PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **32** (2004/2005)
Številka 4
Strani 15–19

Andrej Likar:

KAKO RASTEJO SNEŽINKE?

Ključne besede: fizika, prevajanje toplote, rast snežink, zmrzovanje, temperaturno polje, šesterokotna mreža, matrika stanja, temperaturna matrika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/32/1593-Likar.pdf

2.

Kako rastejo snežinke?

V zelo hladnem zraku padajo snežinke v obliki majhnih šestkotnih zvezdic. Nekatere imajo nazobčane krake, druge spet dolge drevesaste izrastke (glej sliko 1). Zvezdice se močno razlikujejo med seboj, skoraj ne najdemo dveh povsem enakih. Rast snežink v oblakih je očitno zelo zapletena. Ali jo lahko vsaj v grobem pojasnimo? Pokazali bomo, da lahko s preprosto predstavo o primrzovanju vodnih molekul na ledeno površino in z upoštevanjem zakona o prevajanju toplote presenetljivo dobro opišemo ta pojav.

Obravnavali bomo kar se da preprost model zmrzovanja. Vodne molekule bomo postavili v vozlišča šesterokotne mreže v ravnini. Najprej bomo privzeli, da vse molekule, razen ene na sredi, tvorijo tekočo fazo. Nato bomo začeli tekočino ohlajati tako, da bomo hladili podlago. Ko bo temperatura v vozlišču padla pod ledišče, bo molekula primrznila, vendar le, če ima kakega soseda. Ker se pri primrzovanju sprošča toplota, bomo v vozlišču dvignili temperaturo. Seveda ne bomo dovolili, da bi molekula zaradi tega spet prešla v tekočino, saj bi za to potrebovala talilno toploto, ki jo je pri primrznitvi oddala, del te toplote pa je že odtekel drugam. Na vsakem vozlišču bomo morali računati temperaturo, saj se voda ohlaja, pa tudi segreva, in sicer tem bolj, čim bliže smo vozliščem, kjer so molekule pred kratkim prešle v led. Temperatura zato ne bo enaka v vseh vozliščih, opraviti imamo s *temperaturnim poljem*.

Da pridemo do šesterokotne mreže, tvorimo najprej pravokotno mrežo, kamor bomo postavili molekule vode. Ker bomo rast snežink spremljali z računalnikom, si bomo omislili polje vozlišč in vsakemu vozlišču priredili par naravnih števil (i,j). Temperaturno polje bomo predstavili z matriko $T(i,j)$, prav tako tudi agregatno stanje molekul z matriko $p(i,j)$, ki ji bomo rekli matrika stanja. Na posameznem mestu bo njena vrednost lahko le 1 ali 0. Enica bo pomenila, da je na danem mestu molekula del kristala, ničla pa, da je molekula še del tekočine. Na sliki 2 je predstavljena osnovna pravokotna mreža in sosedje vozlišča (i,j). Vidimo, da so osnovna vozlišča, ki ležijo levo ali desno, precej bliže kot tista nad ali pod. (Kolikšno je razmerje med stranicama osnovnega pravokotnika?) Tako bodo sosedje vozlišča (i,j) tvorili šestkotnik, snežinke bodo imele tako simetrijo, ki jo opazimo v naravi. To bomo upoštevali, ko bomo matriko $p(i,j)$ prikazovali na zaslonu. Morda bi koga skrbelo, da smo z izbiro sosedov vozlišča (i,j) prezrli tista, ki so mu zares najbližja. A v teh molekule nikoli ne primrznejo, saj nimajo svojih sosedov. Tako z zvijačo in malo truda pridemo do šestkotne mreže.

Na vsakem koraku računa bomo pregledali vsa vozlišča (i,j) in zabeležili, če se je agregatno stanje molekule morebiti spremenilo, če je torej temperatura $T(i,j)$ pod lediščem in ima molekula vsaj enega, že primrznjenega soseda. Vrednost $p(i,j)$ bomo tedaj spremenili od vrednosti 0 na vrednost 1.

Pri vsaki spremembi matrike stanja bomo dano mesto segreli za ΔT, saj se ob zmrzovanju sprosti talilna toplota. Hitro lahko izračunamo velikost ΔT, saj vemo, koliko toplote se sprosti, ko zmrzne 1 kg vode; q_t = 80.4200 J/kg. Toliko toplote bi segrelo 1 kg vode za 80 K. Seveda moramo pri zmrzovanju to toploto odvesti, da ima mešanica vode in ledu ves čas temperaturo ledišča. Toplota zato odteče v hladno okolico, s katero sta zmrzu-

Slika 1. Fotografije snežink, ki jih včasih opazimo v naravi. Večinoma so snežinke nepravilnih oblik, mnoge so v obliki paličic in stebričkov, ki jih naš račun ne zajema. Slike posameznih snežink smo našli na spletni strani http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/photos.

joča voda in nastali led v stiku. Pri nas pa bomo za toliko segreli vozlišče, v katerem je molekula primrznila.

Zaradi gretja bomo morali po nekem pravilu obnavljati temperature vozlišč $T(i,j)$. Tako bomo upoštevali toplotne tokove od mest, kjer so molekule primrznile, na sosednja vozlišča in v hlajeno podlago s stalno temperaturo T_p. Do enačbe, ki bo opisovala temperaturne spremembe, pridemo po temle preprostem premisleku. Denimo, da merimo temperaturo valjastega merjenca, ki je v toplotnem stiku z dvema velikima telesoma s temperaturama T_1 in T_2. Če je toplotni stik z obema telesoma enak, bo njegova končna temperatura na sredi ravno povprečna temperatura $\frac{1}{2}(T_1+T_2)$. Podoben premislek velja, če je zvezdasto oblikovan merjenec v stiku z več telesi z različnimi temperaturami. Temperaturno spremembo vozlišča (i,j) pri majhnem časovnem koraku Δt bomo zato določili kot

$$\Delta T(i,j)=\alpha(\bar{T}-T(i,j)),$$

kjer smo s $\bar{T}$ označili povprečno temperaturo najbližjih sosedov, s katerimi je vozlišče v toplotnem stiku

$$\bar{T}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}T_k.$$

S slike 2 razberemo, da je povprečna temperatura najbližjih šestih sosedov vozlišča (i,j) in podlage podana takole:

$$\bar{T}=\frac{1}{7}T(i+2,j)+T(i+1,j-1)+T(i+1,j+1)+T(i-1,j-1)+T(i-1,j+1)+T(i-2,j)+T_p)).$$

Poleg temperatur sosednjih vozlišč smo upoštevali še temperaturo podlage, s katero je vsako vozlišče v stiku. Koeficient α je povezan s časovnim korakom Δt, toplotno prevodnostjo, gostoto in specifično toploto ledu ali vode ter razdaljo med najbližjimi sosedi. Spet

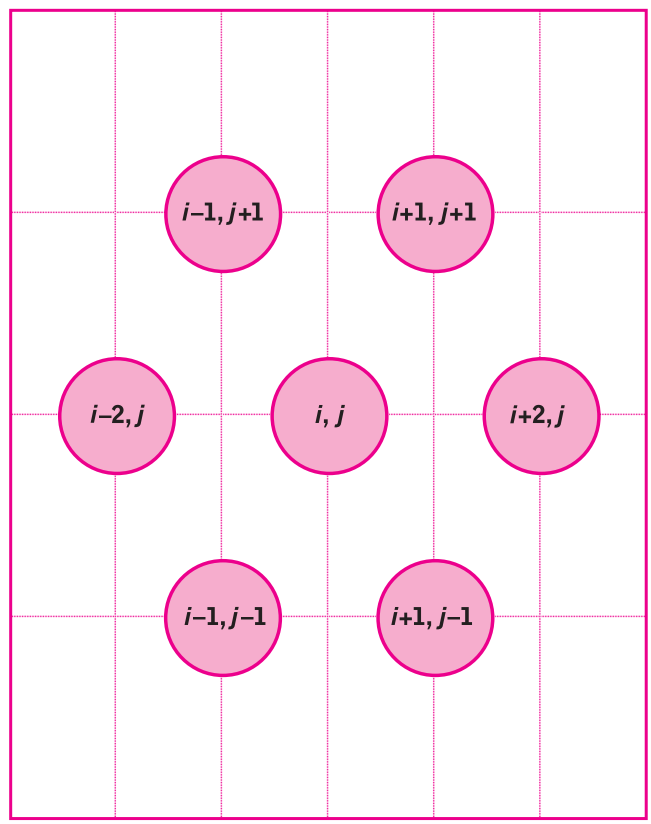
bomo privzeli, da so lastnosti ledu in vode povsem enake. Čim manjši α izberemo, tem natančnejši bo račun. Seveda se bo s tem podaljšal skupni čas računanja, zato ne kaže pretiravati z natančnostjo, še posebno ne, ker smo v našem preprostem računanju marsikaj zelo poenostavili. Prevelike vrednosti $\alpha >> 1$ pa vodijo do nesmiselnih rezultatov. Priporočljivo je izbrati časovni korak Δt tako, da je na primer $\alpha = 0.25$.

Program, s katerim smo sledili rasti snežink, je zelo preprost. Priporočljivo je delati z dvema temperaturnima matrikama $T_s(i,j)$ in $T_n(i,j)$ ter dvema matrikama stanja $p_s(i,j)$ in $p_n(i,j)$. Indeksa s in n označujeta staro stanje, ki ga moramo obnoviti, in obnovljeno novo stanje. Za naslednji korak prepišemo novo stanje temperatur in agregatnih stanj v staro.

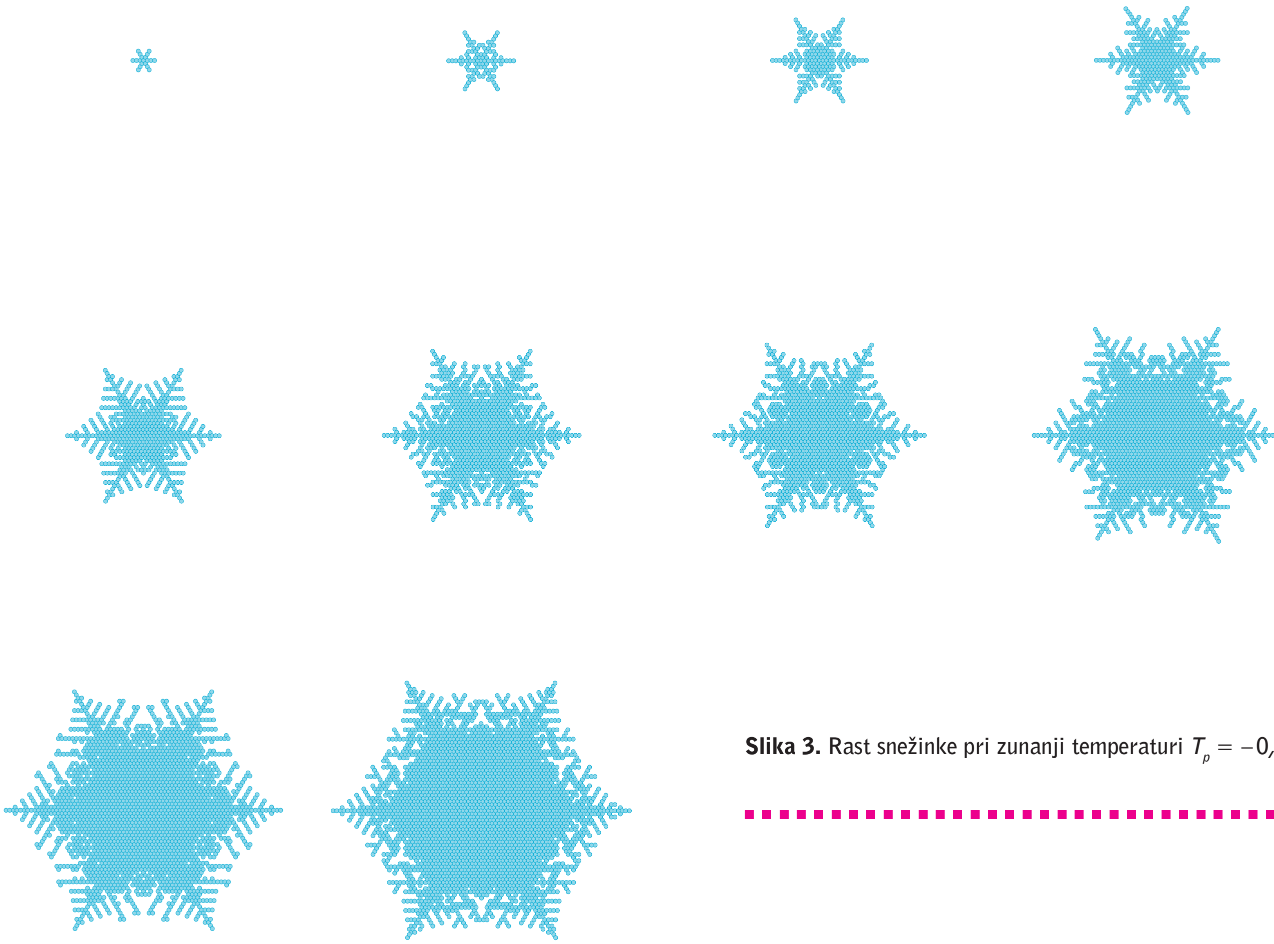
Na sliki 3 je prikazana hitra rast snežinke, ko je bila temperatura podlage za 0,7 K pod lediščem, na sliki 4 pa počasna rast, ko je bila ta temperatura le 0,1 K pod lediščem. S spreminjanjem temperature podlage med rastjo se lahko tvorijo tudi drugačne oblike. Skupno vsem snežinkam s te slike so dolgi zvezdasti izrastki. Nastanejo zato, ker se vozlišča blizu izrastkov najhitreje ohlajajo. To je posebno pomembno pri rasti blizu ledišča. Na sliki 5 vidimo nekaj razvojnih stopenj snežink, ki so nastajale pri temperaturi 0.025 K pod lediščem. Na tretji sličici sta prikazani dve snežinki na istem mestu, mlajša s krožci, starejša s pikami. Tako vidimo, na katerih mestih snežinka najhitreje raste.

Zanimivo je, da lahko tako zapleten pojav, kot je rast snežink, kar dobro pojasnimo z zelo preprostim računanjem. Naše snežinke so seveda zelo majhne, saj jih sestavlja le nekaj sto molekul. Tudi če si namesto molekul mislimo mikroskopske kapljice, bo primrzovanje kazalo enake značilnosti. Zapleten vzorec nastane zaradi zelo preprostih zakonitosti, ki uravnavajo zmrzovanje. V naravi so seveda razmere precej bolj zapletene, posebno zato, ker snežinke rastejo tudi v debelino. Razmere so v oblakih lahko precej drugačne kot na našem polju vozlišč. Zato najdemo v naravi snežinke, ki jih z našim računom ne moremo pričarati. Na spletni strani http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals najdemo poleg lepih posnetkov snežink tudi nekaj razlage o njihovi rasti.

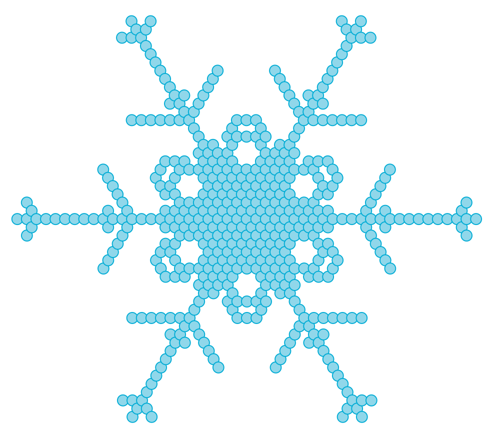
Andrej Likar



Slika 2. Šestkotna mreža, kamor postavimo molekule vode. Prikazano je vozlišče (*i,j*) in sosednja vozlišča, ki tvorijo šestkotno mrežo.

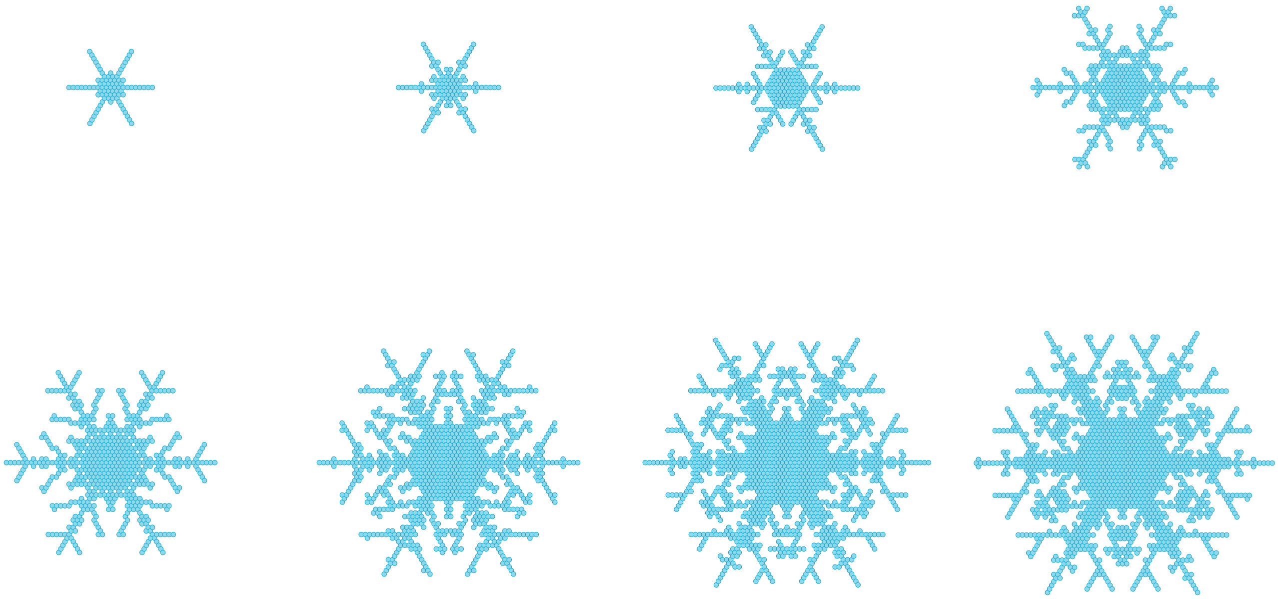


Slika 3. Rast snežinke pri zunanji temperaturi $T_p = -0{,}7$ K



Slika 5. Rast snežinke pri zunanji temperaturi $T_p = -0.025$ K. Največji snežinki sta narisani na istem mestu, manjša s krožci, večja s pikami, da se vidijo mesta najhitrejše rasti.

FIZIKA SE NADALJUJE NA STRANI 24



Slika 4. Počasnejša rast snežinke pri zunanji temperaturi $T_p = -0,1$ K