PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **31** (2003/2004)
Številka 6
Strani 358–361

Marija Vencelj:

GABRIEL CRAMER (1704 – 1752): Cramerjevo pravilo, Cramerjev paradoks, Castillon-Cramerjev problem, satanova krivulja

Ključne besede: novice, matematika, matematiki, biografije, Švica, analiza algebraičnih krivulj.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/31/1575-Vencelj-Cramer.pdf

GABRIEL CRAMER (1704 – 1752)
Cramerjevo pravilo, Cramerjev paradoks, Castillon-Cramerjev problem, satanova krivulja

Letos mineva tristo let od rojstva švicarskega matematika Gabriela Cramerja, čigar ime nosi pravilo za zapis rešitve sistema linearnih enačb z uporabo determinant.

Cramerjeva družina izhaja iz avstrijskega Holsteina pri Strasbourgu, Gabriel Cramer pa se je rodil v Ženevi, kjer je imel njegov oče zdravniško prakso. Imel je dva brata, od katerih je bil eden zdravnik in drugi profesor prava.

Gabriel je s šolanjem opravil po bližnjici, saj je že pri osemnajstih letih doktoriral s tezo iz teorije zvoka. Dve leti kasneje mu je bila, skupaj s prav tako mladim in obetavnim matematikom Calandrinijem, dodeljena katedra za matematiko na Calvinovi akademiji v Ženevi. Calandrini je predaval algebro in astronomijo, Cramer geometrijo in mehaniko. Cramerju gre zasluga, da so na Calvinovi akademiji poleg latinščine, tradicionalnega šolskega jezika tistega časa, začeli uporabljati tudi francoščino[1].

Del Cramerjeve zaposlitve na Calvinovi akademiji so predstavljala tudi potovanja in obiski pri vodilnih evropskih matematikih. Tako je pet mesecev prebil v Baslu z Johannom Bernoullijem in njegovimi učenci, med katerimi sta bila tudi Daniel Bernoulli in Leonhard Euler. Nato ga je pot vodila v Anglijo k Halleyu, Moivreu in Stirlingu ter v Pariz, kjer je delal skupaj z Fontenellom, Maupetuisom, Clairautom in drugimi.

Leta 1730 se je potegoval za nagrado francoske akademije znanosti. Njegovo delo je bilo ocenjeno kot drugo najboljše med prispelimi na natečaj, nagrado pa je prejel Johann Bernoulli. Ta dogodek je morda

[1] Ženeva leži v francoskem jezikovnem območju Švice.

tipičen za Cramerjev položaj v zgodovini matematike. Ostajal je v senci svojih slavnih sodobnikov in soustvarjalcev matematike. Tako je najbolj znan po Cramerjevem pravilu, ki pravzaprav ni njegovo originalno delo, in po Cramerjevem paradoksu, ki ga ni v celoti pojasnil.

Cramerjevo življenje je bilo izjemno delavno. Predavanja na univerzi, dopisovanje s številnimi matematiki, pisanje odmevnih člankov iz geometrije, zgodovine matematike, filozofije, astronomije in verjetnosti. Njegovo najpomembnejše delo je monografija *Introduction à l'analyse de lignes courbes algébriques* (Uvod v analizo algebraičnih krivulj), ki ga je izdal leta 1750. Nekoliko presenetljivo je, da v knjigi ni uporabil infinitezimalnega računa (ne v Newtonovi ne v Leibnizovi obliki, ki sta bili tedaj že na voljo), čeprav v njej obravnava tudi teme, kot so tangenta, maksimum, minimum in ukrivljenost.

Cramer je slovel kot vešč založnik. Med drugim je izdal zbrana dela Johanna in Jakoba Bernoullija ter, skupaj z italijanskim matematikom Castillonom, korespondenco med Johannom Bernoullijem in Leibnizem. Deloval je tudi v lokalni upravi, kjer je bil kot matematik in znanstvenik zadolžen za artilerijo, utrdbe, obnovo poslopij, predore in arhiv.

Prekomerno delo in padec s kočije sta načela njegovo zdravje in ga za dva meseca priklenila na posteljo. Zdravnik mu je zato predpisal počitek v južni Franciji. Cramer je odpotoval iz Ženeve in na poti v Francijo umrl na začetku leta 1752.

Cramerjevo pravilo

Gre za znano pravilo, ki podaja pregleden zapis rešitve linearnega sistema z determinantami. Študentje študijskih smeri, ki imajo vsaj minimalen program matematike, ga spoznajo že v prvem letniku fakultete. Danes ga povemo takole:

Naj bo dan sistem n linearnih enačb z n neznankami. Če je determinanta koeficientov sistema različna od nič, je sistem enolično rešljiv. Vrednost posamezne neznanke je kvocient dveh determinant. V imenovalcu je vedno determinanta koeficientov, v števcu pa determinanta, ki jo dobimo tako, da stolpec koeficientov pri iskani neznanki nadomestimo s stolpcem desnih strani enačb sistema.

V dodatku k tretjemu poglavju Uvoda v analizo algebraičnih krivulj je Cramer pravilo splošno opisal in ilustriral s primerom sistema petih linearnih enačb. Podoben način reševanja sistemov linearnih enačb je sicer že leta 1693 omenil Leibniz v svojem pismu L'Hospitalu, vendar so priznali Cramerju prvenstvo pri objavi pravila.

Kasneje je sicer znani matematični zgodovinar Boyer odkril, da je že leta 1748, torej dve leti pred izidom Cramerjeve knjige, ekvivalentno pravilo v svoji knjigi Treatise of Algebra opisal Newtonov učenec, škotski matematik Maclaurin. Boyer je mnenja, da so Maclaurinov opis pravila prezrli, ker je uporabljal veliko bolj zapletene oznake kot Cramer. Gotovo je k poimenovanju pravila po Cramerju pripomoglo tudi Eulerjevo mnenje, da je Cramer oblikoval 'très belle règle' – zelo lepo pravilo.

Cramerjev paradoks

Med znana Cramerjeva 'dela' sodi tudi Cramerjev paradoks, ki ga je Cramer oblikoval v zvezi s teorijo algebraičnih krivulj.

Zaradi enostavnosti se bomo pri opisu paradoksa omejili na algebraične krivulje tretje stopnje, čeprav 'velja' tudi za višje stopnje.

Algebraična ravninska krivulja tretje stopnje je množica točk, katerih pravokotni koordinati x, y ustrezata enačbi

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + fx^2 + gxy + hy^2 + px + qy + r = 0\,,$$

v kateri so a, b, $\ldots$, r številski koeficienti. Polinom na levi ima deset členov, zato v njem nastopa deset koeficientov. Vendar dobimo isto krivuljo, če enačbo delimo s poljubnim neničelnim koeficientom, kar število prostih koeficientov v splošni enačbi zmanjša na devet.

Če v ravnini izberemo poljubnih devet točk in vstavimo njihove koordinate v splošno enačbo algebraične krivulje tretje stopnje, dobimo sistem devetih linearnih enačb za devet neznanih koeficientov. Rešitev sistema je v večini primerov (t.j. izborov devetih točk) ena sama. To pa pomeni, da devet poljubno izbranih točk v večini primerov enolično določa algebraično krivuljo tretjega reda, ki poteka skoznje.

Po drugi strani pa velja, da imata dve algebraični krivulji toliko skupnih točk, kolikor je produkt njunih stopenj (upoštevaje večkratnost, kompleksna presečišča in neskončno točko). Dve krivulji tretje stopnje imata torej devet skupnih točk. Pa smo pri Cramerjevem paradoksu: *Devet poljubnih točk praviloma enolično določa krivuljo tretje stopnje in dve poljubni krivulji tretje stopnje se sekata v devetih točkah.*

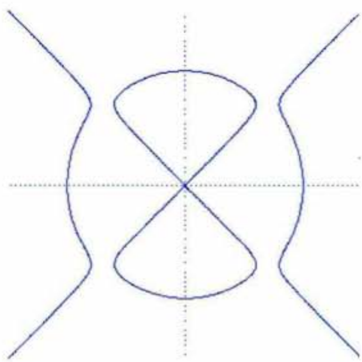
Cramerjeva razlaga paradoksa je bila pomanjkljiva. Natančno ga je pojasnil šele Plüker več kot 70 let po Cramerjevi smrti. Skrivnost je v tem, da je z osmimi presečišči dveh krivulj tretje stopnje deveto presečišče že enolično določeno. Množica poljubno izbranih devetih točk v ravnini je torej le v izjemnih primerih tudi množica presečišč dveh krivulj tretje stopnje.

Castillon-Cramerjev problem

To je zanimiva geometrijska naloga, ki jo je Cramer zastavil Castillonu. *Dan je krog in tri točke v njegovi notranjosti. V krog je treba včrtati trikotnik tako, da bo skozi vsako od danih točk potekala po ena od trikotnikovih stranic.* Nalogo je Castillon rešil šele 24 let po Cramerjevi smrti. Nalogo je moč rešiti na različne načine, med drugim analitično ali z uporabo trigonometrije. Zelo lepa je elementarno-geometrijska konstrukcija iskanega trikotnika z ravnilom in šestilom, ki jo lahko razširimo na konstrukcijo tetivnega večkotnika z dano očrtano krožnico, katerega nosilke stranic potekajo skozi dane točke. Zelo preprosto in elegantno lahko nalogo rešimo s sredstvi projektivne geometrije. Projektivna rešitev vodi do rešitve različnih oblik problema – v stožnico včrtati večkotnik ali ji ga očrtati.

Satanova krivulja

Zaključimo z nenavadno krivuljo, s katero se je Cramer ukvarjal in o njej pisal, kasneje pa jo je obravnaval tudi francoski matematik Lacroix. Poimenovali so jo *Satanova krivulja*, njena splošna implicitna enačba v pravokotnem koordinatnem sistemu (x, y) je $y^4 - x^4 + ax^2 + by^2 = 0$, enega od možnih grafov pa prikazuje slika 1.



Slika 1. Satanova krivulja.

Marija Vencelj