ARHITOVA KRIVULJA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A20, 14H50, 53A04, 53A05

V prispevku je predstavljena Arhitova krivulja. Navadno jo omenjamo v zvezi z antičnim problemom podvojitve kocke. Nastane kot presek rogatega torusa in krožnega valja, ki se torusa dotika v dveh točkah.

THE ARCHYTAS CURVE

In this contribution the Archytas curve is presented. It is usually mentioned in connection with the ancient problem of doubling the cube. It is created as the intersection of a horn torus and a circular cylinder which touches the torus at two points.

Uvod

Arhitova krivulja $\mathcal{A}$ je za matematiko in njeno zgodovino dovolj zanimiva, ker ni povezana le s problemom podvojitve kocke, ampak že sama po sebi ponuja nekaj novih izzivov. Spoznali bomo, da je $\mathcal{A}$ presek rogatega torusa z valjem, ki se torusa dotika natanko v dveh točkah. Zapisali bomo ustrezne enačbe v primernem pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu $Oxyz$, pa tudi pravokotne projekcije krivulje $\mathcal{A}$ na koordinatne ravnine, pri čemer bomo našli celo zlato razmerje τ. Za krivuljo $\mathcal{A}$ bomo poiskali tudi regularno parametrizacijo.

Starogrški matematik, mehanik, državnik in strateg Arhitas iz Tarenta (Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος, 428–347 pr. n. št.) je bil pitagorejec. Po [1] naj bi sklanjali Arhitas, Arhita, Arhitu, …, ustrezni svojilni zaimek pa zapisali kot Arhitov. Znan je tudi po tem, da je otel iz rok sirakuškega tirana Dionizija Mlajšega (396–337 pr. n. št.) samega filozofa Platona (427–347 pr. n. št.). Platon se je namreč, razočaran nad atensko demokracijo, ki je bila na smrt obsodila njegovega učitelja Sokrata (470–399 pr. n. št.), za dlje časa umaknil iz Aten, precej potoval in se srečal z matematikoma Teodorjem iz Kirene ter Arhitom iz Tarenta. V Sirakuzah je poskusil udejanjiti svoje zamisli o idealni državi. Toda s tiranom se je tako hudo sporekel, da ga je moral reševati Arhitas. Leta 387 pr. n. št. je Platon v Akademovem gaju blizu Aten ustanovil znamenito Akademijo, v kateri so študirali tudi znani antični matematiki, geometri in astronomi: Teajtet (417–369 pr. n. št.), Evdoks iz Knida (410–347 pr. n. št.), tudi Arhitov učenec, brata Dejnostrat (390–320 pr. n. št.) in Menajhmos (380–320 pr. n. št.) ter Avtolik iz Pitane

(360–290 pr. n. št.). V Platonovi Akademiji je seveda beseda nanesla tudi na velike geometrijske probleme (več o tem na primer v [3–5]). Platon je vztrajal, da je treba geometrijske probleme reševati samo s šestilom in neoznačenim ravnilom, in to v ravnini. Problem podvojitve kocke, to se pravi konstrukcije roba b kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot kocka z robom a, je na problem vmesnega sorazmerja prevedel Hipokrat s Hiosa (470–410 pr. n. št.). Njegova ideja je bila, dani daljici dolžine a najti daljici dolžin b in c, za kateri velja relacija:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{2a}. \tag{1}$$

Iz nje namreč dobimo najprej

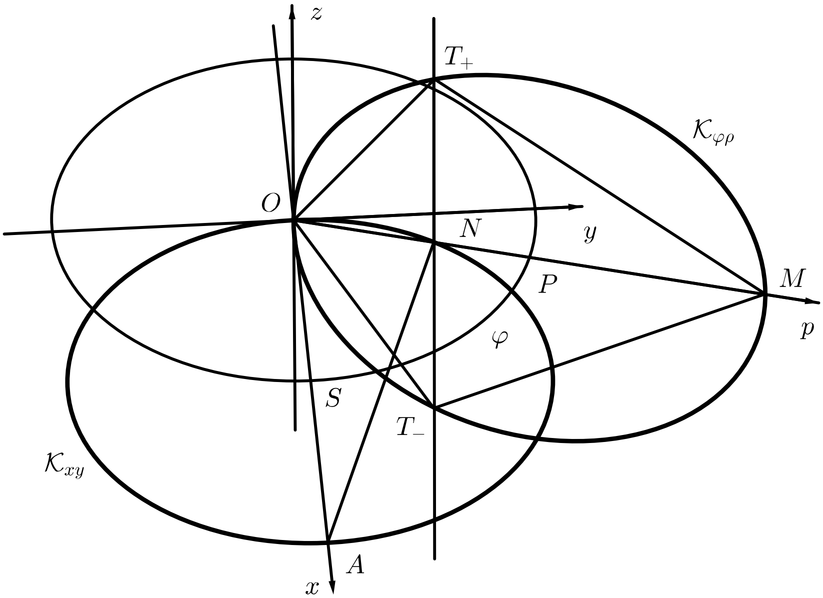
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{2a} = \frac{1}{2},$$

nato pa $b = a\sqrt[3]{2}$ in $c = a\sqrt[3]{4}$. Problem je enakovreden iskanju kratkega geometrijskega zaporedja $a, b, c, 2a$.

Ker veljata relaciji $b^2 = ac$ in $c^2 = 2ab$, lahko tudi rečemo, da je par $(x, y) = (b, c)$ neničelna rešitev sistema enačb $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$, to se pravi netrivialno presečišče dveh parabol. Ker je tudi $bc = 2a^2$, je par $(x, y) = (b, c)$ tudi rešitev sistemov enačb $x^2 = ay$, $xy = 2a^2$ in $y^2 = 2ax, xy = 2a^2$, kar pomeni presečišče hiperbole $xy = 2a^2$ z eno od omenjenih parabol. Tako je Menajhmos s stožnicami reševal problem podvojitve kocke. Starogrški matematiki so našli še druge načine reševanja problema podvojitve kocke (več na primer v [3, 5]). Platon seveda ni bil z nobeno zadovoljen. Žal ni vedel, da je problem nerešljiv na način, ki si ga je zamislil. To so dokazali šele v 19. stoletju.

Nastanek Arhitove krivulje

Arhitas iz Tarenta je bil prvi, ki je v geometrijo vpeljal gibanje. Problema podvojitve kocke se je lotil na povsem svojstven način, s prehodom iz ravnine v prostor. Da bi mu laže sledili, bomo vse obravnavali v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu $Oxyz$ (slika 1), čeprav je Arhitas nalogo reševal brez koordinatnega sistema, ki ga ni poznal. V ravnino Oxy položimo krožnico $\mathcal{K}_{xy}$ s polmerom a, njeno središče pa v točko $S(a, 0)$. Koordinatnemu izhodišču diametralno nasprotna točka na $\mathcal{K}_{xy}$ je $A(2a, 0)$. Na $\mathcal{K}_{xy}$ izberemo točko $N(x, y)$, konstruiramo poltrak p od koordinatnega izhodišča O skozi N in krožnico $\mathcal{K}_{\varphi\rho}$ s polmerom a skozi O, s središčem P na p, in sicer v ravnini, ki vsebuje os Oz. Koordinatnemu izhodišču diametralno nasprotno točko na $\mathcal{K}_{\varphi\rho}$ označimo z M. Pravokotnica skozi N na ravnino Oxy seka to krožnico v točkah T_+ in T_-.



Slika 1. Nastanek Arhitove krivulje.

Ko točko N vodimo po krožnici $\mathcal{K}_{xy}$, točki $T_\pm(x, y, \pm z)$ opišeta krivuljo, ki ji pravimo *Arhitova krivulja* in jo bomo označevali z $\mathcal{A}$, njene pravokotne projekcije na koordinatne ravnine Oxy, Oyz, Oxz pa ustrezno $\mathcal{A}_{xy}$, $\mathcal{A}_{yz}$, $\mathcal{A}_{xz}$.

Poltrak p naj z osjo Ox oklepa kot φ, polarni kot točke N. Polarni radij točke N je $\rho = |ON| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pri tem je $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$. Ker je trikotnik OAN pravokoten, lahko takoj zapišemo enačbo krožnice $\mathcal{K}_{xy}$ v polarnih koordinatah z $\rho = 2a\cos\varphi$, v pravokotnih koordinatah z $x^2 + y^2 = 2ax$, v parametrični obliki pa kot

$$x = 2a\cos^2\varphi,\ y = 2a\cos\varphi\sin\varphi. \tag{2}$$

Ker sta tudi trikotnika $OMT_\pm$ pravokotna, dobimo po višinskem izreku zanju relacijo $z_\pm^2 = \rho(2a - \rho) = 4a^2\cos\varphi(1 - \cos\varphi)$. S tem smo našli parametrične enačbe Arhitove krivulje $\mathcal{A}$:

$$x = 2a\cos^2\varphi,\ y = 2a\cos\varphi\sin\varphi,\ z = \pm 2a\sqrt{\cos\varphi(1 - \cos\varphi)}. \tag{3}$$

Ker je za računanje ugodno, da v parametrizaciji krivulje nastopata funkciji sin in cos racionalno, ne pa pod korenskim znakom, bomo v nadaljevanju poiskali boljšo parametrizacijo.

Očitno krivulja $\mathcal{A}$ leži hkrati na valju $\mathcal{V}$, ki ima v koordinatnem sistemu $Oxyz$ enačbo $x^2 + y^2 = 2ax$, in na torusu $\mathcal{T}$, ki nastane z rotacijo krožnice

$\mathcal{K}_{\varphi\rho}$ okoli osi Oz, ki je tangenta na to krožnico. Torus nima odprtine, zaradi značilne oblike v okolici njegovega središča mu pravimo *rogati torus*.

Iz parametričnih enačb (3) dobimo najprej $x^2 + y^2 = 4a^2 \cos^2 \varphi, z^2 = 4a^2 \cos \varphi(1 - \cos \varphi)$, nato še $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \cos^2 \varphi + 4a^2 \cos \varphi(1 - \cos \varphi) = 4a^2 \cos \varphi$, nazadnje pa enačbo torusa $\mathcal{T}$:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2). \tag{4}$$

Arhitova krivulja je potemtakem presek torusa $(x^2+y^2+z^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$ in valja $x^2 + y^2 = 2ax$. Arhitas je problem podvojitve kocke v bistvu rešil tako, da je svojo krivuljo $\mathcal{A}$ presekal s krožnim stožcem $\mathcal{S}$, ki ima vrh v središču torusa $\mathcal{T}$ in os skozi zunanje dotikališče valja $\mathcal{V}$ in torusa $\mathcal{T}$, to je točko A. Kot ob vrhu stožca $\mathcal{S}$ je treba še pravilno izbrati. Enačbo stožca $\mathcal{S}$ zapišimo kot $\lambda x = \sqrt{y^2 + z^2}$, kjer je λ pozitivna konstanta. Presek Arhitove krivulje s stožcem $\lambda x = \sqrt{y^2 + z^2}$ pa nam ob primerni izbiri faktorja λ da daljice, ki so uporabne za podvojitev kocke. V jeziku algebre to pomeni, da rešujemo sistem enačb:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 = 2ax,\ \lambda x = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Brez težav izločimo y in z in dobimo enačbo $x^4(1 + \lambda^2)^2 = 8a^3x$, ki ima trivialno rešitev $x_0 = 0$ in netrivialno rešitev $x_1 = 2a/\sqrt[3]{(1 + \lambda^2)^2}$.

Arhitovo krivuljo $\mathcal{A}$ preseka stožec $\mathcal{S}$ v štirih točkah, ki imajo absciso x_1, njihove ordinate pa dobimo iz enačbe valja $\mathcal{V}$. Projekcije (vse projekcije v prispevku so pravokotne) teh točk na ravnino Oxy imajo tudi abscise x_1, za polarni radij pa $\rho_1 = \sqrt{2ax_1} = 2a/\sqrt[3]{1 + \lambda^2}$. Za $\lambda = 1$ je $x_1 = b = a\sqrt[3]{2}$, za $\lambda = \sqrt{3}$ pa je $\rho_1 = b = a\sqrt[3]{2}$. V prvem primeru je kot ob vrhu stožca 90°, v drugem pa 120°. V obeh pa s tem rešimo problem podvojitve kocke.

Iz zgodovinskih virov, žal tudi ne iz [3], ne razberemo, kaj je Arhita vodilo, da se je lotil na opisani način reševati problem podvojitve kocke. Poudarjajo pa njegovo genialnost. Da pa je njegov način tesno povezan z relacijo (1), lahko preberemo ravno v [3] ali pa v [4].

Projekcije na koordinatne ravnine in regularna parametrizacija

Projekcijo $\mathcal{A}_{xy} = \mathcal{K}_{xy}$ lahko včrtamo v kvadrat s stranico dolžine $2a$ z oglišči $(0, \pm a)$, $(2a, \pm a)$ in dotikališči $(0, 0)$, $(2a, 0)$, $(a, \pm a)$ v ravnini Oxy. Izkaže se, da tudi drugi dve projekciji lahko včrtamo v prav tako velik kvadrat.

Z izločitvijo koordinate y iz enačb torusa in valja dobimo projekcijo $\mathcal{A}_{xz}$ krivulje $\mathcal{A}$ na ravnino Oxz v implicitni obliki:

$$(2ax + z^2)^2 = 8a^3x.$$

Zelo lep izraz dobimo za ploščino S lika, ki ga omejuje (slika 2):

$$S = 2\int_0^{2a} z(x)\,dx = 2\sqrt{2a}\int_0^{2a}\sqrt{\sqrt{2ax}-x}\,dx.$$

S substitucijo $x = 2au^2$ se nam izraz poenostavi:

$$S = 16a^2\int_0^1 u\sqrt{u-u^2}\,du = 16a^2\int_0^1 u^{3/2}(1-u)^{1/2}\,du.$$

Z uporabo funkcij $\mathbf{B}$ in $\mathbf{\Gamma}$ takoj dobimo:

$$S = 16a^2\mathbf{B}(5/2,3/2) = 16a^2\frac{\mathbf{\Gamma}(5/2)\mathbf{\Gamma}(3/2)}{\mathbf{\Gamma}(4)} = \pi a^2.$$

To je ravno ploščina kroga, ki ga omejuje $\mathcal{K}_{xy}$.

Če bi v prejšnjem integralu postavili $u = \cos^2 t$, bi se nam integral tudi poenostavil tako, da v njem ne bi bilo korenov. To pa pomeni, da bi bilo smiselno krivuljo $\mathcal{A}_{xz}$ parametrizirati z $x = 2au^2 = 2a\cos^4 t$. Potem zlahka dobimo še $z = a\sin 2t$. En obhod po krivulji dobimo, če vzamemo $-\pi/2 \le t \le \pi/2$. Preprosta parametrizacija krivulje $\mathcal{A}_{xz}$ v ravnini Oxz je torej

$$x = 2a\cos^4 t,\ z = a\sin 2t,\ -\pi/2 \le t \le \pi/2.$$

Brez zapletov lahko izračunamo presečišča te krivulje s krožnico $x^2+z^2 = 2ax$. V ta namen rešimo naslednji sistem enačb:

$$(2ax+z^2)^2 = 8a^3x,\ x^2+z^2 = 2ax.$$

Izločimo z in dobimo enačbo $(4ax-x^2)^2 = 8a^3x$, ki jo poenostavimo v

$$x^4 - 8ax^3 + 16a^2x^2 - 8a^3x = x(x-2a)(x^2-6ax+4a^2) = 0.$$

Enačba ima 4 rešitve:

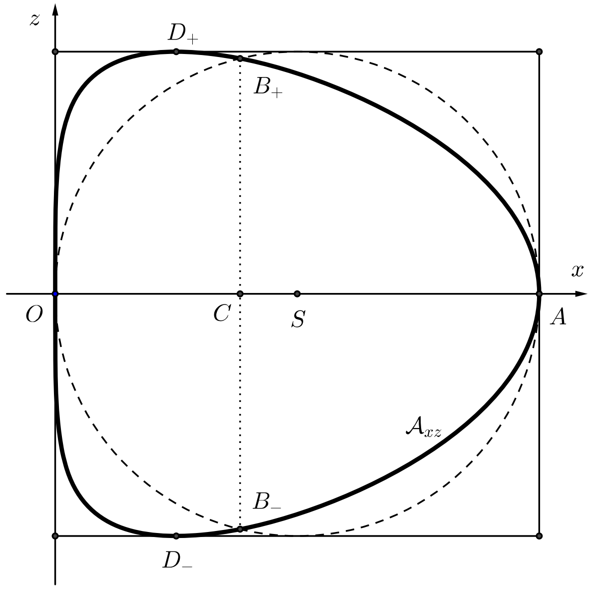
$$x_1 = 0,\ x_2 = 2a,\ x_3 = (3-\sqrt{5})a,\ x_4 = (3+\sqrt{5})a.$$

Rešitev $x_4 > 2a$ ne pride v poštev. Skupne točke obeh krivulj v ravnini Oxz so torej:

$$O(0,0),\ A(2a,0),\ B_\pm\left(a(3-\sqrt{5}), \pm 2a\sqrt{\sqrt{5}-2}\right).$$

Projekcija točk $B_\pm$ na os Ox je točka $C((3-\sqrt{5})a,0)$, ki deli daljico OA v zlatem razmerju. Velja namreč:

$$\frac{|OA|}{|CA|} = \frac{|CA|}{|OC|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau.$$



Slika 2. Projekcija Arhitove krivulje na ravnino Oxz.

O tem se hitro prepričamo, če upoštevamo izraze:

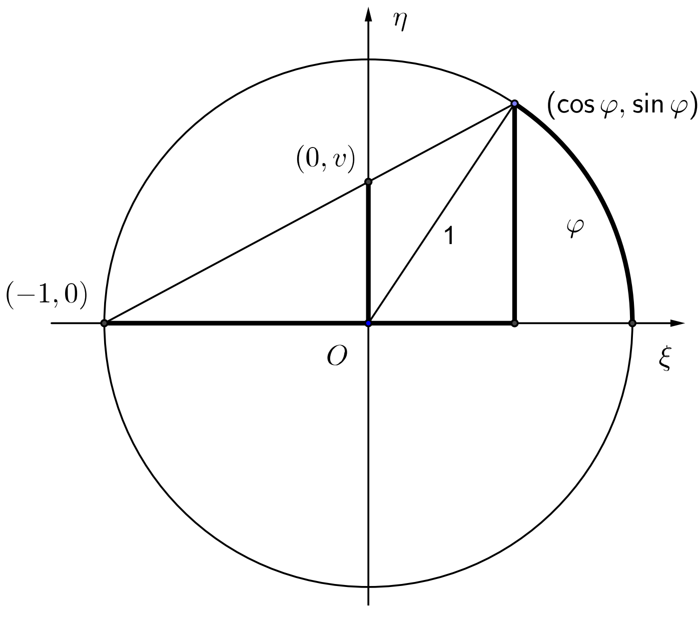
$$|OA| \neq 2a,\ |CA| \neq a(\sqrt{5}-1),\ |OC| \neq a(3-\sqrt{5}).$$

Izraz *zlato razmerje* je v resnici precej nov, čeprav so sam pojem že uporabljali v antiki, na primer Evklid v svojih Elementih, kjer na več mestih namesto besed *zlato razmerje* najdemo ἄκρος καὶ μέσος λόγος, kar pomeni, če pogledamo v [2], *skrajno in srednje razmerje*. Luca Pacioli (1445–1517) je to razmerje imenoval *divina proportione*, *božansko razmerje*. Med prvimi, ki so uporabljali izraz *zlato razmerje*, v nemščini *goldene Proportion*, je bil nemški matematik Martin Ohm (1792–1872), brat fizika Georga Ohma (1789–1854), po katerem se imenujeta Ohmov zakon in enota ohm (Ω) za električno upornost. Zlato razmerje τ ima preprost razvoj v verižni ulomek: $\tau = [1; 1, 1, 1, \ldots]$. Dobimo ga iz relacije $\tau = 1 + 1/\tau$.

Krivuljo $\mathcal{A}_{xz}$ lahko včrtamo v kvadrat s stranico dolžine $2a$ z oglišči $(0, \pm a)$, $(2a, \pm a)$, dotikališča pa so v točkah $O(0,0)$, $A(2a,0)$, $D_\pm(a/2, \pm a)$ v ravnini Oxz.

Žal pa se z zadnjo parametrizacijo krivulje $\mathcal{A}_{xz}$ ne da parametrizirati same krivulje $\mathcal{A}$ v obliki, ki ne bi vsebovala korenov funkcij. Izraza za y se ne da poenostaviti v racionalno obliko, ki bi vsebovala le funkciji cos in sin. Zato se parametrizacije lotimo nekoliko drugače.

Krožnico $x^2 + y^2 = 2ax$ v ravnini Oxy smo z (2) že parametrizirali s polarnimi koordinatami φ in ρ. Razmere predstavimo v pomožnem pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu $O\xi\eta$ na desni polovici enotske krožnice (slika 3).



Slika 3. Enotska krožnica v koordinatnem sistemu $O\xi\eta$.

Točko $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ povežemo s točko $(-1, 0)$ z daljico, ki seka os $O\eta$ v točki $(0, v)$. Očitno daljica oklepa z osjo $O\xi$ kot $\varphi/2$. Ordinata $v = \tan(\varphi/2)$ pa je s kotom $\varphi \neq \pm\pi$ natančno določena. Znani enakosti

$$\cos\varphi = \frac{1 - \tan^2(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)}, \ \sin\varphi = \frac{2\tan(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)},$$

ki ju srečamo pri integraciji funkcij, ki se racionalno izražajo s $\cos\varphi$ in $\sin\varphi$, nam dasta izraza

$$\cos\varphi = \frac{1 - v^2}{1 + v^2}, \ \sin\varphi = \frac{2v}{1 + v^2}.$$

Vemo, da pri krožnici $x^2 + y^2 = 2ax$ velja omejitev $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, kar prinese omejitev $-1 \leq v \leq 1$. Zato lahko enolično zapišemo $v = \sin t$ za $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ in dobimo

$$\cos\varphi = \frac{\cos^2 t}{1 + \sin^2 t}, \ \sin\varphi = \frac{2\sin t}{1 + \sin^2 t}, \ 1 - \cos\varphi = \frac{2\sin^2 t}{1 + \sin^2 t}.$$

S tem imamo naslednjo parametrizacijo krožnice $x^2 + y^2 = 2ax$:

$$x = \frac{2a\cos^4 t}{(1+\sin^2 t)^2},\ y = \frac{2a\cos t \sin 2t}{(1+\sin^2 t)^2},\ -\pi/2 \le t \le \pi/2.$$

Hitro se vidi, da lahko iz tretje relacije v (3) izrazimo

$$z^2 = 4a^2\cos\varphi(1-\cos\varphi) = \frac{8a^2\cos^2 t\sin^2 t}{(1+\sin^2 t)^2} = \frac{2a^2\sin^2 2t}{(1+\sin^2 t)^2}.$$

S tem smo našli:

$$z = \pm\frac{a\sqrt{2}\sin 2t}{1+\sin^2 t}.$$

Ker velja $x(\pi-t) = x(t), y(\pi-t) = y(t)$ in $z(\pi-t) = -z(t)$, se odločitvi pri izboru predznaka za $z(t)$ izognemo tako, da namesto intervala parametrizacije $-\pi/2 \le t \le \pi/2$ vzamemo interval $-\pi \le t \le \pi$. Potem y in z štirikrat zavzameta vse vrednosti od $-a$ do a ter x štirikrat vse vrednosti od 0 do $2a$, kar je v skladu z definicijo Arhitove krivulje kot preseka torusa in valja. Krivulja $\mathcal{A}$ v vektorski parametrični obliki je

$$\vec{r}\,(t) = a\left(\frac{2\cos^4 t}{(1+\sin^2 t)^2}, \frac{2\cos t\sin 2t}{(1+\sin^2 t)^2}, \frac{\sqrt{2}\sin 2t}{1+\sin^2 t}\right),\ -\pi \le t \le \pi. \qquad (5)$$

Pri spreminjanju parametra t po intervalu $[-\pi, \pi]$ točka, ki je izražena z zgornjim krajevnim vektorjem, doseže vsako točko krivulje $\mathcal{A}$ natančno enkrat, razen samopresečišča $A(2a, 0, 0)$ za $t = 0$ in $t = \pm\pi$ ter samodotikališča $O(0,0,0)$ za $t = \pm\pi/2$. Izkaže se, da je $|\dot{\vec{r}}\,(t)| > 0$ za vsak t, kar pomeni, da je po [9] $\mathcal{A}$ regularna sklenjena krivulja (slika 4).

Krivulja $\mathcal{A}_{yz}$, projekcija krivulje $\mathcal{A}$ na ravnino Oyz, ima enačbo:

$$(z^4 + 4a^2y^2)^2 = 8a^2z^2(4a^2y^2 - z^4).$$

Do te enačbe lahko pridemo z izločitvijo spremenljivke x iz enačb

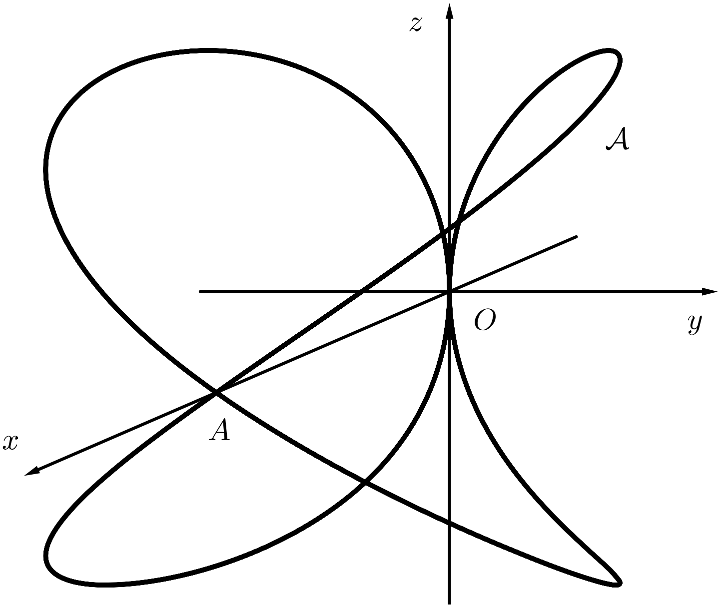
$$(x^2+y^2+z^2)^2 = 4a^2(x^2+y^2),\ x^2+y^2 = 2ax,$$

če ne gre drugače, z rezultanto $R[p(x), q(x)]$ polinomov (več o rezultanti polinomov najdemo na primer v [8])

$$p(x) = x^4 + 2(y^2+z^2-2a^2)x^2 + (y^2+z^2)^2 - 4a^2y^2,\ q(x) = x^2 - 2ax + y^2$$

spremenljivke x, pri čemer sta y in z parametra:

$$R[p(x), q(x)] =$$



Slika 4. Arhitova krivulja.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2(y^2+z^2-2a^2) & 0 & (y^2+z^2)^2-4a^2y^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2(y^2+z^2-2a^2) & 0 & (y^2+z^2)^2-4a^2y^2 \\ 1 & -2a & y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a & y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2a & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2a & y^2 \end{vmatrix}.$$

Primerno računalniško orodje za delo z matrikami in determinantami nam izraz poenostavi:

$$R[p(x), q(x)] = 16a^4y^4 + 8a^2y^2z^2(z^2 - 4a^2) + z^6(z^2 + 8a^2).$$

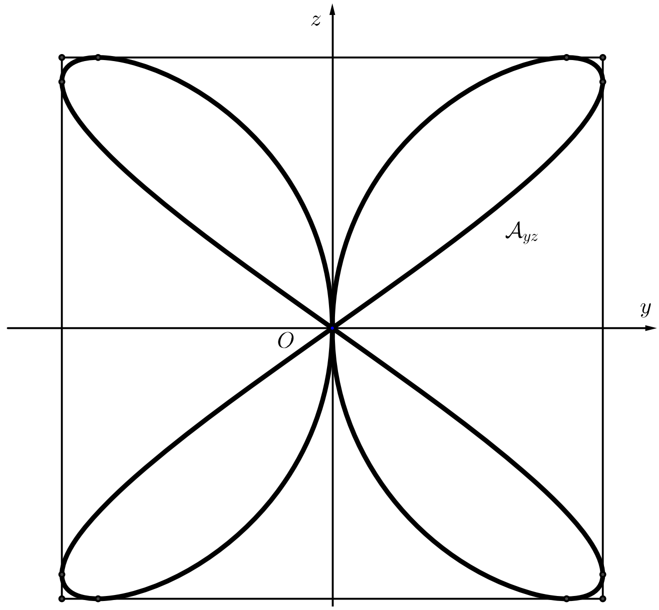
Po preureditvi členov imamo enačbo iskane krivulje v ravnini Oyz:

$$R[p(x), q(x)] = (z^4 + 4a^2y^2)^2 - 8a^2z^2(4a^2y^2 - z^4) = 0.$$

Če v tej enačbi za majhne y in z zanemarimo člene stopnje 6 ali več, dobimo: $y^2(y^2 - 2z^2) = 0$. To pomeni, da se krivulja $\mathcal{A}$ dotika sama sebe v točki $(0, 0, 0)$, njena tangenta pa je tam os torusa, v točki $A(2a, 0, 0)$ pa samo sebe seka pod kotom $2\arctan(\sqrt{2}/2)$.

Krivulja $\mathcal{A}_{yz}$ v parametrični obliki je

$$y = \frac{2a\cos t\sin 2t}{(1+\sin^2 t)^2},\ z = \frac{a\sqrt{2}\sin 2t}{1+\sin^2 t},\ -\pi \le t \le \pi.$$



Slika 5. Projekcija Arhitove krivulje na ravnino Oyz.

Ima obliko rahlo popačene štiriperesne deteljice. Ploščino S lika, ki ga omejuje, se da izračunati po formuli:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (y\dot{z} - z\dot{y})dt = 16a^2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t \cos^2 t(2 + \cos^2 t)\, dt}{(1 + \sin^2 t)^4}.$$

Po daljšem računu dobimo:

$$S = 4a^2 \left(\ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3} \right).$$

V izrazu opazimo *srebrno razmerje* $\varrho = 1 + \sqrt{2}$, za katero je $\varrho = 2 + 1/\varrho$, razvoj v verižni ulomek pa je, prav tako kot za zlato razmerje, preprost: $\varrho = [2; 2, 2, 2, \ldots]$. Krivuljo $\mathcal{A}_{yz}$ lahko včrtamo v kvadrat s stranico dolžine $2a$ z oglišči $(\pm a, \pm a)$, dotikališča pa so v točkah $\left(\pm a, \pm a\sqrt{2\left(\sqrt{2} - 2\right)}\right)$, $(\pm a\sqrt{3}/2, \pm a)$ v ravnini Oyz (slika 5). Celotna Arhitova krivulja $\mathcal{A}$ je zaprta v kocki z robom $2a$ in oglišči $(0, \pm a, \pm a), (2a, \pm a, \pm a)$.

Za konec

V zvezi z Arhitovo krivuljo bi lahko rešili še kakšno nalogo. Če prerežemo valj vzdolž osi Oz in ga nato z Arhitovo krivuljo vred razgrnemo v ravnino $x = 2a$, dobimo v njej osmici podobno krivuljo, za katero se da lepo izračunati ploščino S lika, ki ga omejuje: $S = 16a^2(\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$.

Lepo se da z uporabo GeoGebre 5 predstaviti Arhitovo krivuljo v prostoru, jo sukati in opazovati njeno *anaglifno sliko*. Pojasnimo na kratko, za kaj pri slednji sploh gre.

Potrebe po izdelavi dobrih načrtov objektov, kot so na primer stroji, zgradbe in prometnice, so prispevale k razvoju *opisne geometrije*. Med prvimi jo je študiral in uvedel v šole Gaspard Monge (1746–1818), Napoleonov general [5, 7]. Kmalu so spoznali način, kako prevarati človeške oči, da bi videle prostorsko. Eden od načinov je ravno omenjena anaglifna slika, ki jo sestavljata skoraj identični, malo razmaknjeni ravninski sliki, ki sta običajno obarvani, ena rdečkasto, druga zelenkasto, in narisani na isti ravnini, gledani skozi rdeče-zelena očala pa se v naših možganih ustvari vtis prave prostorske slike. Gledati pa je treba hkrati z obema očesoma, kajti ravno razdalja med njima omogoča, da anaglifno sliko vidimo prostorsko.

Prvo metodo za izdelavo anaglifnih slik je že leta 1852 razvil Wilhelm Rollmann (1821–1890) iz Leipziga. Sama beseda *anaglifen* izvira iz grških besed ἀνά, kar pomeni *na, drug na drugega*, in γλύφω, *dolbem, graviram, predstavljam*. Sorodna beseda je *hieroglif*, pri kateri prvi del izhaja iz grške besede ἱερός, kar pomeni *sveti, božanski*.

Eden od redkih učbenikov o anaglifnih slikah, ki ga dobimo pri nas, je v hrvaščino prevedena knjiga [6], ki jo je napisal v madžarščini Imre Pál (rojen 1911) že davnega leta 1959 in je bila prevedena v več jezikov. Izvirni naslov je *Térláttatós ábrázoló mértan*, kar pomeni *Opisna geometrija z anaglifnimi slikami*.

LITERATURA

[1] B. Aubelj, *Antična imena po slovensko*, Modrijan, Ljubljana, 1997.
[2] A. Dokler, *Grško-slovenski slovar*, Knezoškofijski zavod sv. Stanislava, Ljubljana, 1915.
[3] T. Heath, *A history of Greek mathematics*, Vol. I. Dover Publ., New York, 1981.
[4] M. Jerman, *Reševanje treh velikih starogrških problemov*, Obzornik mat. fiz. **59** (2012), 182–192.
[5] U. C. Merzbach in C. B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2011.
[6] I. Pál, *Nacrtna geometrija u anaglifskim slikama*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1966.
[7] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1986.
[8] I. Vidav, *Algebra*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2010.
[9] I. Vidav, *Diferencialna geometrija*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1989.