PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 2
Strani 116–119

Matjaž Željko:

UPORABA KOMPLEKSNIH ŠTEVIL V RAVNINSKI GEOMETRIJI, drugi del

Ključne besede: matematika, geometrija, kompleksna števila.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1127-Zeljko.pdf

UPORABA KOMPLEKSNIH ŠTEVIL V RAVNINSKI GEOMETRIJI – drugi del

V prvi številki Preseka smo definirali kompleksni nagib premice skozi točki α in β kot $\chi = \dfrac{\beta - \alpha}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}}$. Dokazali smo tudi naslednji trditvi:
Premici sta vzporedni natanko tedaj, ko sta kompleksna nagiba enaka.
Premici sta pravokotni natanko tedaj, ko sta kompleksna nagiba nasprotna.

Tako smo se pripravili na obravnavo trikotnika v kompleksni ravnini. Naj bodo tri različna kompleksna števila α, β in γ oglišča trikotnika. Predpostavimo lahko, da leži središče trikotniku očrtane krožnice (označimo ga z o) v koordinatnem izhodišču (torej $o = 0$) in da je polmer tega kroga enak 1. Tedaj je $\alpha\overline{\alpha} = \beta\overline{\beta} = \gamma\overline{\gamma} = 1$. Če pri teh pogojih izračunamo kompleksni nagib premice, na kateri ležita točki α in β, dobimo

$$\frac{\beta - \alpha}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} = \frac{\beta\alpha\overline{\alpha} - \alpha\beta\overline{\beta}}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} = -\alpha\beta \ .$$

Podobno dobimo za nosilki drugih dveh trikotnikovih stranic.

Oglejmo si sedaj nekaj zanimivih rezultatov:

• Recimo, da je trikotnik enakokrak z vrhom pri γ. V tem primeru je premica skozi γ in $-\gamma$ simetrala daljice med α in β in je zato pravokotna na premico skozi α in β. S kompleksnimi nagibi to zapišemo

$$\frac{\gamma - (-\gamma)}{\overline{\gamma} - (-\overline{\gamma})} = \gamma^2 = \alpha\beta \ .$$

Dokaz lahko preberemo nazaj tudi v obratni smeri.
Torej: trikotnik je enakokrak (z vrhom pri γ) natanko tedaj, ko velja za oglišča zveza $\alpha\beta = \gamma^2$.

• Kako bi izračunali nožišče višine iz γ v poljubnem trikotniku?
Nožišče označimo z γ_1 in zapišimo zvezi: $\dfrac{\gamma_1 - \gamma}{\overline{\gamma_1} - \overline{\gamma}} = -\dfrac{\beta - \alpha}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} = \alpha\beta$ in $\dfrac{\beta - \alpha}{\overline{\beta} - \overline{\alpha}} = \dfrac{\gamma_1 - \alpha}{\overline{\gamma_1} - \overline{\alpha}}$. S prvo zvezo smo zahtevali, da je premica skozi γ in γ_1 pravokotna na premico skozi α in β, z drugo pa, da leži γ_1 na premici skozi

α in β. Sistem (z neznankama γ_1 in $\overline{\gamma_1}$) rešimo in dobimo

$$\gamma_1 = \frac{\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma}}{2}.$$

Podobno določimo še ostali dve nožišči.

• Tudi višinska točka κ trikotnika ne dela težav:
Zapišimo pogoja pravokotnosti višin na dve stranici: $\frac{\kappa-\gamma}{\overline{\kappa}-\overline{\gamma}} = -\frac{\beta-\alpha}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}} = \alpha\beta$ in $\frac{\kappa-\beta}{\overline{\kappa}-\overline{\beta}} = -\frac{\gamma-\alpha}{\overline{\gamma}-\overline{\alpha}} = \alpha\gamma$. Sistem rešimo in dobimo $\kappa = \alpha+\beta+\gamma$.
Enostavno preverimo, da smo zadostili tudi pogoju pravokotnosti višine na tretjo stranico: $\frac{\kappa-\alpha}{\overline{\kappa}-\overline{\alpha}} = -\frac{\gamma-\beta}{\overline{\gamma}-\overline{\beta}} = \beta\gamma$.

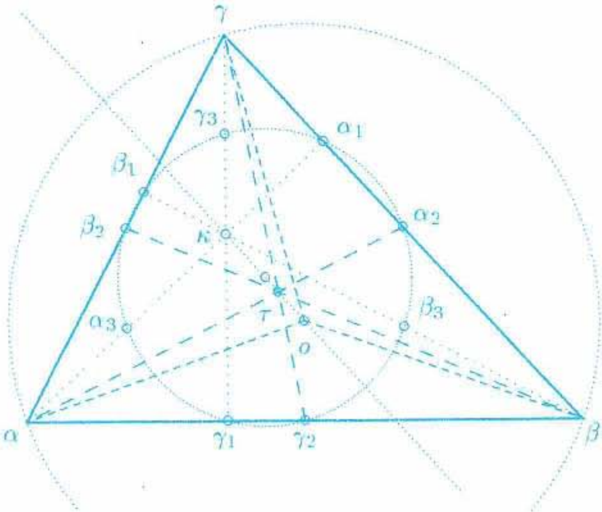
• Težišče trikotnika lahko zapišemo takoj: $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$.

Vidimo, da ležijo točke o, τ in κ na isti premici. To premico imenujemo *Eulerjeva premica*.

• Oglejmo si še neko karakteristično lastnost enakokrakih trikotnikov:
Naj bo trikotnik enakokrak z vrhom γ. Potem je Eulerjeva premica pravokotna na osnovnico in lahko zapišemo $\chi_E = \alpha\beta$. Tudi tu velja obrat:
Iz $\chi_E = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma}} = \alpha\beta$ z nekaj računanja izpeljemo $\alpha\beta = \gamma^2$.
Trikotnik je torej enakokrak (z vrhom γ) natanko tedaj, ko za nagib Eulerjeve premice velja $\chi_E = \alpha\beta$.

• Na tej premici leži tudi središče *krožnice devetih točk*; tega si bomo sedaj ogledali.
Naj bo γ_2 razpolovišče daljice od α do β. Torej $\gamma_2 = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Podobno označimo še α_2 in β_2.
Naj bo γ_3 razpolovišče daljice od γ do κ. Torej $\gamma_3 = \frac{\gamma+\kappa}{2} = \gamma + \frac{\alpha+\beta}{2}$.
Podobno označimo še α_3 in β_3.
Hkrati z že izračunanimi nožišči višin (točke $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) smo tako definirali devet točk: α_i, β_i, γ_i (i=1,2,3).
Vse te točke ležijo na isti krožnici, kar ni težko videti, saj so vse enako od-

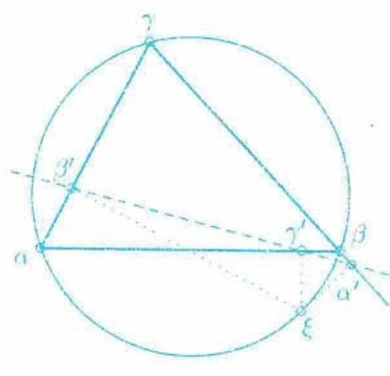
daljene od točke $\delta = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.
Izračunajmo najprej tri razdalje: $|\gamma_1 - \delta| = |-\alpha\beta\overline{\gamma}/2| = 1/2$
$|\gamma_2 - \delta| = |-\gamma/2| = 1/2$ in $|\gamma_3 - \delta| = |\gamma/2| = 1/2$. Ostalih šest razdalj pa nam pravzaprav ni treba računati, saj lahko v gornjih treh enačbah dvakrat ciklično zamenjamo števila α, β in γ.
Središče δ tega kroga s polmerom $1/2$ pa seveda leži na Eulerjevi premici.



Krožnica devetih točk

- Oglejmo si še en primer uporabe kompleksnega nagiba:

Trikotniku z oglišči α, β in γ očrtamo krožnico. Spet lahko predpostavimo, da leži središče trikotniku očrtane krožnice v koordinatnem izhodišču in da je njen polmer enak 1.
Na krožnici izberemo točko ξ. Pravokotne projekcije te točke na premice nosilke posmeznih stranic označimo z α', β' in γ'. Dokazali bomo, da ležijo te točke na isti premici;



imenujemo jo *Simsonova premica*.
Izračunali smo že

$$\gamma' = \frac{\alpha+\beta+\xi-\alpha\beta\overline{\xi}}{2} \quad \text{in} \quad \beta' = \frac{\alpha+\gamma+\xi-\alpha\gamma\overline{\xi}}{2}.$$

Z nekaj računske spretnosti hitro vidimo, da je $\frac{\gamma'-\beta'}{\overline{\gamma'}-\overline{\beta'}} = \alpha\beta\gamma\overline{\xi}$. Zaradi simetrije velja tudi $\frac{\gamma'-\alpha'}{\overline{\gamma'}-\overline{\alpha'}} = \alpha\beta\gamma\overline{\xi}$, kar pa že pomeni, da so točke α', β' in γ' kolinearne.

• Več truda in računske spretnosti pa zahteva izračun središča trikotniku včrtane krožnice, ki ga označimo s σ.
Navedimo samo rezultat: $\sigma = \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\gamma\alpha}$. Pri izračunu kvadratnega korena $\sqrt{\mu\nu}$ izberemo vedno tisto število, ki leži na sredini pozitivno orientiranega loka od μ do ν.

• Za zaključek pa izpeljimo še eno karakteristično lastnost enakokrakih trikotnikov:
Trikotnik je enakokrak natanko tedaj, ko leži središče včrtane krožnice na Eulerjevi premici.
Poiščimo najprej enačbo za nagib premice skozi o in σ:

$$\begin{aligned}\chi_\sigma &= \frac{\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\beta\gamma}+\sqrt{\gamma\alpha}}{\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma\alpha}}}\\ &= \frac{\alpha\beta\sqrt{\gamma}+\beta\gamma\sqrt{\alpha}+\gamma\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}\end{aligned}$$

Trikotnik je torej enakokrak natanko tedaj, ko je $\chi_\sigma = \chi_E$.
V ta namen si oglejmo izraz $\chi_\sigma - \chi_E$. Z veliko mero potrpežljivosti izračunamo razliko teh dveh ulomkov in števec tako dobljenega ulomka razstavimo. Izraz v števcu je $(\sqrt{\beta\gamma}-\alpha)(\sqrt{\gamma\alpha}-\beta)(\sqrt{\alpha\beta}-\gamma)\sqrt{\alpha\beta\gamma}$. Odtod lahko preberemo dokaz v obe smeri.

Uporaba kompleksnih števil v geometriji ni težka – zaheva nekaj miselnega napora in precej računske spretnosti.

Matjaž Željko