Od sladkorja do odvajanja

Vid Kavčič, Srednja šola Črnomelj
Mentorica: Katarina Pavlakovič

Izvleček

Naloga o škatlici in njeni prostornini je zaznamovala moja zadnja štiri leta šolanja na Osnovni šoli Loka Črnomelj. V šestem razredu mi je nalogo podala učiteljica matematike Darinka Rogina. S takratnim znanjem nisem mogel kaj prida računati. Zato sem se naloge lotil s praktičnim raziskovanjem. A skozi leta vse praktično preide v teoretično – na s črnilom popackan list papirja s srednješolsko matematiko.

V svoji raziskovalni nalogi sem obdelal reševanje ene na videz preproste naloge na več načinov na različnih stopnjah znanja. Ocenjeval sem, igral sem se s sladkorjem, računal prostornino kvadrov, s pomočjo GeoGebre risal grafe funkcij ter se seznanil z limitami in odvodi, nato pa odvod še posplošil. Tako najnižja kot tudi najvišja stopnja znanja imata prednosti in slabosti, ki sem jih preučil v raziskovalni nalogi.

Ključne besede: odvod, raziskovanje pri matematiki, prostornina

From Sugar to Derivation

Abstract

The task including a box and its volume made a lasting impression on me during my last four years of primary school. I was given this task in sixth grade by my mathematics teacher Darinka Rogina, but the knowledge I had at the time was not very useful so I decided to approach it with practical research. However, over time all practical knowledge becomes theoretical – presented on an ink stained piece of paper with secondary school mathematics.

In my research paper, I approached the solving of an apparently simple task in various ways at different knowledge levels. I was estimating, playing with sugar, calculating the volume of a rectangular solid, using GeoGebra to draw graphs of mathematical functions, became acquainted with limits and derivatives and generalised the derivatives. Both the highest and the lowest knowledge level have their strengths and their weaknesses that were the subject of my research paper.

Keywords: derivative, research in mathematics, volume

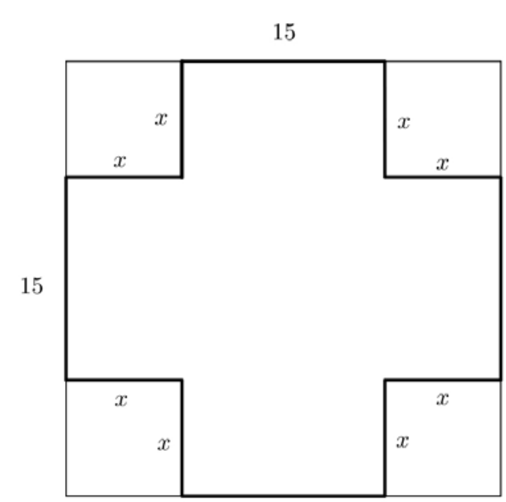
Uvod

Nekaj let nazaj, ko sem bil še v šestem razredu, mi je učiteljica matematike zastavila zelo zanimivo nalogo.

Dan je list papirja v obliki kvadrata s stranico 15 cm (slika 1). Iz vsakega vogala kvadrata izrežemo kvadrat s stranico x. Tako lahko preostalo zložimo v škatlico. Pri katerem x je prostornina škatlice največja?

Takrat še nisem imel veliko matematičnega znanja, zato sem škatlice kar naredil in ugotavljal, kdaj je prostornina škatlice največja.

Učiteljica me je vsako leto spomnila na to nalogo in vsako leto sem lahko izračunal nekaj več. Prav vsako znanja šteje; konec šestega razreda je prinesel prostornino kvadra, v osmem razredu smo matematiko posplošili z x in ostalimi spremeljivkami, v de-



Slika 1

vetem razredu smo se seznanili s funkcijami in grafi, v drugem letniku gimnazije je na sporedu kvadratna enačba, zadnjo stopnjo pa predstavlja odvod – zanj mi je učiteljica povedala letos. Ker me je zanimala matematično korektna rešitev, sem začel prebirati o odvodu in posegel po njem.

Nalogo sem rešil na več možnih načinov in vsakega podrobno preučil.

Raziskovanje – 1. del: Ocenjevanje pri matematiki

Najbolj osnovno je, da samo ocenimo, kdaj ima škatlica največjo prostornino, če imamo škatlice pred seboj in jih vidimo. Tu znanje matematike ni zelo pomembno; pomembna je iznajdljivost in občutek.

O problemu sem najprej razmislil. Prostornina gotovo ni največja, ko je x = 1 cm, saj je spodnja ploskev škatlice v tem primeru sicer velika, toda škatlica je visoka zgolj 1 centimeter. Prav tako škatlica ne bo imela največje prostornine, ko je x = 7 cm, saj je spodnja ploskev v tem primeru izredno majhna (zgolj 1 cm^2), pa čeprav je škatla visoka.

Zato sem iz papirja izdelal škatlice za x = 1 cm, x = 2 cm, x = 3 cm, x = 4 cm, x = 5 cm, x = 6 cm in x = 7 cm. Škatlice z x = 8 cm ni mogoče narediti, saj bi morala biti v tem primeru dolžina kvadrata večja od 16 cm. Ko sem videl, kako posamezna škatlica izgleda v prostoru, sem videl, da so med večjimi prav gotovo tiste škatlice pri x = 2 cm, x = 3 cm in x = 4 cm, nisem pa si upal trditi, v katero bi lahko spravili največ ... česar vendar?

Raziskovanje – 2. del: Sladka matematika

Porodila se mi je ideja, da bi vsako škatlico napolnil s sladkorjem in jo stehtal ter ugotovil, pri katerem x je masa sladkorja največja, v kateri škatlici je največ sladkorja.

Ugotavljanje največje prostornine s sladkorjem

Potrebujemo:

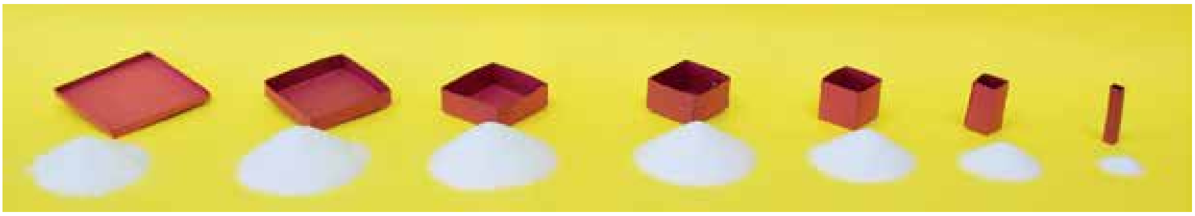
- **sedem škatlic**, za katere smo porabili kvadratni list papirja velikosti 15 cm × 15 cm; višin od 1 do 7 cm;
- **kilogram navadnega belega sladkorja** zadostuje. Lahko bi bila uporabljena tudi sol ali kava, ampak da bo matematika bolj sladka, sem se odločil za sladkor;
- **digitalno tehtnico**, ki mora biti čim bolj natančna za boljše meritve;
- **papir in svinčnik** za zapisovanje meritev.

Meritve gotovo niso zelo verodostojne, saj je izmerjena masa odvisna od tega, kako dobro smo škatlico zapolnili, poleg tega pa tudi zaradi prepogibov pri izdelavi škatlic njihova prostorina ni nujno točno tak, kot bi želeli – lahko je malce večji ali manjši. Poleg tega pa so škatlice narejene iz lepenke, ki vpliva na maso. Podatke sem zbral v spodnji preglednici.

Preglednica 1: Mase škatlic s sladkorjem *x*.

Škatlica	Slika	Masa
x = 1 cm		m_1 = 165 g
x = 2 cm		m_2 = 244 g
x = 3 cm		m_3 = 245 g
x = 4 cm		m_4 = 202 g
x = 5 cm		m_5 = 130 g
x = 6 cm		m_6 = 58 g
x = 7 cm		m_7 = 9 g

Moja predvidevanja so bila dobra, največjo maso ima škatlica za x = 3 cm, torej lahko sklepamo, da ima tudi največjo prostornino. Nato pa sem primerjal tudi velikosti kupčkov sladkorja, ki sem jih usul na mizo. Videl sem, da je tretji kupček (z leve) največji, kar je potrdilo tehtanje. A to nas ne sme prepričati, lahko gre za optično prevaro.



Slika 2: Kupčki sladkorja s škatlicami.

Raziskovanje – 3. del: Pri matematiki prostornino računamo

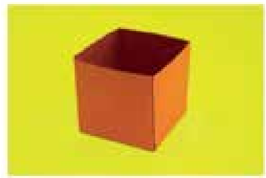
Izračunamo lahko tudi, katera škatlica ima največjo prostornino, a je za to potrebno znanje za izračun prostornine kvadra. Potrebna je tudi mahjhna matematična spretnost za izračun robov posameznega kvadra, torej znanje šestega razreda osnovne šole.

Prostornina kvadra
$V = a \cdot b \cdot c$

V našem primeru je $c = x$, saj gre za višino kvadra (oziroma pravilne štiristrane prizme), dno škatlice je kvadrat, zato velja $a = b = 15 - 2x$. Za vsako škatlico sem izračunal najprej dolžino robov, nato pa še prostornino.

Preglednica 2: Prostornine škatlic za posamezen *x*.

Mreža	Slika	Prostornina
		$x = 1$ cm $a = 15 - 2 \cdot 1 = 13$ cm $b = a = 13$ cm $c = x = 1$ cm $V = 1 \cdot 13 \cdot 13\ \text{cm}^3 = 169\ \text{cm}^3$
		$x = 2$ cm $a = 15 - 2 \cdot 2 = 11$ cm $b = a = 11$ cm $c = x = 2$ cm $V = 2 \cdot 11 \cdot 11\ \text{cm}^3 = 242\ \text{cm}^3$
		$x = 3$ cm $a = 15 - 2 \cdot 3 = 9$ cm $b = a = 9$ cm $c = x = 3$ cm $V = 3 \cdot 9 \cdot 9\ \text{cm}^3 = 243\ \text{cm}^3$
		$x = 4$ cm $a = 15 - 2 \cdot 4 = 13$ cm $b = a = 7$ cm $c = x = 4$ cm $V = 4 \cdot 7 \cdot 7\ \text{cm}^3 = 196\ \text{cm}^3$

Mreža	Slika	Prostornina
		$x = 5$ cm $a = 15 - 2 \cdot 5 = 5$ cm $b = a = 5$ cm $c = x = 5$ cm $V = 5 \cdot 5 \cdot 5\ \text{cm}^3 = 125\ \text{cm}^3$
		$x = 6$ cm $a = 15 - 2 \cdot 6 = 3$ cm $b = a = 3$ cm $c = x = 6$ cm $V = 6 \cdot 3 \cdot 3\ \text{cm}^3 = 54\ \text{cm}^3$
		$x = 7$ cm $a = 15 - 2 \cdot 7 = 1$ cm $b = a = 1$ cm $c = x = 7$ cm $V = 7 \cdot 1 \cdot 1\ \text{cm}^3 = 7\ \text{cm}^3$

Tudi tu ugotovimo, da ima škatlica največjo prostornino, ko je $x = 3$ cm.

Raziskovanje – 4. del: Pri matematiki rišemo grafe

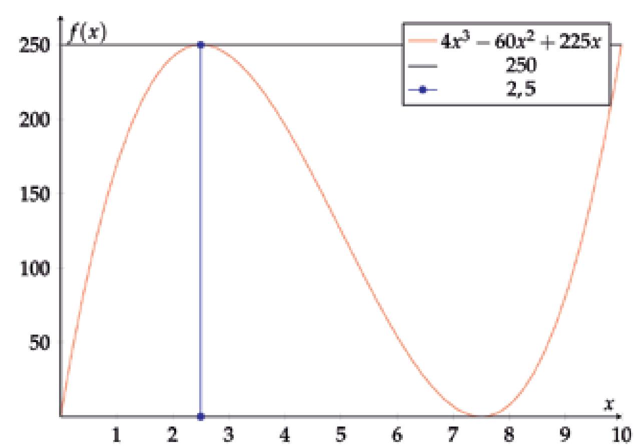
Prostornino škatlice opisuje funkcija, ki jo lahko izračunamo. Prostornino škatlice moramo najprej zapisati splošno. Slednje lahko zapišejo že učenci 8. in 9. razreda osnovne šole, a potem se za ta nivo znanja reševanje naloge ustavi. Učenci se na koncu 9. razreda seznanijo s funkcijami in grafi funkcij, zato je ta primeren za 9. razred, le da je malo zahtevnejši. Upoštevamo, da je $a = 15 - 2x$ in $v = x$.

$$V = a^2 \cdot v = (15 - 2x)^2 \cdot x = (225 - 60x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 60x^2 + 225x$$

Da narišemo graf te funkcije, s katerega odčitamo prostornino in iskani x, lahko uporabimo tehnologijo – GeoGebro ali spletno stran Desmos.

Z grafa razberemo, da je največja prostornina $V = 250\ \text{cm}^3$ pri $x = 2{,}5$ cm. Ta rešitev je sicer izvirna in primerna za 9. razred osnovne šole, a matematično nekorektna. Ni nujno, da smo z grafa odčitali prav – naše oči imajo namreč omejeno natančnost.

Zanimivo, da rešitev našega problema gotovo ni naravno število 2 ali 3, s prejšnjimi reševanji smo ugotovili, da je prostornina največja pri $x = 3$ cm, toda to ni res.



Rešitev naloge sem ocenil in jo rešil s poskušanjem na dva načina ter z malo bolj zanimivo taktiko s pomočjo tehnologije. Bilo je zabavno, a v matematiki je matematično korektni dokaz obvezen. Zato sem se lotil še višjega nivoja za reševanje te naloge – torej odvoda, ki ima za svojo prefinjenost precej zabavno ime. Obelal sem teoretične osnove, naredil nekaj primerov, saj je s pomočjo primerov vse skupaj lažje razumeti.

Uvedimo odvajanje kot drugi pomen

Z odvodom se, kot pravijo, prava matematika šele začne. A prva stvar, ki jo na internetu lahko najdemo o odvodu, je to:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Takoj sem se vprašal, kaj pomeni tisti *lim* in spodaj $h \to 0$. Stvar sem razčistil, a se v to nisem poglabljal, saj sem predvideval, da za rešitev naloge to ni prav zelo pomembno.

Limite

Limita funkcije v neki točki a je število, ki se mu vrednost funkcije $f(x)$ približuje, ko se vrednost spremenljivke x približuje danemu številu a.

Limito funkcije v točki a označimo $\lim_{x \to a} f(x)$, kar beremo: limita $f(x)$, ko gre x proti a.

Če imamo torej na grafu neke funkcije točko a, je limita vrednost funkcije, ko se koordinata x približuje a. To lahko zelo nazorno prikažemo na grafu.

Če poznamo a, lahko limito izračunamo; x se približuje a, ko pa pride do a, velja $x = a$. Toda pri nekaterih funkcijah se x približuje a, a tja nikoli ne pride – kar pa je zelo zanimivo – zato uporabimo izraz: ko gre x poti a. Naredil sem tudi nekaj primerov, da sem si stvar razjasnil.

a) Samo izračunamo vrednost funkcije za $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+5}{x^2-3} = \frac{2^2+5}{2^2-3} = \frac{9}{1} = 9$$

b) Če bi v tem primeru izračunali vrednost funkcije za $x = 2$, bi dobili deljenje z 0, ki v matematiki ni definirano, zato moramo najprej funkcijo poenostaviti. Funkcija pri $x = 2$ tako ni definirana.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1$$

c) Funkcija za $x = 4$ ni definirana, saj pridemo do deljenja z 0. Tako lahko x približujemo 4, a tja nikoli ne bo prišel, saj je za $x = 4$ funkcija nedefinirana. Vrednost funkcije bo tako, ko gre x proti 4, vedno večja, v takem primeru govorimo o neskončni limiti.

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{x-4} = \infty$$

č) Če x pošljemo proti ∞, se vrednost x seveda veča. Vrednost funkcije pa se ne bo bistveno večala, približevala se bo 2. Če izračunamo vrednost funkcije pri večjih x, bo vrednost vedno malo manj kot 2. Poleg tega pa lahko to vidimo tudi na grafu. V takem primeru govorimo o limiti v neskončnosti.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-2}{(x+3)^2} = 2$$

Definicija odvoda

Na funkciji $f(x)$ ležita dve točki $T_1 (x_1, y_1)$ in $T_2 (x_2, y_2)$. Skozi točko T_2 poteka tangenta, skozi točki T_1 in T_2 poteka sekanta. Naj bo razlika koordinat x_2 in x_1 enaka nekemu h, torej $x_2 - x_1 = h$. Zanima nas, kdaj bo naklon sekante enak naklonu tangente – ko bo $h = 0$, ko bosta točki sovpadali.

Naklon sekante lahko izračunamo. Uporabimo dejstvo, da je $x_2 - x_1 = h$.

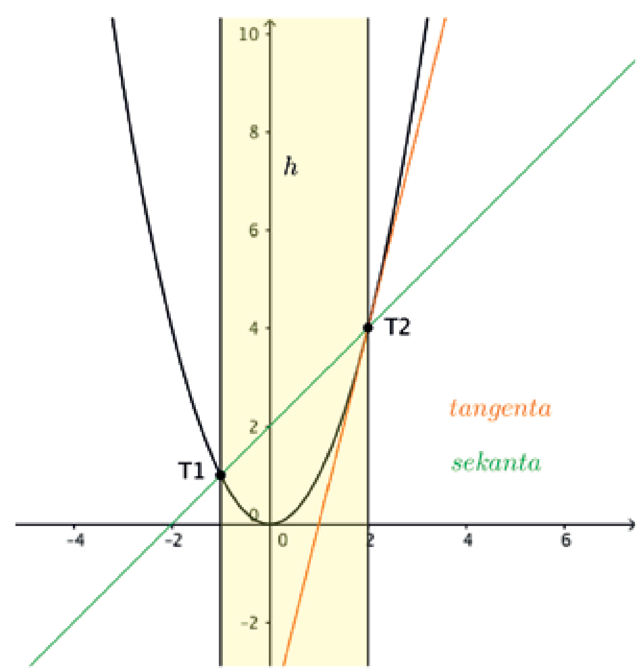
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$$

Odvod funkcije $f(x)$ je enak smernemu koeficientu tangente pri nekem x. Odvod funkcije je enak limiti diferenčnega količnika, ko gre h proti nič:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pa smo pri zapisu, ki sem ga omenil že v uvodu. Vprašanje pa je, kaj pomeni tista črtica ($f'(x)$). S črtico označimo odvod funkcije. Sicer pa lahko odvod označimo tudi drugače. Znameniti fizik Isaac Newton je odvod označil s pikico: $\dot{y}$ ($y = f(x)$), ta zapis se uporablja predvsem v fiziki. Matematik Euler pa je za zapis odvoda uporabil diferencialni operator D, odvod funkcije je zapisal kot D f.

Stvar sem tudi narisal. Dana je funkcija $f(x) = x^2$. Zanima nas naklon tangente, ko je $x = 2$. Ta je enak naklonu sekante, ko gre h proti 0. Uporabimo enačbo (1).



Slika 3: Za lažjo predstavo odvoda.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}}$$

Vstavimo $h = 0$.

$$f'(x) = h + 2x = 0 + 2x = 2x$$

Naklon tangente je pri poljubnem x enak $2x$, v našem primeru pa je to $2 \cdot 2 = 4$. Tudi tu sem naredil še nekaj primerov. S pomočjo definicije sem izračunal odvode.

a) $f(x) = 3x$

Vemo, da je naklonski koeficient v tem primeru 3 – gre namreč za linearno funkcijo, naklon je konstanten. Naklon nam pri linearni funkciji pove smerni koeficient. Kaj pa pokaže odvod?

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)-3x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x+3h-3x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = 3$$

Vidimo, da tudi odvod pokaže, da je naklonski koeficient $k = 3$.

b) $f(x) = 2x^2 + 4x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2+4(x+h)-(2x^2+4x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+4x+4h-2x^2-4x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2+4h}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h+4)}{h} = \lim_{h\to 0}(4x+2h+4)$$

Vstavimo $h = 0$.

$$f'(x) = 4x + 2 \cdot 0 + 4 = 4x + 4$$

Izračun odvoda

Pri odvajanju s pomočjo enačbe (1) lahko zelo kmalu naletimo na težave. Že ko imamo opravka s funkcijami 4. stopnje, se stvar zelo zaplete, saj moramo računati 4. potence, kar pa ni najbolj praktično. Zato za odvajanje obstaja lažji način.

Funkcijo, ki vsebuje en člen, odvajamo tako, da najprej s potenčnim eksponentom pomnožimo koeficient člena, nato pa eksponent zmanjšamo za 1.

Da sem osvojil to veščino, sem naredil tudi nekaj primerov.

(a) $f(x) = 5x^5$ $\quad f'(x) = 5 \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 25x^4$

(b) $f(x) = 1{,}5x^6$ $\quad f'(x) = 1{,}5 \cdot 6 \cdot x^{6-1} = 9x^5$

(c) $f(x) = 3x^{-1}$ $\quad f'(x) = 3 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = -3x^{-2}$

Pravila za odvajanje

Odvajanje enočlenika je sila enostavno, pri odvajanju več členikov, kvocientov, zmnožkov pa se stvar hitro zaplete, zato obstajajo pravila za odvajanje.

Odvod konstante

Odvod konstante je enak 0 za vsako realna število x. Stvar lahko dokažemo s pomočjo definicje odvoda (c je konstanta):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

Ker je odvod prav vsake konstante enak 0, pri integriranju, ki je nasprotna operacija odvoda, ne smemo pozabiti na konstanto, ki jo označimo s c. Nikoli namreč ne vemo, za katero število gre, saj je odvod vsake konstante 0.

Odvod vsote

Odvod vsote dveh ali več funkcij je enak vsoti odvodov posameznih funkciji. Enako velja za odvod razlike.

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Primer:

$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 102$

$f'(x) = 2 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 3x^2 + 4 \cdot 2x + 5x^0 = 8x^3 + 9x^2 + 8x + 5$

Odvod produkta

Odvod produkta dveh funkcij je enak vsoti produktov odvoda prve in druge funkcije ter prve funkcije in odvoda druge funkcije.

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Pri treh funkcijah je odvod tega produkta enak vsoti:

$$(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) +$$
$$+ f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$$

Splošno lahko odvajanje produkta zapišemo tako:

$$(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x)\cdot f_n(x))' = f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x)\cdot f_n(x) +$$
$$f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x)\cdot f_n(x) + \ldots + f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_{n-1}'(x)\cdot f_n(x)$$
$$+ f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_{n-1}(x)\cdot f_n'(x)$$

Primer:

$f(x) = x^3 + 2x^2,\ g(x) = 3x^2$

$(f(x)\cdot g(x))' = (3x^2+4x)\cdot 3x^2 + (x^3+2x^2)\cdot 6x = 15x^4 + 24x^3$

Odvod kvocienta

Odvod količnika izračunamo tako, da od produkta odvoda števca in imenovalca odštejemo produkt števca ter odvoda imenovalca. Slednjo razliko moramo deliti še s kvadratom funkcije v imenovalcu. Matematično:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Tabela odvodov

Nekaterih odvodov preprostno ne moremo izračunati in jih moramo poznati kot, na primer, odvodov kotnih funkcij. Zato potrebujemo tabelo odvodov.

Preglednica 3: Tabela odvodov

FUNKCIJA	ODVOD	FUNKCIJA	ODVOD
$c\ (c \in \mathbb{R})$	0	x	1
x^n	nx^{n-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

V tabelo sem vključil samo pomembnejše odvode.

Uporaba odvoda

Prvi odvod

Glede na to, da odvod pove naklon tangente v neki točki x_0, lahko sklepamo, da:
1. Ko je odvod večji od 0, je funkcija naraščajoča, saj je naklon tangente takrat pozitiven.
2. Ko je odvod manjši od 0, je funkcija padajoča, saj je naklon tangente takrat negativen.
3. Ko je enak 0, vemo, da gre za neko stacionarno točko – ne vemo ničesar o naraščanju in padanju.

Med stacionarnimi točkami lahko poiščemo lokalne ekstreme:
a) če je odvod levo pozitiven in desno negativen, ima funkcija v točki x_0 lokalni maksimum;
b) če je odvod levo negativen in desno pozitiven, ima funkcija v točki x_0 lokalni minimum;
c) če se predznak odvoda pri prehodu skozi točko ne spremeni, funkcija nima lokalnega ekstrema.

Ničle prvega odvoda nam pomagajo pri določanju lokalnih ekstremov.

Drugi odvod

Če nismo prepričani, ali smo našli lokalni minuimum ali lokalni maksimum, nam pride prav drugi odvod. Če je drugi odvod v stacionarni točki:
a) večji od 0, je v točki x_0 lokalni minimum;
b) manjši od 0, je v točki x_0 lokalni maksimum;
c) če je enak 0 ne moremo trditi, da je v točki x_0 dosežen lokalni ekstrem, in tudi če je, ne vem, kateri.

Kvadratna enačba

Pri iskanju ničel odvodov večkrat naletimo na enačbo oblike:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

rečemo ji kvadratna enačba.

Z osnovnošolskim znanjem take enačbe ni moč rešiti. V tem primeru lahko uporabimo naslednjo formulo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

V enačbi a predstavlja koeficient x^2, b koeficient x^1, c pa koeficient x^0 – konstanto. Enačbo je treba nujno preizkusiti na primeru.

Primer: Poišči rešitvi enačbe.

$$x = \frac{3}{x-2}$$

$$x(x-2) = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$a = 1,\ b = -2,\ c = -3$

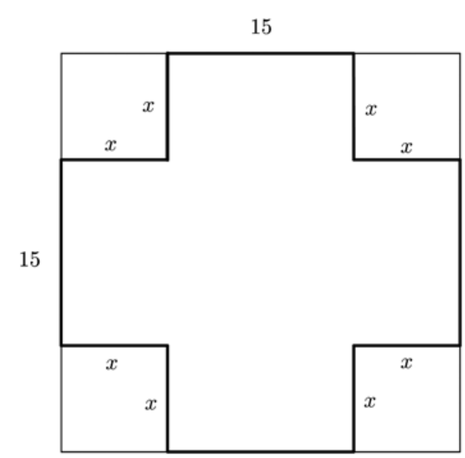
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -1$$

Raziskovanje – 5. del: Brez odvajanja ne gre



Slika 4

Pridobil sem veliko znanja s področja odvajanja. Ugotovil sem, da celo dovolj za nalogo učiteljice Rogine. Postopek pridobivanja znanja je bil zelo zanimiv; nekaj podatkov sem našel na internetu, nekaj so mi namignili drugi učitelji, tako da sem se lotil reševanja naloge, zaradi katere sem obdelal poglavje četrtega letnika gimnazije.

Reševanje

Prostornino škatlice sem nekaj razdelkov nazaj že zapisal splošno, a bom račun zapisal še enkrat. Upoštevamo, da je $a = 15 - 2x$ in $v = x$.

$$V = a^2 \cdot v = (15-2x)^2 \cdot x =$$
$$= (225 - 60x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 60x^2 + 225x$$

Zanima nas največja možna prostornina, torej maksimum funkcije $4x^3 - 60x^2 + 225x$. Ekstreme funkcij nam pove 1. odvod.

$$(4x^3 - 60x^2 + 225x)' = 12x^2 - 120x + 225$$

Zdaj izračunamo ničli odvoda funkcije. Dobili bomo vrednost x za največjo in najmanjšo vrednost funkcije – prostornine. Uporabimo kvadratno enačbo.

$$12x^2 - 120x + 225 = 0$$
$$a = 12,\ b = -120,\ c = 225$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-(-120) \pm \sqrt{(-120)^2 - 4\cdot 12 \cdot 225}}{2\cdot 12} = \\ &= \frac{120 \pm \sqrt{14400-10800}}{24} = \\ &= \frac{120 \pm \sqrt{3600}}{24} = \\ &= \frac{120 \pm 60}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{120+60}{24} = \frac{180}{24} = 7,5\,cm \\ x_2 &= \frac{120-60}{24} = \frac{60}{24} = 2,5\,cm \end{aligned}$$

Kaj je kaj?

Dobili smo dve rešitvi. Vsaka predstavlja nekaj: Če v prvotno funkcijo (protornina) vstavimo eno izmed njih, bomo dobili največjo ali najmanjšo prostornino. Uporabili bomo drugi odvod, ki pove, ali gre za lokalni maksimum ali minimum.

$$(V'(x))' = (12x^2 - 120x + 225)' = 24x - 120$$

Vstavimo oba x.

$$\begin{aligned} V''(x_1) &= 24x_1 - 120 = 24 \cdot 7,5 - 120 = 180 - 120 = 60 \\ V''(x_2) &= 24x_2 - 120 = 24 \cdot 2,5 - 120 = 60 - 120 = -60 \end{aligned}$$

Pri x_1 je vrednost pozitivna, kar pomeni, da gre za lokalni minimum, pri x_2 pa je vrednost negativna, kar pomeni, da gre za lokalni maksimum. Kar pa je logično; pri x_1 = 7,5 cm prostorine škatlice tako rekoč ni; saj smo porabili ves papir. Tako da za izračun največje prostornine potrebujemo x_2 = 2,5 cm.

Izračunajmo prostornino.

$$\begin{aligned} V(x) &= (15-2x)^2 \cdot x \\ V(2,5) &= (15 - 2 \cdot 2,5) \cdot 2,5 = (15-5)^2 \cdot 2,5 = \\ &= 10^2 \cdot 2,5 = 100 \cdot 2,5 = 250\,cm^3 \end{aligned}$$

Zanimivo, da s poskušanjem na začetku nisem prišel do pravega rezultata. Največja prostornina škatlice ni za x = 3 cm, ampak za x = 2,5 cm. Ravno zaradi tega poizkušanje v matematiki ni priporočljivo. Pravo rešitev je treba dobiti z nekim postopkom, ne pa z računalniškim poskušanjem!

Raziskovanje – 6. del: V matematiki posplošujemo

Vprašal sem se, ali lahko nalogo rešujemo še na višjem nivoju. Ali lahko stvar še malo zakompliciramo? Zakaj namreč ne bi komplicirali, če pa lahko.

Stvar lahko posplošimo. V matematiki vedno skušamo priti do karseda splošnih rezultatov in to je še višji nivo te naloge.

Poljuben kvadrat

Imejmo kvadrat s stranico a, kjer iz vsakega vogala izrežemo 4 manjše kvadratke s stranicami x. Spet najprej zapišemo prostornino.

$$V(x) = x(a-2x)^2 = x(a^2 - 4ax + 4x^2) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

Odvajamo in pazimo, da je a parameter.

$$V(x)' = (4x^3 - 4ax^2 + a^2x)' = 12x^2 - 8ax + a^2$$

Uporabimo kvadratno enačbo.

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$
$$a_1 = 12 \qquad b_1 = -8a \qquad c_1 = a^2$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{8a \pm \sqrt{(-8a)^2 - 4 \cdot 12 \cdot a^2}}{2 \cdot 12} = \\ &= \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \\ &= \frac{8a \pm \sqrt{16a^2}}{24} = \\ &= \frac{8a \pm 4a}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{8a+4a}{24} = \frac{12a}{24} = \frac{1}{2}a \\ x_2 &= \frac{8a-4a}{24} = \frac{4a}{24} = \frac{1}{6}a \end{aligned}$$

Prostornina je najmanjša pri $x_1 = \frac{1}{2}a$, saj takrat škatlice praktično ni, prostornina je torej vedno večja pri $x_2 = \frac{1}{6}a$.

Dobljena splošna zapisa preizkusimo na našem konkretnem primeru, kjer je a = 15 cm.

$$x_1 = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7,5\,cm$$
$$x_2 = \frac{1}{6}a = \frac{1}{6} \cdot 15 = 2,5\,cm$$

Vidimo, da je dobljena rešitev povsem enaka prejšnji, konkretni.

Poljuben pravokotnik

Nalogo lahko rešimo tudi za pravokotnik. Začnemo s prostornino.

$$V(x) = x \cdot (a-2x) \cdot (b-2x) = x(ab - 2ax - 2bx + 4x^2) =$$

$$= 4x^3 - 2ax^2 - 2bx^2 + abx$$

$$V'(x) = (4x^3 - 2ax^2 - 2bx^2 + abx) = 12x^2 - 4ax - 4bx + ab$$

$$12x^2 - 4ax - 4bx + ab = 12x^2 - x \cdot 4(a+b) + ab = 0$$

$$a_1 = 12 \qquad b_1 = -4(a+b) \qquad c_1 = ab$$

$$x_{1,2} = \frac{4(a+b) \pm \sqrt{(-4(a+b))^2 - 4 \cdot 12 \cdot ab}}{2 \cdot 12} =$$
$$= \frac{4a+4b \pm \sqrt{16a^2 + 32ab + 16b^2 - 48ab}}{24} =$$
$$= \frac{4a+4b \pm \sqrt{16a^2 + 16b^2 - 16ab}}{24} =$$
$$= \frac{4a+4b \pm 4\sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{24} =$$
$$= \frac{a+b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$$

$$x_1 = \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$$
$$x_2 = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$$

Iz izkušenj vem, da je največja prostornina x_2.

Preverimo, ali dobljeno deluje. Vidimo, da zapisa za splošen a in b nista prav lepa, zato bi bilo še najbolje, če privzamemo, da je $a = b = 15$ cm. Tako je:

$$x_1 = \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$$
$$x_1 = \frac{15+15+\sqrt{15^2+15^2-15 \cdot 15}}{6}$$
$$x_1 = \frac{15+15+15}{6}$$
$$x_1 = 7{,}5\,cm$$

$$x_2 = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$$
$$x_2 = \frac{15+15-\sqrt{15^2+15^2-15 \cdot 15}}{6}$$
$$x_2 = \frac{15+15-15}{6}$$
$$x_2 = 2{,}5\,cm$$

Ugotovitve

Nalogo sem rešil na več načinov; vsak je primeren za določeno starostno stopnjo oziroma razred/letnik osnovne/srednje šole (gimnazije). Znanja, ki so pri vseh teh potrebna, sem zbral v spodnji preglednici. Določil sem nivoje znanja in dodal, za katero starost (razred, letnik) je način primeren.

Preglednica 4: Naloga za vse starosti

Nivo	Znanje
prvi nivo (tudi mlajši otroci)	ocenjevanje prostornine
drugi nivo (5., 6. razred)	izdelovanje škatlic in tehatanje sladkorja
tretji nivo (konec 6. razreda, 7. razred)	računanje prostornine škatlic
četrti nivo (8., 9. razred)	izračun prostornine splošno
peti nivo (9. razred, 1. letnik)	graf funkcije
šesti nivo (2. letnik)	kvadratna enačba
sedmi nivo (4. letnik)	odvod

Za reševanje naloge na višjih nivojih ni nujno potrebno samo znanje tega nivoja, ampak velikokrat tudi znanje nižjih. (Pri višjem nivoju je treba prostornino izračunati splošno in uporabiti kvadratno enačbo.) Za vsako strategijo sem opisal pozitivne in negativne strani tega nivoja.

Ocenjevanje

Ocenjevanje je prav gotovo ena zelo pomembnih zmožnosti za vsakega človeka. Tako je ta način za mlajše (in tudi starejše) zagotovo primeren, saj na ta način razvijajo svojo prostorsko predstavljivost in občutek – ta je izredno pomemben. A z ocenjevanjem ne moremo priti niti do približnih ugotovitev, kaj šele natančnih, kar je njegova negativna plat.

Izdelovanje škatlic in tehtanje

Način, pri katerem je škatlice treba izdelati in nato stehtati sladkor v njih, je za učence zelo atraktiven. Če smo pri izdelavi škatlic in tehtanju natančni, dobimo dokaj točne rezultate, a prav točnih nikakor ni moč najti. Posotopek je tudi zelo zamuden.

Računanje volumna škatlic

Računanje volumna za posamezen x je primerno za učence 6. (in tudi 7.) razreda, saj se navezuje na njihovo učno snov. Tu lahko brez pomislekov določimo, katera od obravnavanih škatlic ima največjo prostornino. A vseh možnih škatlic pač ne moremo preveriti, saj jih je neskončno mnogo. Kljub temu da poznamo natančne prostornine za vsa ustrezna naravna števila, postopek poizkušanja ni matematično korekten, a je učencem osnovne šole blizu.

Splošni zapis volumna in uporaba tehnologije za izris grafa

V 8. in 9. razredu lahko prostornino škatlice zapišemo splošno. V 9. razredu pa se prvič srečamo s funkcijami in grafi funkcij. Če se znajdemo, uporabimo tehnologijo, naredimo graf in odčitamo iskani x. Toda ne moremo biti prepričani, da je rešitev točna, saj jo zgolj odčitamo. Rešitev je zanimiva, a matematično še nepopolna.

Odvod in posplošitve

Le z odvodom lahko nalogo rešimo matematično korektno, a marsikateremu učencu oziroma dijaku ta predstavlja nekaj zahtevnega in se zgrozi ob pogledu na komplicirane matematične zapise. Zato ta rešitev učencem in dijakom načeloma ni tako blizu, a je edina matematično pravilna.

Posploševanje je del matematike, zato je nadgradnja s posplošitvijo zelo zanimiva, a seveda nekaterim učencem in dijakom nedostopna in mogoče suhoparna.

Zaključek

V raziskovalni nalogi sem prikazal raziskovanje oziroma reševanje istega problema na več načinov, ki so primerni za različne starostne stopnje; od 5. razreda osnovne šole, do četrtega letnika gimnazije. Zanimivo je, da lahko vsako pridobljeno znanje pomaga pri reševanju naloge, a za popolno rešitev je potreben odvod.

Viri in literatura

Cedilnik, A. (2006). *Matematični priro*čnik. Radovljica: Didaktika.

Pagon, B. (2010). *Odvod*. Seminarska naloga. Ljubljana: Fakulteta za matematiko in fiziko. Ogled: 14. 3. 2018. Dostopno na: http://wiki.fmf.uni-lj.si/images/7/73/Odvod.pdf.

Škarba, A. *Odvod*. Spletna stran: Astra.si. [ogled: 14. marec 2018]. Dostopno na: http://astra.si/category/odvod/.

Škarba, A. *Limite*. Spletna stran: Astra.si. [ogled: 14. marec 2018]. Dostopno na: http://astra.si/category/limite/.

Odvod. Wikipedija, prosta enciklopedija. [ogled: 14. 3. 2018]. Dostopno na spletnem naslovu: https://sl.wikipedia.org/wiki/Odvod.