IZRAVNAVA PO METODI NAJMANJŠIH KVADRATOV Z UPOŠTEVANJEM POGREŠKOV PRI NEZNANKAH

LEAST-SQUARES ADJUSTMENT TAKING INTO ACCOUNT THE ERRORS IN VARIABLES

Aleš Marjetič

UDK: 528.4
Klasifikacija prispevka po COBISS.SI: 1.02
Prispelo: 17. 2. 2021
Sprejeto: 11. 5. 2021

DOI: 10.15292/geodetski-vestnik.2021.02.205-218
REVIEW ARTICLE
Received: 17. 2. 2021
Accepted: 11. 5. 2021

IZVLEČEK

V članku obravnavamo postopek izračuna vrednosti neznank pod pogojem minimalne vsote kvadratov popravkov opazovanj (metoda najmanjših kvadratov) z upoštevanjem pogreškov pri neznankah. Problem so že predstavili številni avtorji, predvsem na področju regresijske analize in računanja transformacijskih parametrov. Predstavljen je pregled teoretičnih osnov metode najmanjših kvadratov in njene razširitve z upoštevanjem pogreškov pri neznankah neznank v matriki modela. Metodo, ki jo lahko poimenujemo »popolna« metoda najmanjših kvadratov, v prispevku predstavimo na primeru prilagajanja regresijske premice nizu točk in na primeru izračuna transformacijskih parametrov za prehod med starim in novim slovenskim državnim koordinatnim sistemom. Z rezultati na podlagi ustreznih statistik potrdimo primernost obravnavane metode za izvajanje tovrstnih strokovnih nalog.

ABSTRACT

In this article, we discuss the procedure for computing the values of the unknowns under the condition of the minimum sum of squares of the observation residuals (least-squares method), taking into account the errors in the unknowns. Many authors have already presented the problem, especially in the field of regression analysis and computations of transformation parameters. We present an overview of the theoretical foundations of the least-squares method and extensions of this method by considering the errors in unknowns in the model matrix. The method, which can be called 'the total least-squares method', is presented in the paper for the case of fitting the regression line to a set of points and for the case of calculating transformation parameters for the transition between the old and the new Slovenian national coordinate systems. With the results based on relevant statistics, we confirm the suitability of the considered method for solving such tasks.

KLJUČNE BESEDE

izravnava po metodi najmanjših kvadratov, TLS, SVD, pogreški, transformacija

KEY WORDS

least-squares adjustment, TLS, SVD, errors, transformation

1 UVOD

V geodeziji količin, ki nas zanimajo, najpogosteje ne moremo neposredno izmeriti. Lahko pa te iskane količine izračunamo posredno na podlagi meritev. Najpogosteje za izračun iskanih količin opravimo več meritev od nujno potrebnih (nadštevilne meritve). V tem primeru model, ki povezuje meritve in neznane (iskane) količine, sestavlja več enačb od nujno potrebnih. Govorimo o predoločenem sistemu enačb za izračun neznanih količin oziroma o predoločenem modelu, ki povezuje meritve/opazovanja z neznankami.

Rešitev najpogosteje določimo z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov (v nadaljevanju MNK) popravkov meritev. Vrednosti neznank izračunamo po MNK s sistemom normalnih enačb (Teunissen, 2003). Sistem enačb, ki povezujejo merske vrednosti in neznanke, pretvorimo v sistem linearnih enačb popravkov meritev ali tako imenovani Gauss-Markov model. V postopku izravnave sistem linearnih enačb popravkov meritev prevedemo v sistem normalnih enačb, ki omogočajo enolično določitev vrednosti neznank ob izpolnjenem kriteriju najmanjše vsote kvadratov popravkov meritev. V običajnem modelu izravnave obravnavamo samo pogreške meritev. Lahko pa rešitev iščemo tako, da predpostavimo, da so tudi v matriki modela (matrika **A** v izrazu (1)), to je matriki, ki povezuje neznanke z meritvami, prisotni slučajni pogreški. Ta pristop so v preteklosti obravnavali številni raziskovalci na tem področju: Amiri -Simkooei in Jazaeri (2012), Neitzel (2010), Schafrin in Wiesser (2009) in drugi. Metodo izravnave so predstavili s kratico TLS (angl. *total least squares*), kar bi lahko v slovenskem jeziku poimenovali »popolna metoda najmanjših kvadratov«. Metoda se je pokazala kot uporabna predvsem na področjih regresijske analize in transformacij. V članku testiramo uporabnost metode TLS brez uteži in z utežmi (= WTLS, angl. *weighted total least squares*) na primeru linearne regresije in transformacije točk med starim in novim državnim koordinatnim sistemom Slovenije (D48/GK → D96/TM). Dodatno opišemo tudi računanje vrednosti neznank pod pogojem minimalne vsote kvadratov popravkov z uporabo razcepa SVD (razcep na singularne vrednosti ali SVD – angl. *singular value decomposition*). Cilj obravnave različnih načinov izračuna neznank je pokazati razlike, geometrijski pomen in oceniti kakovost posameznih rešitev.

2 ISKANJE REŠITVE PREDOLOČENEGA SISTEMA

2.1 Motivacija

Meritve in neznanke so povezane z matematičnimi izrazi. Med seboj jih v linearizirani obliki povežemo prek sistema (1).

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}; \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

V (1) predstavlja:

n – število meritev ali število enačb popravkov obravnavanega sistema,

u – število neznank,

b – vektor odstopanj,

A – matrika koeficientov pri neznankah ali tako imenovana matrika modela dimenzije n x u,

x – vektor neznank (popravkov približnih vrednosti neznank).

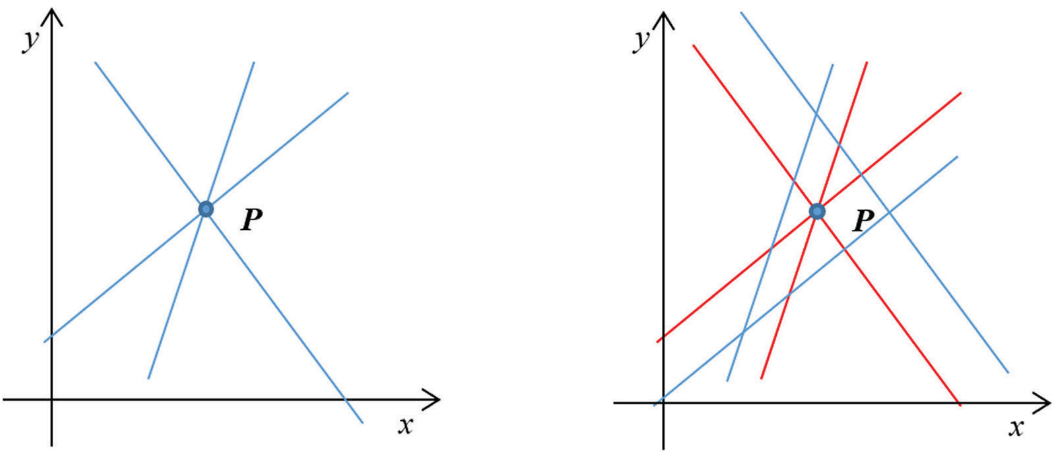
Iz (1) izhaja, da se vektor meritev **b** nahaja v prostoru, ki ga napenjajo stolpci matrike **A**. Pri tem je rang matrike **A**: rang(**A**) = r ≤ min(n, u).

V sistemu (1), ki povezuje neznanke in meritve, imamo tri možne situacije za sistem n enačb za u neznank: predoločen sistem, ko velja $n > u$, enolično določen sistem, ko velja $n = u$, in poddoločen sistem, ko velja $n < u$ (slednji ni običajen, ko obravnavamo meritve, saj vedno stremimo k nadštevilnim meritvam). Sistem (1) lahko zapišemo tudi v obliki, ko matriki **A** dodamo stolpec vektorja **b**:

$$[\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{b}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

Osredotočimo se samo na predoločen sistem in ga predstavimo na primeru iskanja presečišča treh premic:

- Tri premice se sekajo v isti točki – levo na sliki 1: V tem primeru imamo opravka s sistemom n konsistentnih (doslednih) enačb. Sistem (1) ima lastnost, da je r = rang(**A**) = rang([**A**|**b**]) = u.
- Tri premice se ne sekajo v isti točki – desno, modre premice, na sliki 1: V tem primeru je r = rang(**A**) < rang([**A**|**b**]) = u + 1 in ne velja enačaj v (1), ampak $\mathbf{Ax} \cong \mathbf{b}$. Nimamo enolične rešitve. Sistem (1) bi radi z rešitvijo za $\mathbf{x} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$ in posledično $\mathbf{b} \rightarrow \hat{\mathbf{b}}$ prevedli na konsistenten sistem (slika 1 desno, rdeče premice), da bo $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$, za katerega bi veljalo, da je r = rang(**A**) = rang([**A**|$\hat{\mathbf{b}}$]) = u. Rang sistema [**A**|**b**] želimo torej zmanjšati za 1.



Slika 1: Levo – sistem konsistentnih enačb, desno – sistem nekonsistentnih enačb (modre premice), rešitev po MNK (rdeče premice).

Za predoločen sistem iščemo tudi tako rešitev, ki bo izpolnila zahtevo, da je $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}$ = min., kjer je $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}$ in **P** – matrika uteži opazovanj. Iščemo torej rešitev, ki bo izpolnila pogoj minimalne vsote uteženih kvadratov popravkov opazovanj (MNK). Iščemo jo lahko na naslednje načine:

a.) Najverjetnejšo rešitev iščemo prek sistema normalnih enačb po MNK – posredna izravnava: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{PAx} = \mathbf{A}^T\mathbf{Pb}$, $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{PA})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Pb}$ oziroma v primeru opazovanj enakih natančnosti, kjer velja $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, je rešitev $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$. (3)

b.) Uporabimo lahko tudi splošnejši pristop, ki ga predstavlja splošni model izravnave (SMI). V tem primeru rešitev za iskane neznanke ne iščemo neposredno iz meritev, ampak preko vektorja ekvivalentnih opazovanj, od katerih je vsako linearna kombinacija originalnih opazovanj. Model (1) bi zapisali v obliki $\mathbf{Bb} = \mathbf{Ax}$, rešitev pa izračunali z izrazom ($\mathbf{Q}$ – matrika kofaktorjev opazovanj):

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BQB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{BQB}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{b}, \tag{4}$$

kjer $\mathbf{B}$ predstavlja matriko koeficientov pri opazovanjih.
Pristop je uporaben predvsem v postopkih aproksimacije krivulj in ploskev določenemu nizu točk, kjer obravnavamo kot »eno opazovanje« dejansko koordinatne pare (x, y) ali trojice (x, y, z), ki so povrhu v matematični enačbi z neznankami povezani v nelinearni obliki. V tem primeru bi bilo zelo težko posamezno koordinato osamiti in izraziti v linearni obliki, kot se zahteva pri posredni izravnavi. Enako je pri transformaciji koordinat, ko vse koordinate vseh točk obravnavamo kot opazovanja. Rešitev SMI je v tem primeru veliko hitrejša in enostavnejša.

c.) Rešitev iščemo z razcepom SVD, ki je samo različica izračuna po klasični metodi najmanjših kvadratov pod a.). Tudi pri razcepu SVD lahko upoštevamo uteži opazovanj. Če upoštevamo dejstvo, da je matrika $\mathbf{P}$ za opazovanja pozitivno definitna, potem velja $\mathbf{P} = \mathbf{P}_c\mathbf{P}_c^*$ (razcep po Choleskem), in zato lahko prevedemo sistem (1) v obliko $(\mathbf{P}_c\mathbf{b}) = (\mathbf{P}_c\mathbf{A})\mathbf{x}$.

d.) Uporabimo metodo izravnave, ki upošteva tudi pogreške pri neznankah in jo detajlno razlagamo v nadaljevanju.

2.2 Metoda z obravnavo prisotnosti pogreškov (tudi) pri neznankah

Metodo lahko imenujemo tudi »popolna« izravnava po metodi najmanjših kvadratov (angl. *total least squares* – TLS). V tem primeru obravnavamo predoločen sistem, ki zaradi pogreškov v meritvah povzroči, da $\mathbf{Ax} \cong \mathbf{b}$ in $\{\mathrm{rank}\,(\mathbf{A}) = u\} \neq \{\mathrm{rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = u + 1\}$. Klasična obravnava oziroma iskanje rešitve za vektor neznank po MNK predpostavlja prisotnost pogreškov samo v vektorju odstopanj $\mathbf{b}$. Če predpostavimo poleg pogreškov meritev tudi prisotnost pogreškov pri neznankah (EIV – angl. *errors in variables*; Neitzel, 2010; Simkooei in Jazaeri, 2012), lahko zapišemo:

$$\mathbf{b} + \mathbf{v} = (\mathbf{A} - \mathbf{E}_A)\mathbf{x}, \tag{5}$$

s stohastičnimi lastnostmi:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{e}_A\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathrm{vec}(\mathbf{E}_A)\end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \sigma_0^2\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_b & 0\\ 0 & \mathbf{Q}_A\end{bmatrix}\right), \tag{6}$$

kjer je $\mathbf{e}_A = \mathrm{vec}(\mathbf{E}_A)$ vektor, sestavljen iz stolpcev matrike $\mathbf{E}_A$ dimenzije $n \cdot u \times 1$. $\mathbf{Q}_B$ predstavlja matriko kofaktorjev meritev, $\mathbf{Q}_A$ pa matriko kofaktorjev koeficientov v matriki $\mathbf{A}$.

Rešitev za $\mathbf{x}$ sistema (5) izpeljemo z vektorjem Lagrangeovih multiplikatorjev ali korelat $\mathbf{k}$ (dim $n \times 1$). Pogoj minimalne vsote kvadratov zapišemo z utežno funkcijo Φ:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_B^{-1}\mathbf{v} + \mathbf{e}_A^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{e}_A + 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} + \mathbf{v} - \mathbf{Ax} + \mathbf{E}_A\mathbf{x}) = \min. \tag{7}$$

V (7) nastopa vektor $\mathbf{e}_A$, ki pripada matriki $\mathbf{E}_A$. Poenotimo zapise za $\mathbf{e}_A$ in $\mathbf{E}_A$ v (7) z uporabo kroneckerjevega produkta:

$$\Phi = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_B^{-1}\mathbf{v} + \mathbf{e}_A^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{e}_A + 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}}(\mathbf{b} + \mathbf{v} - \mathbf{Ax} + (\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\otimes\mathbf{I}_n)\mathbf{e}_A) = \min. \tag{8}$$

Za določitev minimuma utežne funkcije Φ moramo parcialne odvode po spremenljivkah $\mathbf{v}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{e}_A$ in $\mathbf{k}$ izenačiti z 0 (Simkooei in Jazaeri, 2012).

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}^{\mathrm{T}}} = \mathbf{Q}_b^{-1}\mathbf{v} + \mathbf{k} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{e}_A^{\mathrm{T}}} = \mathbf{Q}_A^{-1}\mathbf{e}_A + \left(\mathbf{x} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{k} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{k}^{\mathrm{T}}} = \mathbf{b} + \mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{x} + \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{e}_A = 0 \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{k} + \mathbf{E}_A^{\mathrm{T}}\mathbf{k} = 0 \tag{12}$$

Iz odvodov (9) in (10) izhaja:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{Q}_B\mathbf{k}, \tag{13}$$

$$\mathbf{e}_A = \mathrm{vec}(\mathbf{E}_A) = -\mathbf{Q}_A(\mathbf{x} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{k}. \tag{14}$$

Če (13) vstavimo v (11), dobimo:

$$\mathbf{k} = \left(\mathbf{Q}_b + \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{Q}_A\left(\mathbf{x} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right)^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\right) = \mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\right) \tag{15}$$

kjer je $\mathbf{Q}_{\tilde{b}} = \mathbf{Q}_b + \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{Q}_A\left(\mathbf{x} \otimes \mathbf{I}_n\right)$.

Z upoštevanjem (15) iz (12) sledi rešitev za vektor neznank x ob predpostavki pogreškov v modelu:

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{b}, \tag{16}$$

kjer bi $\left(\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{A}\right)$ lahko predstavljal matriko normalnih enačb razširjenega modela $\mathbf{b} + \mathbf{v} = (\mathbf{A} - \mathbf{E}_A)\mathbf{x}$, ki predpostavlja tudi pogreške v modelu. Vendar ta matrika ni simetrična in ni pozitivno definitna za razliko od matrike normalnih enačb $\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}$ modela $\mathbf{b} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kot smo ga »vajeni«. Rešitev nam predstavlja prevedba izraza (16) z upoštevanjem zveze $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{E}_A$ oz. $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{E}_A$:

$$\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{b} \tag{17}$$

Obema stranema odštejemo $\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{E}_A\hat{\mathbf{x}}$:

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{E}_A\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{b} - \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{E}_A\hat{\mathbf{x}} \\ \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{E}_A\hat{\mathbf{x}}\right)\end{gathered} \tag{18}$$

Iz (18) sledi rešitev za neznanke:

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)\right)^{-1}\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\left(\mathbf{b} - \mathbf{E}_A\hat{\mathbf{x}}\right) \tag{19}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)\right)^{-1}\left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}, \tag{20}$$

kjer je $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{E}_A\hat{\mathbf{x}}$. Rešitev za vektor opazovanj in vektor popravkov modela dobimo z upoštevanjem (5) in (9) z izrazoma:

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)\hat{\mathbf{x}} \tag{21}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{b} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{Q}_{\tilde{b}}\mathbf{k} \tag{22}$$

Če upoštevamo (14), da je $\mathbf{E}_A\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right) vec\left(\mathbf{E}_A\right) = \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{e}_A$, lahko zapišemo matrike kofaktorjev za izravnava opazovanja in neznanke:

$$\mathbf{Q}_{\tilde{b}} = \mathbf{Q}_b + \left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{Q}_A\left(\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right) \tag{23}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}} = \left(\tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} Q_{\tilde{b}}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1} \tag{24}$$

Pripadajoča referenčna varianca a-posteriori:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\hat{\mathbf{v}}}{n-u} = \frac{\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1}\mathbf{k}}{n-u} \tag{25}$$

2.1.1 Algoritem za izračun

Gre za iterativni postopek v naslednjih korakih (Simkooei in Jazaeri, 2012):

KORAK 1: Nastavimo začetno vrednost vektorja neznank

Začetne vrednosti neznank prevzamemo iz »navadne« izravnave po MNK, kjer upoštevamo natančnosti opazovanj[1] $\mathbf{P} = \Sigma_b^{-1}$.

$$\hat{\mathbf{x}}^0 = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{b} \tag{26}$$

KORAK 2: $i = 0$ (i – iteracija)

$$\mathbf{v}^i = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^i - \mathbf{b} \tag{27}$$

$$\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{\,i} = \mathbf{Q}_b + \left(\left(\hat{\mathbf{x}}^i\right)^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{Q}_{\mathrm{A}}\left(\hat{\mathbf{x}}^i \otimes \mathbf{I}_n\right) \tag{28}$$

V izrazu (28) nastopa blok matrika $\mathbf{Q}_{\mathrm{A}}$, ki je odvisna od natančnosti opazovanj, ki nastopajo v izravnavi in jo izračunamo na naslednji način (Simkooei in Jazaeri, 2012):

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^{u}\sum_{j=1}^{u}\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{Q}_{ij}, \tag{29}$$

pri tem sta c_i in c_j enotska vektorja z enico na mestu, ki pripada neznanki, drugje so členi enaki 0. Matrika $\mathbf{Q}_{ij}$ predstavlja matriko kofaktorjev opazovanj, ki nastopajo ob neznankah, in je dimenzije $n \times n$.

Izračunamo vektor $\mathbf{e}_A^i$, ki v i-ti iteraciji pripada matriki $\mathbf{E}_A^i$:

$$\mathbf{e}_A^i = -\mathbf{Q}_{\mathrm{A}}\left(\hat{\mathbf{x}}^i \otimes \mathbf{I}_n\right)\left(\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{\,i}\right)^{-1}\mathbf{v}^i \tag{30}$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^i = \mathbf{A} - \mathbf{E}_A^i\hat{\mathbf{x}}^i \tag{31}$$

[1] *Nanaša se na opazovanja, ki jih v običajni izravnavi po MNK obravnavamo kot opazovanja. Zadevo pojasnujemo na primeru določitve regresijske premice v nadaljevanju.*

$$\mathbf{b}^i = \mathbf{b} - \mathbf{E}_A^i$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{i+1} = \left(\tilde{\mathbf{A}}^{i\mathrm{T}} \left(\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{\,i}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^{i}\right)^{-1} \tag{32}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{i+1} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{i+1} \tilde{\mathbf{A}}^{i\mathrm{T}} \left(\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{\,i}\right)^{-1} \mathbf{b}^i = \left(\tilde{\mathbf{A}}^{i\mathrm{T}} \left(\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{\,i}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^{i}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^{i\mathrm{T}} \left(\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{\,i}\right)^{-1} \mathbf{b}^i = \tilde{\mathbf{N}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^{i\mathrm{T}} \left(\mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{\,i}\right)^{-1} \mathbf{b}^i \tag{33}$$

$$i = i + 1$$

KORAK 3: preverimo konvergenco

$$\left|\hat{\mathbf{x}}^{i+1} - \hat{\mathbf{x}}^{i}\right| < \delta, \tag{34}$$

kjer je δ predhodno izbrana vrednost za prekinitev iteracijskega postopka. V primeru izpolnjevanja pogoja (34) zaključimo z iteracijskim postopkom.

2.1.2 Ocena natančnosti

Sistem $\mathbf{b} + \mathbf{v} = \mathbf{Ax}$ smo prevedli na sistem $\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}$. Torej imamo, če upoštevamo (21), (22) in (33):

$$\hat{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} - \mathbf{E}_A\right)\hat{x} = \tilde{\mathbf{A}}\left(\tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{Q}_{\tilde{b}}\right)^{-1} \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{P}_{\tilde{A}} \tilde{\mathbf{b}} \tag{35}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}} = -\mathbf{Q}_{\tilde{b}}\,\mathbf{k} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\tilde{A}}\right)\tilde{\mathbf{b}} \tag{36}$$

Iz zvez (35) in (36) lahko zapišemo pripadajoče matrike kofaktorjev:

$$\mathbf{Q}_{\hat{b}} = \mathbf{P}_{\tilde{A}} \mathbf{Q}_{\tilde{b}} = \tilde{\mathbf{A}}\,\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \tag{37}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{\tilde{A}}\right)\mathbf{Q}_{\tilde{b}} = \mathbf{Q}_{\tilde{b}} - \mathbf{Q}_{\hat{b}} \tag{38}$$

Referenčna varianca a-posteriori znaša:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\tilde{b}}^{-1} \hat{\mathbf{v}}}{n - u} \tag{39}$$

2.2 Metoda »popolne« izravnave z uporabo razcepa SVD

Kot smo že omenili, če iščemo rešitev za vektor neznank x v sistemu (1), potem hočemo doseči, da je $\operatorname{rank}\left(\hat{\tilde{\mathbf{A}}}\right) = \operatorname{rank}\left(\left[\hat{\tilde{\mathbf{A}}} \,|\, \hat{\tilde{\mathbf{b}}}\right]\right) = u$. Sistem (1) v obliki razširjene matrike lahko zapišemo kot:

$$\left[\tilde{\mathbf{A}} \,|\, \tilde{\mathbf{b}}\right] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \tag{40}$$

Če razcepimo razširjeno matriko $\left[\tilde{\mathbf{A}} \,|\, \tilde{\mathbf{b}}\right]$ po metodi SVD (Strang in Borre, 1997), dobimo (Markovsky in Van Huffel, 2007):

$$\left[\tilde{\mathbf{A}} \,|\, \tilde{\mathbf{b}}\right] = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{\Lambda}}\tilde{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_1 & \tilde{\boldsymbol{u}}_2 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{u}}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \tilde{\lambda}_r & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \tilde{\lambda}_{u+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{v}}_1 - \\ -\tilde{\boldsymbol{v}}_2 - \\ \vdots \\ -\tilde{\boldsymbol{v}}_{u+1} - \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{u+1} \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{v}}_i\,, \tag{41}$$

kjer sta **U** in **V** kvadratni ortogonalni matriki ter **L** diagonalna matrika singularnih vrednosti (Soldo in Ambrožič, 2018).

Doseči želimo, da se rang zgornjega sistema iz u + 1 zmanjša na u ob tem, da se čim manj spremeni matrika $\left[\tilde{\mathbf{A}}\,|\,\tilde{\mathbf{b}}\right]$. Zato najmanjšo singularno vrednost v enačbi (41) $\tilde{\lambda}_{u+1}$ spremenimo v 0. Torej se zgornji izraz prevede na:

$$\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \tilde{\mathbf{u}}_1 & \tilde{\mathbf{u}}_2 & \cdots & \tilde{\mathbf{u}}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & & & & 0 \\ & \tilde{\lambda}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \tilde{\lambda}_u & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{v}}_1- \\ -\tilde{\mathbf{v}}_2- \\ \vdots \\ -\tilde{\mathbf{v}}_{u+1}- \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{u} \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{u}}_i \tilde{\mathbf{v}}_i \tag{42}$$

Zapišemo lahko:

$$\left[\tilde{\mathbf{A}}\,|\,\tilde{\mathbf{b}}\right]\cdot\tilde{\mathbf{v}}_{u+1}^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{i=1}^{u}\tilde{\lambda}_i\tilde{\mathbf{u}}_i\tilde{\mathbf{v}}_i\right)\cdot\tilde{\mathbf{v}}_{u+1}^{\mathrm{T}} = 0, \tag{43}$$

kjer je:

$\tilde{\mathbf{v}}_i \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{u+1}^{\mathrm{T}} = 0$, ker so vrstice v **V** med seboj ortogonalne,

$\tilde{\mathbf{v}}_{u+1}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} v_{u+1,1} & v_{u+1,2} & \cdots & v_{u+1,u} & v_{u+1,u+1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ – zadnji stolpec matrike **V**.

Če povežemo (40) in (43), dobimo:

$$\left[\tilde{\mathbf{A}}\,|\,\tilde{\mathbf{b}}\right]\cdot\begin{bmatrix}\tilde{\mathbf{x}} \\ -1\end{bmatrix} = \left[\tilde{\mathbf{A}}\,|\,\tilde{\mathbf{b}}\right]\cdot\begin{bmatrix} v_{u+1,1} & v_{u+1,2} & \cdots & v_{u+1,u} & v_{u+1,u+1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{44}$$

Iz (44) izhaja rešitev za vektor neznank, ko upoštevamo tudi popravke (pogreške) pri neznankah:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{TLS}} = -\frac{1}{v_{u+1,u+1}}\begin{bmatrix} v_{u+1,1} & v_{u+1,2} & \dots & v_{u+1,u} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{45}$$

V tem primeru najdemo rešitev brez stohastične obravnave. Če bi želeli v izračunu upoštevati tudi uteži opazovanj, tako na strani vektorja **b** kot na strani matrike **A**, nastane težava. V razširitvi (2) oziroma (40) ne moremo upoštevati tako uteži opazovanj kot tudi uteži pri neznankah, kot je nakazano v poglavju 2.1 z razcepom matrike **P** po Choleskem. Tu obravnavamo dve različni matriki uteži.

3 OBRAVNAVA NA PRAKTIČNEM PRIMERU

3.1 Regresijska premica

Desetim točkam določamo regresijsko premico. Matematična enačba, ki povezuje meritve in neznanke, je enačba premice: $y = kx + n$. Neznanke predstavljata koeficienta k in n, koordinata x »konstantno« vrednost, koordinata y pa »merjeno« vrednost. Primer koordinat in pripadajočih uteži je prevzet iz Neri in sod., 1989, in predstavljen v Simkooei in Jazaeri, 2012.

Preglednica 1: Točke na premici, ki jim prilagajamo premico.

	Konstanta	»Meritve«	Utež		[**A**|**b**]		
Točka	x	y	px	py	A		b
T1	0,0	5,9	1000	1	0,0	1	5,9
T2	0,9	5,4	1000	2	0,9	1	5,4
T3	1,8	4,4	500	4	1,8	1	4,4
T4	2,6	4,6	800	8	2,6	1	4,6
T5	3,3	3,5	200	20	3,3	1	3,5
T6	4,4	3,7	80	20	4,4	1	3,7
T7	5,2	2,8	60	70	5,2	1	2,8
T8	6,1	2,8	20	70	6,1	1	2,8
T9	6,5	2,4	2	100	6,5	1	2,4
T10	7,4	1,5	1	500	7,4	1	1,5

Rank matrike **A** znaša 2, razširjene matrike [**A**|**b**] pa 3. Seveda je to posledica, ker točke ne ležijo na isti premici. Sedaj poiščemo rešitev za neznanki k in n na naslednje načine:

- izravnava po MNK brez upoštevanja uteži (MNK),
- uporaba razcepa SVD brez upoštevanja uteži (SVD) kot alternativa MNK brez upoštevanja uteži,
- popolna izravnava z uporabo razcepa SVD brez upoštevanja uteži (TLS SVD),
- izravnava po MNK z upoštevanjem uteži (MNKP),
- popolna izravnava z upoštevanjem uteži (WTLS),
- splošni model izravnave (SMI).

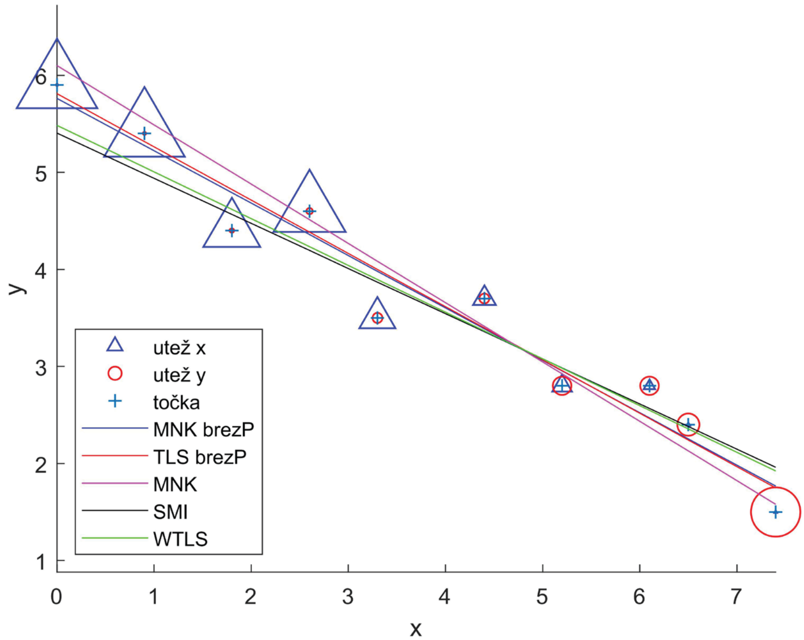
Preglednica 2: Rešitve izravnave regresijske premice glede na različne obravnave.

Metoda izračuna	Upoštevam uteži	k	n	σ_k	σ_n	$\hat{\sigma}_0$
MNK	ne	-0,53958	5,76119	0,04213	0,18949	0,316
SVD	ne	-0,53958	5,76119	/	/	
TLS_SVD	ne	-0,54886	5,81004	/	/	
MNK	da	-0,61066	6,09902	0,06216	0,42275	2,072
WTLS	da	-0,48129	5,48425	0,07017	0,35716	1,219
SMI	da	-0,46513	5,40367	0,07086	0,35207	1,156

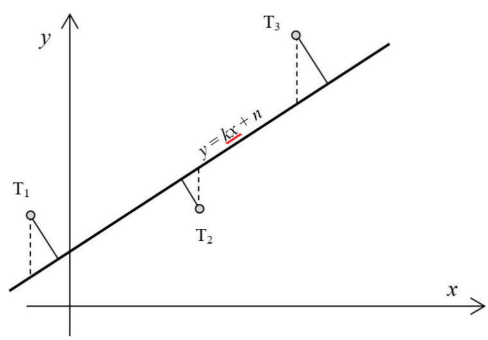
Kriterij prekinitve iteracijskega postopka za »popolno« izravnavo z upoštevanjem uteži (WTLS) je izbran 10^{-12}. V tem primeru dosežemo 8 iteracij.

Na sliki 2 vidimo, da se pri izravnavi po MNK z upoštevanjem uteži (vijolična črta) rešitev popolnoma prilagodi točkam z večjo utežjo za koordinato *y*. Rešitev po metodi WTLS (zelena črta) pa enakomerno upošteva vse uteži, tako za *y* kot *x*. Rešitev je v tem primeru veliko bolj smiselna. Rešitev splošnega modela izravnave je po numeričnih vrednostih blizu rešitve WTLS.

Geometrijski pomen izravnave z upoštevanjem pogreškov pri neznankah v primeru regresijske premice lahko razložimo na naslednji način (Golub in Van Loan, 1980; Markovsky in Van Huffel, 2007): Če iščemo rešitev z obravnavo koordinat y kot meritev x pa kot konstant, dobimo rešitev pod pogojem minimalne vsote kvadratov merskih vrednosti. Torej minimalne vsote kvadratov popravkov koordinat y po izravnavi (slika 3, črtkana črta). Če obravnavamo tudi koordinate x kot merjene vrednosti, pa dejansko iščemo minimum vsote kvadratov popravkov merjenih koordinat x in y hkrati. Torej minimiziramo vsoto kvadratov pravokotnih oddaljenosti »merjenih« točk od regresijske premice (slika 3, polna črta).



Slika 2: Rešitve regresijske premice.



Slika 3: Metoda najmanjših kvadratov (črtkano) v primerjavi s popolno izravnavo po MNK (polna črta).

Seveda je smiselna zgornja primerjava odmikov v smeri y in pravokotno samo, če ne upoštevamo uteži oziroma so te za vse »meritve« enake (npr. $\mathbf{P} = \mathbf{I}$). Pri upoštevanju uteži ne moremo obravnavati pravokotnih oddaljenosti, ampak neke poševne. Če sedaj zgornji primer obravnavamo z enotsko utežno matriko, lahko vidimo razliko v rezultatu – vsota kvadratov odmikov točk od regresijske premice:

– <u>pravokotni odmik od premice:</u> $\sum_{MNK} d_\perp^2 = \sum_{SMI} d_\perp^2 = 0.78748 > 0.78649 = \sum_{WTLS} d_\perp^2$

– <u>odmik v smeri y od premice:</u> $\sum_{MNK} d_y^2 = \sum_{SMI} d_\perp^2 = 0.89480 < 0.89593 = \sum_{WTLS} d_y^2$

Pri enotski utežni matriki za opazovanje (= vhodne koordinate točk) je rešitev za regresijsko premico enaka za posredno izravnavo in splošni model izravnave po metodi najmanjših kvadratov. Kot še vidimo, je rešitev WTLS taka, da minimizira pravokotni odmik točk od izračunane premice.

3.2 Transformacija koordinat

Različne pristope k iskanju rešitve izravnave obravnavamo na primeru iskanja transformacijskih parametrov za prehod iz koordinatnega sistema D48/GK v D96/TM. To sta prejšnja in aktualna različica slovenskega državnega koordinatnega sistema. Obravnava prehoda med obema različicama koordinatnih sistemov je aktualna, saj se v vsakdanji uradni geodetski praksi prepletajo podatki o točkah v obeh koordinatnih sistemih – točke zemljiškega katastra, stare točke različnih nivojev geodetskih mrež, točke izmere GNSS itd. Vprašanje oziroma tematika transformacije med koordinatnima sistemoma D48/GK in D96/TM je bila že večkrat obravnavana (Berk, 2017; Berk in Duhovnik, 2007; Marjetič in Pavlovčič, 2018, in drugi). Na ravni države oziroma za podatke, katerih skrbnik je Geodetska uprava Republike Slovenije, je bila uradno sprejet vsedržavni model trikotniške transformacije (odsekoma afine transformacije, Berk, 2017). V tej nalogi smo se lotili iskanja transformacijskih parametrov za prehod iz D48/GK v D96/TM na lokalnem območju JZ dela Ljubljane na podlagi točk, ki so bile dane v starem koordinatnem sistemu in določene z metodo GNSS v novem koordinatnem sistemu (Marjetič in Pavlovčič, 2018).

Preglednica 3: Seznam obravnavanih točk za transformacijo.

	D48/GK				D96/TM					
T	y [m]	x [m]	p_y	p_x	e [m]	n [m]	σ_e [mm]	σ_n [mm]	p_e	p_n
240-C2	461832,4600	99989,5000	1	1	461461,4803	100475,9817	1,2	1,7	10	5
240-C1	461849,9300	99989,2200	1	1	461478,8845	100475,7180	1,4	2,0	8	5
124-C0	459984,0200	99868,1900	1	1	459613,0262	100354,6710	1,5	2,0	8	5
204-C0	459937,1900	101340,7500	1	1	459566,2221	101827,2837	0,4	0,8	25	10
893-C0	456202,4000	99557,5400	1	1	455831,3858	100044,0614	0,2	0,3	40	35
292-C0	454777,1400	100905,6500	1	1	454406,2259	101392,2533	0,7	0,8	10	10

Natančnosti določitve koordinat točk v D48/GK ne navajamo, ker o tem nimamo podatka. Ocenjujemo, da so bile koordinate določene s centimetrsko natančnostjo (ali slabše). Natančnost koordinat točk v D96/TM izhaja iz rezultatov izmere in izračuna geodetske mreže (Marjetič in Pavlovčič, 2018) in je v splošnem nekajkrat boljša kot v D48/GK. Temu ustrezno priredimo tudi uteži posameznim točkam v obeh koordinatnih sistemih (preglednica 3).

Obravnavamo 4-parametrično podobnostno transformacijo v ravnini, ki ima obliko:

$$\begin{bmatrix} e \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \tag{46}$$

kjer so:

e, n – koordinate točk v novem koordinatnem sistemu,

y, x – koordinate točk v starem koordinatnem sistemu, *a*, *b* – parametra transformacije, ki vključujeta spremembo merila in orientacije ($a = m \cdot \cos\alpha$, $b = m \cdot \sin\alpha$; *m* – merilo, α – rotacija), ter

c, *d* – parametra premika izhodišča koordinatnega sistema v smeri *x* in *y*.

Transformacijske parametre izračunamo na štiri različne načine, ki jih obravnavamo v tem prispevku: po MNK z upoštevanjem uteži, s postopkom »popolne« izravnave z razcepom SVD brez upoštevanja uteži (TLS_SVD) in s postopkom »popolne« izravnave z upoštevanjem uteži (WTLS, preglednica 4). V izračunu obravnavamo reducirane koordinate na težišče mreže v izvornem koordinatnem sistemu (D48/GK).

Preglednica 4: Rezultati izračuna transformacijskih parametrov.

Metoda izračuna	Upoštevam uteži	a	b	c [m]	d [m]	α [″]	m [ppm]	$\hat{\sigma}_0$ [m]
MNK	da	0,9999986	0,0000132	-370,98998	486,51088	2,72229	-1,35	0,09911
TLS_SVD	ne	0,9999942	0,0000143	-370,98587	486,51985	2,94140	-5,83	/
WTLS	da	0,9999948	0,0000140	-370,98617	486,51914	2,89402	-5,18	0,04278
SMI	da	0,9999948	0,0000140	-370,98617	486,51914	2,89398	-5,18	0,06051

Iz rezultatov v preglednici 4 vidimo, da metoda WTLS v obravnavanem primeru zagotavlja precej podobne rezultate z ali brez upoštevanja uteži (TLS_SVD) v izravnavi in so tudi enaki rezultatom splošnega modela izravnave (SMI), nekoliko je različna samo a-posteriori ocena natančnosti in kot rotacije *a*.

Zanima nas tudi ocena kakovosti transformacije z vidika primerjave transformiranih koordinat na podlagi izračunanih parametrov (preglednici 5 in 6). Pri tej analizi se omejimo samo na izračuna, ki upoštevata uteži (WTLS in MNK).

Preglednica 5: Razlika med transformiranimi in podanimi koordinatami v ciljnem koordinatnem sistemu – izračun po MNK z upoštevanjem uteži.

MNK	Novi KS (D96/TM)		Razlika		Transformirano v D96/TM	
T	e [m]	n [m]	de [m]	dn [m]	e [m]	n [m]
240-C2	461461,4803	100475,9817	-0,0178	-0,0065	461461,4625	100475,9752
240-C1	461478,8845	100475,7180	0,0480	-0,0231	461478,9325	100475,6949
124-C0	459613,0262	100354,6710	-0,0028	0,0187	459613,0235	100354,6897
204-C0	459566,2221	101827,2837	-0,0092	-0,0354	459566,2130	101827,2484
893-C0	455831,3858	100044,0614	0,0187	0,0287	455831,4045	100044,0901
292-C0	454406,2259	101392,2533	-0,0617	-0,0363	454406,1642	101392,2170
		RMS [m]	0,0338	0,0268		

Iz rezultatov izračuna transformacijskih parametrov (preglednice 2–4) lahko razberemo, da so rezultati nekoliko drugačni, če izvajamo izravnavo klasično po metodi najmanjših kvadratov z upoštevanjem uteži ali pa obravnavamo tudi pogreške pri neznankah (WTLS). Razlike v transformiranih koordinatah v D96/TM med MNK in WTLS so reda velikosti centimetra. Z različico metode TLS z razcepom SVD dobimo zelo podobne rezultate kot z metodo WTLS.

Kateri rezultati so boljši, če primerjamo MNK in WTLS? Nekaj parametrov, ki smo jih tu izračunali, kaže na boljšo kakovost izravnave po metodi WTLS. Če nam merilo kakovosti predstavlja a-posteriori ocena natančnosti, ki jo računamo iz vektorja popravkov meritev/opazovanj (koordinat točk), potem je vrednost boljša pri obravnavi WTLS (preglednica 4). Če je podana vrednost standardnega odklona a-priori 0,020 m za izhodiščne koordinate v D48/GK in 0,005 m za koordinate v D96/TM, je a-posteriori vrednost za obravnavo po MNK z upoštevanjem uteži pri opazovanjih velikosti približno 10 centimetrov, če so obravnavani tudi pogreški pri neznankah, pa znaša 4 centimetre. Tudi povprečje kvadratov odstopanj transformiranih koordinat na podlagi izračunanih parametrov od podanih v končnem/ciljnem koordinatnem sistemu (preglednici 5 in 6) je pri obravnavi WTLS manjša. Iz tega izhaja, da so vrednosti izračunanih transformacijskih parametrov z metodo WTLS določene/izračunane tako, da se transformirane koordinate v povprečju bolje prilegajo končnim »merjenim« koordinatam.

Preglednica 6: Razlika med transformiranimi in podanimi koordinatami v ciljnem koordinatnem sistemu – izračun po WTLS.

WTLS	Novi KS (D96/TM)		Razlika		Transformirano v D96/TM	
T	*e* [m]	*n* [m]	*de* [m]	*dn* [m]	*e* [m]	*n* [m]
240-C2	461461,4803	100475,9817	-0,0247	0,0005	461461,4557	100475,9822
240-C1	461478,8845	100475,7180	0,0411	-0,0160	461478,9256	100475,7020
124-C0	459613,0262	100354,6710	-0,0027	0,0278	459613,0235	100354,6988
204-C0	459566,2221	101827,2837	-0,0077	-0,0319	459566,2144	101827,2518
893-C0	455831,3858	100044,0614	0,0330	0,0421	455831,4188	100044,1035
292-C0	454406,2259	101392,2533	-0,0408	-0,0268	454406,1851	101392,2265
		RMS [m]	0,0292	0,0275		

4 ZAKLJUČEK

K problemu iskanja optimalne rešitve za neznanke v predoločenem sistemu enačb, ki povezujejo opazovanja in neznanke, lahko pristopimo na več načinov. Geodetu je v splošnem najbolj blizu izravnava po metodi najmanjših kvadratov, kjer prek Gauss-Markovega modela (1) v linearizirani obliki povežemo opazovanja, neznanke in konstante. Rešitev lahko v tem primeru prek sistema normalnih enačb izračunamo z ali brez upoštevanja natančnosti oziroma uteži (priredimo vsem meritvam enako utež, na primer 1) meritev. Tak način obravnave je včasih problematičen. Na primeru iskanja regresijske premice za niz točk v ravnini lahko samo eno koordinatno komponento točk obravnavamo kot opazovanje, druga pa predstavlja konstanto. Vendar je včasih smiselno, da obe koordinatni komponenti vstopata v model izravnave kot opazovanji. Glede na matematično povezavo nastopa koordinata x na strani modelne matrike **A** in tako »vsiljuje« obravnavo pogreškov tudi na strani neznank (EIV). Podobna situacija nastane pri izračunu transformacijskih parametrov, kjer želimo, da imajo tako točke v izvornem kot tudi v ciljnem koordinatnem sistemu v izravnavi status opazovanj. Kot razširitev standardnega postopka izravnave po MNK je bil poleg znanega splošnega modela izravnave razvit postopek popolne izravnave po metodi najmanjših kvadratov, v strokovni literaturi poznan pod imenom »total least squares« ali TLS. Postopek upošteva pogreške na strani neznank oziroma v matriki modela izravnave **A**, tudi z možnostjo upoštevanja uteži (WTLS, angl. *weighted total least squares*).

V članku smo na računskem primeru izračuna koeficientov regresijske premice in izračuna transformacijskih parametrov predstavili klasično izravnavo po MNK in različico TLS ter primerjali rezultate. Regresijska premica niza točk na ravnini, izračunana po postopku TLS, se prilagaja glede na podane natančnosti tako *x*- kot tudi *y*-koordinat, kar je smiselno. Pri transformaciji koordinat lahko na podlagi izračunanih statistik ugotovimo, da se pri izravnavi po metodi WTLS vrednosti neznak bolje prilagajajo točkam v končnem (ciljnem) koordinatnem sistemu. Glede na natančnosti podanih koordinat, ki so v končnem koordinatnem sistemu (D96/TM) nekajkrat boljše kot v začetnem (D48/GK), je tak rezultat seveda primernejši.

Literatura in viri:

Amiri-Simkooei, A., Jazaeri, S. (2012). Weighted total least squares formulated by standard least squares theory. Journal of Geodetic Science, 2 (2), 113–124. DOI: https://doi.org/10.2478/v10156-011-0036-5

Amiri-Simkooei, A., Zangeneh-Nejad, F., Asgari, J., Jazaeri, S. (2013). Estimation of straight line parameters with fully correlated coordinates. Measurement, 48 (2014), 378–386. DOI: https://doi.org/10.1016/j.measurement.2013.11.005

Berk, S. (2017). 3TRA – Brezplačni program za transformacijo prostorskih podatko v nov referenčni koordinatni sistem Slovenije. Geodetski vestnik, 61 (4), 659–665. www.geodetski-vestnik.com/61/4/gv61-4_berk.pdf, pridobljeno 15. 1. 2021.

Berk, S., Duhovnik, M. (2007). Transformacija podatkov geodetske uprave Republike Slovenije v novi državni koordinatni sistem. Geodetski vestnik, 51 (4), 803–826. http://www.geodetski-vestnik.com/51/4/gv51-4_803-826.pdf, pridobljeno 15. 1. 2021.

Golub, G. H., Van Loan, C. F. (1980). An Analysis of the Total Least Squares Problem. Society for Industrial and Applied Mathematics, 17 (6), 883–893. DOI: https://doi.org/10.1137/0717073

Marjetič, A., Pavlovčič-Prešeren, P. (2018). Določitev položajev cerkvenih zvonikov v koordinatnem sistemu D96/TM. Geodetski vestnik, 62 (4), 587–603. DOI. https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2018.04.587-603

Markovsky, I., Van Huffel, S. (2007). Overview of Total Least-Squares Methods. Signal Processing, 87 (10), 2283–2302. DOI. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2007.04.004

Neitzel, F. (2010). Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2D similarity transformation. Journal of Geodesy, 84 (12), 751–762. DOI: https://doi.org/10.1007/s00190-010-0408-0

Neri, F., Saitta, G., Chiofalo, S. (1989). An accurate and straightforward approach to line regression analysis of error-affected experimental data. Journal of Physics E: Scientific Instruments, 22 (4), 215–217. DOI. https://doi.org/10.1088/0022-3735/22/4/002

Soldo, J., Ambrožič, T. (2018). Deformacijska analiza po postopku München. Geodetski vestnik, 62 (3), 392–412. DOI: https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2018.03.392-414

Strang, G., Borre, K. (1997). Linear Algebra, Geodesy, and GPS. Wellesley-Cambridge Press, ZDA.

Teunissen, P. J. G. (2003). Adjustment theory – an introduction. Delft: Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Department of Mathematical Geodesy and Positioning, Delft University of Technology.

Marjetič A. (2021). Izravnava po metodi najmanjših kvadratov z upoštevanjem pogreškov pri neznankah. Geodetski vestnik, 65 (2), 205-218. DOI: https://doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2021.02.205-218

doc. dr. Aleš Marjetič, univ. dipl. inž. geod.

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana

e-naslov: amarjeti@fgg.uni-lj.si