OFIURIDA ALI KAČJEREPNICA

MARKO RAZPET IN NADA RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14H45, 51M15

Predstavljamo ofiurido, manj znano ravninsko krivuljo, ki jo je prvi obravnaval D. Uhlhorn na začetku 19. stoletja. Ofiurida je množica točk, ki jih dobimo s preprostim geometrijskim postopkom, je pa tudi nožiščna krivulja parabole, inverzna slika hiperbole ter cisoida premice in krožnice. Pokazali bomo, da z ofiurido lahko rešujemo nekatere kubične enačbe.

OPHIURIDE

We introduce the ophiuride, a lesser-known planar curve, first discussed by D. Uhlhorn at the beginning of the 19th century. An ophiuride is a set of points obtained by a simple geometric procedure, but it is also a pedal curve of a parabola, the inverse of a hyperbola, and the cissoid of a line and a circle. We will show that the ophiuride can be used to solve some cubic equations.

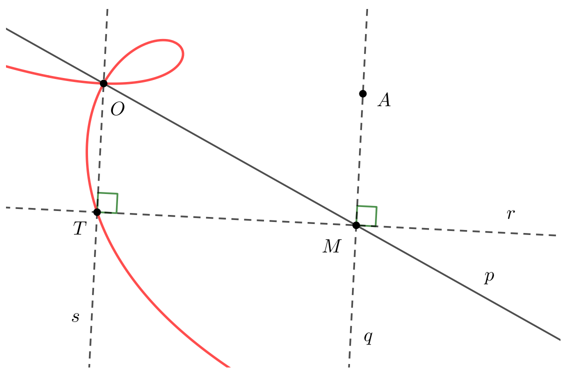
Uvod

Nemški samouk in iznajditelj Diedrich (tudi Diederich) Uhlhorn (1764–1837) je že v delavnici svojega očeta, mizarja, in kasneje v svoji poklicni karieri pokazal velik talent za izdelavo mehanskih in optičnih naprav. Samostojno se je naučil toliko matematike, da je lahko začel študirati krivulje. D. Uhlhorn je opazoval na delujočih strojih gibanje točk, ki opisujejo razne krivulje. Verjetno so bile le-te navdih, da je leta 1809 objavil knjigo [5], v kateri je precej natančno obravnaval več ravninskih krivulj, ki jim je dal tudi imena, jih zapisal v pravokotnih kartezičnih koordinatah in dognal njihove glavne lastnosti, pri čemer je uporabljal tudi odvod. Za nekatere krivulje je izdelal in na koncu knjige objavil načrte orodij, s katerimi bi te krivulje lahko načrtovali.

D. Uhlhorn v svoji knjigi na prvem mestu obravnava ravno ofiurido in njeno uporabo ter opiše orodje za njeno načrtovanje. Posveti ji kar 40 strani. Besedo *ofiurida* izvaja iz grških besed *ófis*, kar pomeni *kača*, v nemščini *Schlange*, in ourá, kar pomeni *rep*, v nemščini *Schwanz*. Iz tega je za ofiurido D. Uhlhorn sestavil nemško besedo *Schlangenschwanzlinie*, kar pomeni dobesedno *kačjerepa črta*, lepše in krajše *kačjerepnica*.

D. Uhlhorn uporablja ofiurido tudi za rešitev antičnih problemov podvojitve kocke in tretjinjenje kota. Antični matematiki so sicer uporabljali nekaj krivulj za reševanje teh dveh problemov, ni pa videti, da bi poznali tudi ofiurido. Vse kaže, da je bil D. Uhlhorn prvi, ki se je kar natančno ukvarjal z njo (glej [2]). Načrtovanje z njegovim orodjem pa nas še najbolj spominja na znano Platonovo rešitev problema podvojitve kocke z dvema kotnikoma, o čemer je nekaj napisanega v [3].

Ofiurida je ravninska krivulja, ki jo določajo trije podatki: premica p, izbrana točka O na p in izbrana točka A, ki ni na p. Premica p in točki O ter A so za izbrano ofiurido stalnice.



Slika 1. Konstrukcija točke na ofiuridi.

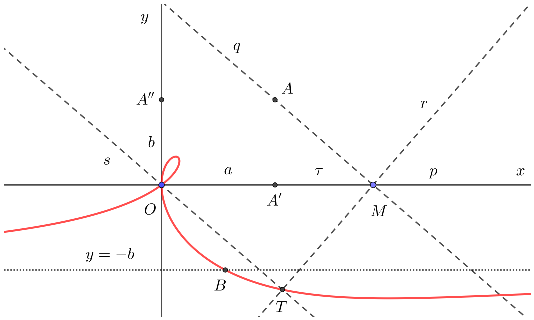
Oglejmo si, kako najenostavneje konstruiramo posamezne točke T na ofiuridi, ki jo določajo p, O in A. Najprej na p izberemo točko M in konstruiramo premico q skozi A in M. Nato konstruiramo v M pravokotnico r na q, nazadnje pa še pravokotnico s skozi O na r. Premici q in s sta vzporedni.

Premici r in s se sekata v točki T. Ko točka M preteče p, točka T opiše krivuljo, ki jo zaradi njene oblike imenujemo *ofiurida*. Del krivulje ima obliko zanke (slika 1).

Analitična obravnava ofiuride

Tako kot D. Uhlhorn bomo ofiurido obravnavali z metodami analitične geometrije. Dodali pa bomo še marsikaj, kar mu ni bilo znano. Vpeljemo pravokotni kartezični koordinatni sistem Oxy. Vlogo premice p bo igrala os x, vlogo točke O koordinatno izhodišče, točka $A(a,b)$ pa naj bo v prvem kvadrantu. Pozitivni števili a in b ofiurido v koordinatnem sistemu Oxy natančno določata.

Pravokotna projekcija točke A na os x je točka $A'(a,0)$, na ordinatno os pa točka $A''(0,b)$. Točka A je od O oddaljena za $c = \sqrt{a^2+b^2}$.



Slika 2. Ofiurida v koordinatnem sistemu.

Vpeljemo relativno absciso τ točke M glede na A', tako da je $M(a+\tau,0)$. Brez težav zapišemo enačbe premic q, r in s:

$$q:\ y = -\frac{b}{\tau}(x-a-\tau),\quad r:\ y = \frac{\tau}{b}(x-a-\tau),\quad s:\ y = -\frac{b}{\tau}x.$$

Točka T na ofiuridi je presek premic r in s in ima koordinati

$$x_T = \frac{(a+\tau)\tau^2}{b^2+\tau^2},\ \ y_T = -\frac{b(a+\tau)\tau}{b^2+\tau^2}.$$

Da bi ofiurido čim lepše parametrizirali, vpeljemo z relacijo $\tau = -bt$ številski parameter t in dobimo:

$$x(t) = \frac{(a-bt)t^2}{1+t^2},\ \ y(t) = \frac{(a-bt)t}{1+t^2}. \tag{1}$$

To sta parametrični enačbi ofiuride. Takoj opazimo, da $|x(t)| \to \infty$ in $y(t) \to -b$, ko $|t| \to \infty$. To pomeni, da je $y = -b$ vodoravna asimptota ofiuride. Ko parameter t narašča od zelo velikih negativnih vrednosti proti 0, točka T potuje v četrtem kvadrantu, njena abscisa se manjša, ordinata pa doseže nekje najmanjšo vrednost, ki jo bomo kasneje izračunali. Za $t < -b/a$ poteka ofiurida pod svojo asimptoto, za $t = -b/a$ jo preseka v točki $B(b^2/a,-b)$, za $-b/a < t < 0$ pa poteka nad asimptoto in za $t = 0$ doseže koordinatno izhodišče O. V četrtem kvadrantu ima ofiurida tudi prevoj. Za $t = a/b$

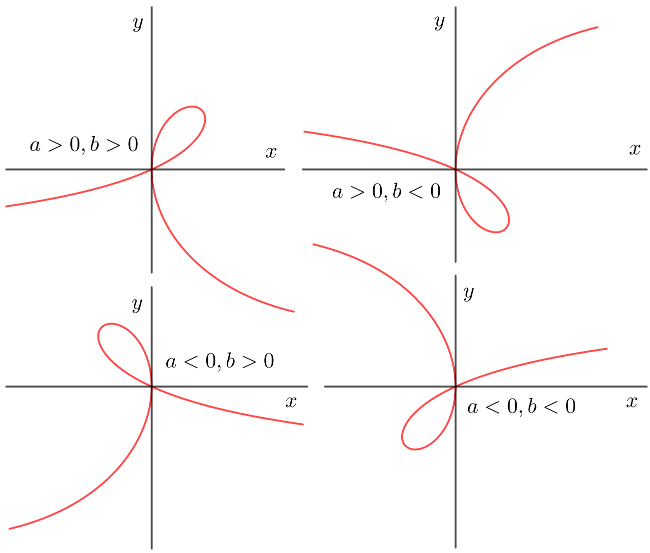
doseže T še enkrat točko O, za $t \in [0, a/b]$ opiše v negativni smeri v prvem kvadrantu zanko, katere velikost je odvisna od razmerja konstant a in b. Ko t narašča od a/b prek vseh meja, potuje T po tretjem kvadrantu in se od zgoraj približuje asimptoti ofiuride.

Iz enačb (1) vidimo, da velja zveza $x(t)/y(t) = t$. Z izločitvijo parametra t najdemo implicitno enačbo ofiuride:

$$y(x^2 + y^2) = x(ay - bx). \tag{2}$$

Ofiurida je algebrska krivulja tretje stopnje in je določena s konstantama a in b. Ker se jo da parametrizirati z racionalnima funkcijama, je racionalna krivulja. D. Uhlhorn je njeno implicitno enačbo našel, ni pa se ukvarjal z njeno parametrizacijo. Enačba (2) je kvadratna za spremenljivko x, ki se jo da izraziti z y. D. Uhlhorn je vztrajal pri tem in našel več lastnosti ofiuride. Videli bomo, da se jo da lepo obravnavati v parametrični obliki.

V enačbi (2) pravzaprav lahko dovolimo tudi negativne konstante a ali b. Iz ofiuride s konstantama $|a|$ in $|b|$ dobimo ofiuride za vse primere s preprostimi transformacijami, in sicer: za $a > 0$ in $b < 0$ z zrcaljenjem čez os x, za $a < 0$ in $b > 0$ z zrcaljenjem čez os y ter za $a < 0$ in $b < 0$ z zrcaljenjem čez koordinatno izhodišče (slika 3). To ustreza izbiri točke A glede na premico p in točko O na njej (slika 1) oziroma postavitvi točke A v ustrezen kvadrant.

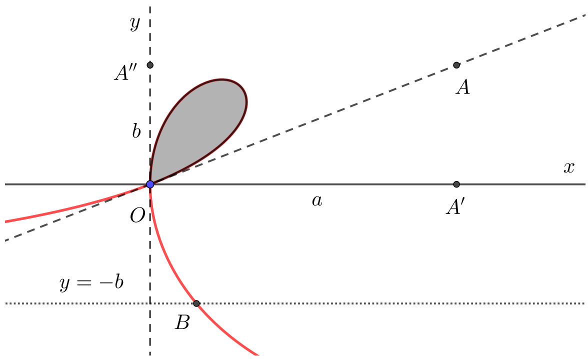


Slika 3. Ofiurida in predznaka konstant a in b.

Kaj pa, če dovolimo, da je v enačbi (2) katera od konstant a in b enaka 0? Za $a = b = 0$ dobimo kar abscisno os, $y = 0$. Za $a = 0$ in $b \neq 0$ pa $x^2(y + b) = -y^3$, kar je enačba Dioklove cisoide, ki ima v točki O ost z navpično tangento in ne zanke ter vodoravno asimptoto $y = -b$. Ugotovitvi nista v nasprotju z definicijo ofiuride v Uvodu.

Za $a \neq 0$ in $b = 0$ dobimo iz enačbe (2) enačbo $y(x^2 + y^2 - ax) = 0$, ki predstavlja unijo premice $y = 0$ in krožnice $x^2 + y^2 - ax = 0$ s središčem v točki $S(a/2, 0)$ in polmerom $\varrho = |a|/2$. Tudi ta ugotovitev ni v nasprotju z uvodno definicijo ofiuride. Točka $A \neq O$ v tem primeru leži na premici p (slika 1). Za $M \neq A$ dobimo vse točke T na p. Za $M = A$ pa je treba upoštevati vse premice q skozi A, vse pravokotnice r skozi A na q in vse pravokotne projekcije točke O na r. S tem dobimo točke T, ki ležijo na krožnici s središčem v središču daljice OA in polmerom $\varrho = |OA|/2$.

Zato lahko brez škode za splošnost obravnavamo samo primer $a > 0$ in $b > 0$. Za zelo majhne x in y v (2) prevlada desna stran. To pomeni, da je približek ofiuride tedaj krivulja $x(ay - bx) = 0$, ki pa razpade na premici $x = 0$ in $ay = bx$, ki sta tangenti na ofiurido v njeni dvojni točki O. Prva poteka skozi O in A'', druga pa skozi O in A (slika 4).



Slika 4. Tangenti na ofiurido v njeni dvojni točki.

Parametrična oblika ofiuride je primerna za izračun ploščine $\mathcal{S}(a, b)$ lika, ki ga omejuje njena zanka. Uporabimo formulo

$$\mathcal{S}(a, b) = -\frac{1}{2} \int_0^{a/b} (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))dt,$$

v kateri je s piko označen odvod po parametru t. Predznak minus stoji pred integralom zato, ker točka $T(x(t), y(t))$ opiše zanko v negativni smeri, ko t

teče po integracijskem intervalu. Po daljšem računu dobimo:

$$\mathcal{S}(a,b)=\frac{1}{2}\int_0^{a/b}\frac{t^2(a-bt)^2}{(1+t^2)^2}\,dt=\frac{1}{4}(a^2-3b^2)\operatorname{arctg}\frac{a}{b}+\frac{3ab}{4}-ab\ln\frac{c}{b},$$

kjer je $c=\sqrt{a^2+b^2}$. V posebnem primeru $a=0, b\neq 0$ je $\mathcal{S}(0,b)=0$, kar ni presenetljivo, saj ofiurida, ko $a\to 0$ pri $b\neq 0$, preide v Dioklovo cisoido, zanka ofiuride pa se stisne v točko.

Ofiurida kot cisoida premice in krožnice

Točko O pravokotno projicirajmo na premico q (slika 5). Dobimo točko P, premico skozi O in P pa označimo z n. Enačba premice n je $by=\tau x$. Preprost račun pokaže, da ima točka P koordinati

$$x_P=\frac{b^2(a+\tau)}{b^2+\tau^2},\quad y_P=\frac{b\tau(a+\tau)}{b^2+\tau^2}.$$

Ni težko videti, da koordinati točke P zadoščata enačbi krožnice

$$x^2+y^2=ax+by,$$

ki je očrtana pravokotniku $OA'AA''$. Njeno središče je v točki $S(a/2,b/2)$, polmer pa $c/2$. Ko teče M po premici p, teče P po tej krožnici. Premica n preseka premico $y=b$ v točki $Q(b^2/\tau,b)$. Za vektor $\overrightarrow{QP}$ v standardni bazi dobimo

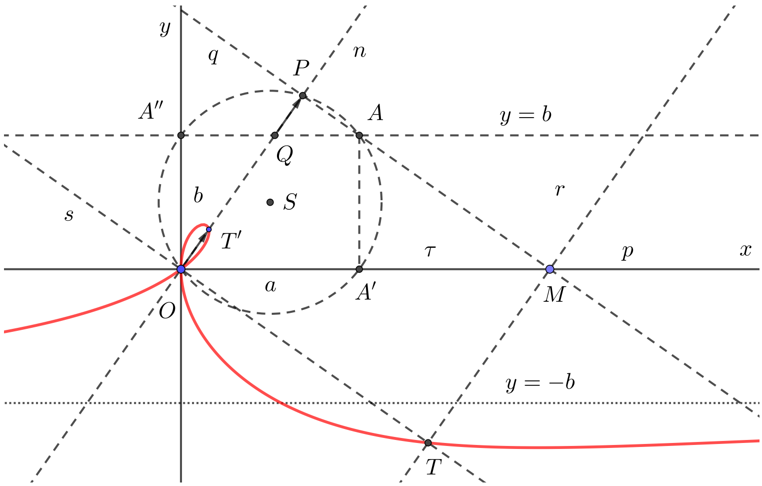
$$\overrightarrow{QP}=\left(\frac{b^2(a\tau-b^2)}{\tau(b^2+\tau^2)},\frac{b(a\tau-b^2)}{b^2+\tau^2}\right).$$

Če vpeljemo nov števílski parameter σ z relacijo $\sigma\tau=b$, dobimo

$$\overrightarrow{QP}=\left(\frac{(a-b\sigma)\sigma^2}{1+\sigma^2},\frac{(a-b\sigma)\sigma}{1+\sigma^2}\right).$$

Na premici n določimo točko T' tako, da velja $\overrightarrow{OT'}=\overrightarrow{QP}$. To pa pomeni, da T' teče po ofiuridi, ko M teče po premici p. Ofiurida (2) je torej v smislu definicij v [1, 4] cisoida premice $y=b$ in krožnice $x^2+y^2=ax+by$.

Do enakega rezultata pridemo tudi, če ofiurido (2) zapišemo v polarnih koordinatah: $r=a\cos\varphi+b\sin\varphi-b/\sin\varphi$.



Slika 5. Ofiurida in krožnica.

Ofiurida kot nožiščna krivulja parabole

Ko spreminjamo točko M po premici p, premice r ogrinjajo neko krivuljo. Poiščemo jo po standardnem postopku. Enoparametrična družina premic r je dana z enačbo

$$F(x,y,\tau) = by - \tau(x-a-\tau) = 0.$$

Njihovo ogrinjačo, ovojnico ali envelopo dobimo, če iz sistema enačb

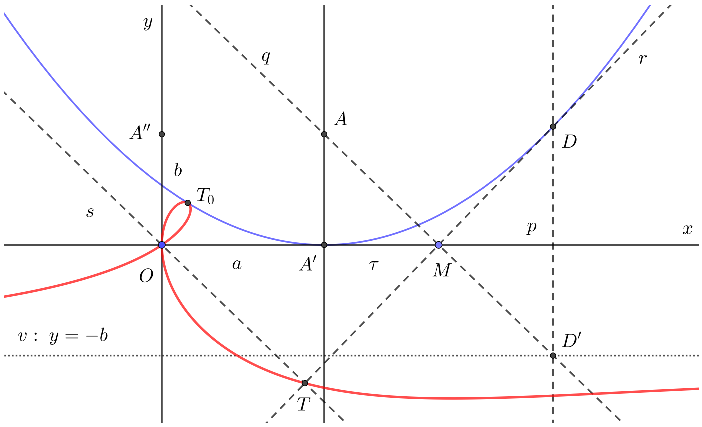
$$F(x,y,\tau) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \tau}(x,y,\tau) = 0$$

izločimo parameter τ. Rezultat je preprost. Iskana ogrinjača je parabola

$$4by = (x-a)^2. \tag{3}$$

Njeno teme je točka $A'(a,0)$, gorišče je točka $A(a,b)$, vodnica v pa asimptota ofiuride. Točke T so pravokotne projekcije ali nožišča točke O na tangente te parabole. To pomeni, da je ofiurida nožiščna krivulja parabole glede na točko na njeni temenski tangenti (slika 6).

V kateri točki $T_0(x_0,y_0)$ se ofiurida in parabola dotikata? Da bi odgovorili na to vprašanje, moramo rešiti sistem enačb (2) in (3). Ko izločimo neznanko y, dobimo $(x^3 - 3ax^2 + (3a^2+8b^2)x - a^3)^2 = 0$. Rešiti je treba kubično enačbo $x^3 - 3ax^2 + (3a^2+8b^2)x - a^3 = 0$, ki se po uvedbi nove neznanke



Slika 6. Ofiurida in parabola.

$\xi = x - a$ prevede v enostavnejšo: $\xi^3 + 8b^2\xi + 8ab^2 = 0$. Po Cardanu dobimo realen koren

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt[3]{4b^2(\delta - 3a\sqrt{3})} - \sqrt[3]{4b^2(\delta + 3a\sqrt{3})}\right),$$

pri čemer je $\delta = \sqrt{27a^2 + 32b^2}$. Iskana točka je torej $T_0(\xi_0 + a, \xi_0^2/(4b))$. Izkaže se, da je ta točka na zanki ofiuride od njene dvojne točke O najbolj oddaljena.

Premica r se parabole dotika v točki $D(a + 2\tau, \tau^2/b)$. Pravokotna projekcija dotikališča D na vodnico v parabole je $D'(a + 2\tau, -b)$ in premica r, tangenta na parabolo v D, je simetrala daljice AD'. To lastnost lahko izkoristimo za konstrukcijo kubičnega korena z metodo prepogibanja papirja, kar bomo naredili na koncu prispevka.

Ofiurida in hiperbola

Kaj dobimo z inverzijo ofiuride (2) na krožnici $x^2 + y^2 = a^2$? Inverzija na taki krožnici je preslikava

$$\iota : (x, y) \longmapsto \left(\frac{a^2 x}{x^2 + y^2}, \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}\right).$$

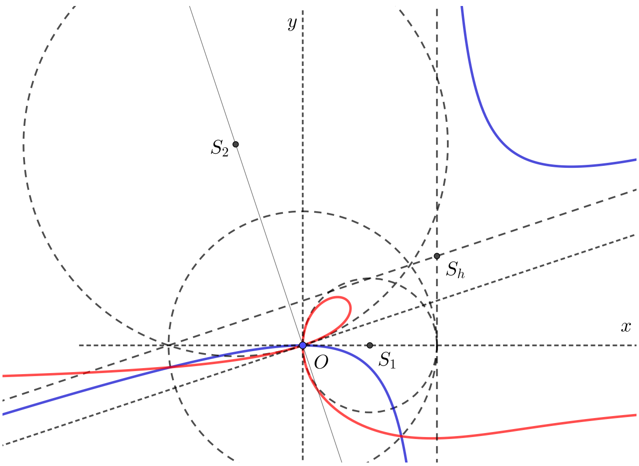
Ko jo uporabimo v enačbi ofiuride in dobljeni izraz poenostavimo, dobimo enačbo $axy - bx^2 = a^2y$, iz katere sledi

$$y = \frac{bx^2}{a(x-a)} = \frac{bx}{a} + b + \frac{ab}{x-a}.$$

Iskana krivulja je stožnica, in sicer hiperbola z asimptotama

$$x = a \text{ in } y = \frac{bx}{a} + b.$$

Presečišče asimptot je središče $S_h(a, 2b)$ hiperbole (slika 7).



Slika 7. Ofiurida in hiperbola.

Poševna asimptota hiperbole je vzporedna tangenti na ofiurido v točki O. Inverzija ι seveda preslika hiperbolo nazaj v ofiurido. Kaj pa asimptoti? Navpična asimptota se preslika v krožnico $x^2 + y^2 = ax$ s središčem v točki $S_1(a/2, 0)$ in polmerom $\varrho_1 = a/2$ in se dotika navpične tangente na ofiurido v O, poševna pa v krožnico $b(x^2 + y^2) = a^2y - abx$ s središčem v točki $S_2(a/2, a^2/(2b))$ in polmerom $\varrho_2 = ac/(2b)$. Ta krožnica se v O dotika poševne tangente na ofiurido v O. Središče S_2 leži namreč na premici $by = -ax$, ki je pravokotna na poševno tangento na ofiurido v O. Opazimo tudi, da je prvi polmer odvisen le od konstante a.

Obe krožnici, inverzni sliki asimptot hiperbole, sta tudi pritisnjeni krožnici na ofiurido v točki O. Kako to vidimo? V točki, ki jo določa parameter t, je krivinski polmer

$$\rho(t) = \frac{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{3/2}}{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)|} = \frac{(a^2 - 4abt + 4b^2t^2 + b^2t^4)^{3/2}}{2|a^2 - 3abt + 3b^2t^2 + abt^3|}. \tag{4}$$

Za $t = 0$ in $t = a/b$ res dobimo

$$\varrho_1 = \rho(0) = \frac{a}{2}, \quad \varrho_2 = \rho(a/b) = \frac{ac}{2b}.$$

To ni nič čudnega in je v soglasju s tisto lastnostjo inverzije na krožnici, ki pravi, da inverzija ohranja kote med krivuljami. Ofiurida s pritisnjenima krožnicama v O vred se z inverzijo preslika v hiperbolo in njeni asimptoti. Asimptoti sta tangenti na hiperbolo v neskončnosti.

Ekstremne točke in prevoj ofiuride

Kje ima ofiurida ekstremne točke? Katere točke na njej imajo lokalne ekstremne ordinate, katere lokalne ekstremne abscise? Odgovor se skriva v odvodih funkcij v (1):

$$\dot{x}(t) = \frac{t(2a - 3bt - bt^3)}{(1 + t^2)^2}, \quad \dot{y}(t) = \frac{a - 2bt - at^2}{(1 + t^2)^2}.$$

Najlaže je poiskati t za ekstremni ordinati, v katerih je $\dot{y}(t) = 0$. Rešitvi kvadratne enačbe $at^2 + 2bt - a = 0$ sta $t_{1,2} = (-b \pm c)/a$, iz katerih dobimo točki

$$Y\left(\frac{(c-b)^2}{2a}, \frac{c-b}{2}\right), \quad Z\left(\frac{(c+b)^2}{2a}, -\frac{c+b}{2}\right).$$

Točka Y ima največjo ordinato na ofiuridi, točka Z pa najmanjšo. V teh dveh točkah je tangenta na ofiurido vodoravna (slika 8).

Teže pa je najti na ofiuridi točko X z lokalno ekstremno absciso. Če postavimo $\dot{x}(t) = 0$, dobimo $t = 0$ za dvojno točko O, v kateri ima abscisa ofiuride najmanjšo vrednost, če upoštevamo samo lok od Z do Y, netrivialno rešitev na zanki pa dobimo, če rešimo kubično enačbo $bt^3 + 3bt - 2a = 0$. Njeno edino realno rešitev t_0 izrazimo po Cardanu:

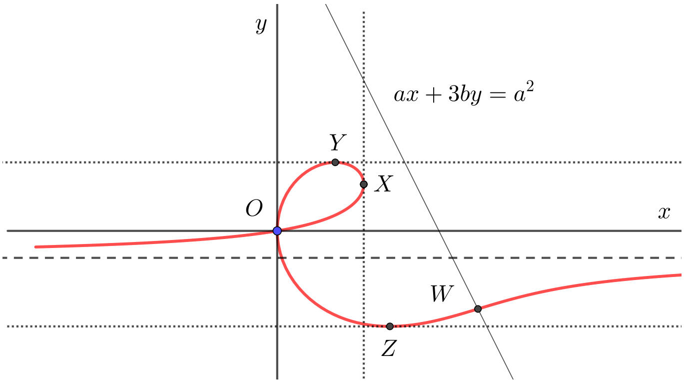
$$t_0 = \sqrt[3]{\frac{a+c}{b}} + \sqrt[3]{\frac{a-c}{b}}.$$

Da bi izračunali $X(x(t_0, y(t_0))$, izkoristimo zvezo $bt_0^3 + 3bt_0 - 2a = bt_0(t_0^2 + 1) - 2(a - bt_0) = 0$, iz česar takoj sledi

$$y(t_0) = \frac{t_0(a - bt_0)}{1 + t_0^2} = \frac{bt_0^2}{2}, \quad x(t_0) = t_0 y(t_0) = \frac{bt_0^3}{2} = a - \frac{3bt_0}{2}.$$

Lokalno največjo absciso ima torej ofiurida v točki

$$X\left(a-\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(a+c)b^2}+\sqrt[3]{(a-c)b^2}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{(a+c)^2b}+\sqrt[3]{(a-c)^2b}\right)-b\right).$$



Slika 8. Lokalno ekstremne točke in prevoj ofiuride.

V prevoju W ofiuride je njena ukrivljenost, to je obratna vrednost krivinskega polmera $\rho(t)$, enaka 0. To pomeni, da mora v prevoju parameter t zadoščati enačbi $a^2 - 3abt + 3b^2t^2 + abt^3 = 0$. Te enačbe ne bomo reševali, pač pa bomo upoštevali, da v vsaki točki $T(x, y)$ velja $x/y = t$. To uporabimo v zgornji enačbi, ki jo poenostavimo v $abx^3+3b^2x^2y-3abxy^2+a^2y^3 = 0$, iz (2) pa izrazimo $y^3 = axy-bx^2-x^2y$. Iz obeh enačb dobimo $x(bx-ay)(ax+3by-a^2) = 0$. Enačba razpade na tri: $x = 0$, $bx - ay = 0$ in $ax + 3by - a^2 = 0$. Prvi dve nam dasta točko O, kjer ni prevoja. Prevoj ofiuride je potemtakem na premici $ax + 3by = a^2$. Za koordinati prevoja W dobimo kubični enačbi, katerih realni rešitvi se izražata precej zapleteno.

Ofiurida, kubične enačbe in tretjinjenje kota

Z ofiuridami lahko rešujemo tudi kubične enačbe z realnimi koeficienti in posledično tudi tretjinimo kote. Znano je, da lahko vsako kubično enačbo s premikom neznanke pretvorimo v obliko

$$y^3 + py + q = 0. \tag{5}$$

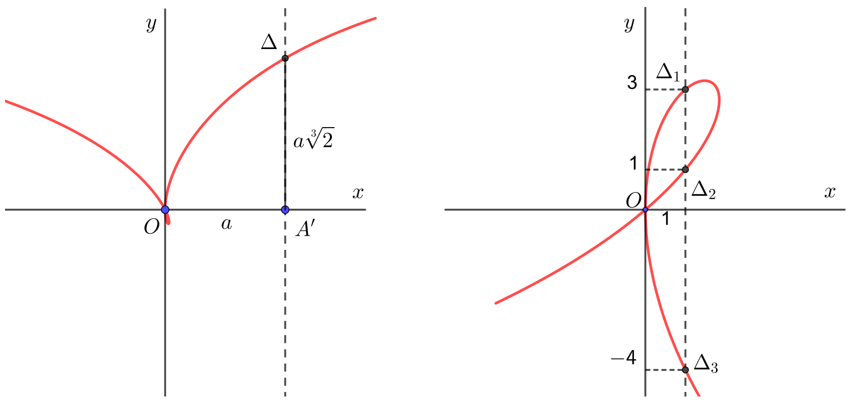
Če preoblikujemo enačbo ofiuride (2) v kubično enačbo glede na y, tudi dobimo tako obliko:

$$y^3 + (x^2 - ax)y + bx^2 = 0. \tag{6}$$

S primerjavo koeficientov v enačbah (5) in (6) dobimo $p = x^2 - ax$, $q = bx^2$. Če sta p in q realna koeficienta, izberemo primeren $x_0 \neq 0$ in določimo konstanti ofiuride:

$$a = \frac{x_0^2 - p}{x_0}, \quad b = \frac{q}{x_0^2}.$$

Načrtamo ustrezno ofiurido, ki ima eno od oblik na sliki 3. Ordinate presečišč s premico $x = x_0$ so realne rešitve enačbe (5).



Slika 9. Rešitev enačb $y^3 = 2a^3$ (levo) in $y^3 - 13y + 12 = 0$ (desno) z ofiurido.

Najprej rešimo enačbo $y^3 - 2a^3 = 0$ za $a > 0$. Njen realni koren je $y_0 = a\sqrt[3]{2}$. Tedaj je $p = 0$, $q = -2a^3$, $a = x_0$ in $b = -2a$. Z ofiurido s konstantama a in $b = -2a$ tako grafično rešimo problem podvojitve kocke. Na sliki 9 levo je $a = |OA'|$ in $a\sqrt[3]{2} = |A'\Delta|$. Tako je, kot kaže, D. Uhlhorn na svojevrsten način rešil problem podvojitve kocke.

Podobno rešujemo enačbo $y^3 - 13y + 12 = 0$. Za $x_0 = 1$ dobimo konstanti ofiuride $a = 14$ in $b = 12$ (slika 9 desno).

Nepraktičnost take metode reševanja kubičnih enačb, česar se je zavedal D. Uhlhorn, je v tem, da je za vsako enačbo treba določiti konstanti a in b ofiuride.

Tretjinjenje kota lahko obravnavamo v okviru kubičnih enačb. Če je namreč $\alpha = 3\beta$, velja enakost $4\cos^3\beta - 3\cos\beta = \cos\alpha$, kar pomeni, da pri znanem kotu α število $y = \cos\beta$ zadošča kubični enačbi

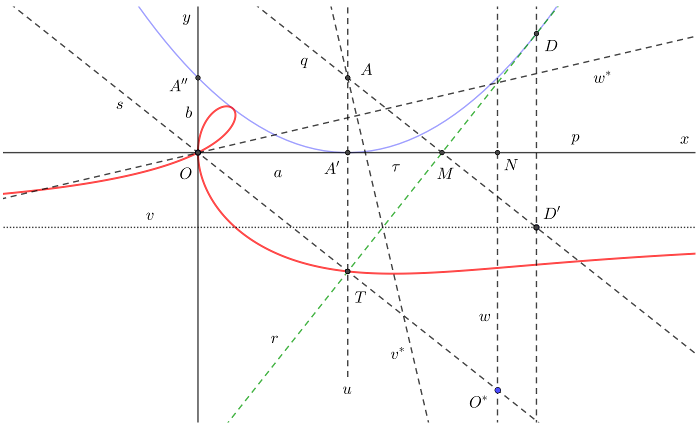
$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}\cos\alpha = 0,$$

ki je oblike (5) in jo lahko rešujemo z ustrezno ofiurido. Dovolj je, da znamo to narediti za oster kot α. Tedaj sta $\cos\alpha$ in $\cos\beta$ s kotoma α in β natančno določena, kar pomeni, da pri izbrani enoti lahko za kot α konstruiramo $\cos\alpha$, iz dobljenega $\cos\beta$ pa kot β.

Ofiurida in prepogibanje papirja

Ofiurido (2) preseka premica u, ki ima enačbo $x = a$ in poteka skozi A in A', v točki $T(a, -\sqrt[3]{a^2 b})$ (slika 10). Tedaj je $|A'T| = \sqrt[3]{a^2 b}$. Premica r je tangenta na parabolo (ogrinjačo premic skozi M in točke na ofiuridi) v točki D in poteka skozi $M(a + \tau, 0)$ in T, je pa tudi simetrala daljice AD'. Iz podobnih trikotnikov OTA' in TMA' dobimo $\tau = |A'M| = \sqrt[3]{ab^2}$.

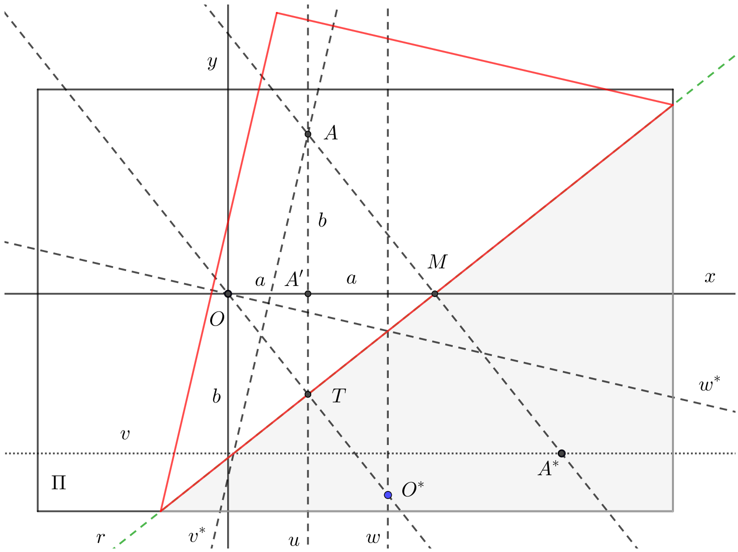
Če zrcalimo O čez r, dobimo točko O^* na premici w, ki ima enačbo $x = 2a$. Premica v, ki ima enačbo $y = -b$, pa se prezrcali čez r v premico v^*, ki poteka skozi A.



Slika 10. Zrcaljenje čez tangento parabole.

Za konstrukcijo daljice z dolžino $\sqrt[3]{a^2 b}$ uporabimo tanek prosojen papir Π, na katerem ustvarimo s prepogibanjem med seboj pravokotna prepogiba x in y, ki se sekata v točki O (slika 11). Nato naredimo še prepogiba u in w, ki sta desno od y oddaljena za a oziroma $2a$. Presek med x in u označimo z A'. Na u na razdalji b od x označimo točko A, pod x pa naredimo prepogib v na razdalji b. Nazadnje naredimo prepogib r tako, da O pade v O^* na w, A pa v A^* na v. Presek premic r in u je točka T, za katero je $|A'T| = \sqrt[3]{a^2 b}$. Presek daljice AA^* s premico r je točka M, za katero je $|A'M| = \sqrt[3]{ab^2}$.

Če vzamemo a za enoto, je $|A'T| = \sqrt[3]{b}$, če pa izberemo za enoto b, pa je $|A'M| = \sqrt[3]{a}$. S tem smo dvakrat konstruirali tretji koren.



Slika 11. S prepogibanjem papirja do $|A'T| = \sqrt[3]{a^2b}$ in $|A'M| = \sqrt[3]{ab^2}$.

Naloga namesto zaključka

Videli smo, da se z inverzijo na krožnici s središčem v dvojni točki ofiuride le-ta preslika v hiperbolo, ki tudi poteka skozi to dvojno točko. Na isti krožnici se hiperbola z inverzijo preslika nazaj v ofiurido, kar je poseben primer inverzije hiperbole na krožnici, ki ima središče na tej hiperboli.

Če naredimo inverzijo poljubne hiperbole na krožnici, ki ima središče na tej hiperboli, dobimo krivuljo, ki spominja na ofiurido, ni pa nujno ofiurida. Naloga zahteva poiskati na hiperboli tiste točke, ki so lahko središča krožnic, na katerih se ista hiperbola z inverzijo preslika v ofiurido. V katerih točkah hiperbole so tangente pravokotne na eno od njenih asimptot? Ali take točke obstajajo za vsako hiperbolo?

LITERATURA

[1] D. Haftendorn, *Kurven erkunden und verstehen*, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017.

[2] B. von Pape, *Von Eudoxus zu Uhlhorn*, Books on Demand, Norderstedt, 2019.

[3] M. Razpet in N. Razpet, *Prepogibanje papirja, podvojitev kocke in Slusova konhoida*, Obzornik. mat. fiz. **67** (2020), 41–51.

[4] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[5] D. Uhlhorn, *Entdeckungen in der höhern Geometrie, theoretisch und practisch abgehandelt*, Schulze'sche Buchhandlung, Oldenburg, 1809.