

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **30** (2002/2003)

Številka 6

Strani 332–337, XXIII

Janez Strnad:

SKOK V DALJAVO

Ključne besede: fizika, poševni met, zračni upor.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/30/1531-Strnad.pdf>

© 2003 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

SKOK V DALJAVO

Presek se je dotaknil nekaterih športnih panog, med njimi tudi skoka v višino in skoka ob palici (S. Pahor, *Skok v višino in skok ob palici po fizikalno*, Presek **5** (1977/78) 179). Skoka v daljavo pa še ni obravnaval. Zapolnimo to vrzel.



Pri skoku v daljavo tekmovalec med zaletom doseže veliko hitrost, se odrine in doskoči v jamo s peskom. Med skokom spreminja lego delov telesa glede na druge dele. Gibanje težišča skakalca lahko preprosto opišemo. Pri tem si moramo pomagati z enačbami. Čeprav je precej računanja, na srečo ni zahtevno; rešiti moramo le nekaj kvadratnih enačb. Med zaletom se težišče skakalca giblje pospešeno v vodoravni smeri, dokler ne doseže končne hitrosti v_0 . V preprostem modelu vzemimo, da se po odskoku ne spremeni velikost te hitrosti, ampak samo njena smer. Pred odskokom se težišče giblje s hitrostjo v_0 v vodoravni smeri, ob njem pa poševno navzgor pod kotom β proti vodoravnici. Ob odskoku je vodoravna komponenta hitrosti $v_0 \cos \beta$ in navpična komponenta $v_0 \sin \beta$. Dalje opišemo gibanje težišča kot *poševni met*. To je pomembna sestavina različnih športnih panog, ki smo jo srečali pri metih v lahki atletiki in pri metu na koš (*Meti*, Presek **13** (1985/86) 86; *Koš! Koš!*, Presek **18** (1990/91) 268).

Poševni met opišemo v navpični ravnini. Os x postavimo na začetno pot težišča v višini $y^* = 1$ m nad tlemi v smer zaleta, os y pa nad odskočiščem navpično navzgor. Gibanje težišča lahko potem razstavimo na enakomerno premo gibanje s hitrostjo $v_0 \cos \beta$ v vodoravni smeri in navpični met navzgor z začetno hitrostjo $v_0 \sin \beta$:

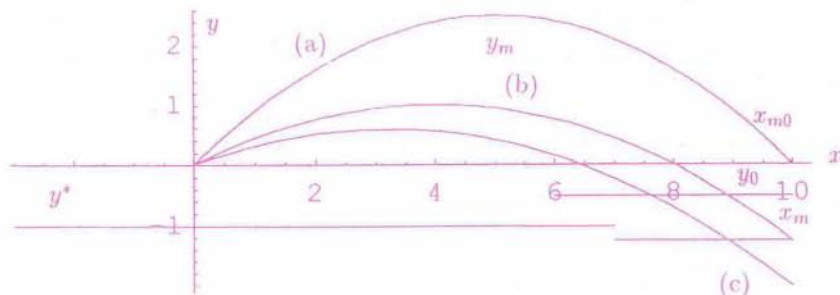
$$x = v_0 t \cos \beta, \quad y = v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1)$$

Zadnji člen ustreza globini pri prostem padanju z velikostjo pospeška prostega padanja g , približno 10 m/s^2 . Iz prve enačbe izračunamo čas $t = x / (v_0 \cos \beta)$ in ga vstavimo v drugo. Dobimo enačbo parabole:

$$y = x \tan \beta - \frac{1}{2} g x^2 / (v_0^2 \cos^2 \beta). \quad (2)$$

V zadnjem delu skoka skakalec skrči kolena, da podaljša skok. Zato težišče zadene vodoravna tla pod črto $y = 0$ pri $y = -y_0$ (slika 1). Navadno vzamejo $y_0 = -0.5$ m. To vstavimo v enačbo (2) in dobimo kvadratno enačbo za dolžino skoka x_m , ki ga določa koren s pozitivnim znakom:

$$x_m = v_0^2 \sin \beta \cos \beta / g + (v_0 \cos \beta / g) \sqrt{v_0^2 \sin^2 \beta + 2gy_0}. \quad (3)$$



Slika 1. Tri parabole, po katerih bi se gibalo težišče skakalca pri skoku v daljavo s hitrostjo 10 m/s: nedosegljiva parabola pri kotu 45° (a), parabola pri kotu $26,6^\circ$ (b) in parabola pri kotu 20° (c). V drugem primeru doseže težišče največjo višino $y_m = 1$ m, vodoravna komponenta hitrosti meri 8,9 m/s in skok traja 1 s. V tretjem primeru doseže težišče največjo višino $y_m = 0,56$ m, vodoravna komponenta hitrosti meri 9,35 m/s in skok traja 0,8 s pri globini $y_0 = 0,5$ m, a 0,95 s pri globini $y_0 = 1,3$ m.

Vzemimo, da bi skakalec ne skrčil kolen. Potem bi veljalo $y_0 = 0$ in bi po enačbi (3) bila dolžina skoka

$$x_{m0} = 2v_0^2 \sin \beta \cos \beta / g = v_0^2 \sin 2\beta / g. \quad (4)$$

V tem primeru bi bila višina skoka po drugi enačbi (1)

$$y_m = y(x = \frac{1}{2}x_{m0}) = \frac{1}{2}v_0^2 \sin^2 \beta / g. \quad (5)$$

Skakalci v daljavo so dobri tekači na kratke proge. Na velikih tekmovaljih ni redko v skoku v daljavo zmagal isti tekmovalce kot v teku na 100 m. Za hitrost ob odzivu je smiselno vzeti 10 m/s. Skakalec, ki bi mu pri odzivu to hitrost uspelo preusmeriti pod najugodnejšim kotom proti vodoravnici $\beta_0 = 45^\circ$, bi pri skoku dosegel višino težišča $y_m = v_0^2 / (4g) = 2,5$ m in daljavo $x_{m0} = v_0^2 / g = 10$ m. Pri tem niti ne bi skrčil kolen.

Po izračunani daljavi in še bolj po izračunani višini sklepamo, da uporabljenemu modelu ne gre zaupati. Pri skoku bi se namreč težišče dvignilo od $y^* = 1$ m za 2,5 m na 3,5 m nad tla. Skakalec ne bi dosegel samo svetovnega rekorda pri skoku v daljavo, ampak tudi pri skoku v višino. V resnici skakalec ne more tako uspešno spremeniti kinetične energije v potencialno. Po izreku o kinetični in potencialni energiji $\frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2 \beta_0 = mgy_m$, iz katerega sledi zveza (5), kot β ne more doseči 45° . Spoznanje, da je človek zmožen samo manjši del kinetične energije pri teku spremeniti v potencialno, ne omejuje samo dosežkov pri skoku v višino, ampak tudi pri skoku v daljavo. Skakalci v višino se razlikujejo od skakalcev v daljavo in tekačev na kratke proge. Navadno so višji in bolj koščeni. Pritečejo razmeroma počasi s strani in se na vso moč odrinejo po kotom $\beta = 60^\circ$. Potem pa se previjejo čez letev tako, da ostane težišče čim nižje.

Enačbo za dolžino skoka (3) predelamo in najprej vstavimo vanjo $v_0^2 = 2gy_m / \sin^2 \beta$ iz (5), da se znebimo začetne hitrosti. Nato uporabimo izraza $\sin \beta = \sqrt{2gy_m / v_0^2}$ in $\cos \beta = \sqrt{1 - 2gy_m / v_0^2}$ in se znebimo kota β :

$$x_m = \sqrt{v_0^2 - 2gy_m} \cdot \left[\sqrt{2y_m/g} + \sqrt{2(y_m + y_0)/g} \right]. \quad (6)$$

Prvi faktor v (6) je enak vodoravni komponenti hitrosti

$$\sqrt{v_0^2 - 2gy_m} = \sqrt{v_0^2 \sin^2 \beta} = v_0 \sin \beta,$$

zaradi druge enačbe (1), ki da $v_0 t \sin \beta - \frac{1}{2}gt^2 = -y_0$, pa je oglati oklepaj v (6) enak trajanju skoka

$$t_0 = v_0 \sin \beta / g + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \beta / g^2 + 2y_0/g} = \sqrt{2y_m/g} + \sqrt{2(y_m + y_0)/g}.$$

Za višino, ki jo doseže težišče, vzemimo $y_m = 1$ m. To ustreza višini skoka okoli 2 m, kar je precej manj od svetovnega rekorda pri skoku v višino. Skok v daljavo traja potem približno 1 s in vodoravna komponenta hitrosti doseže nekaj več kot 8,9 m/s. Enačba $\sin \beta = \sqrt{2gy_m}/v_0$ da kot $\beta = 26,6^\circ$, ki je precej manjši od 45° . Navpična komponenta hitrosti meri 4,5 m/s. V tem primeru je po enačbi (6) daljava 8,9 m, kar je zelo blizu priznanega svetovnega rekorda 8,95 m za moške. Po posnetkih 8,06 m dolgega skoka, s katerim je Jesse Owens leta 1936 dosegel olimpijski rekord, so ugotovili, da je kot β meril 25 do 26° .

Vendar so novejša merjenja pri skoku v daljavo dala vodoravno komponento hitrosti 9,35 m/s in navpično komponento 3,35 m/s. Tema ustrežata velikost hitrosti $v_0 = 9,93$ m/s in še manjši kot $\beta = 20^\circ$. Žal ob tem

ni podatkov za dolžino skoka. Enačba (3) da za dolžino pri $y_0 = 0,5$ samo 7,6 m. Kako bi mogli skakalci skočiti več? Gibanje težišča smo dobro zajeli z našim opisom, zato je treba vzrok iskati v gibanju delov telesa glede na druge dele. To lahko poveča v računu globino y_0 . Vendar bi bil pri kotu 20° skok dolg 8,9 m pri globini skoraj $y_0 = 1,3$ m, kar bi presegalo začetno višino težišča nad tlemi. Tu je še nekaj dela za strokovnjake za mehaniko človeškega telesa. Ali je kot pri rekordnih skokih večji? Ali pri njih dosežejo skakalci večjo hitrost? Morda pa zrak na skakalca ne deluje samo z zračnim uporom?

Najprej recimo kakšno o upor. Po kvadratnem zakonu deluje zrak na skakalca z uporom v nasprotni smeri gibanja:

$$F_u = \frac{1}{2} \rho v_0^2 c_u S. \quad (7)$$

Pri tem je $\rho = 1,23 \text{ kg/m}^3$ gostota zraka v navadnih okoliščinah, $c_u = 0,9$ izmerjeni koeficient upora in $S = 0,5 \text{ m}^2$ povprečni presek skakalčevega telesa pravokotno na smer hitrosti. Hitrost v_0 je odvisna tudi od upora. Menda lahko dobro treniran skakalec za kratek čas razvije največjo moč $P = 3 \text{ kW}$, kar je vsekakor zelo velik podatek. To moč tik pred skokom potrebuje za vzdrževanje teka s končno hitrostjo in premagovanje upora:

$$P = Kmv_0 + F_u v_0 = Kmv_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^3 c_u S. \quad (8)$$

Prvi člen na desni strani podaja moč sile Km , ki vzdržuje tek s končno hitrostjo skakalca z maso $m = 75 \text{ kg}$. Sorazmernostni koeficient $K = 3,63 \text{ W/(kg} \cdot \text{m/s)}$ so ugotovili z merjenji. Drugi člen je moč upora. Ni se težko prepričati, da enačbo reši hitrost $v_0 = 10 \text{ m/s}$, ki smo jo navedli. Zračni upor (7) meri v tem primeru $F_u = 28 \text{ N}$. Zaradi njega se zmanjša končna hitrost od 11 m/s na 10 m/s . Če se hitrost relativno spremeni za $\Delta v_0/v_0$, se daljava spremeni za

$$\Delta x_m = x_m \frac{v_0^2}{v_0^2 - 2gy_m} \frac{\Delta v_0}{v_0}.$$

Zmanjšanje hitrosti za 2 % skrajša skok za 25 cm in zvečanje hitrosti za 2 % ga za toliko podaljša.

Poleg tega se zaradi zračnega upora skakalec med skokom v vodoravni smeri giblje enakomerno pojemajoče. Velikost pojemka je $a = F_u/m = 28 \text{ N/(75 kg)} = 0,37 \text{ m/s}^2$. V eni sekundi se pot, to je dolžina skoka, zaradi pojemka skrajša za $\Delta x_m = \frac{1}{2} at^2 = 0,18 \text{ m}$.

Na upor in na dolžino skoka vpliva tudi gostota zraka. Pri manjši gostoti je upor manjši in končna hitrost večja, če se druge okoliščine ne spremenijo. Poleg tega se zaradi zmanjšanega upora skok manj skrajša. V glavnem mestu Mehike na višini 2265 m je tlak za $\frac{1}{4}$ nižji kot ob morju. Za toliko so manjši tudi gostota, upor in pojemek. Po enačbi (8) se zaradi tega hitrost poveča za 2 % in skok podaljša za 25 cm. Za 25 % se zmanjša tudi pojemek in zato se skok podaljša še za $\frac{1}{4} \cdot 18 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}$. V celoti je skok za 30 cm daljši kot skok ob morski gladini, če se druge okoliščine ne spremenijo. Po tem premisleku 8,90 m dolgemu skoku Boba Beamona na olimpiadi leta 1968 v glavnem mestu Mehike ustreza ob morju približno 8,6 m dolg skok. V tem pogledu je bil boljši od Beamonovega skoka 8,8 m dolgi skok Carla Lewisa leta 1983 ob morski gladini, ki ga seveda niso vodili kot svetovni rekord. Z izpopolnjeno enačbo (7) bi lahko zajeli še vpliv vetra na dolžino skoka. Zrak bi utegnil delovati na skakalca, ko po odzivu z zgornjim delom telesa zaniha, še s prečno silo ali dinamičnim vzgonom v smeri navzgor. To bi podaljšalo čas skoka in povečalo dolžino. To možnost bi morali upoštevati, če pri rekordnih skokih kot ni večji kot 20° in hitrost ne večja kot 10 m/s. S preprostim modelom ni mogoče zajeti podrobnosti pri skoku v daljavo. Jasno pa postane, da se rekordni skoki posrečijo le v ugodnih okoliščinah skakalcem, ki so najbolje pripravljeni in ki imajo tudi nekaj sreče.

Tudi pred skoraj tri tisoč leti so tekmovali v skoku v daljavo, vendar drugače kot danes. Na antičnih olimpiadah so v peteroboju skakali v daljavo z mesta. Pri tem so vsaj od olimpiade leta 708 pr. n. št. dalje uporabljali ročaje, (*h*)*alteres*. Nekaj ročajev se je ohranilo do današnjih dni (slika 2 na III. strani ovitka). Vsak od dveh ročajev iz kamna ali svinca je tehtal od dva do devet kilogramov. Pred skokom so tekmovalci zibali roke z ročaji sem in tja. Tik pred odskokom so stegnili roke nazaj in jih ob odskoku prenesli naprej in navzgor. S tem so dosegli, da je bilo težišče više in bolj spredaj, kot bi bilo brez ročajev. Ob doskoku so potisnili roke z ročaji nazaj in navzdol, da so bile noge čim dlje pred težiščem. S tem so povečali dolžino skoka. Morda so ročaje uvedli tudi zato, da so skakalci lažje lovili ravnotežje ob doskoku. Pravila so namreč zahtevala, da se noge na določen način dotaknejo tal, čeprav ne vemo, na kakšen.

Alberto Minetti in Luca Ardigo z univerze v Manchesteru sta s poskusi in z računalniško simulacijo raziskala vpliv ročajev in o tem poročala v reviji *Nature* lanskega novembra. Ugotovila sta, da se je zaradi ročajev z maso dvakrat po tri kilograme podaljšal trimetrski skok vsaj za 17 cm.

Pri tem se hitrost ob odskoku zaradi ročajev ni zmanjšala, kakor bi pričakovali, ampak zvečala. Pokazalo se je, da zmorejo nekoliko napete mišice večjo moč kot nenapete. Zaradi tega je bila hitrost ob odskoku z ročaji večja kot brez njih. Poskusi z ročaji z različno maso so pokazali, da je hitrost pri skoku v višino z mesta največja pri masi ročajev dvakrat po tri kilograme.

Kot zanimivost omenimo, da je Anglež J. Howard že leta 1854 "skočil" 9,02 m daleč. Pri tem si je na grški način pomagal z ročajema z maso po 1,7 kg, ki ju je med skokom odvrgetel v smeri nazaj.

Svetovni rekordi v skoku v daljavo in skoku v višino

daljava	moški	8,95 m	Mike Powell, ZDA	1991
	ženske	7,52 m	Galina Čistjakova, Rusija	1988
višina	moški	2,45 m	Javier Sotomayor, Kuba	1993
	ženske	2,09 m	Štefka Kostadinova, Bolgarija	1987

Janez Strnad



Slika 2. Skakalca z ročaji na grških vazah in ohranjeni ročaji.