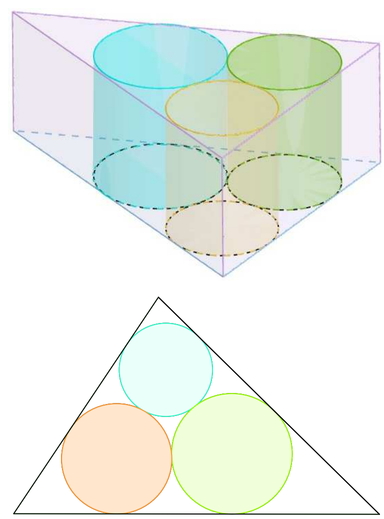
Na napakah se učimo ali Malfattijev problem

NADA RAZPET

Geometrijske naloge rešujemo tako, da si najprej narišemo skico, pri kateri pa včasih že upoštevamo nekatere predpostavke. Kaj pa če le-te niso pravilne? Nekaj podobnega se je zgodilo italijanskemu matematiku Malfattiju. Ta je leta 1803 v delu ***Memoria sopra un problema stereotomico*** **objavil naslednji problem (slika 1): Dana je pokončna trikotna prizma iz nekega materiala, npr. marmorja. Kakšna naj bo medsebojna lega treh izrezanih valjev, ki imajo enako višino, kot je prizma, da bo ostanek materiala najmanjši [1]?**

Malfatti je prostorski problem prevedel na ravninskega in v istem delu zapisal: *Kako naj iz trikotnika izrežemo tri kroge tako, da bo njihova skupna ploščina največja?*

Malfatti je bil prepričan, da je vsota ploščin tako včrtanih krogov, kot je to na sliki 1, tudi največja, ampak izkaže se, da to ne drži. Vendar je že konstrukcija teh krogov svojevrstni matematični izziv, s katerim se bomo spopadli tudi mi.

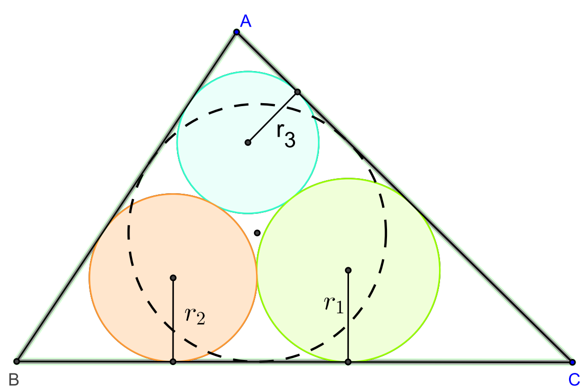


SLIKA 1.
Zgoraj: prizmi so včrtani trije valji. Spodaj: trikotniku so včrtani trije krogi.

Malo zgodovine

Malfatti ni bil prvi, ki je zastavil ta problem. Že leta 1384 naj bi ga reševal italijanski matematik Giglio di Cecco da Montepulciano. Njegov rokopis hranijo v Biblioteca Comunale degli Intronati v Sieni. Pravijo tudi, da je leta 1703 Jacob Bernoulli reševal ta problem za enakokraki trikotnik. Kako v trikotnik včrtati tri med seboj dotikajoče se kroge, je leta 1811 objavil Joseph Diaz Gergonne, leta 1826 Jacob Steiner in leta 1853 Karl Schellbach. Več najdemo v [2].

Problem so poznali tudi na Japonskem ([3]). Tam je matematik Naonubu Ajima v 18. stoletju reševal naslednji problem: *Kako v trikotnik včrtamo tri med seboj dotikajoče se kroge? (slika 2)*



SLIKA 2.
Ajimov problem treh trikotniku včrtanih krogov

Ajima je ploščino trikotnika izrazil s Heronovo formulo, izračunal polmer trikotniku včrtanega kroga, nato pa z uvedbo novih spremenljivk izračunal polmere posameznih krogov. Račun je podoben kot pri izračunu obrnjenega Malfattijevega problema, je pa zahtevnejši in obsežen. Ajima je po izračunu navedel še poseben primer: če merijo stranice $a = 507$, $b = 375$ in $c = 252$, potem je $r_1 = 64$, $r_2 = 56{,}25$, in $r_3 = 36$.

Obrnjen Malfattijev problem

Tudi na lesenih tablicah (sangaku), ki so obešene na stenah japonskih templjev, najdemo primer, ki je nekakšen obrnjen Malfattijev problem: *r_1, r_2 in r_3 so polmeri treh med seboj dotikajočih se krogov (glej sliko 2). Konstruiraj trikotnik, ki se dotika vseh treh krogov, in mu včrtaj krog. Izrazi polmer včrtanega kroga s polmeri r_1, r_2 in r_3.* Pri rešitvi naloge je bilo zapisano opozorilo: *Račun je dolg, rešitev pa relativno preprosta.* Skicirajmo, kako je japonski matematik Ōmura Kazuhide v knjigi *Sanpō Tenzan Tebikiguza* (izšla leta 1841) z angleškim naslovom *Algebraic Methods of Geometry* rešil to nalogo.

Nekaj priprave

V trikotnik včrtamo krog s središčem S in polmerom r, na sliki 3 označen z rdečo barvo, in tri med seboj dotikajoče se kroge s središči S_1, S_2 in S_3 ter ustreznimi polmeri r_1, r_2 in r_3.

Daljici AM in AM' sta odseka na tangentah, zato je $AM = AM'$. Štirikotnik AMS_2M' je deltoid. Tudi štirikotnika BTS_3N in CPS_1P' sta deltoida (na sliki 3 so deltoidi sivo obarvani).

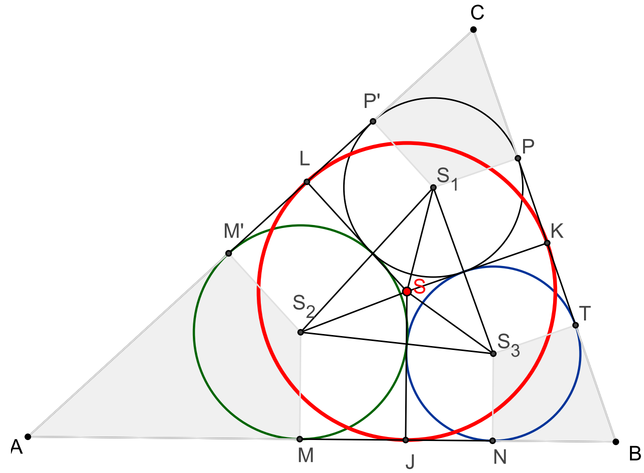
Najprej trikotniku ABC odrežemo te tri deltoide (slika 4).

Nato s škarjami zarežemo še po daljicah SS_1, SS_2 in SS_3 in staknemo krajišči M in M' ter P in P'. Dobljeni lik dopolnimo do pravokotnika, kot kaže slika 5.

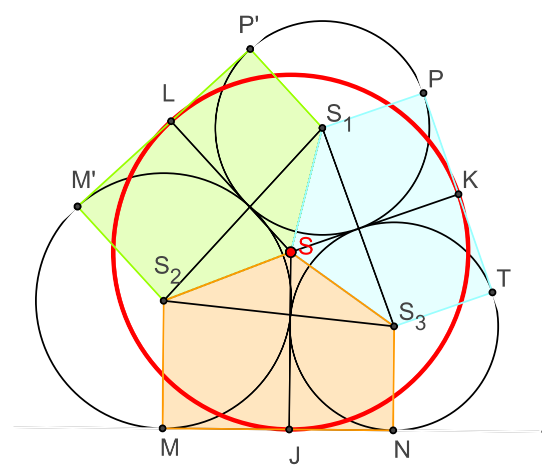
Dolžine daljic TP, $P'M'$ in MN so razdalje med dvema dotikališčema krogov s stranicami trikotnika ABC. Izračunajmo eno od teh razdalj.

Pomagamo si s skico 6. Trikotnik S_2HS_3 je pravokotni trikotnik in zanj velja

- $(r_2 + r_3)^2 = |S_3H|^2 + (r_2 - r_3)^2$,
  $|S_3H|^2 = |MN|^2 = 4r_2r_3$,



SLIKA 3.
Obarvane deltoide odrežemo.



SLIKA 4.
Osrednji del razrežemo in lik razgrnemo.

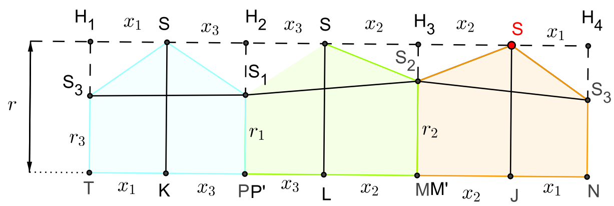
- $MN = 2\sqrt{r_2r_3}$. (1)

Ugotovili smo, da je razdalja med dotikališčema krogov ravno dvakratnik korena iz produkta polmerov dotikajočih se krogov (enačba 1). Zato velja

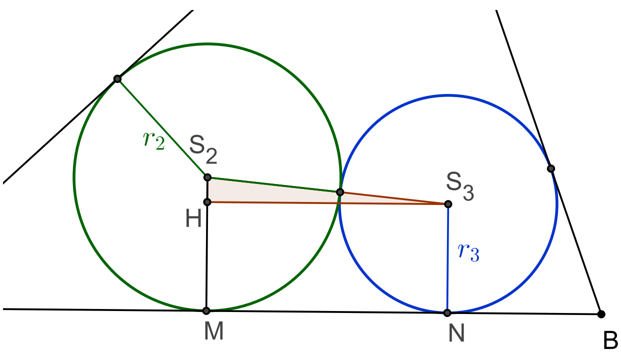
- $TP + P'M' + MN = 2(\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3})$.

Štirikotniki TPS_1S_3, $P'M'S_2S_1$ in MNS_3S_2 so trapezi, v vsakem sta osnovnici kar ustrezna polmera,

→



SLIKA 5.
Razgrnjeni lik dopolnimo do pravokotnika.



SLIKA 6.
Računanje razdalj med dotikališčema dveh sosednjih krogov

višine pa razdalje med dotikališči, zato so ploščine trapezov:

$$p_1 = p(TPS_1S_3) = (r_3 + r_1)\sqrt{r_3r_1},$$
$$p_2 = p(P'M'S_2S_1) = (r_1 + r_2)\sqrt{r_1r_2},$$
$$p_3 = p(MNS_3S_2) = (r_2 + r_3)\sqrt{r_2r_3}.$$

Da dobimo ploščine označenih petkotnikov, moramo k ploščinam trapezov dodati še ploščino osrednjega trikotnika $S_1S_2S_3$. Izračunamo jo po Heronovem obrazcu. Pri tem so stranice $a_1 = r_1 + r_3$, $b_1 = r_1 + r_2$ in $c_1 = r_2 + r_3$ in polovica obsega $r_1 + r_2 + r_3$:

$$p(S_1S_2S_3) = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)(r_1r_2r_3)}.$$

Izračunajmo še ploščine dopolnilnih trikotnikov (na sliki 5 so označeni črtkano). Vsi so pravokotni trikotniki. Ena kateta je vedno enaka razliki dveh polmerov, drugo pa moramo izračunati.

Ozrimo se na sliko 3. Daljici BJ in BK sta enako dolgi, saj sta to odseka na tangentah iz oglišča B na trikotniku včrtanega kroga. Iz istega razloga sta enako dolgi tudi $BN = BT$, saj sta tudi to odseka na tangentah kotu β včrtanega kroga. Zato velja:

$$BJ = BK,\quad BN = BT \quad\Rightarrow\quad KT = JN = x_1,$$
$$AJ = AL,\quad AM = AM' \quad\Rightarrow\quad MJ = M'L = x_2,$$
$$CL = CK,\quad CP' = CP \quad\Rightarrow\quad P'L = PK = x_3.$$

Razdalje med dotikališčema krogov s stranicami so:

$$PT = 2\sqrt{r_3r_1} = x_1 + x_3$$
$$MN = 2\sqrt{r_2r_3} = x_1 + x_2$$
$$M'P' = 2\sqrt{r_2r_1} = x_2 + x_3. \qquad (2)$$

Iz sistema treh enačb (enačbe 2) s tremi neznankami izračunamo x_1, x_2 in x_3:

$$x_1 = \sqrt{r_3r_1} + \sqrt{r_2r_3} - \sqrt{r_2r_1},$$
$$x_2 = \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_2r_1} - \sqrt{r_3r_1},$$
$$x_3 = \sqrt{r_3r_1} + \sqrt{r_2r_1} - \sqrt{r_2r_3}.$$

Zapišimo ploščine dodanih trikotnikov (slika 5):

$$p(S_3H_1S) = \frac{1}{2}(r - r_3)x_1 = p(SH_4S_3),$$
$$p(SH_2S_1) = \frac{1}{2}(r - r_1)x_3,$$
$$p(SH_3S_2) = \frac{1}{2}(r - r_2)x_2.$$

Ploščino pravokotnika TNH_4H_1 izračunamo na dva načina. Prvi je kar po osnovnem obrazcu za računanje ploščin, to je s produktom obeh stranic:

$$p_p = 2r(\sqrt{r_3r_1} + \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3}). \qquad (3)$$

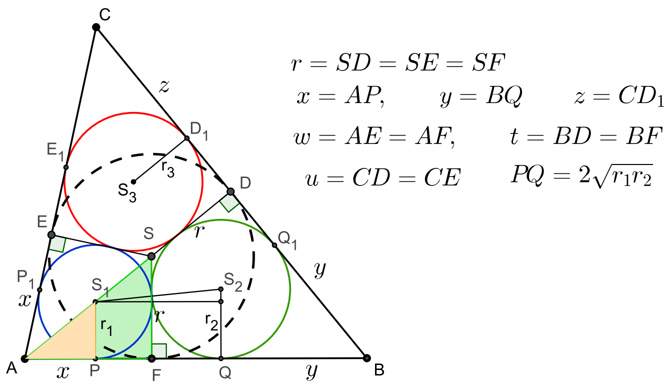
Drugi pa z vsoto ploščin trapezov, osrednjega trikotnika in dodanih trikotnikov:

$$p_p = p_1 + p_2 + p_3 + p(S_1S_2S_3) + p(S_3H_1S) + p(SH_4S_3) + p(SH_2S_1) + p(SH_3S_2). \qquad (4)$$

Z malo računske spretnosti lahko iz enačb (3) in (4) dobimo končni rezultat:

$$r = \frac{2\sqrt{r_1r_2r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}.$$

Polmer trikotniku včrtanega kroga smo izrazili s polmeri treh dotikajočih se krogov.



SLIKA 7.
Malfattijev račun polmerov krogov

Malfattijev izračun in konstrukcija

Poglejmo, kako je Malfatti konstruiral svoje tri kroge [4]. Vemo, da središča krogov ležijo na simetralah kotov. Če poznamo še odseke x, y in z (slika 7), potem znamo kroge načrtati. Vse uporabljene oznake lahko preberemo na sliki 7.

Problem bomo rešili, če najdemo x, y in z, to so razdalje od oglišč do dotikališč posameznega kroga s stranicama, ali povedano drugače, če poznamo tangentne odseke.

Vpeljimo oznake in zapišimo osnovne povezave, ki jih poznamo že iz prejšnjih primerov:

- $$w = AE = AF, \qquad t = BF = BD,$$
  $$u = CD = CE \qquad PQ = 2\sqrt{r_1 r_2},$$
  $$a = t + u, \qquad b = w + u, \qquad c = w + t$$

- $$a = BC = AQ_1 + Q_1D_1 + D_1C \Rightarrow$$
  $$t + u = y + 2\sqrt{r_2 r_3} + z,$$
  $$b = AC = AP_1 + P_1E_1 + E_1C \Rightarrow$$
  $$w + u = x + 2\sqrt{r_1 r_3} + z,$$
  $$c = AB = AP + PQ + QB \quad \Rightarrow$$
  $$w + t = x + 2\sqrt{r_1 r_2} + y. \tag{5}$$

Iz relacij

- $\triangle APS_1 \sim \triangle AFS$ in $\triangle BS_2Q \sim \triangle BSF$

s podobnimi trikotniki dobimo:

- $$\frac{r_1}{x} = \frac{r}{w}, \qquad \frac{r_2}{y} = \frac{r}{t},$$
  $$r_1 r_2 = \frac{r^2 xy}{wt}, \qquad \sqrt{r_1 r_2} = r\sqrt{\frac{xy}{wt}}.$$

Na enak način

- $\triangle BS_2Q \sim \triangle BSF$ in $\triangle CS_3D_1 \sim \triangle CSD \Rightarrow$
  $$\sqrt{r_2 r_3} = r\sqrt{\frac{yz}{tu}}$$

in

- $\triangle APS_1 \sim \triangle AFS$ in $\triangle CS_3D_1 \sim \triangle CSD \Rightarrow$
  $$\sqrt{r_1 r_3} = r\sqrt{\frac{zx}{uw}}.$$

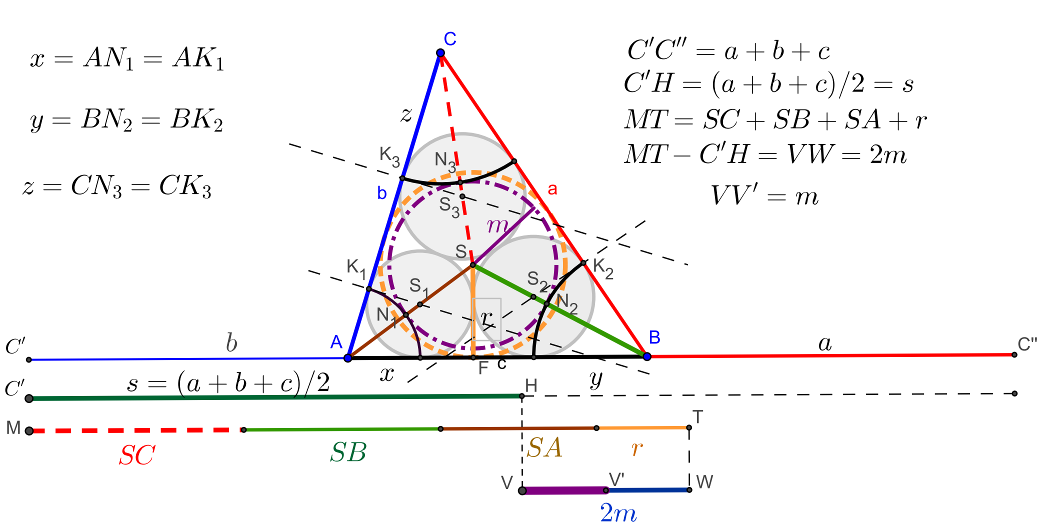
Pri tem smo z r označili polmer včrtanega kroga, z r_1, r_2 in r_3 pa polmere ostalih treh krogov. Zamenjamo izraze pod koreni v enačbah (5), ki vsebujejo polmere krogov, z novimi izrazi in dobimo

- $$x + y + 2r\sqrt{\frac{xy}{wt}} = w + t,$$
  $$y + z + 2r\sqrt{\frac{yz}{tu}} = t + u,$$
  $$x + z + 2r\sqrt{\frac{zx}{uw}} = u + w. \tag{6}$$

Pri tem so r, w, t, u količine, ki so določene s trikotnikom ABC (polmer včrtanega kroga in odseki na njegovih tangentah, to je na stranicah trikotnika). Iz sistema treh enačb (6) izrazimo x, y in z (Malfatti je za izračun baje potreboval nekaj strani):

- $$2x = w + t + u - r + \sqrt{r^2 + w^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2},$$
  $$2y = w + t + u - r - \sqrt{r^2 + w^2} + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2},$$
  $$2z = w + t + u - r - \sqrt{r^2 + w^2} - \sqrt{r^2 + t^2} + \sqrt{r^2 + u^2}.$$

→



SLIKA 8.
Malfattijeva konstrukcija treh krogov

Velja:

- $SA = \sqrt{r^2 + w^2}$, $SB = \sqrt{r^2 + t^2}$, $SC = \sqrt{r^2 + u^2}$ $w + u + t = s$.

Naj bo

- $2m = SA + SB + SC + r - s$.

Potem velja

- $$2SA - 2m = SA + SA - SA - SB - SC - r + s = SA - SB - SC - r + s = 2x.$$

Torej je

- $x = SA - m$.

Odseke na stranicah trikotnika x, y in z torej lahko zapišemo kot

- $x = SA - m$, $y = SB - m$, $z = SC - m$.

Konstrukcija je razvidna iz slike 8. Trikotniku ABC narišemo simetrale kotov in poiščemo presečišče S. Včrtamo mu krog s polmerom r. Stranico c na obeh straneh podaljšamo za b oziroma a. Dolžina daljice $C'C''$ je obseg trikotnika ABC. Razpolovimo daljico in dobimo polovico obsega (dolžina daljice $C'H$). Poiščemo vsoto $SC+SB+SA+r$, to je MT, od nje odštejemo pol obsega s in dobimo $VW = 2m$. Razpolovimo daljico VW in dobimo m. Narišemo krog s središčem v S in polmerom m. Krog seka simetrale kotov v točkah N_1, N_2 in N_3. Velja:

- $AN_1 = SA - m = x$ $BN_2 = BS - m = y$ $CN_3 = SC - m = z$.

Narišemo krožne loke iz oglišč trikotnika A, B in C z ustreznimi polmeri AN_1, BN_2 in CN_3. Dobimo točke K_1, K_2 in K_3. Iz točke K_1, K_2 in K_3 načrtamo pravokotnice na stranice. Kjer te pravokotnice sekajo simetrale kotov, so središča krogov S_1, S_2 in S_3. Polmeri krogov so potem: $r_1 = S_1K_1$, $r_2 = S_2K_2$ in $r_3 = S_3K_3$.

Ugotovili smo, da se lahko iz navidez preproste naloge marsikaj naučimo. O tem, kakšna je pravilna rešitev Malfattijevega problema, pa kdaj drugič.

Literatura

[1] G. Malfatti, *Memoria sopra un problema stereotomico*, Mem. Mat. Fis. Soc. Ita. Sci 10, No. 1, 235-244, 1803.

[2] J. Lorent, *Not set in stone: nineteenth-century geometrical construction and Malfatti Problem*, BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, 27:3, 169-180, DOI: 10.1080/17498430.2012.676962

[3] F. Hidetoshi, T. Rothman, *Sacred Mathematics, Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, 216-218, 293-295, 2008.

[4] G. Martin, *Geometric constructions*, UTM Springer, str. 92-95, 1998.

× × ×