PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **19** (1991/1992)
Številka 2
Strani 108–110

Marija Vencelj:

100 LET PEANOVIH AKSIOMOV

Ključne besede: matematika, Giuseppe Peano.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/19/1083-Vencelj.pdf

100 LET PEANOVIH AKSIOMOV

Leta 1891 je italijanski matematik in logik Guiseppe Peano (1858-1932) objavil aksiome za naravna števila, ki jih po njem imenujemo *Peanovi aksiomi*. V resnici jih je povzel po nemškem matematiku Richardu Dedekindu (1831-1916), ki jih je tri leta prej objavil v svojem delu *Kaj so in čemu služijo števila*. Torej bi bilo bolj pošteno, če bi jih imenovali Dedekind-Peanovi, če že ne kar Dedekindovi aksiomi.

Poglejmo jih!

1. 1 je naravno število.
2. Vsako naravno število n ima natanko enega naslednika n' ($n'=n+1$).
3. 1 ni naslednik nobenega števila.
4. Če je $m'=n'$, potem je $m=n$ (če sta naslednika enaka, sta tudi števili enaki).
5. Vsaka množica, v kateri je 1 in ki z vsakim številom n vsebuje tudi n', vsebuje vsa naravna števila.

Prvi štirje so tako preprosti, da nimamo česa dodati. Tudi peti je razumljiv. Pove, da množica, ki mu ustreza, vsebuje število 1, pa njegovega naslednika 2 in nato 3 kot naslednika števila 2 itd. Očitno pride na ta način sčasoma vsako naravno število na vrsto, torej vsebuje taka množica res vsa naravna števila. Srednješolci poznate ta aksiom pod imenom *načelo popolne ali matematične indukcije*. Je zelo močno dokazovalno sredstvo v matematiki. Če dokažemo, da velja neka lastnost za število 1 in da velja za naslednika n', kakor hitro velja za število n, potem lahko na njegovi osnovi sklepamo, da velja ta lastnost za vsa naravna števila.

Denimo, da bi radi dokazali trditev, da so vsa števila oblike $7^{n+2}+8^{2n+1}$, kjer je n poljubno naravno število, deljiva s številom 57. Za $n = 1$ trditev velja, ker je

$$7^3 + 8^3 = 855 = 15 \cdot 57.$$

Za $n = 2$ je vrednost izraza petmestno število, za $n = 3$ že sedemmestno. Očitno je, da bi bilo deljivost s 57 zamudno preverjati celo za posamezen in niti ne velik n. S Peanovim petim aksiomom bomo preverjanje hitro opravili za vsa naravna števila naenkrat. Za $n = 1$ smo trditev že dokazali. Dokazati moramo še: če število 57 deli $7^{n+2} + 8^{2n+1}$, potem deli tudi število $7^{n'+2} + + 8^{2n'+1}$, kjer je $n' = n + 1$. Poglejmo:

$$7^{n'+2} + 8^{2n'+1} = 7^{n+3} + 8^{2n+3} = 7(7^{n+2} + 8^{2n+1}) + 57 \cdot 8^{2n+1}.$$

Drugi sumand na desni ima faktor 57, prvi sumand je s 57 deljiv po predpostavki. Torej je število res deljivo s 57.

Na strani 83 vas čaka za spremembo še geometrijska naloga, pri kateri tudi lahko uporabite načelo popolne indukcije.

Verjetno vas je zgornja naloga prepričala o pomenu petega aksioma. Kaj pa prvi štirje? Tako preprosti so, da se zdi, da bi lahko shajali tudi brez njih.

Vendar je pomembna tudi skupna vloga vseh petih aksiomov. Z njimi namreč lahko izpeljemo vso teorijo naravnih števil, vse pomembne lastnosti njihove strukture. Če razen tega za neko množico ugotovimo, da ustreza Peanovim aksiomom, potem smemo sklepati, da imajo njeni elementi lastnosti naravnih števil. Pravimo tudi, da je opazovana množica izomorfna množici naravnih števil.

Dandanes uporabljamo aksiomatsko metodo skoraj na vseh matematičnih področjih: v verjetnostni teoriji, teoriji grup, matematični logiki, teoriji množic ... Pravimo, da je v določeni teoriji podan *sistem aksiomov*. To je sistem odnosov, katerega osnovni elementi so:

- aksiomi;
- pravila, s katerimi lahko izpeljemo nove odnose;
- izpeljani odnosi, v matematiki so to izreki, leme, posledice ...

Pri tem mora sistem aksiomov izpolnjevati določene pogoje. Biti mora *neprotisloven*, kar pomeni, da z istimi aksiomi ni mogoče priti do sklepa, da je neka trditev hkrati resnična in neresnična. Poleg tega mora biti sistem tudi *popoln*, to je, v njem mora biti vse potrebno za izoblikovanje teorije ali strukture, na katero se nanaša. Lepo je tudi, da ni presežka aksiomov, čeprav ni nič hudega, če se to zgodi. V praksi to zadnje pomeni, da je v sistem vključen tudi tak aksiom, do katerega lahko pridemo iz preostalih aksiomov, da torej aksiomi med seboj niso *neodvisni*. Prav tako je zaželeno, da je v sistemu kar najmanj aksiomov, ki naj bodo čimbolj preprosti.

Pomen aksiomov v znanosti je prvi opazil starogrški učenjak in filozof Aristotel (384-322 p.n.š.), ki je položil temelje številnim znanstvenim panogam. Sodil je, da morajo biti na vseh znanstvenih področjih izjave in izreki, ki so sami po sebi očitni in jih ni treba dokazovati, temveč so podlaga in dajejo najbistvenejše na področju posamezne vede.

V matematiki je prvi sistem aksiomov postavil Evklid (3. stol. p.n.š.) v svojih *Elementih*. Nanaša se na geometrijo in je bilo moč z njim izpeljati vse dotlej znane geometrijske ugotovitve. Ustrezno geometrijo po njem imenujemo evklidska geometrija.

Skoraj vsi Evklidovi, pa tudi številni aksiomi kasnejših dni so preprosti in razumljivi. Dolgo je nasploh veljalo, da so aksiomi očitne resnice, same po sebi tako jasne, razvidne in logične, da jih ni mogoče dokazati s še bolj preprostimi izreki. Dandanes ni več nujno tako. V sodobni matematiki so aksiomi temeljne, izhodne trditve, ki jih vzamemo kot pravilne, četudi niso ne dokazane in ne ravno očitne. Aksiome postavljajo na podlagi izkušenj, potem ko se nabere dovolj znanja in spoznanj z nekega matematičnega področja. Tedaj poskušajo matematiki to znanje sistematizirati tako, da ga oblikujejo v sistem aksiomov. Včasih nastanejo novi aksiomi in sistemi aksiomov tudi zato, da bi premostili težave, ki so se pojavile v dotedanjem aksiomatskem sistemu določenega področja.

Marija Vencelj