljujem.

Zahvaljujem se tudi prof. dr. Igorju Planincu za koristne nasvete pri nastajanju tega članka.

7 • LITERATURA

Ayoub A., Filippou F.C., Finite-element model for pretensioned prestressed concrete girdens, Journal of Structural Engineering ASCE,136, 4, 401–409, 2010.

Bajc U., Bratina S., Saje M., Planinc I., Nelinearna analiza razpokane ABke natezne palice – primerjava numeričnih metod, Gradbeni vestnik, 62, 105–116, 2013.

Bažant, Z. P., Pijaudier-Cabot, G., Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. Journal of Engineering Mechanics, 115, 755–67, 1989.

Bažant, Z. P., Planas, J., Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials, Boca Raton, CRC Press, 1997.

Bratina, S., Saje, M., Planinc, I., Materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames, International Journal of Solids and Structures, 41, 7181–207, 2004.

Bergan, P. G., Holand, I., Nonlinear finite element analaysis of concrete structures, Composer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 443–467, 1979.

CEB-FIP Model Code 1990: Design Codes, Comite Euro-International du Beton and Federation International de la Precontraint, London: Thomas Telford,1993.

Dias-da-Costa, D., Alfaiate, J., Sluys, L. J., Julio, E., A discrete strong discontinuity approach, Engineering Fracture Mechanics, 76, 1176–1201, 2009.

Fib, International Federation for Structural Concrete, fib Model Code for Concrete Structures 2010, Berlin: Ernest & Sohn GmbH & Co. KG., 2013.

Gilbert R.I., Nejadi S., An experimental study of flexural cracking in reinforced concrete members under short term loads, UNICIV Report No. R-435, School of Civil and Environmental Engineering, University of New South Wales, Sydney, Australia, 2004.

Markovič, M., Krauberger, N., Saje, M., Planinc, I., Bratina, S., Non-linear analysis of pre-tensioned concrete planar beams, Engineering Structures, 46, 279–293, 2013.

The MathWorks, Inc., MATLAB, Natick, http://www.mathworks.com, 2014.

Mitchell D., Cook W.D., Khan A.A., Tham T., Influence of high strength concrete on transfer and development length of pretensioning strand. PCI Journal, 14, 4, 62–74, 1993.

Orr J.J., Darby A., Ibell T., Thoday N., Valerio P., Anchorage and residual bond characteristics of 7-wire strand, Engineering Structures, 138, 1–16, 2017.

Rabczuk, T., Akkermann, J., Eibl, J., A numerical model for reinforced concrete structures, International Journal of Solids and Structures, 42, 1327–1354, 2005.

Rabczuk T., Zi G., Bordas S., Nguyen-Xuan H., A geometrically non-linear three-dimensional cohesive crack method for reinforced concrete structures. Engineering Fracture Mechanics, 75, 4740–4758, 2008.

Reissner, E., On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Basel, Birkhäuser, 23, 5, 795–804, 1972.

SIST, SIST EN 1992–1–1:2005, Evrokod 2, Projektiranje betonskih konstrukcij–Del 1–1, Splošna pravila in pravila za stavbe, Slovenski inštitut za standardizacijo, Ljubljana, str. 227, 2005.

Yang, X. S., Lees, J. M., Morley, C. T., Modelling crack propagation in structures: Comparison of numerical methods, Communications in Numerical Methods in Engineering, 24, 1373–1392, 2008.