

Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



**PETER ČEŠAREK, univ. dipl. inž. grad.**

**DINAMIKA PROSTORSKIH LINIJSKIH  
ELEMENTOV Z INTERPOLACIJO  
DEFORMACIJSKIH KOLIČIN**

**DOKTORSKA DISERTACIJA**

Ljubljana, april 2013



Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



PODIPLOMSKI ŠTUDIJ  
GRADBENIŠTVA

DOKTORSKI ŠTUDIJ

Kandidat:

**PETER ČEŠAREK, univ. dipl. inž. grad.**

**DINAMIKA PROSTORSKIH LINIJSKIH ELEMENTOV Z  
INTERPOLACIJO DEFORMACIJSKIH KOLIČIN**

Doktorska disertacija štev.: 231

**DYNAMICS OF SPATIAL BEAMS WITH  
INTERPOLATION OF STRAIN MEASURES**

Doctoral thesis No.: 231

Temo doktorske disertacije je odobrila Komisija za doktorski študij  
na 20. redni seji, dne 21. septembra 2011.

Za mentorja je bil imenovan izr. prof. dr. Dejan Zupan,  
za somentorja prof. dr. Miran Saje.

Ljubljana, 16. april 2013



Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



**Komisijo za oceno ustreznosti teme doktorske disertacije v sestavi:**

- izr. prof. dr. Dejan Zupan,
- prof. dr. Miran Saje
- prof. dr. Jože Korelc,
- izr. prof. dr. Gordan Jelenić, Gradbena fakulteta Univerze na Reki,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 20. redni seji, dne 20. aprila 2011.

**Poročevalce za oceno doktorske disertacije v sestavi:**

- izr. prof. dr. Gordan Jelenić, Gradbena fakulteta Univerze na Reki,
- prof. dr. Jože Korelc,
- prof. dr. Igor Planinc,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 37. redni seji, dne 30. januarja 2013.

**Komisijo za zagovor doktorske disertacije v sestavi:**

- prof. dr. Matjaž Mikoš, dekan UL FGG, predsednik,
- izr. prof. dr. Dejan Zupan, mentor,
- prof. dr. Miran Saje, somentor,
- izr. prof. dr. Gordan Jelenić, Gradbena fakulteta Univerze na Reki,
- prof. dr. Jože Korelc,
- prof. dr. Igor Planinc,

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 39. redni seji, dne 27. marca 2013.



Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



## IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani **Peter ČEŠAREK**, univ. dipl. inž. grad., izjavljam, da sem avtor doktorske disertacije z naslovom:

**»DINAMIKA PROSTORSKIH LINIJSKIH ELEMENTOV Z INTERPOLACIJO DEFORMACIJSKIH KOLIČIN«.**

Izjavljam, da je elektronska različica v vsem enaka tiskani različici.

Izjavljam, da dovoljujem objavo elektronske različice v repozitoriju UL FGG.

Ljubljana, 16. april 2013

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'P. Češarek', is written over a horizontal dotted line. Below the line, the word '(podpis)' is printed in parentheses.

(podpis)





## **POPRAVKI**

**Stran z napako**

**Vrstica z napako**

**Namesto**

**Naj bo**

**BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK**

<b>UDK</b>	<b>624.074(043.3)</b>
<b>Avtor:</b>	<b>Peter Češarek</b>
<b>Mentor:</b>	<b>izr. prof. dr. Dejan Zupan</b>
<b>Somentor:</b>	<b>prof. dr. Miran Saje</b>
<b>Naslov:</b>	<b>Dinamika prostorskih linijskih elementov z interpolacijo deformacijskih količin</b>
<b>Tip dokumenta:</b>	<b>Doktorska disertacija</b>
<b>Obseg in oprema:</b>	<b>114 str., 48 sl., 7 pregl., 260 en.</b>
<b>Ključne besede:</b>	<b>prostorski nosilec, točna kinematika, dinamika, časovna integracija, masni delec, trk</b>

**Izvleček**

V doktorski nalogi predstavimo nove metode za dinamično analizo prostorskih linijskih konstrukcij. Obravnavamo časovno integracijske sheme in formulacije končnih elementov, zasnovane na geometrijsko točni teoriji prostorskih nosilcev. Bistvena novost predstavljenih algoritmov je izbira odvodov kinematičnih količin – pomikov in rotacij, za osnovne neznanke pri reševanju problema v odvisnosti od parametrov prostora in časa. Za časovno integracijo dinamičnih enačb predstavimo Newmarkovo shemo, prirejeno za nelinearen prostor rotacij, in predlagamo novo – modificirano Newmarkovo shemo. Osnovne neznanke nove sheme so odvodi pomikov in rotacij po času – hitrosti in kotne hitrosti. Predstavimo dve formulaciji linijskih končnih elementov. Za osnovne neznanke v prvi formulaciji izberemo krajevne odvode pomikov in rotacij – deformacije, v drugi formulaciji pa krajevne odvode hitrosti in kotnih hitrosti. Osnovne neznanke interpoliramo, za diskretizacijo zveznih enačb po kraju pa izberemo kolokacijsko metodo. Pri deformacijskem elementu kinematične zveze po času diskretiziramo z Newmarkovo shemo, za zagotovitev stabilnosti pa uporabimo posplošeno- $\alpha$  metodo numeričnega dušenja. Pri elementu z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti, kinematične enačbe po času diskretiziramo z modificirano Newmarkovo shemo. Enačbe rešujemo z Newtonovo iteracijsko metodo. Za obe formulaciji podrobno predstavimo linearizacijo in dodajanje popravkov. Nove elemente vgradimo v računalniški program in testiramo na številnih primerih. Na koncu model nosilca povežemo z gibalnimi enačbami masnega delca. Podrobneje obravnavamo trk masnega delca ob nosilec.

## **BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT**

<b>UDC</b>	<b>624.074(043.3)</b>
<b>Author:</b>	<b>Peter Češarek</b>
<b>Supervisor:</b>	<b>assoc. prof. Dejan Zupan, Ph.D.</b>
<b>Co-supervisor:</b>	<b>prof. Miran Saje, Ph.D.</b>
<b>Title:</b>	<b>Dynamics of spatial beams with interpolation of strain measures</b>
<b>Document type:</b>	<b>Doctoral Dissertation</b>
<b>Notes:</b>	<b>114 p., 48 fig., 7 tab., 260 eq.</b>
<b>Keywords:</b>	<b>spatial beam, exact kinematics, dynamics, time integration, mass particle, impact</b>

### **Abstract**

In the present thesis we develop new numerical methods for a dynamic analysis of beam-like structures in three-dimensional space. We consider time integration schemes and finite-element formulations, based on geometrically exact beam theory. The main novelty of the present approach is the choice of the derivatives of displacements and rotations, as the primary unknowns when considering the problem with respect to space and time. For time integration of dynamic equations we present the Newmark scheme extended to non-linear space of rotations and propose a new – modified Newmark scheme. The modified Newmark scheme employs time derivatives of displacements and rotations – velocities and angular velocities, as the only unknowns of the scheme. We introduce two finite-element formulations for analysis of spatial beams. The first formulation employs spatial derivatives of displacements and rotations – strains, as the primary unknowns, while the second formulation employs spatial derivatives of velocities and angular velocities as the only unknown functions. The primary unknowns are interpolated and a collocation method is chosen for discretization of the continuous equations. The Newmark scheme is used for time discretization of kinematic quantities and Generalized- $\alpha$  method is used to assure numerical stability of the strain-based formulation. The velocity-based formulation employs modified Newmark scheme for time discretization of kinematic equations. Equations are solved by the iterative Newton's method, therefore the linearization of equations and the update procedure are presented. The computer code is generated and the performance of the formulations is tested on several numerical examples. Finally, the beam model is coupled with equations of motion of a moving particle. The impact of mass particle against the beam is studied in detail.

## **ZAHVALA**

Zahvaljujem se: Javni agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije za dodeljena finančna sredstva, ki so mi omogočila nadaljevanje študija. Mentorju, somentorju in vsem ostalim sodelavcem na katedri za mehaniko za pomoč pri študiju, nastajanju tega dela in za vsakdanje stvari zaradi katerih sem rad opravljal svoje delo. Posebej pa mojim bližnjim za razumevanje in podporo.

Hvala vsem, naj vam bo z dobrim povrnjeno.

## KAZALO VSEBINE

<b>BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK</b>	<b>VIII</b>
<b>BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT</b>	<b>IX</b>
<b>ZAHVALA</b>	<b>X</b>
<b>1 UVOD</b>	<b>1</b>
1.1 Pregled stanja na področju dinamike prostorskih nosilcev . . . . .	1
1.2 Vsebina dela . . . . .	3
<b>2 OSNOVNE ENAČBE DINAMIKE</b>	<b>5</b>
2.1 Osnovni izreki . . . . .	5
2.2 Kinematika delca . . . . .	6
<b>3 PROSTORSKE ROTACIJE</b>	<b>8</b>
3.1 Rotacijska matrika . . . . .	8
3.2 Kotna hitrost in kotni pospešek . . . . .	9
3.2.1 Kompozitum rotacij in seštevanje kotnih hitrosti . . . . .	10
3.3 Odvod in integral vektorske funkcije v pomični bazi . . . . .	12
3.4 Parametrizacija rotacij . . . . .	14
3.4.1 Rotacija s konstantno kotno hitrostjo . . . . .	15
3.4.2 Zveza med kotno hitrostjo in odvodom rotacijskega vektorja po času . . . . .	16
3.4.3 Variacija rotacijske matrike, parametrizirane z rotacijskim vektorjem . . . . .	17
3.4.4 Variacija rotacijske matrike, parametrizirane z aditivnim rotacijskim vektorjem	18
<b>4 ČASOVNO INTEGRACIJSKE SCHEME</b>	<b>20</b>
4.1 Newmarkova shema . . . . .	21
4.1.1 Linearizacija . . . . .	21
4.1.2 Dodajanje popravkov . . . . .	22

4.1.3	Izbira parametrov Newmarkove sheme . . . . .	23
4.2	Modificirana Newmarkova shema . . . . .	23
4.2.1	Linearizacija . . . . .	25
4.2.2	Račun novih približkov . . . . .	26
4.2.3	Izbira parametrov modificirane Newmarkove sheme . . . . .	26
4.3	Numerični primeri gibanja togega telesa . . . . .	28
4.3.1	Vrtenje telesa pod vplivom predpisanega poteka momentov . . . . .	28
4.3.2	Težka vrtavka v gravitacijskem polju . . . . .	31
4.3.3	Dvojno nihalo . . . . .	34
<b>5</b>	<b>OSNOVNE ENAČBE DINAMIKE PROSTORSKIH NOSILCEV</b>	<b>40</b>
5.1	Matematični model prostorskega nosilca . . . . .	40
5.2	Kinematične enačbe . . . . .	40
5.3	Gibalne enačbe . . . . .	42
5.4	Konstitutivne enačbe . . . . .	44
5.5	Enačbe konsistence . . . . .	44
5.6	Povzetek enačb . . . . .	44
5.7	Zveze med deformacijami in hitrostmi . . . . .	45
<b>6</b>	<b>NUMERIČNO REŠEVANJE ENAČB</b>	<b>48</b>
6.1	Kinematične enačbe . . . . .	48
6.1.1	Newmarkova shema, osnovne neznanke so deformacije . . . . .	49
6.1.2	Modificirana Newmarkova shema, osnovne neznanke so hitrosti . . . . .	50
6.2	Ravnotežne enačbe . . . . .	52
6.3	Vodilne enačbe dinamike prostorskega linijskega elementa . . . . .	53
6.3.1	Element z interpolacijo deformacij . . . . .	54
6.3.2	Element z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti . . . . .	54
6.4	Reševanje diskretnih enačb . . . . .	55
6.4.1	Element z interpolacijo deformacij . . . . .	56
6.4.2	Element z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti . . . . .	62
6.4.3	Numerična integracija . . . . .	68

6.5	Numerično dušenje . . . . .	69
6.6	Numerični testi . . . . .	71
6.6.1	Vsiljeno nihanje prostoležečega nosilca . . . . .	73
6.6.2	Konzola upognjena v spiralo . . . . .	75
6.6.3	Kolenasta konzola . . . . .	76
6.6.4	Nepodprti podajni nosilec v prostem letu . . . . .	79
6.6.5	Problem štiričlenskega mehanizma . . . . .	83
6.6.6	Enostavno nihalo . . . . .	89
<b>7</b>	<b>GIBANJE MASNEGA DELCA IN NOSILCA</b>	<b>93</b>
7.1	Osnovne enačbe . . . . .	93
7.2	Računski primeri . . . . .	94
7.2.1	Interpolacija osnovnih neznank nosilca s konstantnimi funkcijami . . . . .	94
7.2.2	Nihajoča gugalnica . . . . .	95
7.2.3	Trk masnega delca ob nosilec . . . . .	99
<b>8</b>	<b>ZAKLJUČEK</b>	<b>104</b>
	<b>POVZETEK</b>	<b>106</b>
	<b>SUMMARY</b>	<b>108</b>
	<b>VIRI</b>	<b>110</b>

**KAZALO SLIK**

2.1	Lega poljubnega delca trdnega telesa. . . . .	6
3.1	Kompozitum rotacij. . . . .	11
4.1	Rotirajoče telo pod vplivom linearnih rotacij. Primerjava absolutnih napak komponent rotacijskega vektorja dobljenih z originalnim in modificiranim Newmarkovim algoritmom. . . . .	29
4.2	Rotirajoče telo pod vplivom linearnih rotacij. Modificirani Newmarkov algoritem. Absolutna napaka komponent rotacijskega vektorja. . . . .	29
4.3	Rotirajoče telo pod vplivom kvadratnih rotacij. Primerjava absolutnih napak komponent rotacijskega vektorja dobljenih z originalnim in modificiranim Newmarkovim algoritmom. . . . .	30
4.4	Težka vrtavka v gravitacijskem polju. . . . .	32
4.5	Težka vrtavka. Absolutna napaka celotne energije vrtavke. . . . .	32
4.6	Težka vrtavka. Konvergenca druge norme vrtilne količine in rotacijske matrike. . . . .	33
4.7	Dvojno nihalo. . . . .	34
4.8	Dvojno nihalo. Rezultati dobljeni z Newmarkovo in modificirano Newmarkovo shemo, z relativno velikim časovnim korakom $h = 10^{-3}$ . . . . .	36
4.9	Dvojno nihalo. Rezultati dobljeni z Matlabovo rutino <i>ode15s</i> . . . . .	37
4.10	Dvojno nihalo. Rezultati dobljeni z modificirano Newmarkovo shemo s kratkim časovnim korakom $h = 10^{-6}$ . . . . .	38
5.1	Matematični model nosilca. . . . .	41
5.2	Obtežba nosilca. . . . .	43
6.1	Vsiljeno nihanje prostoležečega nosilca. . . . .	73
6.2	Vsiljeno nihanje prostoležečega nosilca. Absolutne napake pomika na sredini nosilca na intervalu $t \in [0, 8]$ ( $h =$ časovni korak, $n_e =$ število elementov, $N =$ število interpolacijskih točk). . . . .	74
6.3	Konzola upognjena v spiralo. . . . .	75
6.4	Konzola upognjena v spiralo. Rezultati analize s 25 elementi z 8 točkovno interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti. . . . .	76



6.5	Kolenasta konzola. . . . .	77
6.6	Kolenasta konzola. Pomik kolena in prostega konca konzole iz ravnine pri analizi s 4 elementi. . . . .	78
6.7	Kolenasta konzola. Pomik kolena in prostega konca konzole iz ravnine pri analizi z 20 elementi. . . . .	78
6.8	Kolenasta konzola. Pomiki kolena in prostega konca konzole iz ravnine, pri analizi s korakom $h = 0.1$ . . . . .	79
6.9	Kolenasta konzola. Mehanska energija. . . . .	79
6.10	Nepodprti podajni nosilec v prostem letu. . . . .	80
6.11	Podajni nosilec v prostem letu. Projekcije deformiranih leg. . . . .	80
6.12	Podajni nosilec v prostem letu. Pomiki obteženega vozlišča. . . . .	81
6.13	Podajni nosilec v prostem letu. Mehanska energija. . . . .	82
6.14	Štiričlenski mehanizem. . . . .	83
6.15	Enoosni členek. . . . .	84
6.16	Štiričlenski mehanizem. Pomiki vozlišča $C$ . . . . .	84
6.17	Štiričlenski mehanizem. Notranje sile in momenti na sredini prvega nosilca. . . . .	85
6.18	Štiričlenski mehanizem. Hitrosti in kotne hitrosti na sredini prvega nosilca. . . . .	85
6.19	Štiričlenski mehanizem. Analiza z elementi z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti – pomiki vozlišča $C$ . . . . .	86
6.20	Štiričlenski mehanizem. Analiza z elementi z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti – notranje sile in momenti na sredini prvega nosilca. . . . .	87
6.21	Štiričlenski mehanizem. Analiza z elementi z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti – hitrosti in kotne hitrosti na sredini prvega nosilca. . . . .	88
6.22	Enostavno nihalo. . . . .	89
6.23	Enostavno nihalo. Celotna energija nihala v odvisnosti od časa. . . . .	90
6.24	Enostavno nihalo. Absolutne napake pomikov in hitrosti. . . . .	91
7.1	Nihajoča gugalnica. . . . .	95
7.2	Nihajoča gugalnica. Zaporedje deformiranih leg. . . . .	96
7.3	Nihajoča gugalnica. Pomiki v točki $B$ , izračunani z elementom s konstantnimi deformacijami in posplošeno- $\alpha$ shemo. . . . .	97
7.4	Nihajoča gugalnica. Celotna energija masnega delca in gugalnice, diskretizirane z elementi s konstantnimi deformacijami. . . . .	97

---

7.5	Nihajoča gugalnica. Pomiki točke $B$ in celotna energija sistema pri analizi z elementi s konstantnimi krajevnimi odvodi hitrosti in korakom $h = 5 \cdot 10^{-5}$ . . . . .	98
7.6	Nihajoča gugalnica. Notranje sile v nosilcu, levo od točke $A$ . . . . .	98
7.7	Matematični model trka masnega delca ob nosilec. . . . .	99
7.8	Trk masnega delca ob nosilec. . . . .	100
7.9	Rezultati analize trka masnega delca ob prostoležeči nosilec. . . . .	101
7.10	Rezultati analize trka masnega delca ob nepomično podprti nosilec. . . . .	102

## KAZALO PREGLEDNIC

4.1	Parametri časovno integracijskih shem uporabljeni v numeričnih primerih. . . . .	28
4.2	Rotirajoče telo pod vplivom linearnih rotacij. Konvergenca Newtonove iteracije pri $t = 12$ . . . . .	30
4.3	Rotirajoče telo pod vplivom kvadratnih rotacij. Konvergenca Newtonove iteracije pri $t = 12$ . . . . .	31
4.4	Težka vrtavka. Računski časi. . . . .	33
5.1	Pregled enačb za dinamiko prostorskega nosilca v skladu z geometrijsko točno teorijo nosilcev. . . . .	45
6.1	Parametri časovno integracijskih shem uporabljeni v numeričnih primerih. . . . .	72
6.2	Pomik prostega krajišča konzole v smeri obtežbe pri času $t = 10$ . . . . .	76

## LIST OF FIGURES

2.1	The position of an arbitrary particle of a solid body. . . . .	6
3.1	Composite of rotations. . . . .	11
4.1	Rotating body under linear rotations. Comparison of absolute error of components of the rotational vector obtained with original and modified Newmark algorithm. . . . .	29
4.2	Rotating body under linear rotations. Modified Newmark algorithm. Absolute error of components of the rotational vector. . . . .	29
4.3	Rotating body under quadratic rotations. Comparison of absolute error of components of the rotational vector obtained with original and modified Newmark algorithm. . . . .	30
4.4	The heavy symmetrical top in gravity field. . . . .	32
4.5	The heavy symmetrical top. Absolute error of the total energy of the top. . . . .	32
4.6	The heavy symmetrical top. Convergence of the second norm of the angular momentum and rotation matrix. . . . .	33
4.7	Double pendulum. . . . .	34
4.8	Double pendulum. Results obtained by Newmark scheme and modified Newmark scheme, with relatively large time step $h = 10^{-3}$ . . . . .	36
4.9	Double pendulum. Results obtained by the Matlab <i>ode15s</i> routine. . . . .	37
4.10	Double pendulum. Results obtained with modified Newmark scheme with small time step $h = 10^{-6}$ . . . . .	38
5.1	Mathematical model of the beam. . . . .	41
5.2	Loading of the beam. . . . .	43
6.1	Forced vibration of simply supported beam. . . . .	73
6.2	Forced vibration of simply supported beam. Absolute error of midspan deflection on the interval $t \in [0, 8]$ ( $h =$ time step, $n_e =$ number of elements, $N =$ number of interpolation points). . . . .	74
6.3	Cantilever bent to a helical form. . . . .	75
6.4	Cantilever bent to a helical form. Results of the analysis with 25 elements with 8 point interpolation of spatial derivatives of velocities. . . . .	76
6.5	Right-angle cantilever. . . . .	77
6.6	Right-angle cantilever. Out-of-plane displacements of the elbow and the free-end of the cantilever obtained with analysis with 4 elements. . . . .	78

6.7	Right-angle cantilever. Out-of-plane displacements of the elbow and the free-end of the cantilever obtained with analysis with 20 elements. . . . .	78
6.8	Right-angle cantilever. Out-of-plane displacements of the elbow and the free-end of the cantilever, obtained with the time step $h = 0.1$ . . . . .	79
6.9	Right-angle cantilever. Mechanical energy. . . . .	79
6.10	Flexible beam in free flight. . . . .	80
6.11	Flexible beam in free flight. Side views of deformed shapes. . . . .	80
6.12	Flexible beam in free flight. Displacements of the loaded end of the beam. . . . .	81
6.13	Flexible beam in free flight. Mechanical energy. . . . .	82
6.14	Four bar mechanism. . . . .	83
6.15	Revolute joint. . . . .	84
6.16	Four bar mechanism. Displacements at point $C$ . . . . .	84
6.17	Four bar mechanism. Internal forces and moments at the midpoint of the first beam. . .	85
6.18	Four bar mechanism. Velocities and angular velocities at the midpoint of the first beam.	85
6.19	Four bar mechanism. Analysis with elements with interpolation of spatial derivatives of velocities – displacements at point $C$ . . . . .	86
6.20	Four bar mechanism. Analysis with elements with interpolation of spatial derivatives of velocities – internal forces and moments at the midpoint of the first beam. . . . .	87
6.21	Four bar mechanism. Analysis with elements with interpolation of spatial derivatives of velocities – velocities and angular velocities at the midpoint of the first beam. . . . .	88
6.22	Simple Pendulum. . . . .	89
6.23	Simple pendulum. Total energy of the pendulum versus time. . . . .	90
6.24	Simple pendulum. Absolute error of displacements and velocities. . . . .	91
7.1	The swing pendulum. . . . .	95
7.2	The swing pendulum. Sequence of deformed shapes of the swing. . . . .	96
7.3	The swing pendulum. Displacements at point $B$ , obtained by constant-strain elements and Generalized- $\alpha$ scheme. . . . .	97
7.4	The swing pendulum. Total energy of the mass and swing, discretized with constant strain elements. . . . .	97
7.5	The swing pendulum. Displacements of point $B$ and total energy of the system obtained with elements with constant spatial derivatives of velocities and time step $h = 10^{-5}$ . . .	98
7.6	The swing pendulum. Internal forces on the left-hand side of point $A$ . . . . .	98

---

7.7	Mathematical model of an impact of a mass particle against beam. . . . .	99
7.8	Impact of a mass particle against beam. . . . .	100
7.9	Results of the analysis of the impact of a mass particle against simply supported beam.	101
7.10	Results of the analysis of the impact of a mass particle against fully supported beam. .	102

## LIST OF TABLES

4.1	Parameters of the time integration schemes used in numerical examples. . . . .	28
4.2	Rotating body under linear rotations. Convergence of Newton iteration at $t = 12$ . . . .	30
4.3	Rotating body under quadratic rotations. Convergence of Newton iteration at $t = 12$ . . .	31
4.4	The heavy symmetrical top. Computational time. . . . .	33
5.1	Summary of equations for dynamics of three-dimensional beam according to geometri- cally exact beam theory. . . . .	45
6.1	Parameters of the time integration schemes used in numerical examples. . . . .	72
6.2	Displacement of the free-end of the cantilever in the direction of load at time $t = 10$ . . .	76





## 1 UVOD

Razumevanje in napoved obnašanja konstrukcij zaradi različnih vplivov je motiv za nenehno raziskovalno delo na področju gradbenih konstrukcij. Pri iskanju odgovorov se lahko zatečemo k eksperimentom, ceneje in z veliko večjo ponovljivostjo pa lahko odgovore iščemo z računskim, matematičnim modeliranjem konstrukcij. Taka analiza konstrukcij je primerna samo, če ima raziskovalec na voljo dovolj natančen matematičen model in orodja za reševanje. Praktična aplikacija razumevanja obnašanja konstrukcij se odraža v zahtevah za projektiranje in analizo že obstoječih zgradb. Sodobni predpisi na področju projektiranja uveljavljajo zahteve, ki jim lahko zadostimo samo z dovolj natančno analizo. Obe perspektivi obravnave konstrukcij tako narekujeta nenehen razvoj sodobnih metod za analizo konstrukcij. Prva zahteva pri razvoju je natančnost modelov konstrukcij, ta pa s sabo pogosto prinese računsko občutljivost postopka. Zato je robustnost analize ključna za splošno uporabnost modela.

Mnoga področja raziskovanja in projektiranja konstrukcij zahtevajo natančno dinamično analizo. Primerje najdemo na področju gradnje mostov, pri študiju vplivov vozil in ostalih vibracij na konstrukcije, pri analizi konstrukcijskih elementov v različnih strojih, pri rušenju objektov. Pri projektiranju konstrukcij je še posebej pomembna natančna analiza izrednih dogodkov, kot so udarci objektov v stavbe in potresna obremenitev konstrukcij. V gradbenih konstrukcijah pogosto nastopajo elementi, pri katerih ena dimenzija prevladuje nad ostalimi. Takim elementom pravimo nosilci in jih pogosto srečamo tudi v strojni, letalski in vesoljski industriji. Matematični modeli linijskega nosilca vse količine reducirajo na težiščno os nosilca; s tem se znatno zmanjša število neznank problema in poveča učinkovitost numeričnih metod. Zato so linijski elementi pomembni gradniki računskega modeliranja konstrukcij in primerni za razvoj novih numeričnih metod. Mnoge metode, razvite za linijske elemente, lahko razširimo tudi na področje analize lupin in tridimenzionalnih teles.

V doktorskem delu prvi korak k natančni dinamični analizi opravimo z upoštevanjem prostorske narave obnašanja konstrukcij in pripravimo orodja za tridimenzionalno modeliranje linijskih konstrukcij. V primerjavi s poenostavljenimi ravninskimi modeli konstrukcij tu nastopijo prvi zapleti, ki jih povzročijo zahteven opis prostorskih rotacij. Nadalje se oddaljimo od priljubljenega razmišljanja, da so pomiki konstrukcij majhni (linearna teorija) in težimo k upoštevanju čim bolj točnih (nelinearnih) geometrijskih zvez. V sklopu izpeljav numeričnih algoritmov za dinamično analizo konstrukcij dopuščamo vključitev poljubnih (realnih) materialnih modelov, algoritme pa kasneje preizkusimo na primerih konstrukcij iz linearno elastičnih materialov. Pri dinamični analizi konstrukcij rešujemo problem v odvisnosti od parametrov prostora in časa. Temeljno vprašanje vsake take analize je izbira osnovnih neznank problema. S tem vprašanjem se sprva ukvarjamo pri problemu časovne integracije, za tem pa pri analizi prostorskih nosilcev.

### 1.1 Pregled stanja na področju dinamike prostorskih nosilcev

V strokovni literaturi lahko najdemo različne teorije nosilcev. Temeljno delo na področju točne (nelinearne) kinematike nosilcev je predstavil Reissner [1], ki zveze med deformacijskimi in kinematičnimi

količinami zapiše tako, da je zadoščeno principu virtualnega dela, pri tem pa ne omeji velikosti pomikov in deformacij. Prvo uspešno parametrizacijo in numerično implementacijo Reissnerjeve teorije najdemo v delih Sima, samostojno [2] in skupaj z Vu-Quocom [3, 4]. Ker predstavljeni pristop nima poenostavitve geometrije, ga imenujemo 'geometrijsko točna teorija' linijskih nosilcev. Teorijo so za osnovo numeričnih formulacij linijskih elementov privzeli številni avtorji na področju statike: Cardona in Geradin [5], Ibrahimbegović [6], Jelenić in Saje [7], Jelenić in Crisfield [8], Zupan in Saje [9] in dinamike: Simo s sodelavci [10], Bauchau in Theron [11], Bottasso in Borri [12], Ibrahimbegović in Al Mikdad [13], Romero in Armero [14].

Pri numeričnih formulacijah prostorskih linijskih nosilcev (pa tudi lupin in tridimenzionalnih teles) je še posebej pomembna izbira parametrizacije prostorskih rotacij. Prostorske rotacije lahko enolično opišemo s tremi neodvisnimi parametri, primer take parametrizacije pa je zapis zasukov z rotacijskim vektorjem [15]. Kljub temu da tak opis ni brez singularnosti [16], se je izkazal za zelo primerne in ga pogosto srečamo v formulacijah končnih elementov.

V povezavi z izbiro parametrizacije rotacij je v formulacijah po metodi končnih elementov pomembna izbira osnovnih neznank problema. Omenjena dela s področja linijskih elementov, z izjemo prispevkov, ki so jih objavili Jelenić in Saje [7] ter Zupan in Saje [9, 17], za osnovne neznanke izberejo pomike in zasuke. Taka izbira osnovnih neznank v formulacije končnih elementov vnese nekaj težav. Prva težava je pojav 'blokiranja' končnih elementov, ki jo avtorji rešujejo na različne načine. Primer uspešne formulacije, v kateri ne pride do blokiranja končnih elementov, sta predstavila Jelenić in Saje [7], kjer za edine neznanke problema izbereta zasuke. Druga težava je multiplikativna narava rotacij, zaradi katere rotacijskih parametrov ne moremo interpolirati z aditivnimi nastavki. Zaradi tega namesto interpolacije celotnih zasukov avtorji v svoje formulacije vpeljejo interpolacijo infinitezimalnih popravkov [3] ali interpolacijo inkrementalnih popravkov rotacij [5]. Tretji problem formulacij, osnovanih na pomikih in zasukih, na katerega sta opozorila Crisfield in Jelenić [18], je neobjektivnost v smislu ohranjanja deformacijskih količin pri togih premikih. Problem sta rešila z vpeljavo posebnih interpolacijskih funkcij za zasuke.

Teoretično povsem drugačen pristop je izbira deformacijskih količin za osnovne neznanke formulacije po metodi končnih elementov. To izbiro motivira dejstvo, da so deformacije invariantne količine pri togih premikih in da z njimi opisujemo deformacijsko energijo konstrukcije. S tako izbiro osnovnih neznank so odpravljene tudi vse zgoraj omenjene slabosti formulacij osnovanih na pomikih in zasukih. Končni element za ravninske nosilce, osnovan na izbiri deformacijskih količin, je predstavil Planinc [19]. Uspešno, točno in numerično učinkovito formulacijo prostorskih linijskih končnih elementov, osnovano na deformacijah, sta predstavila Zupan in Saje [9, 17]. Njuno delo nas motivira, da omenjeni pristop uporabimo še za dinamično analizo prostorskih nosilcev.

V trirazsežnem prostoru je krajevni odvod rotacije enak produktu transformacijske matrike, odvisne od rotacij, in vektorja ukrivljenosti. Formulacije, osnovane na deformacijskih količinah, se med sabo razlikujejo ravno v načinu reševanja te zahtevne kinematične vezi. Choi in Lim [20] ter Friedman in Kosmatka [21] rotacije določajo iz predpostavljenega poteka ukrivljenosti po elementu, Schulz in Filipou [22] pa reševanje poenostavita z interpolacijo infinitezimalnih ukrivljenosti in zasukov. V predlaganem delu sledimo pristopu, ki sta ga uveljavila Zupan in Saje [9, 17], in upoštevamo točne kinematične zveze, ki jih v nekaterih primerih zadostimo analitično, v splošnem pa rešujemo z orodji za numerično

reševanje diferencialnih enačb.

Sistem enačb gibanja v nelinearni mehaniki deformabilnih teles je navadno tog, zato že majhne oscilacije osnovnih neznank povzročijo buren odziv in nihanja z visokimi frekvencami. Stabilne numerične metode za reševanje dinamičnih problemov morajo zato vsebovati sposobnost kontroliranja visokih frekvenc. Osnovna pristopa sta t.i. numerično dušenje Hilber et al. [23], Chung in Hulbert [24] in ohranjanje mehanske energije [25] ter gibalne in vrtilne količine. V dinamiki prostorskih nosilcev avtorji večinoma uporabljajo implicitne metode časovne integracije. Poiščemo lahko številne formulacije na osnovi Eulerjeve diskretizacije po času, ki zadoščajo enačbam nosilca v vmesni točki: npr. Bottasso in Borri [12], Ibrahimbegović in Al Mikdad [13], Jelenić in Crisfield [8], Romero in Armero [14], Simo in Wong [26], Simo et al. [10], Ibrahimbegovic in Mamouri [27]. Avtorji radi posežejo tudi po osnovnih ali modificiranih Newmarkovih metodah [28]: npr. Simo in Vu-Quoc [4], Simo et al. [10]. Izjema med formulacijami za prostorske nosilce je delo Bottassa in Borri-ja [29], ki za reševanje dinamičnih enačb uporabita metode družine Runge-Kutta. Pri študiju omenjenih formulacij lahko izpostavimo, da v daljših časovnih intervalih analize različnih avtorjev dajejo občutno različne rezultate. Eden od razlogov je zagotovo nelinearnost prostorskih rotacij.

Multiplikativna narava rotacij v trirazsežnem prostoru in z rotacijami povezanih količin se namreč odraža tudi na zvezi med odvodi rotacij po času in kotnimi hitrostmi. Zveza med obema količinama je določena z enako transformacijsko matriko kot zveza med krajevnim odvodom rotacij in ukrivljenostjo. Sodobne metode časovne integracije bi zato morale temeljiti na čim bolj točnem upoštevanju neaditivne narave z rotacijami povezanih količin, v nasprotju z uveljavljenimi metodami, ki lokalno uporabljajo aditivno diskretizacijo količin po času.

Številne aplikacije, ki uporabljajo linijske elemente, segajo na področje analize vpliva drugih teles na konstrukcije. Poenostavljen model takega vpliva je masni delec. Reševanje povezanega problema gibanja nosilca in masnega delca ima dolgo zgodovino, predvsem v povezavi z analizo odziva mostov ob prehodu vozil. Velika večina del s tega področja uporablja poenostavljene modele linijskih nosilcev [30]. Uspešno implementacijo geometrijsko nelinearne teorije pri analizi prehoda masnega delca v doktorski disertaciji predstavi E. Zupan [31]. Primer uporabe geometrijsko nelinearnega modela nosilca s predpostavljenimi majhnimi deformacijami v dinamični analizi povezanega sistema podajnih teles je predstavil Bauchau [32]. Predstavljeno časovno integracijsko shemo je nadgradil še za primer kontakta s trenjem in drsenjem [33] in za primer trka teles [34]. Lens in Cardona [35] sta predstavila zanimivo formulacijo geometrijsko nelinearnega modela nosilca in časovno integracijsko shemo primerno za analizo dinamičnih problemov, ki vsebujejo trk teles.

## 1.2 Vsebina dela

V doktorskem delu izpeljemo nova matematična orodja za analizo prostorskih linijskih konstrukcij, ki so podvržene dinamičnim vplivom. Izpeljave gradimo na osnovnih izrekih mehanike trdnih teles: izrek o gibalni količini in izrek o vrtilni količini. Drugi temelj izpeljav je upoštevanje točnih kinematičnih enačb, ki podajajo zveze med pomiki in rotacijami ter njihovimi odvodi po parametru prostora in parametru časa.

Analiza prostorskih problemov zahteva skrbno obravnavo rotacij. Vse količine in izraze, povezane z rotacijami, ki jih potrebujemo v nalogi, izpeljemo in zberemo v posebnem poglavju o prostorskih rota-

cijah. Rotacije obravnavamo kot linearne preslikave v trirazsežnem vektorskem prostoru, ki pripadajo multiplikativni grupi  $SO(3)$ . Za parametrizacijo rotacijskega operatorja izberemo rotacijski vektor.

V tematskem delu naloge se najprej ukvarjamo s časovno integracijskimi shemami. Izberemo algoritme, ki delujejo zgolj na kinematičnih zvezah med pomiki, rotacijami, hitrostmi in kotnimi hitrostmi ter pospeški in kotnimi pospeški. Najprej predstavimo Newmarkovo shemo [28] in njeno različico, prirejeno za prostorske rotacije [4]. V nadaljevanju razvijemo povsem novo časovno integracijsko shemo, ki temelji na drugačni izbiri osnovnih neznank. Za osnovni neznanki časovne diskretizacije kinematičnih zvez izberemo odvod vektorja pomikov po času – vektor hitrosti – in vektorsko količino, ki je najbolj naravno povezana z odvodom rotacij po času – vektor kotne hitrosti. Zaradi podobnosti z Newmarkovim algoritmom novo shemo poimenujemo modificirana Newmarkova shema. Delovanje obeh algoritmov predstavimo na primerih analize gibanja togih teles.

V naslednjem poglavju predstavimo geometrijsko točno teorijo za nelinearno analizo prostorskih nosilcev in podamo osnovne kinematične zveze med pomiki in rotacijami ter njihovimi odvodi po kraju – deformacijami. Iz izrekov o gibalni in vrtilni količini izpeljemo osnovne enačbe dinamike trirazsežnih linijskih elementov. Enačbe so zapisane tako, da omogočajo obravnavo nosilcev s poljubno začetno geometrijo in začetnimi deformacijami. Pri izbiri materialnega modela se ne omejimo na specifičen material, predpostavimo le, da so konstitucijske zveze znane funkcije deformacij. Enakost ravnotežnih in konstitucijskih notranjih sil in momentov dosežemo z vpeljavo konsistenčnih enačb.

V nadaljevanju predstavimo numerično reševanje dinamičnih enačb geometrijsko točne teorije prostorskih nosilcev. Izpeljemo dve formulaciji končnih elementov, ki temeljita na izbiri deformacijskih količin kot osnovnih neznank problema. V prvem pristopu izhajamo iz objektivne in numerično učinkovite formulacije za statiko prostorskih linijskih konstrukcij, ki je osnovana na izbiri deformacijskih vektorjev za osnovne neodvisne neznanke problema [9, 36]. Za časovno diskretizacijo izberemo Newmarkovo shemo, numerično stabilnost pa dosežemo z implementacijo posplošene- $\alpha$  sheme. V drugem pristopu za osnovne neznanke izberemo krajevne odvode hitrosti in kotnih hitrosti, ki so ekvivalentne časovnim odvodom deformacij. V novem pristopu za časovno integracijo uporabimo modificirano Newmarkovo shemo. Diskretizacija enačb po kraju v obeh formulacijah končnih elementov temelji na interpolaciji osnovnih neznank: v prvi deformacij in v drugi krajevnih odvodom hitrosti. Za diskretizacijo zveznih enačb izberemo kolokacijsko metodo in jim v krepki obliki zadostimo le v izbranih diskretnih točkah. Diskretne enačbe rešujemo z Newtonovo metodo, zato jih lineariziramo, zaradi neaditivnosti prostorskih rotacij pa posebej predstavimo tudi dodajanje popravkov. Predstavljeni formulaciji končni elementov vgradimo v računalniški program zapisan v programskem okolju Matlab. Delovanje algoritmov testiramo na primerih znanih iz literature. Rezultate primerjamo z rezultati drugih avtorjev in predstavimo izčrpne numerične študije.

Študij dinamike prostorskega linijskega nosilca razširimo z reševanjem povezanega problema gibanja masnega delca glede na nosilec. Model nosilca razširimo z enačbami gibanja masnega delca na nosilcu. Posebej obravnavamo odziv sistema pri trku delca ob nosilec in predstavimo rešitve numerične študije.

## 2 OSNOVNE ENAČBE DINAMIKE

### 2.1 Osnovni izreki

Gibanje nosilcev, tako kot gibanje drugih trdnih teles, ki so podvržena dinamičnim vplivom, vodijo osnovni izreki dinamike. Osnovni izreki so izhodiščna točka naših izpeljav, zato jih v najsplošnejši obliki, ki velja za poljubno trdno telo, povzamemo v tem odseku.

Prvi pomemben izrek je **izrek o ohranitvi mase**, ki pove, da se masa telesa ali njegovega poljubnega dela med gibanjem ohranja, če mase ne dodajamo ali odvezujemo:

$$\rho dV = \rho^{[0]} dV^{[0]}. \quad (2.1)$$

Z  $\rho$  je označena gostota materiala z  $dV$  pa elementarni delec volumna v poljubni legi telesa.  $\rho^{[0]}$  in  $dV^{[0]}$  sta isti količini v začetni legi telesa pri času  $t = t_0$ .

Naslednji od osnovnih izrekov je **izrek o gibalni količini**. Izrek o gibalni količini pravi, da je odvod gibalne količine telesa ali njegovega poljubnega dela po času enak rezultanti vseh sil, ki delujejo na telo:

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F}_{\text{rez.}} \quad (2.2)$$

Rezultanto sil, ki delujejo na telo ali na njegov poljubni del, smo označili z  $\mathbf{F}_{\text{rez.}}$ .  $\mathbf{K}$  označuje gibalno količino, ki je definirana kot

$$\mathbf{K} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\mathbf{r}} dV. \quad (2.3)$$

$\mathbf{r}$  je lega poljubnega delca telesa glede na opazovališče prostora  $\mathcal{O}$ . S piko ( $\dot{\phantom{x}}$ ) je označen odvod po času.

Z opazovališčem prostora je povezan **izrek o vrtilni količini**, ki pravi, da je odvod vrtilne količine telesa ali njegovega poljubnega dela glede na opazovališče  $\mathcal{O}$ , po času enak rezultanti vseh momentov, ki delujejo na telo oziroma njegov poljubni del:

$$\dot{\mathbf{L}}^{\mathcal{O}} = \mathbf{M}_{\text{rez.}}^{\mathcal{O}} \quad (2.4)$$

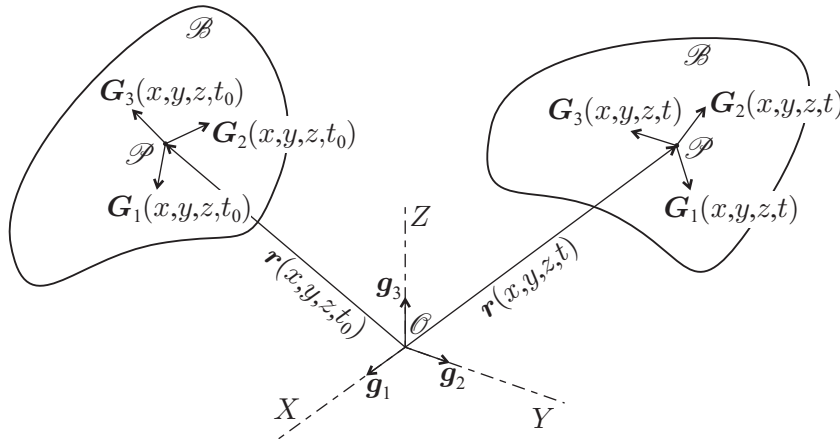
Z  $\mathbf{M}_{\text{rez.}}^{\mathcal{O}}$  smo označili rezultanto momentov glede na opazovališče  $\mathcal{O}$ . Vrtilna količina telesa glede na opazovališče  $\mathcal{O}$  je definirana kot

$$\mathbf{L}^{\mathcal{O}} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{r}} dV. \quad (2.5)$$

Za uporabo osnovnih izrekov moramo primerno opisati poljubno lego telesa oziroma njegovega poljubnega delca. Osnovne izreke smo zapisali dokaj splošno. Za praktično uporabo pa moramo izreke in količine, ki nastopajo v njih, zapisati v izbranih bazah prostora.

## 2.2 Kinematika delca

Opazujemo poljubni delec  $\mathcal{P}$  telesa  $\mathcal{B}$  (slika 2.1). V začetni legi, pri času  $t = t_0$ , delec zavzema točko, ki ima v izbrani parametrizaciji prostora koordinate  $(x, y, z)$ . Lego delca  $\mathcal{P}$  pri nekem času  $t > t_0$  lahko natančno opišemo s krajevnim vektorjem delca  $\mathbf{r}(x, y, z, t)$  glede na nepomično opazovališče  $\mathcal{O}$ . Za opis vektorjev glede na nepomično izhodišče vpeljemo nepomični sistem ortonormiranih baznih vektorjev  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ , s katerimi je definiran *globalni* koordinatni sistem  $(X, Y, Z)$ .



Slika 2.1: Lega poljubnega delca trdnega telesa.

Figure 2.1: The position of an arbitrary particle of a solid body.

Med gibanjem se spreminja lega delca glede na opazovališče  $\mathcal{O}$ . Hitrost delca  $\mathbf{v}(t)$  je določena z odvodom krajevnega vektorja delca po času. Krajevne vektorje delcev običajno zapisujemo v nepomični bazi, hitrost delca je potem enaka:

$$\mathbf{v}_g(t) = \dot{\mathbf{r}}_g(t). \quad (2.6)$$

Pospešek delca glede na izhodiščne nepomične baze je določen z odvodom vektorja hitrosti po času:

$$\mathbf{a}_g(t) = \dot{\mathbf{v}}_g(t). \quad (2.7)$$

Telo se med gibanjem lahko deformira in vrtili, pri tem pa se relativna lega delca  $\mathcal{P}$  glede na ostale delce telesa spreminja. Te spremembe najlažje opišemo, če na delec priprimo pomično ortonormirano bazo  $\{\mathbf{G}_1(x, y, z, t), \mathbf{G}_2(x, y, z, t), \mathbf{G}_3(x, y, z, t)\}$ , ki napenja *lokalni* koordinatni sistem  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Deformiranja telesa opisujejo kinematične enačbe, odvisne od parametrov trirazsežnega prostora. Zapis teh enačb v splošni obliki presega okvir tega dela. Kinematične enačbe bomo podali kasneje, ko bomo predstavili računski model nosilca.

Standardni opis gibanja teles tako vpelje vsaj dve bazi: nepomično ali globalno bazo in pomično ali lokalno bazo. Slednja je povezana z materialnim delcem telesa, zato jo pogosto imenujemo tudi materialna baza, vendar avtorji pri poimenovanjih niso enotni. Preslikava med obema ortonormirana bazama je rotacija  $R$ :

$$R: \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\} \longrightarrow \{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}.$$

Rotacije so pri obravnavi prostorskih problemov pomembne in, kot se izkaže, tudi zelo zahtevne matematične strukture. V naslednjem poglavju pregledno predstavimo rotacije in z njimi povezane operatorje.

### 3 PROSTORSKE ROTACIJE

V tem poglavju predstavimo rotacije in operacije, povezane z rotacijami, ki jih potrebujemo v nadaljevanju dela. Poglavje o rotacijah je del mnogih učbenikov, ki obravnavajo prostorske probleme v mehaniki, na primer Crisfield [37], v literaturi pa lahko poiščemo tudi številne samostojne publikacije, ki obravnavajo prostorske rotacije, omenimo samo deli avtorjev: Argyris [15] in Atluri in Cazzani [16]. Vse potrebne izpeljave črpamo iz obširnega in natančnega pregleda področja prostorskih rotacij, ki ga je v doktorski disertaciji predstavil Zupan [36].

#### 3.1 Rotacijska matrika

Rotacija je preslikava, ki poljubno ortonormirano bazo vektorskega prostora preslika v drugo ortonormirano bazo istega vektorskega prostora. Rotaciji  $R$ , izraženi v bazi prostora, lahko priredimo rotacijsko matriko  $\mathbf{R}$ . Zaradi narave rotacije ima rotacijska matrika lepe lastnosti:

(i) rotacijska matrika  $\mathbf{R}$  je ortogonalna matrika:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \quad (3.2)$$

kjer je  $\mathbf{I}$  enotska matrika, ki pripada identični preslikavi  $I : \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}$ ;

(ii) ohranja dolžino vektorja, na katerega deluje, in

(iii) ohranja kote med vektorji.

V nadaljevanju se osredotočimo na rotacijo, ki bazne vektorje nepomične prostorske baze  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  slika v bazne vektorje pomične baze  $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$ . Poljuben vektor pomične baze je zavrten vektor nepomične baze:

$$\mathbf{G}_{i,g} = \mathbf{R}_g \mathbf{g}_i. \quad (3.3)$$

Z indeksom  $g$  smo poudarili, da so rotacijska matrika  $\mathbf{R}$  in vektorji  $\mathbf{G}_i$  izraženi v nepomični bazi. Če vektorje lokalne baze, izražene v globalni bazi, zapišemo po komponentah:

$$\mathbf{G}_{i,g} = G_{g1,i}\mathbf{g}_1 + G_{g2,i}\mathbf{g}_2 + G_{g3,i}\mathbf{g}_3, \quad i = 1, 2, 3,$$

lahko preberemo komponente rotacijske matrike  $\mathbf{R}_g$ :

$$\mathbf{R}_g = \begin{bmatrix} G_{g1,1} & G_{g1,2} & G_{g1,3} \\ G_{g2,1} & G_{g2,2} & G_{g2,3} \\ G_{g3,1} & G_{g3,2} & G_{g3,3} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$



Stolpci rotacijske matrike, ki nepomično bazo slika v pomično, so torej kar komponente vektorjev lokalne baze, izražene glede na globalno bazo. Zaradi že navedenih lastnosti rotacije, (i)–(iii), so komponente rotacijske matrike medsebojno odvisne. Povezuje jih šest skalarnih enačb:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{1,g} \cdot \mathbf{G}_{2,g} = \mathbf{R}_g \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{R}_g \mathbf{g}_2 = 0 \quad \mathbf{G}_{2,g} \cdot \mathbf{G}_{3,g} = \mathbf{R}_g \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{R}_g \mathbf{g}_3 = 0 \quad \mathbf{G}_{3,g} \cdot \mathbf{G}_{1,g} = \mathbf{R}_g \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{R}_g \mathbf{g}_1 = 0 \\ \|\mathbf{G}_1\| = \|\mathbf{R}_g \mathbf{g}_1\| = 1 \quad \|\mathbf{G}_2\| = \|\mathbf{R}_g \mathbf{g}_2\| = 1 \quad \|\mathbf{G}_3\| = \|\mathbf{R}_g \mathbf{g}_3\| = 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

S piko ( $\cdot$ ) je označen skalarni produkt vektorjev, z ( $\|\ \|\$ ) pa dolžina vektorja. Vezne enačbe povedo, da so stolpci rotacijske matrike enotski in paroma ortogonalni.

Poljuben vektor  $\mathbf{u}$  lahko zapišemo glede na lokalno ali glede na globalno bazo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g = \mathbf{u}_G, \quad \mathbf{u}_g = u_{g1} \mathbf{g}_1 + u_{g2} \mathbf{g}_2 + u_{g3} \mathbf{g}_3, \quad \mathbf{u}_G = u_{G1} \mathbf{G}_1 + u_{G2} \mathbf{G}_2 + u_{G3} \mathbf{G}_3.$$

Transformacijo komponent vektorja  $\mathbf{u}$  med obema bazama predstavlja ravno rotacijska matrika  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{u}_g = \mathbf{R}_g \mathbf{u}_G. \quad (3.6)$$

Podobno velja za poljuben linearni operator  $\mathcal{A}$ , ki mu v nepomični bazi pripada matrika  $\mathbf{A}_g$ , v pomični pa matrika  $\mathbf{A}_G$ . Transformacijo med obema zapisoma lahko zapišemo kot

$$\mathbf{A}_g = \mathbf{R}_g \mathbf{A}_G \mathbf{R}_g^T. \quad (3.7)$$

Pravilo (3.7) uporabimo za zapis rotacijske matrike v pomični bazi:

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_g^T \mathbf{R}_g \mathbf{R}_g = \mathbf{R}_g = \mathbf{R}.$$

Rotacijska matrika ima torej enak komponentni zapis v obeh bazah, med katerima slika, zato indeks baze pri zapisu rotacijske matrike v nadaljevanju opuščamo.

### 3.2 Kotna hitrost in kotni pospešek

Spreminjanje orientacije lokalne baze s časom določajo odvodi baznih vektorjev po času. Za poljubni bazni vektor  $\mathbf{G}_i$  velja:

$$\dot{\mathbf{G}}_{i,g} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{g}_i.$$

Običajno želimo spreminjanje lokalne baze izraziti glede na isto bazo. Upoštevamo obrnjen izraz (3.3) in dobimo

$$\dot{\mathbf{G}}_{i,g} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \mathbf{G}_{i,g}. \quad (3.8)$$

Produkt  $\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$  je antisimetrična matrika, saj zaradi lastnosti (3.1) velja

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{R} \mathbf{R}^T) = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T = \frac{d}{dt} (\mathbf{I}) = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = -\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T = -(\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T)^T. \end{aligned}$$

Antisimetrični operator  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$  označimo z  $\Omega$  in imenujemo operator kotne hitrosti. Ker na levi in desni strani enačbe (3.8) nastopajo vektorji lokalne baze, zapisani v globalni bazi, tudi produkt  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$  določa operator kotne hitrosti glede na globalno bazo:

$$\Omega_g = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T. \quad (3.9)$$

Za vsak antisimetrični operator lahko poiščemo tak pripadajoči osni vektor, da velja:

$$\Omega \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}.$$

Odvodi baznih vektorjev po času so potem določeni s predpisom

$$\dot{\mathbf{G}}_{i,g} = \boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{G}_{i,g}. \quad (3.10)$$

$\boldsymbol{\omega}_g$  določa hitrost vrtenja vektorjev pomične baze, zato ga imenujemo vektor kotne hitrosti. Zapis operatorja kotne hitrosti v lokalni bazi dobimo s koordinatno transformacijo

$$\Omega_G = \mathbf{R}^T \Omega_g \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}, \quad (3.11)$$

pripadajoči osni vektor pa je enak:  $\boldsymbol{\omega}_G = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega}_g$ . Z vektorjem kotne hitrosti  $\boldsymbol{\omega}_G$  lahko zapišemo odvode baznih vektorjev pomične baze, izražene kar v pomični bazi:

$$\dot{\mathbf{G}}_{i,G} = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{G}}_{i,g} = \mathbf{R}^T (\boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{G}_{i,g}) = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{R}^T \mathbf{G}_{i,g} = \boldsymbol{\omega}_G \times \mathbf{G}_{i,G}. \quad (3.12)$$

Zanimajo nas tudi drugi odvodi baznih vektorjev po času. Z odvajanjem izraza  $\dot{\mathbf{G}}_{i,g} = \Omega_g \mathbf{G}_{i,g}$  dobimo

$$\ddot{\mathbf{G}}_{i,g} = \dot{\Omega}_g \mathbf{G}_{i,g} + \Omega_g \dot{\mathbf{G}}_{i,g} = \dot{\Omega}_g \mathbf{G}_{i,g} + \Omega_g \Omega_g \mathbf{G}_{i,g} = (\dot{\Omega}_g + \Omega_g^2) \mathbf{G}_{i,g}. \quad (3.13)$$

Osní vektor antisimetričnega operatorja  $\dot{\Omega}_g$  imenujemo kotni pospešek in označimo z  $\alpha_g$ . Kotni pospešek  $\alpha_g$  je torej kar časovni odvod vektorja kotne hitrosti  $\boldsymbol{\omega}_g$ , enako pa velja tudi za vektorja zapisana v pomični bazi:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_G &= \frac{d}{dt} (\mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega}_g) = \dot{\mathbf{R}}^T \boldsymbol{\omega}_g + \mathbf{R}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_g = \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_G + \mathbf{R}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_g \\ &= (\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}})^T \boldsymbol{\omega}_G + \mathbf{R}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_g = -\Omega_G \boldsymbol{\omega}_G + \mathbf{R}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_g \\ &= \mathbf{R}^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_g = \alpha_G. \end{aligned} \quad (3.14)$$

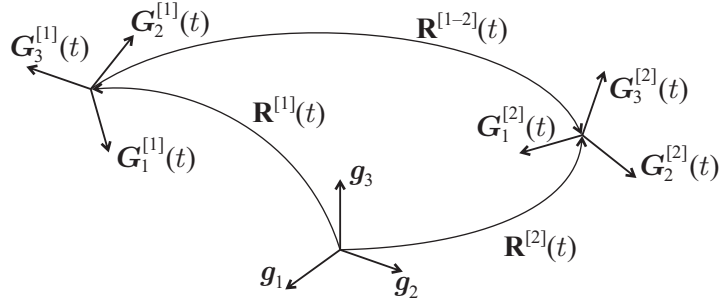
### 3.2.1 Kompozitum rotacij in seštevanje kotnih hitrosti

Vzemimo tri baze prostora  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ ,  $\{\mathbf{G}_1^{[1]}, \mathbf{G}_2^{[1]}, \mathbf{G}_3^{[1]}\}$  in  $\{\mathbf{G}_1^{[2]}, \mathbf{G}_2^{[2]}, \mathbf{G}_3^{[2]}\}$ , predstavljene na sliki 3.1. Preslikava med bazama  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  in  $\{\mathbf{G}_1^{[1]}, \mathbf{G}_2^{[1]}, \mathbf{G}_3^{[1]}\}$  je določena z rotacijo  $R^{[1]}$ :

$$R^{[1]} : \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\} \longrightarrow \{\mathbf{G}_1^{[1]}, \mathbf{G}_2^{[1]}, \mathbf{G}_3^{[1]}\},$$

ki ji pripada rotacijska matrika  $\mathbf{R}^{[1]}$ . Rotacija  $R^{[1-2]}$ , določena s predpisom:

$$R^{[1-2]} : \{\mathbf{G}_1^{[1]}, \mathbf{G}_2^{[1]}, \mathbf{G}_3^{[1]}\} \longrightarrow \{\mathbf{G}_1^{[2]}, \mathbf{G}_2^{[2]}, \mathbf{G}_3^{[2]}\},$$



Slika 3.1: Kompozitum rotacij.  
Figure 3.1: Composite of rotations.

slika med bazama  $\{G_1^{[1]}, G_2^{[1]}, G_3^{[1]}\}$  in  $\{G_1^{[2]}, G_2^{[2]}, G_3^{[2]}\}$ , pripada pa ji rotacijska matrika  $\mathbf{R}^{[1-2]}$ . Z rotacijsko matriko  $\mathbf{R}^{[1-2]}$  lahko poljuben vektor baze  $\{G_1^{[2]}, G_2^{[2]}, G_3^{[2]}\}$  izrazimo v bazi  $\{G_1^{[1]}, G_2^{[1]}, G_3^{[1]}\}$ :  $G_i^{[2]} = \mathbf{R}^{[1-2]} G_i^{[1]}$ . Bazni vektor  $G_i^{[1]}$  pa lahko zapišemo kot zavrti vektor  $g_i$  baze  $\{g_1, g_2, g_3\}$ :  $G_i^{[1]} = \mathbf{R}^{[1]} g_i$ . Če združimo oba zapisa, dobimo predpis, ki daje zvezo med baznimi vektorji baze  $\{g_1, g_2, g_3\}$  in  $\{G_1^{[2]}, G_2^{[2]}, G_3^{[2]}\}$ :

$$G_i^{[2]} = \mathbf{R}^{[1-2]} \mathbf{R}^{[1]} g_i.$$

Rotaciji  $R^{[2]}$ , ki slika med bazama  $\{g_1, g_2, g_3\}$  in  $\{G_1^{[2]}, G_2^{[2]}, G_3^{[2]}\}$

$$R^{[2]} : \{g_1, g_2, g_3\} \longrightarrow \{G_1^{[2]}, G_2^{[2]}, G_3^{[2]}\},$$

torej pripada rotacijska matrika  $\mathbf{R}^{[2]}$

$$\mathbf{R}^{[2]} = \mathbf{R}^{[1-2]} \mathbf{R}^{[1]}. \quad (3.15)$$

Operacija, ki združi dve rotaciji v eno samo, torej ni seštevanje temveč množenje rotacijskih operatorjev, kar poudarimo z izrazom kompozitum rotacij. Ker ima rotacijska matrika enak komponentni zapis v bazah, med katerima slika, tudi kompozitum rotacij v izrazu (3.15) lahko zapišemo glede na eno od obeh baz:

$$\mathbf{R}_g^{[2]} = \mathbf{R}_g^{[1-2]} \mathbf{R}_g^{[1]} = \mathbf{R}_{G^{[2]}}^{[2]} = \mathbf{R}_{G^{[2]}}^{[1-2]} \mathbf{R}_{G^{[2]}}^{[1]}.$$

Pogosto poznamo rotacijsko matriko  $\mathbf{R}^{[1-2]}$  izraženo v bazi  $\{G_1^{[1]}, G_2^{[1]}, G_3^{[1]}\}$ . Z uporabo pravila (3.7) kompozitum rotacij (3.15) dobi obliko

$$\mathbf{R}_g^{[2]} = \mathbf{R}_g^{[1]} \mathbf{R}_{G^{[1]}}^{[1-2]} \mathbf{R}_g^{[1]T} \mathbf{R}_g^{[1]} = \mathbf{R}_g^{[1]} \mathbf{R}_{G^{[1]}}^{[1-2]}. \quad (3.16)$$

Zanima nas kotna hitrost kompozituma rotacij. Naj bo  $\{g_1, g_2, g_3\}$ , nepomična baza prostora bazi  $\{G_1^{[1]}, G_2^{[1]}, G_3^{[1]}\}$  in  $\{G_1^{[2]}, G_2^{[2]}, G_3^{[2]}\}$  pa pomični bazi. Kotno hitrost kompozituma rotacij  $\mathbf{R}^{[2]} = \mathbf{R}^{[1-2]} \mathbf{R}^{[1]}$  določimo po definiciji (3.9). Za odvajanje po času izberemo zapis kompozituma v nepomični bazi, s čimer se izognemo problemu odvajanja baze, v kateri je rotacijski operator zapisan. Kotna hitrost

kompozituma je enaka

$$\begin{aligned}\Omega_g^{[2]} &= \dot{\mathbf{R}}_g^{[2]} \mathbf{R}_g^{[2]T} = \frac{d}{dt} \left( \mathbf{R}_g^{[1-2]} \mathbf{R}_g^{[1]} \right) \left( \mathbf{R}_g^{[1-2]} \mathbf{R}_g^{[1]} \right)^T \\ &= \left( \dot{\mathbf{R}}_g^{[1-2]} \mathbf{R}_g^{[1]} + \mathbf{R}_g^{[1-2]} \dot{\mathbf{R}}_g^{[1]} \right) \mathbf{R}_g^{[1]T} \mathbf{R}_g^{[1-2]T} \\ &= \dot{\mathbf{R}}_g^{[1-2]} \mathbf{R}_g^{[1-2]T} + \mathbf{R}_g^{[1-2]} \dot{\mathbf{R}}_g^{[1]} \mathbf{R}_g^{[1]T} \mathbf{R}_g^{[1-2]T} \\ &= \Omega_g^{[1-2]} + \mathbf{R}_g^{[1-2]} \Omega_g^{[1]} \mathbf{R}_g^{[1-2]T}.\end{aligned}$$

Kotna hitrost kompozituma rotacij je torej vsota kotne hitrosti druge rotacije in transformirane prve rotacije. Vektor kotne hitrosti kompozituma rotacij je osni vektor gornje vsote, določen z

$$\omega_g^{[2]} = \omega_g^{[1-2]} + \mathbf{R}_g^{[1-2]} \omega_g^{[1]}.$$

Lepši in bolj zgovoren zapis vsote kotnih hitrosti dobimo, če kotno hitrost kompozituma zapišemo v novi bazi:

$$\begin{aligned}\omega_{G^{[2]}}^{[2]} &= \mathbf{R}_g^{[2]T} \omega_g^{[2]} = \mathbf{R}_g^{[2]T} \omega_g^{[1-2]} + \mathbf{R}_g^{[1]T} \mathbf{R}_g^{[1-2]T} \mathbf{R}_g^{[1-2]} \omega_g^{[1]} \\ &= \omega_{G^{[2]}}^{[1-2]} + \omega_{G^{[1]}}^{[1]}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Izraz (3.17) pove, da so kotne hitrosti aditivne količine samo v posebnem primeru, ko jih zapišemo v pomičnih bazah. Opozorimo, da sta sumanda v izrazu (3.17) izražena v različnih lokalnih bazah. Rezultat je zelo pomemben pri numeričnem reševanju enačb, v katerih kot osnovne neznanke nastopajo kotne hitrosti.

### 3.3 Odvod in integral vektorske funkcije v pomični bazi

Vzemimo poljuben vektor  $\mathbf{u}(t)$  in ga zapišemo v pomični bazi, odvisni od časa  $t$ . Absolutni ali totalni odvod vektorja v pomični bazi pravilno določimo tako, da odvajamo komponente vektorja in bazne vektorje:

$$\dot{\mathbf{u}}_{G,abs}(t) = \dot{u}_{G1} \mathbf{G}_1 + \dot{u}_{G2} \mathbf{G}_2 + \dot{u}_{G3} \mathbf{G}_3 + u_{G1} \dot{\mathbf{G}}_1 + u_{G2} \dot{\mathbf{G}}_2 + u_{G3} \dot{\mathbf{G}}_3.$$

Vektorju odvodov komponent pravimo relativni odvod

$$\dot{\mathbf{u}}_{G,rel}(t) = \dot{u}_{G1} \mathbf{G}_1 + \dot{u}_{G2} \mathbf{G}_2 + \dot{u}_{G3} \mathbf{G}_3,\tag{3.18}$$

vektorju, ki ga sestavljajo odvodi baznih vektorjev, pa sistemski odvod. Odvode baznih vektorjev izrazimo s kotno hitrostjo, kot to določa pravilo (3.12). Sistemski odvod vektorja je potem enak

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{G,sys}(t) &= u_{G1} \dot{\mathbf{G}}_1 + u_{G2} \dot{\mathbf{G}}_2 + u_{G3} \dot{\mathbf{G}}_3 \\ &= u_{G1} \omega_G \times \mathbf{G}_1 + u_{G2} \omega_G \times \mathbf{G}_2 + u_{G3} \omega_G \times \mathbf{G}_3 \\ &= \omega_G \times (u_{G1} \mathbf{G}_1 + u_{G2} \mathbf{G}_2 + u_{G3} \mathbf{G}_3) \\ &= \omega_G \times \mathbf{u}_G.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Kar smo napisali, je pomembno za nadaljevanje našega dela. V izrazih nastopajo komponentni zapisi vektorjev v pomični in nepomični bazi. Poljuben vektor  $\mathbf{u}$  zapišemo s komponentami v pomični bazi

$\mathbf{u}_g(t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{u}_G(t)$  in izrazimo njegov odvod po parametru  $t$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_g(t) &= \frac{d}{dt} (\mathbf{R}(t) \mathbf{u}_G(t)) \\ &= \dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{u}_G(t) + \mathbf{R}(t) \dot{\mathbf{u}}_G(t) \\ &= \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\Omega}_G(t) \mathbf{u}_G(t) + \mathbf{R}(t) \dot{\mathbf{u}}_G(t) \\ &= \mathbf{R}(t) \left( \boldsymbol{\omega}_G(t) \times \mathbf{u}_G(t) \right) + \mathbf{R}(t) \dot{\mathbf{u}}_G(t) \\ &= \mathbf{R}(t) \left( \boldsymbol{\omega}_G(t) \times \mathbf{u}_G(t) + \dot{\mathbf{u}}_G(t) \right). \end{aligned}$$

V oklepaju prepoznamo absolutni odvod vektorja zapisanega v pomični bazi.  $\boldsymbol{\omega}_G \times \mathbf{u}_G$  je sistemski odvod,  $\dot{\mathbf{u}}_G$  pa relativni odvod. Tako smo opredelili pomen oznake  $\dot{\mathbf{u}}_G$ . S tako oznako bomo označevali odvod komponent vektorja, izraženega v pomični bazi, torej njegov relativni odvod

$$\dot{\mathbf{u}}_G = \dot{\mathbf{u}}_{G,rel}. \quad (3.20)$$

Podobno, kot velja za odvajanje vektorja, izraženega v pomični bazi, velja tudi za njegovo integracijo. Vzemimo zopet vektor  $\mathbf{u}_G(t)$ . Pri integraciji vektorja  $\mathbf{u}_G$  po parametru  $t$  moramo upoštevati, da so tudi bazni vektorji odvisni od  $t$ . Integriramo tako komponente, kot tudi bazne vektorje:

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbf{u}_G(\tilde{t}) d\tilde{t} &= \int_0^t [u_{G1}(\tilde{t}) \mathbf{G}_1(\tilde{t}) + u_{G2}(\tilde{t}) \mathbf{G}_2(\tilde{t}) + u_{G3}(\tilde{t}) \mathbf{G}_3(\tilde{t})] d\tilde{t} \\ &= \int_0^t u_{G1}(\tilde{t}) \mathbf{G}_1(\tilde{t}) d\tilde{t} + \int_0^t u_{G2}(\tilde{t}) \mathbf{G}_2(\tilde{t}) d\tilde{t} + \int_0^t u_{G3}(\tilde{t}) \mathbf{G}_3(\tilde{t}) d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Taka integracija je lahko zelo zahtevna, ker običajno poznamo le spreminjanje komponent vektorja v odvisnosti od  $t$ . Spreminjanje baznih vektorjev v odvisnosti od  $t$  pa običajno poznamo le posredno, preko rotacijske matrike  $\mathbf{R}(t)$ . Vektorje zato integriramo v nepomični bazi

$$\int_0^t \mathbf{u}_g(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_0^t \mathbf{R}(\tilde{t}) \mathbf{u}_G(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

V posebnih primerih pa lahko integracijo vektorjev opravimo kar v pomični bazi. Prvi tak primer integracije v pomični bazi je integral absolutnega odvoda vektorja. Naj bo  $\dot{\mathbf{u}}_{G,abs}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{u}_G(t)$ ; potem je integral  $\int_0^t \dot{\mathbf{u}}_{G,abs}(\tilde{t}) d\tilde{t}$  enak

$$\int_0^t \dot{\mathbf{u}}_{G,abs}(\tilde{t}) d\tilde{t} = u_{G1}(t) \mathbf{G}_1(t) + u_{G2}(t) \mathbf{G}_2(t) + u_{G3}(t) \mathbf{G}_3(t) = \mathbf{u}_G(t) - \mathbf{u}_G(0),$$

kar preprosto dokažemo z odvajanjem.

Drug poseben primer integracije v pomični bazi je integral relativnega odvoda, pri katerem integriramo samo komponente vektorja glede na pomično bazo prostora. Naj bo  $\dot{\mathbf{u}}_{G,rel}(t)$  relativni odvod vektorja  $\mathbf{u}_G(t)$ , definiran z izrazom (3.18). Če integriramo zgolj komponente relativnega odvoda dobimo:

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{\mathbf{u}}_{G,rel}(\tilde{t}) d\tilde{t} &= \int_0^t \dot{u}_{G1}(\tilde{t}) d\tilde{t} \mathbf{G}_1 + \int_0^t \dot{u}_{G2}(\tilde{t}) d\tilde{t} \mathbf{G}_2 + \int_0^t \dot{u}_{G3}(\tilde{t}) d\tilde{t} \mathbf{G}_3 \\ &= u_{G1}(t) \mathbf{G}_1 + u_{G2}(t) \mathbf{G}_2 + u_{G3}(t) \mathbf{G}_3 - u_{G1}(0) \mathbf{G}_1 - u_{G2}(0) \mathbf{G}_2 - u_{G3}(0) \mathbf{G}_3 \\ &= \mathbf{u}_G(t) - \mathbf{u}_G(0). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Integral komponent relativnega odvoda vektorja  $\mathbf{u}_G$  je torej do konstante natančno enak vektorju  $\mathbf{u}_G$ .

### 3.4 Parametrizacija rotacij

Zaradi lastnosti (3.5) so komponente rotacijske matrike medsebojno odvisne. Pri reševanju enačb, v katerih nastopajo rotacije kot neznanke, moramo hkrati zadostiti še vezne enačbe. Temu se izognemo, če za vsako rotacijo določimo tri neodvisne parametre, s katerimi je rotacija enolično določena. Iz literature so znane različne parametrizacije, med pogostejše uporabljanimi pa je rotacijski vektor. Rotacijski vektor  $\boldsymbol{\vartheta}$  je določen s smerjo  $\mathbf{n}$  in velikostjo rotacije  $\vartheta$ :

$$\boldsymbol{\vartheta} = \vartheta \mathbf{n}. \quad (3.22)$$

Z rotacijsko matriko sta povezana preko matričnega eksponenta:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}) = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\vartheta})) = \mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\vartheta}) + \frac{1}{2}\mathbf{S}(\boldsymbol{\vartheta})^2 + \frac{1}{3}\mathbf{S}(\boldsymbol{\vartheta})^3 + \dots \quad (3.23)$$

V izrazu (3.23) smo vpeljali oznako  $\mathbf{S}(\mathbf{u})$  za antisimetrično matriko, ki pripada poljubnemu vektorju  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_2 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{S}(\mathbf{u})^T. \quad (3.24)$$

Rotacijsko matriko, parametrizirano z rotacijskim vektorjem, lahko zapišemo v zaključeni obliki z dobro znano Rodriguesovo formulo [15, 36]

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{I} + \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \mathbf{S}(\boldsymbol{\vartheta}) + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \mathbf{S}^2(\boldsymbol{\vartheta}). \quad (3.25)$$

Rotacijski vektor  $\boldsymbol{\vartheta}$  je lastni vektor matrike  $\mathbf{R}$ , zato velja  $\boldsymbol{\vartheta}_g = \mathbf{R}\boldsymbol{\vartheta}_G = \boldsymbol{\vartheta}_G$ .

V nadaljevanju bomo pogosto srečali izraze, v katerih nastopajo antisimetrične matrike. Izpeljave nekaterih enačb precej poenostavimo, če vnaprej pripravimo nekaj zvez med antisimetričnimi matrikami in njihovimi osnimi vektorji. Naj bosta  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{v}$  poljubna vektorja, potem velja

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{S}(\mathbf{u}) = -\mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{v}) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad (3.26)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{v}) - \mathbf{S}(\mathbf{v}) \mathbf{S}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{v}) \quad (3.27)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{S}(\mathbf{u}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{S}(\mathbf{v}) = \mathbf{S}(\mathbf{S}^2(\mathbf{u}) \mathbf{v}). \quad (3.28)$$

Uporaba antisimetričnega operatorja je prikladna tudi za zapis vektorskega produkta poljubnih vektorjev  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{v}$ , ki ga nadomestimo z matričnim produktom:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{v} = -\mathbf{S}(\mathbf{v}) \mathbf{u}. \quad (3.29)$$

Lastnosti (3.26)–(3.29) preprosto dokažemo, če vektorja  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{v}$  zapišemo v komponentni obliki, opravimo ustrezne operacije in primerjamo leve in desne strani dobljenih izrazov.

Za nekatere izpeljave je priročno, če definiramo še operator  $\mathbf{A}$ , ki antisimetrični matriki, priredi njen osni vektor:

$$\mathbf{A}(\mathbf{S}(\mathbf{u})) = \mathbf{u}. \quad (3.30)$$

### 3.4.1 Rotacija s konstantno kotno hitrostjo

Oglejmo si primer pomične baze, ki se glede na nepomično vrti s konstantno kotno hitrostjo:

$$\boldsymbol{\Omega}_G = \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \textit{konst.}$$

Za tak primer lahko preprosto določimo spreminjanje rotacijske matrike s časom. Rešujemo začetni problem:

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\Omega}_G, \quad \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}^{[0]}, \quad (3.31)$$

kjer je  $\mathbf{R}^{[0]}$  začetna vrednost rotacije. Ker je kotna hitrost konstantna, ima enak komponentni zapis v vsaki legi pomične baze  $\{\mathbf{G}_1(t), \mathbf{G}_2(t), \mathbf{G}_3(t)\}$ , zato oznako specifične lege baze opuščamo:  $\boldsymbol{\Omega}_{G^{[0]}} = \boldsymbol{\Omega}_{G^{[t]}} = \boldsymbol{\Omega}_G$ . Rešitev začetnega problema (3.31) je enaka:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^{[0]} \exp(t\boldsymbol{\Omega}_G). \quad (3.32)$$

Dokaz je preprost. Z odvajanjem rešitve (3.32) po času dobimo začetno diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}(t) &= \frac{d}{dt} \left( \mathbf{R}^{[0]} \exp(t\boldsymbol{\Omega}_G) \right) \\ &= \mathbf{R}^{[0]} \frac{d}{dt} \left( \mathbf{I} + t\boldsymbol{\Omega}_G + \frac{1}{2!} t^2 \boldsymbol{\Omega}_G^2 + \frac{1}{3!} t^3 \boldsymbol{\Omega}_G^3 + \dots + \frac{1}{n!} t^n \boldsymbol{\Omega}_G^n + \dots \right) \\ &= \mathbf{R}^{[0]} \left( \boldsymbol{\Omega}_G + t\boldsymbol{\Omega}_G^2 + \frac{1}{2!} t^2 \boldsymbol{\Omega}_G^3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \boldsymbol{\Omega}_G^n + \dots \right) \\ &= \mathbf{R}^{[0]} \left( \mathbf{I} + t\boldsymbol{\Omega}_G + \frac{1}{2!} t^2 \boldsymbol{\Omega}_G^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \boldsymbol{\Omega}_G^{n-1} + \dots \right) \boldsymbol{\Omega}_G \\ &= \mathbf{R}^{[0]} \exp(t\boldsymbol{\Omega}_G) \boldsymbol{\Omega}_G \\ &= \mathbf{R}(t) \boldsymbol{\Omega}_G. \end{aligned}$$

Vrednost predpostavljene rešitve v začetni legi  $\mathbf{R}(0)$  je kar enaka začetni vrednosti  $\mathbf{R}^{[0]}$ :

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}^{[0]} \exp(0\boldsymbol{\Omega}_G) = \mathbf{R}^{[0]} \mathbf{I} = \mathbf{R}^{[0]},$$

s čimer je dokaz zaključen.

Če za zapis eksponentne mape v rešitvi (3.32) uporabimo Rodriguesovo formulo (3.25) in upoštevamo, da je osni vektor antisimetričnega operatorja  $\boldsymbol{\Omega}_G$  enak  $\boldsymbol{\omega}_G$ , lahko zapišemo:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}^{[0]} \mathbf{R}(t\boldsymbol{\omega}_G). \quad (3.33)$$

Rotacijska matrika  $\mathbf{R}(t\boldsymbol{\omega}_G)$  slika med začetno lego pomičnega koordinatnega sistema in poljubno lego istega koordinatnega sistema pri času  $t$ . Že iz zapisa matrike sledi, da jo lahko parametriziramo z rotacijskim vektorjem:

$$\boldsymbol{\theta}_G(t) = t\boldsymbol{\omega}_G \quad (3.34)$$

Za rotacijsko matriko, ki slika med pomičnima bazama, v nadaljevanju pogosto uporabimo izraz inkrementna rotacijska matrika, za rotacijski vektor, ki jo parametrizira, pa inkrementni rotacijski vektor. Podobno kot za kotno hitrost tudi za inkrementni rotacijski vektor velja, da ima enak komponentni zapis v vsaki legi pomične baze:  $\boldsymbol{\theta}_{G^{[0]}} = \boldsymbol{\theta}_{G^{[t]}} = \boldsymbol{\theta}_G$ .

### 3.4.2 Zveza med kotno hitrostjo in odvodom rotacijskega vektorja po času

Naj bo  $\vartheta_g$  rotacijski vektor, odvisen od časa  $t$ . Zanima nas zveza med odvodom rotacijskega vektorja  $\dot{\vartheta}_g$  in vektorjem kotne hitrosti  $\omega_g$ , ki pripada rotaciji, določeni z  $\vartheta_g$ . Kotna hitrost je osni vektor produkta  $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ , zato najprej zapišemo odvod rotacijske matrike po času. Rotacijsko matriko, parametrizirano z rotacijskim vektorjem  $\vartheta_g$ , zapišemo z Rodriguesovo formulo (3.25), odvajamo in dobimo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}(\vartheta_g) &= \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \mathbf{S}(\dot{\vartheta}_g) + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \left[ \mathbf{S}(\dot{\vartheta}_g) \mathbf{S}(\vartheta_g) + \mathbf{S}(\vartheta_g) \mathbf{S}(\dot{\vartheta}_g) \right] \\ &\quad + \frac{\vartheta \cos \vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^2} \dot{\vartheta} \mathbf{S}(\vartheta_g) + \frac{\vartheta \sin \vartheta - 2(1 - \cos \vartheta)}{\vartheta^3} \dot{\vartheta} \mathbf{S}^2(\vartheta_g). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dolžino rotacijskega vektorja  $\vartheta$  zapišemo s pomočjo skalarnega produkta:  $\vartheta = \sqrt{\vartheta_g \cdot \vartheta_g}$ . Odvod dolžine rotacijskega vektorja je potem enak

$$\dot{\vartheta} = \frac{\dot{\vartheta}_g \cdot \vartheta_g + \vartheta_g \cdot \dot{\vartheta}_g}{2\sqrt{\vartheta_g \cdot \vartheta_g}} = \frac{\vartheta_g \cdot \dot{\vartheta}_g}{\vartheta}. \quad (3.36)$$

Izraz (3.36) vstavimo v (3.35), upoštevamo lastnost (3.26) in dobimo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}(\vartheta_g) &= \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \mathbf{S}(\dot{\vartheta}_g) + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \left[ \mathbf{S}(\dot{\vartheta}_g) \mathbf{S}(\vartheta_g) + \mathbf{S}(\vartheta_g) \mathbf{S}(\dot{\vartheta}_g) \right] \\ &\quad - \frac{\vartheta \cos \vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} \mathbf{S}(\vartheta_g) \mathbf{S}(\dot{\vartheta}_g) \mathbf{S}(\vartheta_g) \\ &\quad - \frac{\vartheta \sin \vartheta - 2(1 - \cos \vartheta)}{\vartheta^4} \mathbf{S}(\vartheta_g) \mathbf{S}(\dot{\vartheta}_g) \mathbf{S}(\vartheta_g)^2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Odvod rotacijske matrike po času (3.37) z desne pomnožimo z  $\mathbf{R}^T(\vartheta_g)$ . Po daljšem urejanju produkt izrazimo z vsoto antisimetričnih matrik

$$\dot{\mathbf{R}}(\vartheta_g) \mathbf{R}^T(\vartheta_g) = \mathbf{S}(\dot{\vartheta}_g) + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \mathbf{S}(\mathbf{S}(\vartheta_g) \dot{\vartheta}_g) + \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} \mathbf{S}(\mathbf{S}^2(\vartheta_g) \dot{\vartheta}_g).$$

Kotno hitrost potem lahko zapišemo kot produkt matrike  $\mathbf{T}(\vartheta_g)$ , neodvisne od odvoda rotacijskega vektorja, in  $\dot{\vartheta}_g$ :

$$\omega_g = \mathbf{A}(\dot{\mathbf{R}}(\vartheta_g) \mathbf{R}^T(\vartheta_g)) = \mathbf{T}(\vartheta_g) \dot{\vartheta}_g, \quad (3.38)$$

kjer je matrika  $\mathbf{T}(\vartheta_g)$  enaka

$$\mathbf{T}(\vartheta) = \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \mathbf{S}(\vartheta) + \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{\vartheta^3} \mathbf{S}^2(\vartheta). \quad (3.39)$$

Matriko  $\mathbf{T}$  v literaturi pogosto imenujejo transformacijska matrika (npr. [36, 38]) in ji, podobno kot rotacijski matriki, pripada enak zapis tako v fiksni kot v ustrezni lokalni bazi:  $\mathbf{T}(\vartheta_g) = \mathbf{T}(\vartheta_G)$ . Transformacijska matrika ima še nekaj lepih lastnosti:

$$\mathbf{R}^T(\vartheta) \mathbf{T}(\vartheta) = \mathbf{T}(\vartheta) \mathbf{R}^T(\vartheta) = \mathbf{T}^T(\vartheta) \quad (3.40)$$

$$\mathbf{R}^T(\vartheta) \mathbf{T}(\vartheta) \mathbf{R}(\vartheta) = \mathbf{T}(\vartheta), \quad (3.41)$$

njen inverz pa je enak:

$$\mathbf{T}^{-1}(\vartheta) = \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{S}(\vartheta) + \frac{1}{\vartheta^2} \left( 1 - \frac{\vartheta}{2 \tan \frac{\vartheta}{2}} \right) \mathbf{S}^2(\vartheta).$$



Če v enačbi (3.38) upoštevamo  $\boldsymbol{\omega}_g = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_G$  in lastnost (3.40) transformacijske matrike, dobimo zvezo med kotno hitrostjo, zapisano v pomični bazi, in odvodom rotacijskega vektorja v nepomični bazi:

$$\boldsymbol{\omega}_G = \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\vartheta}_g)\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_g. \quad (3.42)$$

Zgornje izpeljave lahko posplošimo na odvode rotacijskih matrik po poljubnem parametru, od katerega je matrika odvisna. Vzemimo na primer, da je inkrementni rotacijski vektor iz rešitve (3.34) zapisan v pomični bazi prostora, odvisni od prostorskega parametra  $x$ . Zanima nas, kako je odvod rotacijske matrike  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G(x))$  po parametru  $x$  povezan z odvodom vektorja  $\boldsymbol{\theta}_G(x)$  po  $x$ .

Odvod rotacijske matrike, izražene z rotacijskim vektorjem v pomični bazi, je odvod njenih komponent in ga formalno lahko zapišemo na enak način, kot smo zapisali odvod rotacijske matrike po času (3.37):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G(x)) &= \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}'_G) + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}[\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}'_G)\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}'_G)] \\ &\quad - \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\theta^3}\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}'_G)\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G) \\ &\quad - \frac{\theta\sin\theta - 2(1-\cos\theta)}{\theta^4}\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}'_G)\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G)^2. \end{aligned}$$

Potem je produkt  $\mathbf{R}'(\boldsymbol{\theta}_G(x))\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}_G(x))$  enak

$$\mathbf{R}'(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}_G) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}'_G) + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\mathbf{S}(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G)\boldsymbol{\theta}'_G) + \frac{\theta-\sin\theta}{\theta^3}\mathbf{S}(\mathbf{S}^2(\boldsymbol{\theta}_G)\boldsymbol{\theta}'_G),$$

osni vektor tega produkta pa je enak

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}'(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}_G)) = \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G)\boldsymbol{\theta}'_G. \quad (3.43)$$

Na koncu še enkrat poudarimo, da smo odvajali samo komponente rotacijske matrike, zapisane v pomični bazi. Zato je odvod inkrementnega rotacijskega vektorja  $\boldsymbol{\theta}_G$  po  $x$  relativni odvod vektorja, ki ga v skladu z dogovorom (3.20) pišemo kot  $\boldsymbol{\theta}'_G$ .

### 3.4.3 Variacija rotacijske matrike, parametrizirane z rotacijskim vektorjem

Vzemimo rotacijski vektor  $\boldsymbol{\vartheta}$  in njegovo poljubno spremembo  $\epsilon\delta\boldsymbol{\vartheta}$ . Smerni odvod rotacijskega operatorja  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta})$  je limita spremembe operatorja, povzročene z  $\epsilon\delta\boldsymbol{\vartheta}$ , ko gre  $\epsilon$  proti nič. Rotacija, ki pripada spremembi rotacijskega vektorja  $\epsilon\delta\boldsymbol{\vartheta}$ , je enaka  $\mathbf{R}(\epsilon\delta\boldsymbol{\vartheta})$ , skupna rotacija pa je kompozitum  $\mathbf{R}(\epsilon\delta\boldsymbol{\vartheta})\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta})$ . Smerni odvod potem izračunamo kot:

$$\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{R}(\epsilon\delta\boldsymbol{\vartheta})\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}).$$

$\mathbf{R}(\epsilon\delta\boldsymbol{\vartheta})$  zapišemo z Rodriguesovo formulo (3.25), odvajamo po  $\epsilon$ , izvrednotimo pri  $\epsilon = 0$  in dobimo:

$$\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\vartheta})\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}). \quad (3.44)$$

Podobno je sprememba rotacije lahko določena tudi kot komponiranje z desne  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_g)\mathbf{R}(\epsilon\delta\boldsymbol{\vartheta}_G)$ , od koder sledi:

$$\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_g)\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\vartheta}_G).$$

Variaciji obeh izrazov morata biti enaki, potem velja

$$\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\vartheta}_G) = \mathbf{R}^T \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\vartheta}_g) \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \delta\boldsymbol{\vartheta}_G = \mathbf{R}^T \delta\boldsymbol{\vartheta}_g. \quad (3.45)$$

Variacijo rotacijske matrike, ki deluje na poljuben vektor  $\mathbf{u}$ , lahko izrazimo z variacijo rotacijskega vektorja:

$$\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{u} = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{u} = \delta\boldsymbol{\vartheta} \times \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{u} = -\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{u} \times \delta\boldsymbol{\vartheta} = -\mathbf{S}(\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}) \mathbf{u}) \delta\boldsymbol{\vartheta}. \quad (3.46)$$

### 3.4.4 Variacija rotacijske matrike, parametrizirane z aditivnim rotacijskim vektorjem

Pri reševanju kinematičnih enačb s časovno diskretnimi shemami imamo rotacije pogosto izražene s kompozitumom znane rotacije in inkrementne rotacije, ki je običajno zapisana v pomični bazi prostora. Primera takih rotacij smo zapisali že v izrazih (3.16) in (3.33).

Vzemimo inkrementno rotacijsko matriko, parametrizirano z rotacijskim vektorjem, zapisanim v pomični bazi:  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G)$ . Variacijo rotacijske matrike lahko poiščemo multiplikativno

$$\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) \mathbf{R}(\epsilon\delta\boldsymbol{\theta}_G)$$

Spremembo rotacijske matrike zapišemo z Rodriguesovo formulo, odvajamo po  $\epsilon$  in izvednotimo pri  $\epsilon = 0$ . Dobimo

$$\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_G) \quad (3.47)$$

Spremenjeno rotacijsko matriko lahko opišemo tudi tako, da rotacijskemu vektorju spremembo kar prištejemo:  $\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G + \epsilon\delta\boldsymbol{\theta}_G^A)$ . Vektor  $\delta\boldsymbol{\theta}_G^A$  imenujemo “aditivni” rotacijski vektor. Določimo ga tako, da velja

$$\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G + \epsilon\delta\boldsymbol{\theta}_G^A).$$

$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G + \epsilon\delta\boldsymbol{\theta}_G^A)$  zapišemo z Rodriguesovo formulo (3.25), odvajamo po  $\epsilon$  in izvednotimo pri  $\epsilon = 0$ . Dobimo:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) &= \frac{\sin\theta}{\theta} \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_G^A) + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} (\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_G^A) \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G) \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_G^A)) \\ &\quad + \frac{\theta \cos\theta - \sin\theta}{\theta^3} (\boldsymbol{\theta}_G \cdot \delta\boldsymbol{\theta}_G^A) \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G) + \frac{\theta \sin\theta - 2(1 - \cos\theta)}{\theta^4} (\boldsymbol{\theta}_G \cdot \delta\boldsymbol{\theta}_G^A) \mathbf{S}^2(\boldsymbol{\theta}_G). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Podobno kot za odvod rotacijske matrike lahko tudi za njeno variacijo v smislu aditivnega rotacijskega vektorja pokažemo, da je produkt  $\delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T$  antisimetrična matrika

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\delta\mathbf{R}^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}\delta\mathbf{R}^T = -(\delta\mathbf{R}\mathbf{R}^T)^T.$$

Izraz (3.48) z desne pomnožimo z  $\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}_G)$  in po končanem urejanju zapišemo

$$\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}_G) = \mathbf{S} \left( \delta\boldsymbol{\theta}_G^A + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G) \delta\boldsymbol{\theta}_G^A + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3} \mathbf{S}^2(\boldsymbol{\theta}_G) \delta\boldsymbol{\theta}_G^A \right). \quad (3.49)$$

V oklepaju na desni strani izraza (3.49) prepoznamo produkt transformacijske matrike  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G)$  in aditivne variacije  $\delta\boldsymbol{\theta}_G^A$ :

$$\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}_G) = \mathbf{S}(\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G)\delta\boldsymbol{\theta}_G^A). \quad (3.50)$$

Če izraz (3.47) z desne množimo z  $\mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}_G)$  in primerjamo z (3.50), pokažemo da je povezava med aditivno variacijo  $\delta\boldsymbol{\theta}_G^A$  in multiplikativno variacijo  $\delta\boldsymbol{\theta}_G$  enaka

$$\delta\boldsymbol{\theta}_G = \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G)\delta\boldsymbol{\theta}_G^A = \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\theta}_G)\delta\boldsymbol{\theta}_G^A. \quad (3.51)$$

Tudi v primeru variacije rotacijske matrike v smislu aditivnega rotacijskega vektorja je zaradi reševanja enačb koristno variacijo  $\delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{u}$ , kjer je  $\mathbf{u}$  poljuben vektor, izraziti z variacijo aditivnega rotacijskega vektorja. Izraz (3.47) najprej pomnožimo z  $\mathbf{u}$ , nato pa upoštevamo (3.51) in dobimo:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{u} &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{u} \\ &= -\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{S}(\mathbf{u})\delta\boldsymbol{\theta}_G \\ &= -\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G)\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\theta}_G)\delta\boldsymbol{\theta}_G^A. \end{aligned} \quad (3.52)$$

## 4 ČASOVNO INTEGRACIJSKE SCHEME

Matematični modeli konstrukcij in mehanizmov so pogosto opisani s togimi začetnimi problemi oblike  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ . Eno najstarejših definicij togih diferencialnih enačb sta v precej pragmatični obliki že leta 1952 podala Curtiss in Hirschfelder [39], ki pravita: “toge diferencialne enačbe so tiste diferencialne enačbe, pri katerih implicitne metode reševanja delujejo bolje, običajno mnogo bolje kot eksplicitne metode”. Najpreprostejša implicitna metoda je Eulerjeva metoda

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad h = t_{n+1} - t_n. \quad (4.1)$$

Če shemo (4.1) uporabimo za diskretizacijo zvez med pomiki in hitrostmi (2.6) ter med hitrostmi in pospeški (2.7), dobimo posebno skupino metod za reševanje diferencialnih enačb drugega reda. Eno od takih metod je leta 1959 predlagal Newmark [28]. Vse od takrat so klasična Newmarkova metoda in njene modifikacije široko uporabljene za diskretizacijo gibalnih enačb v dinamiki togih in podajnih teles. Lepa lastnost takih metod je, da ne posegajo neposredno v formulacijo enačb dinamičnega sistema, uporabimo jih le za diskretizacijo zvez med kinematičnimi količinami, ki nastopajo v teh enačbah. Tak pristop izberemo tudi za časovno diskretizacijo kinematičnih količin v formulaciji enačb dinamike prostorskih nosilcev, ki jo predstavimo v naslednjem poglavju.

Poleg togosti diferencialnih enačb so numerične težave pri časovni integraciji povezane tudi z multiplikativno naravo prostorskih rotacij in različnimi parametrizacijami rotacij. Razširitev Newmarkove metode na prostorske rotacije sta prva predstavila Simo in Vu-Quoc [4], ki za osnovno neznanko problema poleg pomikov izbereta tudi rotacijski vektor.

V tem poglavju najprej predstavimo Newmarkovo shemo in njeno razširitev na prostorske rotacije, v kateri kot osnovne neznanke nastopajo pomiki in zasuki. V nadaljevanju pa predstavimo povsem novo implicitno časovno integracijsko shemo, v kateri za osnovne neznanke izberemo odvode pomikov in zasukov po času.

Diskretizirali bomo kinematične enačbe (2.6)–(2.7) in (3.11)–(3.14):

$$\dot{\mathbf{r}}_g(t) = \mathbf{v}_g(t) \quad (4.2)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_g(t) = \mathbf{a}_g(t) \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_G(t)) \quad (4.4)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_G(t) = \boldsymbol{\alpha}_G(t). \quad (4.5)$$

Privzemimo, da pomike, zasuke, hitrosti in pospeške poznamo pri času  $t_n$ . Za posamezno količino  $(\cdot)$ , iz vrednoteno pri poljubnem času  $t_m$ , uporabljamo oznako:  $(\cdot)^{[m]}$ . Oznaka velja tudi za bazne vektorje časovno spremenljive lokalne baze, na primer:  $\mathbf{u}_{G^{[m]}} = u_{G1}^{[m]}\mathbf{G}_1^{[m]} + u_{G2}^{[m]}\mathbf{G}_2^{[m]} + u_{G3}^{[m]}\mathbf{G}_3^{[m]}$ .

## 4.1 Newmarkova shema

Zveze med translacijskimi količinami lahko diskretiziramo po vzoru standardne aditivne sheme [28], ki predpostavlja zveze med kinematičnimi količinami pri časih  $t_n$  in  $t_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_g^{[n+1]} &= \mathbf{r}_g^{[n]} + \mathbf{u}_g \\ \mathbf{u}_g &= h \mathbf{v}_g^{[n]} + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}_g^{[n]} + \beta \mathbf{a}_g^{[n+1]} \right] \\ \mathbf{v}_g^{[n+1]} &= \mathbf{v}_g^{[n]} + h \left[ (1 - \gamma) \mathbf{a}_g^{[n]} + \gamma \mathbf{a}_g^{[n+1]} \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$h = t_{n+1} - t_n$  je časovni korak sheme,  $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$  in  $\gamma \in [0, 1]$  sta parametra sheme.

Pri diskretizaciji zvez med rotacijskimi količinami moramo upoštevati naravo multiplikativne grupe prostorskih rotacij, njenega tangentnega prostora in njune povezanosti preko matričnega eksponenta. Newmarkova shema za rotacijske količine je tako ustrezno prirejena [4]

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{[n+1]} &= \mathbf{R}^{[n]} \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}_G)) = \mathbf{R}^{[n]} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) \\ \boldsymbol{\theta}_G &= h \boldsymbol{\omega}_{G^{[n]}}^{[n]} + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n]}}^{[n]} + \beta \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} \right] \\ \boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} &= \boldsymbol{\omega}_{G^{[n]}}^{[n]} + h \left[ (1 - \gamma) \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n]}}^{[n]} + \gamma \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Inkrementni vektor  $\boldsymbol{\theta}_G$ , ki slika med bazama  $\{\mathbf{G}_1^{[n]}, \mathbf{G}_2^{[n]}, \mathbf{G}_3^{[n]}\}$  in  $\{\mathbf{G}_1^{[n+1]}, \mathbf{G}_2^{[n+1]}, \mathbf{G}_3^{[n+1]}\}$ , ima enak komponentni zapis v obeh bazah, med katerima slika:  $\boldsymbol{\theta}_{G^{[n]}} = \boldsymbol{\theta}_{G^{[n+1]}}$ .

Dinamične enačbe, v katerih so kinematične količine diskretizirane z implicitno shemo, rešujemo iteracijsko, zato jih lineariziramo. Linearizacijo Newmarkove sheme (4.6)–(4.7) in dodajanje popravkov predstavimo v nadaljevanju.

### 4.1.1 Linearizacija

Rotacije parametriziramo z rotacijskim vektorjem. Za osnovni neznanki implicitne sheme (4.6)–(4.7) izberemo krajevni vektor  $\mathbf{r}_g^{[n+1]}$  in rotacijski vektor  $\boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}$ . Shemo najprej prepisemo v obliki, kjer so preostale neznanke diskretizacije izražene z osnovnimi neznankami in količinami, znanimi pri  $t_n$ , nato pa enačbe variiramo v smereh  $\delta \mathbf{r}_g^{[n+1]}$ ,  $\delta \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}$ . Newmarkova shema z izbranimi osnovnima neznankama  $\mathbf{r}_g^{[n+1]}$  in  $\boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}$  ima obliko:

$$\mathbf{u}_g = \mathbf{r}_g^{[n+1]} - \mathbf{r}_g^{[n]} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{v}_g^{[n+1]} = \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{u}_g + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \mathbf{v}_g^{[n]} + h \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \mathbf{a}_g^{[n]} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{a}_g^{[n+1]} = \frac{1}{\gamma h} \left( \mathbf{v}_g^{[n+1]} - \mathbf{v}_g^{[n]} \right) + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{a}_g^{[n]} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) = \mathbf{R}^T \left( \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n]} \right) \mathbf{R} \left( \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]} \right) \quad (4.11)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} = \frac{\gamma}{\beta h} \boldsymbol{\theta}_G + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \boldsymbol{\omega}_{G^{[n]}}^{[n]} + h \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n]}}^{[n]} \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} = \frac{1}{\gamma h} \left( \boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} - \boldsymbol{\omega}_{G^{[n]}}^{[n]} \right) + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n]}}^{[n]}(x) \quad (4.13)$$

Variacije translacijskih količin sledijo neposredno iz sheme:

$$\delta \mathbf{u}_g = \delta \mathbf{r}_g^{[n+1]} \quad (4.14)$$

$$\delta \mathbf{v}_g^{[n+1]} = \frac{\gamma}{\beta h} \delta \mathbf{u}_g = \frac{\gamma}{\beta h} \delta \mathbf{r}_g^{[n+1]} \quad (4.15)$$

$$\delta \mathbf{a}_g^{[n+1]} = \frac{1}{\gamma h} \delta \mathbf{v}_g^{[n+1]} = \frac{1}{\beta h^2} \delta \mathbf{r}_g^{[n+1]} \quad (4.16)$$

Pri variacijah rotacijskih količin imamo nekaj več dela. Variacijo  $\delta \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]})$  že poznamo iz enačbe (3.44):

$$\delta \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}) = \mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}) \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}), \quad (4.17)$$

vendar v izrazih za kotno hitrost in kotni pospešek ne nastopa rotacijski vektor celotne rotacije  $\boldsymbol{\vartheta}_g$ , temveč inkrementni rotacijski vektor  $\boldsymbol{\theta}_G$ . Variacijo inkrementnega rotacijskega vektorja je zaradi zveze s kotno hitrostjo (4.12) bolj naravno izraziti v aditivnem smislu v skladu s poglavjem 3.4.4. Vzrok bo jasno viden iz dodajanja popravkov, osnovno idejo pa pojasnimo že sedaj. Če  $\boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}$  izrazimo v dveh zaporednih iteracijah in izračunamo razliko obeh vrednosti, sledi

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1, G^{[n+1]}}^{[n+1]} - \boldsymbol{\omega}_{i, G_i^{[n+1]}}^{[n+1]} = \frac{\gamma}{\beta h} (\boldsymbol{\theta}_{i+1, G} - \boldsymbol{\theta}_{i, G}).$$

Iščemo torej “aditivni popravek” inkrementnega rotacijskega vektorja, označimo ga z  $\delta \boldsymbol{\theta}_G^A$ , za katerega velja

$$\boldsymbol{\theta}_{i+1, G} = \boldsymbol{\theta}_{i, G} + \delta \boldsymbol{\theta}_G^A.$$

Aditivni nastavek upoštevamo v linearizaciji enačbe (4.11) na levi strani, za desni del pa izraz (4.17)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G + \epsilon \delta \boldsymbol{\theta}_G^A) &= \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\vartheta}_g^{[n]}) \mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}) \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}) \\ &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}) \mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}) \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}) \\ &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_G) \mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\vartheta}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}). \end{aligned}$$

Z upoštevanjem zveze med aditivno in multiplikativno variacijo (3.51) dobimo

$$\delta \boldsymbol{\theta}_G^A = \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\theta}_G) \delta \boldsymbol{\vartheta}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}. \quad (4.18)$$

Variacijo kotne hitrosti in pospeška potem izrazimo kot

$$\delta \boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} = \frac{\gamma}{\beta h} \delta \boldsymbol{\theta}_G = \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\theta}_G) \delta \boldsymbol{\vartheta}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} \quad (4.19)$$

$$\delta \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} = \frac{1}{\gamma h} \delta \boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\theta}_G) \delta \boldsymbol{\vartheta}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}. \quad (4.20)$$

#### 4.1.2 Dodajanje popravkov

Z rešitvijo lineariziranega sistema vodilnih enačb v trenutni,  $i$ -ti iteraciji dobimo popravke osnovnih neznank  $\delta \mathbf{r}_g^{[n+1]}$  in  $\delta \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}$ . Vrednosti osnovnih neznank v novi iteraciji  $i+1$  dobimo tako, da popravke

dodamo starim vrednostim. Pomike seštejemo, rotacije pa množimo:

$$\mathbf{r}_{i+1,g}^{[n+1]} = \mathbf{r}_{i,g}^{[n+1]} + \delta \mathbf{r}_g^{[n+1]} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_{i+1,g}^{[n+1]}) = \mathbf{R}(\delta \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}) \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}_{i,g}^{[n+1]}) \quad (4.22)$$

Popravljenе vrednosti hitrosti, pospeškov, kotnih hitrosti in kotnih pospeškov lahko izrazimo tako, da enačbe (4.9)–(4.10) in (4.12)–(4.13) zapišemo v zaporednih iteracijskih korakih in jih odštejemo. Dobimo

$$\mathbf{v}_{i+1,g}^{[n+1]} = \mathbf{v}_{i,g}^{[n+1]} + \frac{\gamma}{\beta h} \delta \mathbf{r}_{i,g}^{[n+1]}$$

$$\mathbf{a}_{i+1,g}^{[n+1]} = \mathbf{a}_{i,g}^{[n+1]} + \frac{1}{\beta h^2} \delta \mathbf{r}_{i,g}^{[n+1]}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1,G_{i+1}^{[n+1]}} = \boldsymbol{\omega}_{i,G_i^{[n+1]}} + \frac{\gamma}{\beta h} (\boldsymbol{\theta}_{i+1,G} - \boldsymbol{\theta}_{i,G})$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{i+1,G_{i+1}^{[n+1]}} = \boldsymbol{\alpha}_{i,G_i^{[n+1]}} + \frac{1}{\beta h^2} (\boldsymbol{\theta}_{i+1,G} - \boldsymbol{\theta}_{i,G})$$

Vrednost totalnega in inkrementnega rotacijskega vektorja v novi iteraciji izračunamo iz popravljenih vrednosti rotacij s pomočjo Spurrerjevega algoritma [40]:

$$\boldsymbol{\vartheta}_{i+1,g}^{[n+1]} = \text{Spurr}(\mathbf{R}_{i+1}^{[n+1]})$$

$$\boldsymbol{\theta}_{i+1,G} = \text{Spurr}(\mathbf{R}^{[n]T} \mathbf{R}_{i+1}^{[n+1]}).$$

#### 4.1.3 Izbira parametrov Newmarkove sheme

Izbira prostih parametrov sheme odločilno vpliva na stabilnost in natančnost časovne integracije z Newmarkovo shemo. Analizo vpliva parametrov  $\beta$  in  $\gamma$  pri obravnavi linearnih dinamičnih sistemov podajajo številni avtorji, na primer [25, 28, 41]. Skupne ugotovitve avtorjev so, da je metoda brezpogojno stabilna pri izbiri parametrov  $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$  in vključuje numerično dušenje pri vrednostih  $\gamma > \frac{1}{2}$ . Numeričnemu dušenju sheme se izognemo pri vrednosti parametrov  $\beta = \frac{1}{4}$  in  $\gamma = \frac{1}{2}$ , pri katerih je metoda drugega reda natančnosti – dobro znano trapezno pravilo. Pri analizi nelinearnih dinamičnih sistemov ni dokazov o brezpogojni stabilnosti sheme, ugotovitve o natančnosti, ki veljajo za linearne sisteme, pa lahko posplošimo tudi na nelinearne sisteme [42]. Pri razširitvi Newmarkove metode na nelinearen prostor rotacij [4] sta avtorja dokazala, da je pri izbiri parametrov  $\beta = \frac{1}{4}$  in  $\gamma = \frac{1}{2}$  metoda konvergentna in drugega reda natančnosti.

#### 4.2 Modificirana Newmarkova shema

Reševanje enačb v nelinearni dinamiki konstrukcij ostaja odprt problem, kar se odraža v velikem številu objav novih metod in pristopov k časovni integraciji dinamičnih enačb. Temeljna zahteva oziroma usmeritev je razvoj stabilnih in robustnih shem, pri razvoju takih shem pa imamo več možnosti. Eden od pristopov je razvoj integratorjev, ki stabilnost zagotovijo z algoritmičnim ohranjanjem ali disipacijo energije. Povsem drugačen pristop k povečanju stabilnosti in robustnosti algoritmov pa je drugačna izbira osnovnih neznank problema. Hosea in Shampine [43] pokažeta, da je izbira odvodov osnovnih

spremenljivk za neznanke iteracijskega procesa ključna za uspešnost implicitnih metod za reševanje diferencialnih enačb. Primer takega pristopa sta pri obravnavi prostorskih nosilcev predstavila Zupan in Saje [9, 17], ki namesto klasične izbire osnovnih neznank – pomikov in zasukov – za osnovne neznanke formulacije končnega elementa izbereta njihove krajevne odvode – deformacijske količine. S tako izbiro je avtomatično rešen problem objektivnosti deformacijskih količin, blokiranja končnih elementov, itd., ki so značilni za končne elemente, zasnovane na pomikih in rotacijah. Pri dinamiki vlogo krajevnih odvodov pomikov in zasukov prevzamejo njihovi časovni odvodi – hitrosti in kotne hitrosti. Zato novo shemo, ki jo predstavimo v nadaljevanju, osnujemo na izbiri časovnih odvodov pomikov in rotacij za osnovne neznanke problema.

Diskretizacijo kinematičnih enačb (4.2)–(4.5) zapišemo tako, da so hitrosti in kotne hitrosti edine neznanke diskretiziranega sistema. Nova diskretizacijska shema je podobna Newmarkovi, zato jo imenujemo kar modificirana Newmarkova shema.

Po Lagrangejevem izreku, glej Vidav [44, str. 183], za vsako odvedljivo funkcijo  $f(t)$  na končnem intervalu  $[t_n, t_{n+1}]$  obstaja na tem intervalu vsaj ena točka  $\tilde{t}$ , kjer je

$$\dot{f}(\tilde{t}) = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n}. \quad (4.23)$$

Z uporabo Lagrangejevega izreka (4.23) na poljubnem intervalu  $[t_n, t_{n+1}]$  lahko kinematične enačbe (4.2) in (4.3) zapišemo v diskretni obliki:

$$\bar{\mathbf{v}}_g = \frac{\mathbf{r}_g^{[n+1]} - \mathbf{r}_g^{[n]}}{h} \quad (4.24)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_g = \frac{\mathbf{v}_g^{[n+1]} - \mathbf{v}_g^{[n]}}{h}. \quad (4.25)$$

S  $h$  smo označili dolžino intervala:  $h = t_{n+1} - t_n$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_g$  je povprečna vrednost hitrosti,  $\bar{\mathbf{a}}_g$  pa povprečna vrednost pospeška na  $[t_n, t_{n+1}]$ . Aproximiramo ju z vrednostmi na robu intervala  $[t_n, t_{n+1}]$ :

$$\bar{\mathbf{v}}_g = (1 - \beta) \mathbf{v}_g^{[n]} + \beta \mathbf{v}_g^{[n+1]} \quad (4.26)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_g = (1 - \gamma) \mathbf{a}_g^{[n]} + \gamma \mathbf{a}_g^{[n+1]}, \quad (4.27)$$

kjer sta  $\beta$  in  $\gamma$  poljubna parametra z intervala  $[0, 1]$ .

Za osnovno neznanke diskretiziranega sistema (4.24)–(4.27) izberemo hitrost  $\bar{\mathbf{v}}_g$ . Preostale neznanke kinematične količine na koncu intervala izrazimo z  $\bar{\mathbf{v}}_g$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_g^{[n+1]} &= \mathbf{r}_g^{[n]} + h \bar{\mathbf{v}}_g, \\ \mathbf{v}_g^{[n+1]} &= \frac{\beta - 1}{\beta} \mathbf{v}_g^{[n]} + \frac{1}{\beta} \bar{\mathbf{v}}_g \\ \mathbf{a}_g^{[n+1]} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \mathbf{a}_g^{[n]} - \frac{1}{\beta \gamma h} \mathbf{v}_g^{[n]} + \frac{1}{\beta \gamma h} \bar{\mathbf{v}}_g. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Dobili smo novo implicitno diskretizacijsko shemo za translacijske kinematične količine. Za razliko od klasične diskretizacije (4.8)–(4.10), pri kateri je osnovna neznanke  $\mathbf{r}_g^{[n+1]}$ , je osnovna neznanke nove sheme povprečna hitrost  $\bar{\mathbf{v}}_g$ .



Pri diskretizaciji kinematičnih enačb (4.4) in (4.5) ravnamo podobno kot pri diskretizaciji translacijskih zvez. Povprečne vrednosti kotnih hitrosti in pospeškov na intervalu  $[t_n, t_{n+1}]$  izračunamo kot

$$\bar{\omega}_G = (1 - \beta) \omega_{G^{[n]}}^{[n]} + \beta \omega_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} \quad (4.29)$$

$$\bar{\alpha}_G = (1 - \gamma) \alpha_{G^{[n]}}^{[n]} + \gamma \alpha_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}. \quad (4.30)$$

Smiselnost seštevanja kotnih hitrosti v pomičnih bazah smo utemeljili v poglavju 3.2.1 z enačbo (3.17).

Pri kinematično konsistentni aproksimaciji rotacij se zaradi multiplikativne narave rotacij ne moremo sklicevati na Lagrangejev izrek. Upoštevali bomo točno kinematično zvezo (4.4) ob predpostavki, da je kotna hitrost  $\bar{\omega}_G$  konstantna na intervalu  $[t_n, t_{n+1}]$ . Za tak primer smo rešitev kinematične enačbe že poiskali v poglavju 3.4.1. Ko rešitev (3.32) izvrednotimo pri času  $t_{n+1}$ , dobimo aproksimacijo rotacij izraženo kot

$$\mathbf{R}^{[n+1]} = \mathbf{R}^{[n]} \exp(h\mathbf{S}(\bar{\omega}_G)) = \mathbf{R}^{[n]} \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G). \quad (4.31)$$

Zveza med kotnimi hitrostmi in pospeški je preprosta, količini pa sta aditivni, če ju zapišemo v pomični bazi, zato za aproksimacijo zveze (4.5) zopet uporabimo Lagrangejev izrek:

$$\bar{\alpha}_G = \frac{\omega_G^{[n+1]} - \omega_G^{[n]}}{h}.$$

Za osnovno neznanko diskretizacije rotacijskih količin izberemo povprečno kotno hitrost  $\bar{\omega}_G$ . Preostale neznane količine pri času  $t_{n+1}$  pa izrazimo z znanimi vrednostmi pri času  $t_n$  in povprečno kotno hitrostjo  $\bar{\omega}_G$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{[n+1]} &= \mathbf{R}^{[n]} \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G) \\ \omega_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} &= \frac{\beta - 1}{\beta} \omega_{G^{[n]}}^{[n]} + \frac{1}{\beta} \bar{\omega}_G \\ \alpha_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \alpha_{G^{[n]}}^{[n]} - \frac{1}{h\beta\gamma} \omega_{G^{[n]}}^{[n]} + \frac{1}{h\beta\gamma} \bar{\omega}_G. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Dobili smo novo implicitno diskretizacijsko shemo za rotacijske količine, ki temelji na povprečni vrednosti kotne hitrosti  $\bar{\omega}_G$ .

Diskretizirane enačbe rešujemo z iteracijskim postopkom, zato jih lineariziramo. Linearizacija sheme in dodajanje popravkov sta opisana v naslednjem razdelku.

#### 4.2.1 Linearizacija

Diskretizirane kinematične zveze (4.28) in (4.32) lineariziramo pri času  $t_{n+1}$  v smereh  $\delta\bar{\mathbf{v}}_g$  in  $\delta\bar{\omega}_G$ . Linearizacija aditivnih zvez je preprosta:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r}_g^{[n+1]} &= h\delta\bar{\mathbf{v}}_g \\ \delta\mathbf{v}_g^{[n+1]} &= \frac{1}{\beta}\delta\bar{\mathbf{v}}_g & \delta\omega_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} &= \frac{1}{\beta}\delta\bar{\omega}_G \\ \delta\alpha_g^{[n+1]} &= \frac{1}{\beta\gamma h}\delta\bar{\mathbf{v}}_g & \delta\alpha_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} &= \frac{1}{\beta\gamma h}\delta\bar{\omega}_G. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Linearizacijo diskretizirane rotacijske matrike (4.31) dobimo s smernim odvodom v smeri  $\delta\bar{\omega}_G$ . Linearizacijo pri času  $t_{n+1}$  lahko zapišemo v aditivnem smislu kot

$$\delta\mathbf{R}^{[n+1]} = \mathbf{R}^{[n]}\delta\mathbf{R}(h\bar{\omega}_G) = \mathbf{R}^{[n]}\left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G + \epsilon h\delta\bar{\omega}_G).$$

Tako linearizacijo smo pokazali že v poglavju 3.4.4, zaradi aditivnosti kotnih hitrosti pa oznako <sup>A</sup> za aditivno variacijo opuščamo. V lineariziranih enačbah variacija  $\delta\mathbf{R}^{[n+1]}$  vedno deluje na nekem vektorju  $\mathbf{u}$ . Po enačbi (3.52) produkt  $\delta\mathbf{R}(h\bar{\omega}_G)$  in poljubnega vektorja  $\mathbf{u}$  zapišemo kot  $\delta\mathbf{R}(h\bar{\omega}_G)\mathbf{u} = -\mathbf{R}(h\bar{\omega}_G)\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G)h\delta\bar{\omega}_G$ . Variacija celotne rotacije  $\delta\mathbf{R}^{[n+1]}$  na vektorju  $\mathbf{u}$  pa je potem enaka

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{R}^{[n+1]}\mathbf{u} &= -\mathbf{R}^{[n]}\mathbf{R}(h\bar{\omega}_G)\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G)h\delta\bar{\omega}_G \\ &= -\mathbf{R}^{[n+1]}\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G)h\delta\bar{\omega}_G. \end{aligned} \quad (4.34)$$

#### 4.2.2 Račun novih približkov

Z rešitvijo lineariziranega sistema vodilnih enačb dobimo iterativne popravke osnovnih neznank  $\delta\bar{v}_g$  in  $\delta\bar{\omega}_G$ . Nove iterativne rešitve osnovnih neznank dobimo tako, da popravke prištejemo trenutnim iterativnim vrednostim

$$\begin{aligned} \bar{v}_{i+1,g} &= \bar{v}_{i,g} + \delta\bar{v}_g \\ \bar{\omega}_{i+1,G} &= \bar{\omega}_{i,G} + \delta\bar{\omega}_G. \end{aligned}$$

Nove iterativne vrednosti preostalih kinematičnih količin lahko izračunamo neposredno iz shem (4.28) in (4.32). Druga možnost pa je, da trenutnim iterativnim vrednostim prištejemo njihove popravke, ki jih določimo iz zvez (4.33):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+1,g}^{[n+1]} &= \mathbf{r}_{i,g}^{[n+1]} + h\delta\bar{v}_g & \boldsymbol{\omega}_{i+1,G_{i+1}^{[n+1]}}^{[n+1]} &= \boldsymbol{\omega}_{i,G_i^{[n+1]}}^{[n+1]} + \frac{1}{\beta}\delta\bar{\omega}_G \\ \mathbf{v}_{i+1,g}^{[n+1]} &= \mathbf{v}_{i,g}^{[n+1]} + \frac{1}{\beta}\delta\bar{v}_g & \boldsymbol{\alpha}_{i+1,G_{i+1}^{[n+1]}}^{[n+1]} &= \boldsymbol{\alpha}_{i,G_i^{[n+1]}}^{[n+1]} + \frac{1}{\beta\gamma h}\delta\bar{\omega}_G. \end{aligned}$$

Izjema so rotacije, ki jih ne moremo popravljati iterativno. Nove iterativne vrednosti rotacijske matrike v iteraciji  $i+1$  dobimo iz vrednosti povprečne kotne hitrosti v iteraciji  $i+1$ :

$$\mathbf{R}_{i+1}^{[n+1]} = \mathbf{R}^{[n]}\mathbf{R}(h\bar{\omega}_{i+1,G}).$$

#### 4.2.3 Izbira parametrov modificirane Newmarkove sheme

Preveriti želimo vpliv izbire parametrov  $\beta$  in  $\gamma$  na odziv dinamičnega sistema, ki ga diskretiziramo z modificirano Newmarkovo shemo. Obravnavamo nedušeno nihanje sistema vzmet–utež. Gibalno enačbo sistema zapišemo v odvisnosti od mase uteži  $m$  in togosti vzmeti  $k$

$$\mathbf{a}_g(t) + \frac{k}{m}\mathbf{r}_g(t) = \mathbf{0}. \quad (4.35)$$

Kinetična energija sistema je enaka  $W_{kin}(t) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_g^2(t)$ , potencialna energija pa  $W_{pot}(t) = \frac{1}{2}k\mathbf{r}_g^2(t)$ . Opazujemo vpliv diskretizacijske sheme na ohranjanje celotne mehanske energije sistema.

Diskretizirana enačba gibanja (4.35) pri času  $t_{n+1}$  ima obliko

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \mathbf{a}_g^{[n]} - \frac{1}{\beta\gamma h} \mathbf{v}_g^{[n]} + \frac{1}{\beta\gamma h} \bar{\mathbf{v}}_g + \frac{k}{m} \mathbf{r}_g^{[n]} + \frac{k}{m} h \bar{\mathbf{v}}_g = 0.$$

Če upoštevamo, da so pospeški pri času  $t_n$  enaki  $\mathbf{a}_g^{[n]} = -\frac{k}{m} \mathbf{r}_g^{[n]}$ , se diskretizirana gibalna enačba glasi

$$-\frac{1}{\beta\gamma h} \mathbf{v}_g^{[n]} + \frac{1}{\beta\gamma h} \bar{\mathbf{v}}_g + \frac{k}{m\gamma} \mathbf{r}_g^{[n]} + \frac{k}{m} h \bar{\mathbf{v}}_g = 0. \quad (4.36)$$

Z rešitvijo enačbe (4.36) dobimo rešitev za povprečno vrednost hitrosti  $\bar{\mathbf{v}}_g$  na intervalu  $[t_n, t_{n+1}]$ . Ko poznamo rešitev, lahko zapišemo spremembo celotne energije v dveh zaporednih časovnih korakih in opazujemo spremembo, ki nastane zaradi časovne diskretizacije. Sprememba celotne energije je enaka

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta W_{kin} + \Delta W_{pot} = W_{kin}^{[n+1]} - W_{kin}^{[n]} + W_{pot}^{[n+1]} - W_{pot}^{[n]} \\ &= \frac{1}{2} m \left( \mathbf{v}_g^{[n+1]2} - \mathbf{v}_g^{[n]2} \right) + \frac{1}{2} k \left( \mathbf{r}_g^{[n+1]2} - \mathbf{r}_g^{[n]2} \right) \\ &= \frac{1}{2} m \left( \mathbf{v}_g^{[n+1]} - \mathbf{v}_g^{[n]} \right) \left( \mathbf{v}_g^{[n+1]} + \mathbf{v}_g^{[n]} \right) + \frac{1}{2} k \left( \mathbf{r}_g^{[n+1]} - \mathbf{r}_g^{[n]} \right) \left( \mathbf{r}_g^{[n+1]} + \mathbf{r}_g^{[n]} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Spremembo energije zapišemo v odvisnosti od rešitve  $\bar{\mathbf{v}}_g$  v skladu s časovno diskretizacijo (4.28)

$$\Delta W = \frac{1}{2} m \left( -\frac{1}{\beta} \mathbf{v}_g^{[n]} + \frac{1}{\beta} \bar{\mathbf{v}}_g \right) \left( -\frac{1-2\beta}{\beta} \mathbf{v}_g^{[n]} + \frac{1}{\beta} \bar{\mathbf{v}}_g \right) + \frac{1}{2} k (h \bar{\mathbf{v}}_g) \left( 2\mathbf{r}_g^{[n]} + h \bar{\mathbf{v}}_g \right). \quad (4.38)$$

$\mathbf{r}_g^{[n]}$  izrazimo iz (4.36) in vstavimo v enačbo (4.38). Po krajšem urejanju lahko spremembo energije zapišemo kot

$$\begin{aligned} \Delta W &= m \frac{1-2\beta}{2\beta} \left( -\frac{1}{\beta} \mathbf{v}_g^{[n]} + \frac{1}{\beta} \bar{\mathbf{v}}_g \right)^2 + k \frac{1-2\gamma}{2} (h \bar{\mathbf{v}}_g)^2 \\ &= m \frac{1-2\beta}{2\beta} \left( \mathbf{v}_g^{[n+1]} - \mathbf{v}_g^{[n]} \right)^2 + k \frac{1-2\gamma}{2} \left( \mathbf{r}_g^{[n+1]} - \mathbf{r}_g^{[n]} \right)^2 \\ &= \frac{1-2\beta}{\beta} \Delta W_{kin} + (1-2\gamma) \Delta W_{pot}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

V izrazu (4.39) je jasno izražen vpliv parametrov  $\beta$  in  $\gamma$  na diskretizacijo enačb linearnega dinamičnega sistema z modificirano Newmarkovo metodo. Parameter  $\beta$  vpliva na kinetično energijo sistema. Pri vrednostih  $\beta < \frac{1}{2}$  bo kinetična energija rasla, pri  $\beta > \frac{1}{2}$  pa se bo zmanjševala. Parameter  $\gamma$  vpliva na potencialno energijo sistema. Če je  $\gamma < \frac{1}{2}$ , s časovno diskretizacijo pridobimo potencialno energijo, če pa je  $\gamma > \frac{1}{2}$ , jo dušimo. Algoritmični rasti ali disipaciji energije se lahko izognemo samo, če za vrednosti parametrov  $\beta$  in  $\gamma$  vzamemo vrednost  $\frac{1}{2}$ .

Ugotovitev o ohranjanju energije, ki veljajo za linearne dinamične sisteme, ne moremo posplošiti na področje nelinearne dinamike, ki ga obravnavamo v disertaciji. Za nelinearne primere nam ostane še dokaz konvergence in reda natančnosti metode. Modificirano Newmarkovo metodo (4.28), (4.32) zapišemo tako, da izločimo osnovni neznanki  $\bar{\mathbf{v}}_g$  in  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_G$ , dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_g^{[n+1]} &= \mathbf{v}_g^{[n]} + h \left( (1-\gamma) \mathbf{a}_g^{[n]} + \gamma \mathbf{a}_g^{[n+1]} \right) \\ \mathbf{r}_g^{[n+1]} &= \mathbf{r}_g^{[n]} + h \mathbf{v}_g^{[n]} + h^2 \beta \left( (1-\gamma) \mathbf{a}_g^{[n]} + \gamma \mathbf{a}_g^{[n+1]} \right) \\ \boldsymbol{\omega}_G^{[n+1]} &= \boldsymbol{\omega}_G^{[n]} + h (1-\gamma) \boldsymbol{\alpha}_G^{[n]} + h \gamma \boldsymbol{\alpha}_G^{[n+1]} \\ \mathbf{R}^{[n+1]} &= \mathbf{R}^{[n]} \mathbf{R} \left( h \boldsymbol{\omega}_G^{[n]} + h^2 \beta (1-\gamma) \boldsymbol{\alpha}_G^{[n]} + h^2 \beta \gamma \boldsymbol{\alpha}_G^{[n+1]} \right). \end{aligned}$$

Če za vrednosti parametrov modificirane sheme privzamemo  $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$  in upoštevamo v zgornjem zapisu, ugotovimo, da se diskretizacija pomikov, rotacij, hitrosti in kotnih hitrosti z modificirano shemo ujema z diskretizacijo po osnovni Newmarkovi shemi z vrednostma parametrov  $\beta = \frac{1}{4}$  in  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Zato lahko tudi za modificirano Newmarkovo shemo s parametroma  $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$  trdimo, da ohranja pomembno lastnost shem osnovanih na Newmarkovi, to je da je konvergentna in drugega reda natančnosti.

### 4.3 Numerični primeri gibanja togega telesa

Gibanje togega telesa je natančno določeno z lego težišča in orientacijo poljubne baze, ki se giblje skupaj s telesom. Naj bo  $\mathbf{r}_g$  krajevni vektor težišča togega telesa glede na nepomično bazo  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  in naj pomična baza  $\{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3\}$  sovпада z glavnimi vztrajnostnimi osmi togega telesa. Izreka o gibalni (2.2) in vrtilni količini (2.4) za togo telo lahko zapišemo v obliki

$$m\mathbf{a}_g = \mathbf{F}_g \quad (4.40)$$

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}_G + \boldsymbol{\omega}_G \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_G = \mathbf{R}^T \mathbf{M}_g. \quad (4.41)$$

$m$  je masa togega telesa,  $\mathbf{J}$  je vztrajnostni tenzor zapisan glede na glavne vztrajnostne osi telesa.  $\mathbf{F}_g$  je rezultanta sil,  $\mathbf{M}_g$  pa rezultanta momentov na težišče telesa.

V nadaljevanju prikažemo reševanje gibalnih enačb toгих teles z integracijskima shemama prikazanima v poglavjih 4.1 in 4.2. Pri izbiri prostih parametrov shem sledimo ugotovitvam iz točk 4.1.3 in 4.2.3 tega poglavja in v vseh numeričnih primerih uporabimo parametre podane v preglednici 4.1.

Preglednica 4.1: Parametri časovno integracijskih shem uporabljeni v numeričnih primerih.

Table 4.1: Parameters of the time integration schemes used in numerical examples.

Newmarkova shema [4, 28]	Modificirana Newmarkova shema
$\beta = \frac{1}{4}$	$\beta = \frac{1}{2}$
$\gamma = \frac{1}{2}$	$\gamma = \frac{1}{2}$

#### 4.3.1 Vrtenje telesa pod vplivom predpisanega poteka momentov

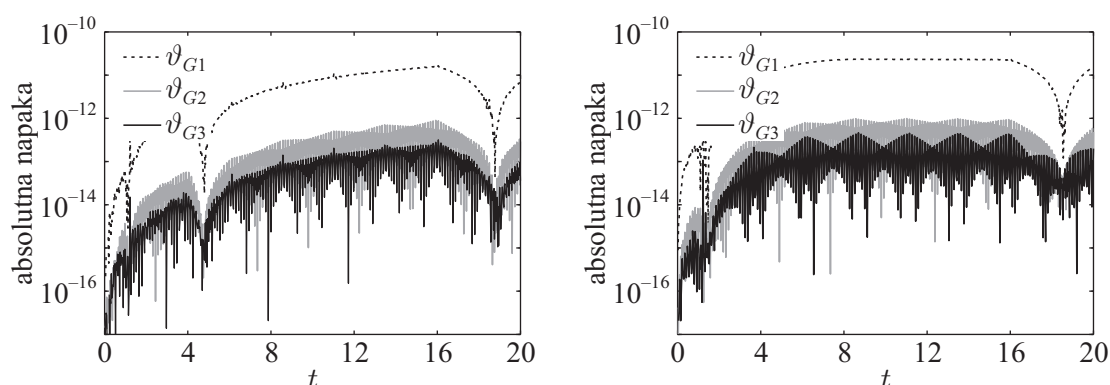
Delovanje algoritmov želimo najprej preizkusiti za primere, kjer poznamo analitične rešitve. Obravnavamo primer, v katerem predpostavimo rešitev za rotacijski vektor  $\boldsymbol{\vartheta}_G(t)$ , analitično rešitev za kotno hitrost dobimo z odvajanjem predpostavljenega rotacijskega vektorja po času, s pomočjo kinematične enačbe (4.4), kotni pospešek pa iz enačbe (4.5). Analitičen potek momenta potem sledi kar iz gibalne enačbe (4.41):  $\mathbf{M}_g(t) = \mathbf{R}(t)(\mathbf{J}\boldsymbol{\alpha}_G(t) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_G(t))\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_G(t))$ .

Obravnavamo dva primera, v katerih se rotacijski vektor s časom spreminja: (i) linearno:  $\boldsymbol{\vartheta}_G(t) = [100t, \frac{t}{20}, -2t]^T$  in (ii) kvadratično:  $\boldsymbol{\vartheta}_G(t) = [4t^2, 0, t]^T$ . Vztrajnostni tenzor glede na glavne vztrajno-

stne osi telesa je enak:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Simulacijo gibanja izvršimo z novo shemo (4.32) in Newmarkovim algoritmom (4.7) na časovnem intervalu  $t \in [0, 20]$ . Numerične rešitve za rotacijske vektorje dobimo iz iz vrednotene rotacijske matrike s pomočjo Spurrierovega algoritma [40]. Rešitve primerjamo s predpostavljenim potekom rotacijskega vektorja.

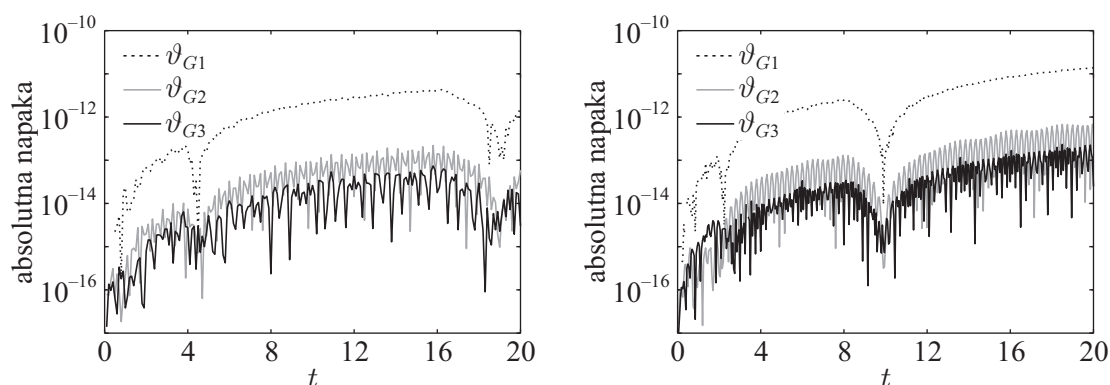


(a) Modificirani Newmarkov algoritem,  $h = 0.025$

(b) Newmarkov algoritem,  $h = 0.025$

Slika 4.1: Rotirajoče telo pod vplivom linearnih rotacij. Primerjava absolutnih napak komponent rotacijskega vektorja dobljenih z originalnim in modificiranim Newmarkovim algoritmom.

Figure 4.1: Rotating body under linear rotations. Comparison of absolute error of components of the rotational vector obtained with original and modified Newmark algorithm.



(a) Modificirani Newmarkov algoritem,  $h = 0.1$

(b) Modificirani Newmarkov algoritem,  $h = 0.05$

Slika 4.2: Rotirajoče telo pod vplivom linearnih rotacij. Modificirani Newmarkov algoritem. Absolutna napaka komponent rotacijskega vektorja.

Figure 4.2: Rotating body under linear rotations. Modified Newmark algorithm. Absolute error of components of the rotational vector.

V prvem primeru s predpostavljenim linearnim potekom rotacij dajeta analizi z Newmarkovo in modificirano Newmarkovo shemo za časovni korak  $h = 0.025$  podobne rezultate. Primerjava absolutnih

napak komponent rotacijskega vektorja je prikazana na sliki 4.1. Za časovne korake večje od  $h = 0.025$  je bil račun z integratorjem (4.7), osnovanim na rotacijah, neuspešen že v prvem koraku, nova shema, osnovana na kotnih hitrostih, pa daje dobre rezultate tudi za večje časovne korake. Absolutne napake komponent rotacijskega vektorja, izračunanega z modificirano Newmarkovo shemo, za časovna koraka  $h = 0.1$  in  $h = 0.05$  sta predstavljena na sliki 4.2.

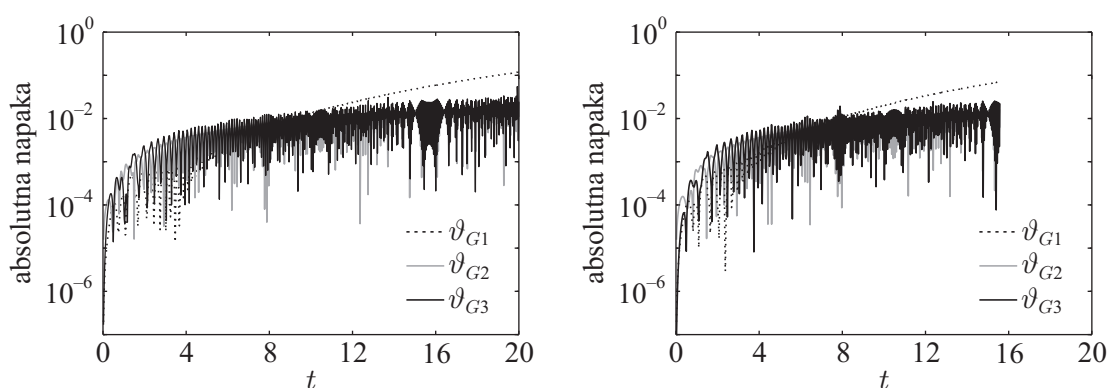
Preglednica 4.2: Rotirajoče telo pod vplivom linearnih rotacij. Konvergenca Newtonove iteracije pri  $t = 12$ .

Table 4.2: Rotating body under linear rotations. Convergence of Newton iteration at  $t = 12$ .

Newmarkova shema			Modificirana Newmarkova shema		
$i$	$\ \delta x\ $	$\ f\ $	$i$	$\ \delta x\ $	$\ f\ $
1	2.49976e+000	8.00074e+005	1	5.11662e-013	7.42577e-010
2	8.67602e-002	2.78657e+004	2	5.21053e-016	9.17057e-013
3	9.90810e-004	3.17823e+002			
4	2.73014e-007	9.89206e-002			
5	8.77458e-015	2.88030e-009			

$i$  – Newtonova iteracija,  $\|\delta x\|$  – norma vektorja prirastkov,  
 $\|f\|$  – norma vektorja desnih strani

Zanimiva je tudi primerjava hitrosti konvergence obeh metod in pripadajoči računski časi. V preglednici 4.2 je prikazana konvergenca Newtonove iteracije za tipičen časovni korak, pri času  $t = 12$ . Konvergenca nove sheme je občutno hitrejša od klasične Newmarkove sheme, temu primerno pa je tudi celoten računski čas občutno manjši. Pri računu z Modificirano Newmarkovo shemo je znašal  $T_{\text{celotni}} = 0.598$  s, pri računu s klasično shemo pa  $T_{\text{celotni}} = 1.482$  s.



(a) Modificirani Newmarkov algoritem,  $h = 0.025$

(b) Newmarkov algoritem,  $h = 0.025$

Slika 4.3: Rotirajoče telo pod vplivom kvadratnih rotacij. Primerjava absolutnih napak komponent rotacijskega vektorja dobljenih z originalnim in modificiranim Newmarkovim algoritmom.

Figure 4.3: Rotating body under quadratic rotations. Comparison of absolute error of components of the rotational vector obtained with original and modified Newmark algorithm.

Absolutne napake komponent rotacijskega vektorja za drugi preučevani primer s kvadratičnim potekom

momentov so predstavljene na sliki 4.3. Rezultati, dobljeni z obema integratorjema, so prikazani za  $h = 0.025$ . Pri reševanju enačb z Newmarkovim integratorjem pri času  $t = 15.75$  Newtonova metoda ne konvergira, zato je račun časovnega koraka neuspešen. Če za račun uporabimo časovne korake  $h \leq 0.01$ , pa metoda stabilno deluje do konca opazovanega intervala. Integracija z novo shemo je stabilna celo pri računu z velikim korakom  $h = 0.05$ , enako pa velja če uporabimo krajše časovne korake. Tudi za analizo s kvadratičnim potekom rotacij veljajo podobne ugotovitve kot pri analizi z linearnim potekom rotacij. Konvergenca nove sheme je občutno hitrejša od klasične. Newtonova iteracija za tipičen korak sheme, pri času  $t = 12$ , je prikazana v preglednici 4.3.

Preglednica 4.3: Rotirajoče telo pod vplivom kvadratnih rotacij. Konvergenca Newtonove iteracije pri  $t = 12$ .

Table 4.3: Rotating body under quadratic rotations. Convergence of Newton iteration at  $t = 12$ .

Newmarkova shema			Modificirana Newmarkova shema		
$i$	$\ \delta x\ $	$\ f\ $	$i$	$\ \delta x\ $	$\ f\ $
1	2.39656e+000	7.67051e+005	1	1.33530e-001	2.14741e+002
2	8.89002e-002	2.67986e+004	2	1.38087e-005	2.64714e-002
3	9.90810e-004	3.17823e+002	3	2.06281e-013	3.25974e-010
4	2.80708e-007	2.95233e+002			
5	8.85612e-015	2.90506e-009			

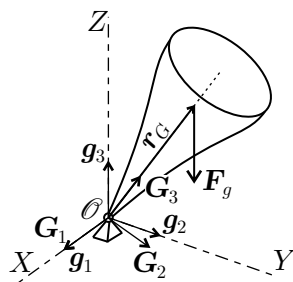
$i$  – Newtonova iteracija,  $\|\delta x\|$  – norma vektorja prirastkov,  
 $\|f\|$  – norma vektorja desnih strani

S primerom smo pokazali prednost nove časovno integracijske sheme v primerjavi s klasičnim pristopom pri obravnavi dinamičnih enačb v nelinearnem prostoru rotacij. V obeh obravnavanih primerih smo analizo z modificirano Newmarkovo shemo uspešno zaključili z daljšimi časovnimi koraki kot analizo s klasično Newmarkovo shemo za rotacije. Prednost nove sheme je v iteracijskem postopku, pri katerem so osnovne neznanke – kotne hitrosti – in njihovi iteracijski popravki elementi istega aditivnega Evklidskega prostora, medtem ko so osnovne neznanke klasične sheme, osnovane na rotacijskem vektorju, elementi multiplikativne grupe  $SO(3)$ , njihovi iteracijski popravki pa elementi linearnega tangentnega prostora.

### 4.3.2 Težka vrtavka v gravitacijskem polju

V tem primeru preučujemo gibanje težke vrtavke, ki je na enem koncu vrtljivo podprta in postavljena v gravitacijsko polje. To je standarden primer za testiranje časovno integracijskih shem za rotacije. Lokalni in globalni koordinatni sistem sta definirana, kot je prikazano na sliki 4.4. Lokalni koordinatni sistem je vzporeden z glavnimi vztrajnostnimi osmi vrtavke, pritrjen pa je v podprti točki vrtavke. Lastnosti vrtavke in začetne pogoje smo povzeli po referenci [26]. Teža vrtavke je  $mg = 20$ , kjer je  $g = 9.81$  težnostni pospešek, vztrajnostni tenzor pa je podan glede na lokalni koordinatni sistem in je enak

$$\mathbf{J}^{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Slika 4.4: Težka vrtavka v gravitacijskem polju.

Figure 4.4: The heavy symmetrical top in gravity field.

Vrtavko zavrtimo z začetno kotno hitrostjo  $\omega_G^{[0]} = [0, 0, 50]^T$ , nanjo pa ves čas gibanja deluje gravitacijska sila  $F_g = [0, 0, -mg]^T$ . Krajevni vektor težišča vrtavke se s časom ne spreminja, če ga zapišemo v lokalni bazi, in je enak  $r_G = [0, 0, 1]^T$ . Vrtavka je v začetni legi zavrnjena okrog osi  $X$  za kot  $\varphi = -0.3$ . Začetna vrednost rotacijske matrike je tako enaka

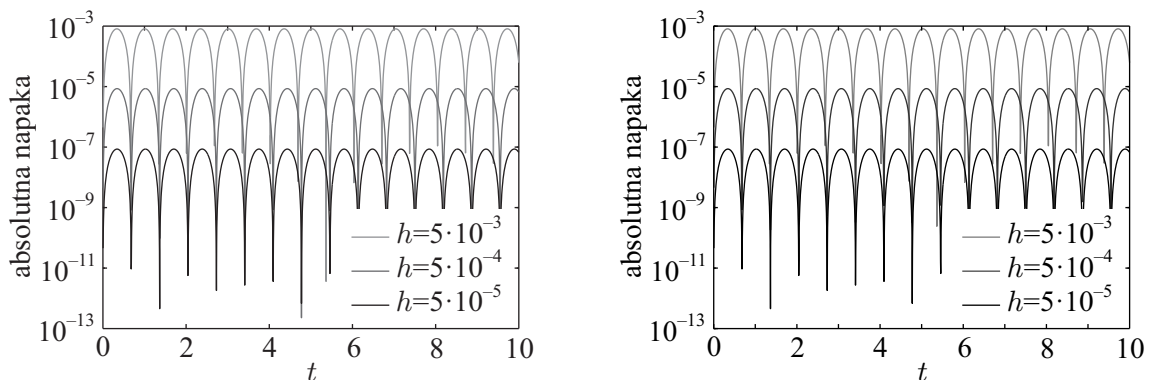
$$\mathbf{R}^{[0]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(0.3) & -\sin(0.3) \\ 0 & \sin(0.3) & \cos(0.3) \end{bmatrix}.$$

Če gibalne enačbe vrtavke zapišemo glede na lokalni koordinatni sistem, pripet v podprti točki  $\mathcal{O}$ , je izreku o gibalni količini identično zadoščeno, izrek o vrtilni količini pa je oblike

$$\mathbf{J}^{\mathcal{O}} \alpha_G + \omega_G \times \mathbf{J}^{\mathcal{O}} \omega_G = \mathbf{R}^T M_g^{\mathcal{O}},$$

kjer je  $M_g^{\mathcal{O}}$  rezultirajoči zunanji moment na točko  $\mathcal{O}$ :  $M_g^{\mathcal{O}} = \mathbf{R} r_G \times F_g$ .

Gibanje vrtavke opazujemo na intervalu  $t \in [0, 10]$ . Numerične simulacije smo izvedli z Newmarkovim algoritmom za rotacije (4.7) in modificiranim Newmarkovim algoritmom (4.32). Oba algoritma pri enakih časovnih korakih dajeta zelo podobne rešitve. Slika 4.5 prikazuje rezultate za absolutno napako



(a) Modificirani Newmarkov algoritem

(b) Newmarkov algoritem

Slika 4.5: Težka vrtavka. Absolutna napaka celotne energije vrtavke.

Figure 4.5: The heavy symmetrical top. Absolute error of the total energy od the top.



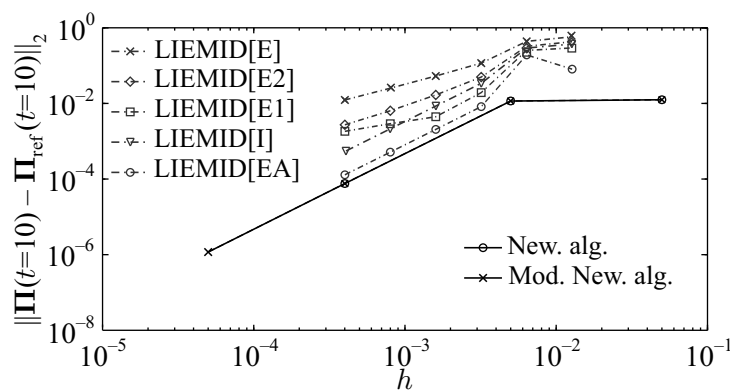
celotne energije vrtavke za oba algoritma. Po pričakovanju se z manjšanjem časovnega koraka zmanjšuje tudi absolutna napaka. V preglednici 4.4 podajamo še računске čase posameznih analiz, ki spet potrdijo dominantnost nove sheme. Ta je posledica, podobno kot v prejšnjem primeru, hitrejše konvergence Newtonove iteracije, dodaten prihranek pa je posledica dejstva, da so osnovne neznanke modificirane sheme aditivne količine, kar omogoča učinkovito implementacijo metode. Pri Newmarkovi shemi za rotacije, kjer so osnovne neznanke neaditivne, se del računskega časa porabi za računanje inkrementnega in totalnega rotacijskega vektorja iz inkrementnih in totalnih rotacij.

Preglednica 4.4: Težka vrtavka. Računski časi.

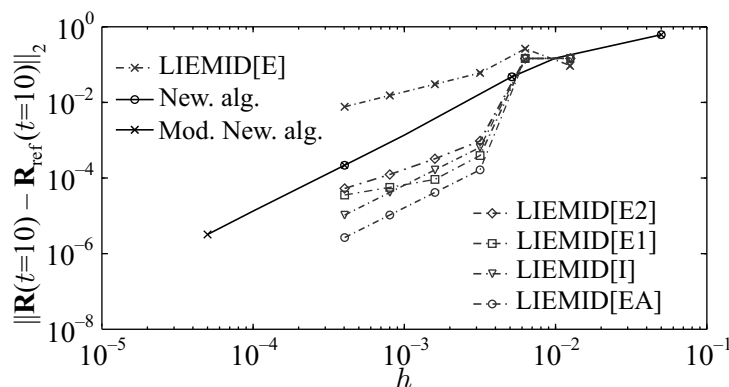
Table 4.4: The heavy symmetrical top. Computational time.

algoritem	$h = 1 \cdot 10^{-2}$	$h = 5 \cdot 10^{-3}$	$h = 1 \cdot 10^{-3}$	$h = 5 \cdot 10^{-4}$
Modificirani Newmarkov alg.	1.32	2.63	10.48	20.18
Newmarkov algoritem	1.98	3.56	15.99	29.99

$h =$  časovni korak



(a) Konvergenca druge norme vrtilne količine – primerjava Newmarkovega in modificiranega Newmarkovega algoritma z LIEMID algoritmi [45]



(b) Konvergenca druge norme rotacijske matrike – primerjava Newmarkovega in modificiranega Newmarkovega algoritma z LIEMID algoritmi [45]

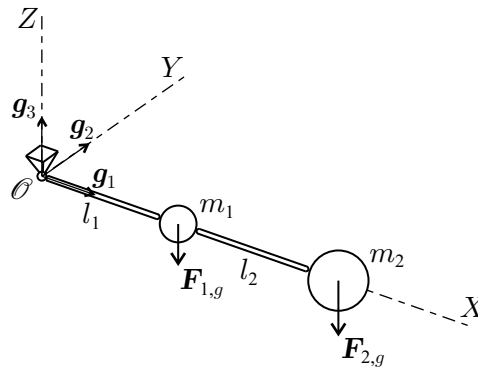
Slika 4.6: Težka vrtavka. Konvergenca druge norme vrtilne količine in rotacijske matrike.

Figure 4.6: The heavy symmetrical top. Convergence of the second norm of the angular momentum and rotation matrix.

Rezultate analiz z Newmarkovim in Modificiranim Newmarkovim algoritmom smo primerjali še z rezultati, dobljenimi z družino algoritmov LIEMID, ki jih je predstavil Krysl [45]. Algoritmi so osnovani na aproksimaciji rotacijskih gibalnih enačb togega telesa v sredinski točki časovnega koraka ('midpoint' algoritmi). Družino algoritmov sestavlja implicitna metoda LIEMID[I], eksplicitna metoda LIEMID[E], dve izboljšani eksplicitni metodi drugega reda LIEMID[E1] in LIEMID[E2] ter sestavljena eksplicitna metoda LIEMID[EA], ki pol časovnega koraka izračuna s prvo izboljšano eksplicitno metodo, pol pa z drugo. Avtor v članku [45] prikaže konvergenčne krivulje za velikost vrtilne količine in drugo normo rotacijske matrike pri času  $t = 10$ . Ker analitičnih rešitev za ta problem ne poznamo, za referenco izberemo rešitev, dobljeno z zelo majhnim časovnim korakom  $h = 5 \cdot 10^{-6}$ , ki ga je za račun referenčne rešitve uporabil tudi avtor v [45]. Na sliki 4.6(a) je prikazana primerjava krivulj konvergence za velikost vrtilne količine  $\Pi$ , na sliki 4.6(b) pa je prikazana primerjava druge norme rotacijske matrike pri času  $t = 10$ . Modificirana Newmarkova shema daje boljše rezultate za vrtilno količino, rezultati za rotacijsko matriko pa so malo slabši od tistih dobljenih z LIEMID algoritmi.

### 4.3.3 Dvojno nihalo

Obravnavamo problem dvojnega nihala, sestavljenega iz dveh nihala, dolžine  $l_2$  in mase  $m_2$  ter  $l_1$  in  $m_1$  (Slika 4.7). Dinamičen odziv dvojnega nihala je zelo občutljiv na razmerja mas in dolžin nihala ter na začetne pogoje. Obravnavamo samo ravninsko gibanje dvojnega nihala.



Slika 4.7: Dvojno nihalo.

Figure 4.7: Double pendulum.

Če za osnovne spremenljivke izberemo krajevne vektorje obeh mas  $\mathbf{r}_{1,g}$  in  $\mathbf{r}_{2,g}$ , lahko gibalne enačbe dvojnega nihala zapišemo iz izreka o ohranitvi gibalne količine (4.40) skupaj s kinematičnimi vezmi, ki zagotavljajo ohranjanje dožine nihala:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{1,g}^T \mathbf{r}_{1,g} - l_1^2 \\ (\mathbf{r}_{2,g} - \mathbf{r}_{1,g})^T (\mathbf{r}_{2,g} - \mathbf{r}_{1,g}) - l_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Kinematične vezi vpeljemo v sistem vodilnih enačb z uporabo metode Lagrangejevih množiteljev:

$$m_1 \mathbf{a}_{1,g} - \mathbf{F}_{1,g} - \Phi_{\mathbf{r}_{1,g}}^T \boldsymbol{\lambda}_g = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

$$m_2 \mathbf{a}_{2,g} - \mathbf{F}_{2,g} - \Phi_{\mathbf{r}_{2,g}}^T \boldsymbol{\lambda}_g = \mathbf{0}, \quad (4.44)$$

kjer sta  $\mathbf{F}_{1,g}$ ,  $\mathbf{F}_{2,g}$  gravitacijski sili,  $\lambda_g$  so Lagrangejevi množitelji,  $\Phi_{r_{1,g}}$  in  $\Phi_{r_{2,g}}$  sta komponenti Jacobijske matrike kinematičnih vezi:

$$\Phi_{r_{1,g}} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{r}_{1,g}^T \\ -2(\mathbf{r}_{2,g} - \mathbf{r}_{1,g})^T \end{bmatrix}, \quad \Phi_{r_{2,g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ 2(\mathbf{r}_{2,g} - \mathbf{r}_{1,g})^T \end{bmatrix}.$$

Enačbe (4.42)–(4.44) predstavljajo sistem diferencialno algebrajskih enačb (DAE). Stabilnost numeričnega reševanja DAE lahko izboljšamo [46], če vezne enačbe rešujemo v šibki obliki:

$$\dot{\Phi} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{r}_{1,g}^T \mathbf{v}_{1,g} \\ 2(\mathbf{r}_{2,g} - \mathbf{r}_{1,g})^T (\mathbf{v}_{2,g} - \mathbf{v}_{1,g}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Z drugačno izbiro osnovnih spremenljivk nihala lahko gibalne enačbe zapišemo tudi brez kinematičnih vezi (npr. [47, poglavje 5]):

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1\ddot{\vartheta}_1 + m_2l_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)\ddot{\vartheta}_2 + m_2l_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)\dot{\vartheta}_2^2 + (m_1 + m_2)g \sin \vartheta_1 &= 0 \\ m_2l_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)\ddot{\vartheta}_1 + m_2l_2\ddot{\vartheta}_2 - m_2l_1 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)\dot{\vartheta}_1^2 + m_2g \sin \vartheta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

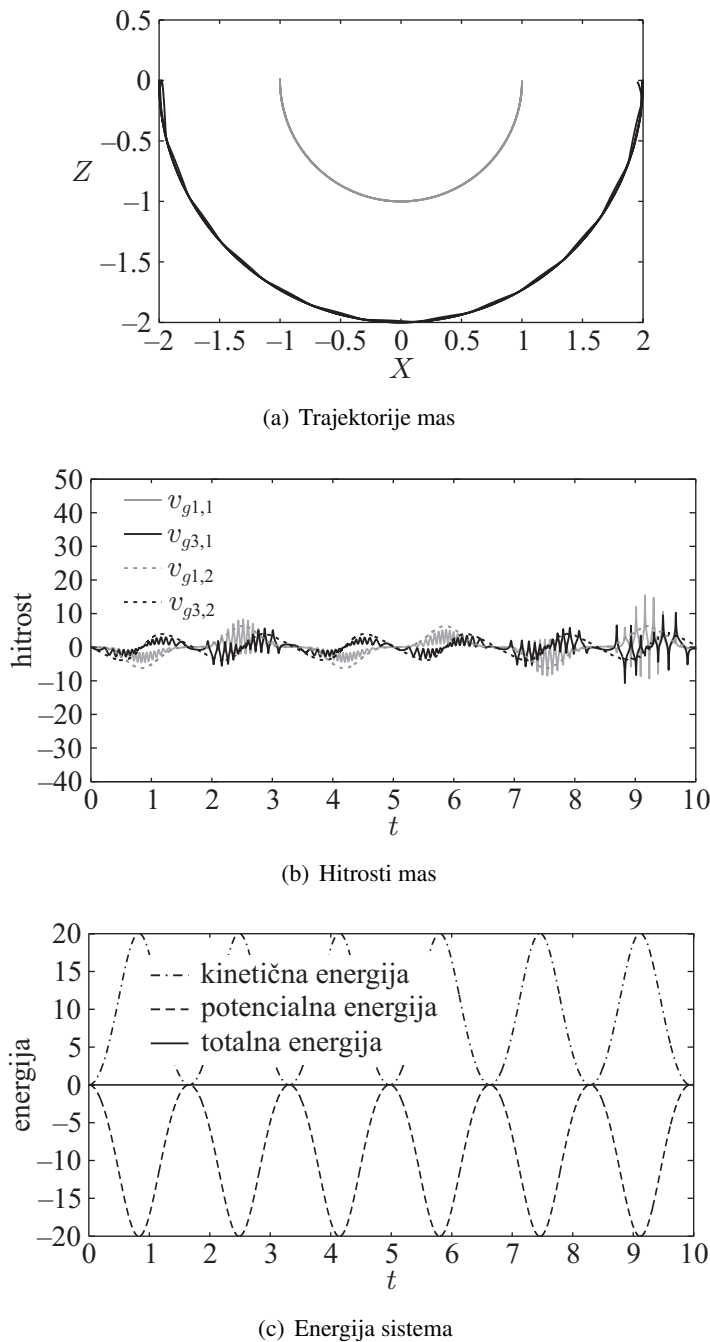
$\vartheta_1$  in  $\vartheta_2$  sta kota, ki ga oklepata nihali z navpičnico. Vse kinematične neznanke takega problema so aditivne količine, zato jih lahko rešujemo z uporabo algoritmov za reševanje začetnih problemov v Evklidskih vektorskih prostorih, kot so metode družine Runge–Kutta, BDF metode viskokega reda in metode z numeričnimi diferencami [48]. V našem primeru uporabimo kar metode družine Runge–Kutta za reševanje togih problemov, ki so vgrajene v programski paket Matlab. Te rešitve bomo uporabili za referenčne rešitve problema dvojnega nihala.

Obravnavamo tog primer dvojnega nihala z zelo različnima masama (slika 4.7), ki sta ga za demonstracijo delovanja energijsko konservativne sheme predstavila Lens in Cardona [49]. Lastnosti nihala in začetne pogoje izberemo enake, kot so podani v članku [49]:  $m_1 = 0.005$ ,  $m_2 = 1$ ,  $g = 9.81$ . Začetni pogoji so enaki:  $\mathbf{r}_{1,g} = [1, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{r}_{2,g} = [2, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{v}_{1,g} = [0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{v}_{2,g} = [0, 0, 0]^T$ . Simulacijo dinamičnega odziva nihala računamo z Newmarkovo in modificirano Newmarkovo metodo na intervalu  $t \in [0, 10]$ .

Za izbrane parametre obeh shem (preglednica 4.1) se diskretizacija translacijskih kinematičnih količin z modificirano Newmarkovo shemo ujema z Newmarkovo shemo. Zato ni presenetljivo, da analize z obema shemama dajo enake rezultate. Trajektorije in hitrosti obeh mas ter energija sistema za časovni korak  $h = 10^{-3}$  so prikazani na sliki 4.8 in se do grafične natančnosti ujemajo z rezultati, predstavljenimi v [49].

Oscilacije hitrosti na sliki 4.8(b) kažejo, da je odziv nihala s tako različnima masama impulzivne narave. Za točnejšo rešitev problema moramo izvršiti analizo z manjšim časovnim korakom. V ta namen problem, zapisan v obliki (4.46), rešimo z metodami, vgrajenimi v Matlabu, ki omogočajo kontrolo lokalne napake in prilagajajo časovni korak. Med metodami v Matlabu se je za reševanje ob strogih zahtevah za relativno in absolutno napako ( $tol = 10^{-10}$ ) najbolj obnesla metoda *ode15s*. Rezultati analize so prikazani na sliki 4.9. Trajektorije mas (slika 4.9(a)) in potek hitrosti (slika 4.9(b)) kažejo, da nihalo kmalu preide v izrazito impulzivno gibanje, za katero je značilno večanje amplitud hitrosti. Celotna energija sistema se vseeno ohranja (slika 4.9(c)).

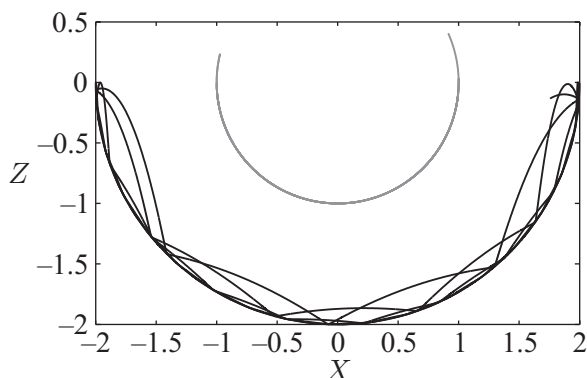
Najmanjši časovni korak metode *ode15s*, potreben za izpolnitev predpisanih toleranc za napako, je bil  $h = 4.5272 \cdot 10^{-6}$ . Na podlagi tega simulacijo za povezan sistem enačb (4.43)–(4.45) izvedemo z modificiranim Newmarkovim algoritmom in Newmarkovim algoritmom z dovolj majhnim časovnim korakom



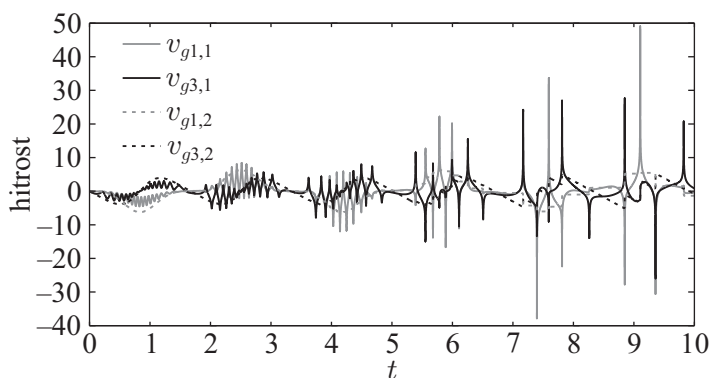
Slika 4.8: Dvojno nihalo. Rezultati dobljeni z Newmarkovo in modificirano Newmarkovo shemo, z relativno velikim časovnim korakom  $h = 10^{-3}$ .

Figure 4.8: Double pendulum. Results obtained by Newmark scheme and modified Newmark scheme, with relatively large time step  $h = 10^{-3}$ .

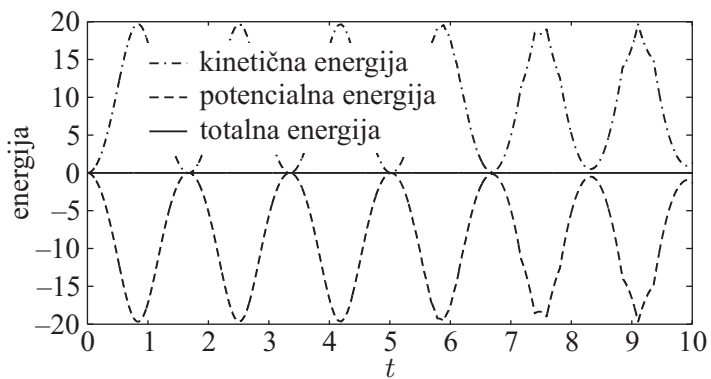
$h = 10^{-6}$ . Pri računu z Newmarkovo shemo že v prvem koraku Newtonove iteracije opazimo slabo pogojenost Jacobijeve matrike lineariziranega sistema vodilnih enačb (4.43)–(4.45). Posledično so dobljeni rezultati napačni, metoda pa ne konvergira. Račun z novim modificiranim algoritmom je stabilen ves čas analize. Rezultati pa so predstavljeni na sliki 4.10 in se odlično ujemajo z referenčnimi rezultati (slika 4.9).



(a) Trajektorije mas



(b) Hitrosti mas



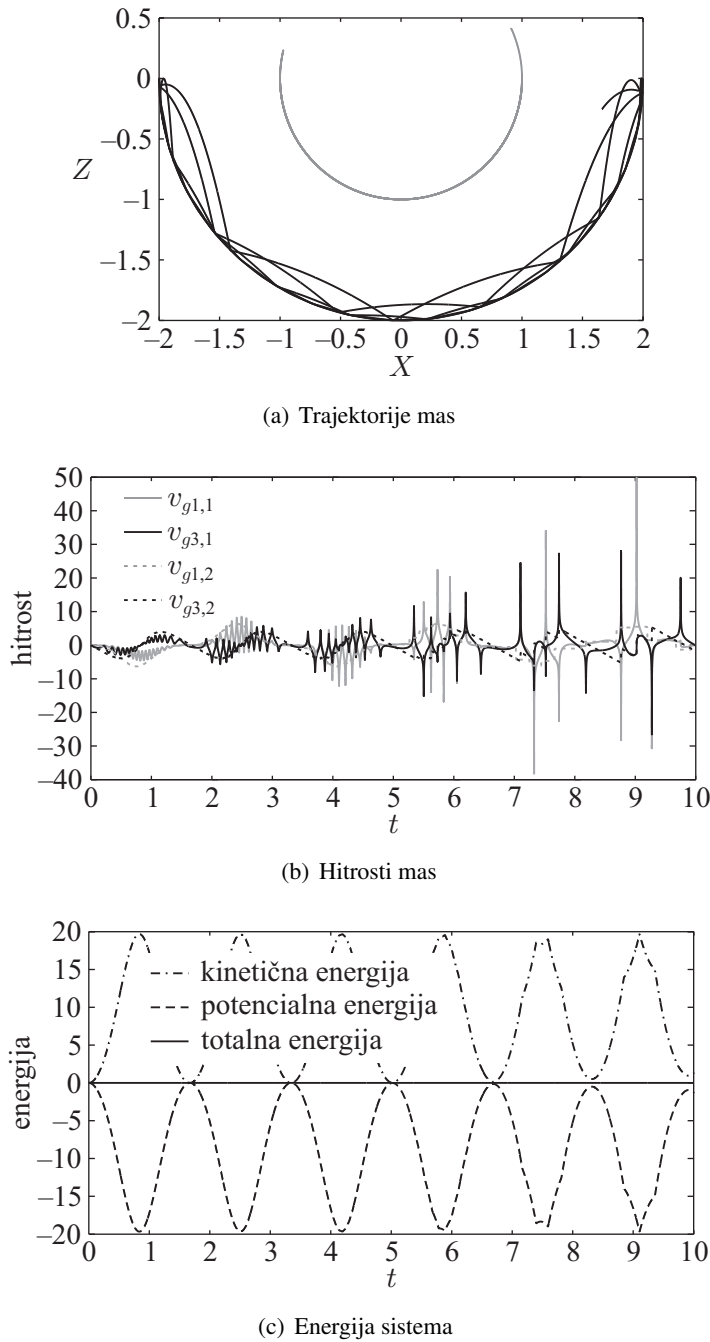
(c) Energija sistema

Slika 4.9: Dvojno nihalo. Rezultati dobljeni z Matlabovo rutino *ode15s*.

Figure 4.9: Double pendulum. Results obtained by the Matlab *ode15s* routine.

Numerične težave pri reševanju slabo pogojenih sistemov diferencialno algebrajskih enačb v nekaterih primerih lahko odpravimo z različnimi numeričnimi ukrepi s katerimi posegamo v sistem enačb. V literaturi, npr. [50, 51], avtorji kot učinkovite ukrepe predstavljajo metode predpogojevanja diskretiziranega sistema enačb in skaliranja Lagrangejevih množiteljev. Tak pristop uporabimo pri reševanju numeričnih težav pri analizi dvojnega nihala z Newmarkovo shemo pri majhnih časovnih korakih. Lagrangejeve množitelje v enačbah (4.43)–(4.44) množimo s faktorjem  $s$ :  $\lambda_g = s\tilde{\lambda}_g$ . Dobimo sistem enačb

$$m_1 \mathbf{a}_{1,g} - \mathbf{F}_{1,g} - s \Phi_{r_{1,g}}^T \tilde{\lambda}_g = \mathbf{0}$$



Slika 4.10: Dvojno nihalo. Rezultati dobjeni z modificirano Newmarkovo shemo s kratkim časovnim korakom  $h = 10^{-6}$ .

Figure 4.10: Double pendulum. Results obtained with modified Newmark scheme with small time step  $h = 10^{-6}$ .

$$\begin{aligned}
 m_2 \mathbf{a}_{2,g} - \mathbf{F}_{2,g} - s \Phi_{\mathbf{r}_{2,g}}^T \tilde{\lambda}_g &= \mathbf{0} \\
 2 \mathbf{r}_{1,g}^T \mathbf{v}_{1,g} &= 0 \\
 2 (\mathbf{r}_{2,g} - \mathbf{r}_{1,g})^T (\mathbf{v}_{2,g} - \mathbf{v}_{1,g}) &= 0,
 \end{aligned}$$

ki ga rešujemo v odvisnosti od neznanih pomikov  $\mathbf{r}_{1,g}$ ,  $\mathbf{r}_{2,g}$  in skaliranih Lagrangejevih množiteljev  $\tilde{\lambda}_g$ . Če za skalirni faktor izberemo vrednost  $s = \frac{1}{h}$ , je analiza z Newmarkovo shemo s korakom  $h = 10^{-6}$

stabilna ves opazovani interval, rezultati analize pa so enaki rezultatom, ki smo jih dobili z modificirano Newmarkovo shemo (slika 4.10).

Odziv nihala z majhnim korakom ( $h = 10^{-6}$ ) se precej razlikuje od rezultatov dobljenih z večjim korakom ( $h = 10^{-3}$ ). S tem primerom smo torej pokazali, kako pomembna je primernost implicitne časovno integracijske sheme za primere, ko so za zadostno natančnost potrebni majhni časovni koraki in z ukrepi za stabilizacijo numerične rutine ne želimo ali pa ne moremo posegati v sistem enačb. Pomembna lastnost novo predstavljene sheme, osnovane na hitrostih, je torej povečana stabilnost numerične integracije pri majhnih časovnih korakih brez dodatnih numeričnih ukrepov.

## 5 OSNOVNE ENAČBE DINAMIKE PROSTORSKIH NOSILCEV

Linijski nosilec je idealizirano trirazsežno deformabilno telo, pri katerem je ena dimenzija prevladujoča. Geometrijo nosilca vzdolž prevladujoče smeri lahko opišemo s prostorsko krivuljo, za opis preostalih dimenzij pa vpeljemo predpostavke. Matematični model nosilca predstavimo v začetku tega poglavja, pri čemer izhajamo iz standardnega modela v skladu z geometrijsko točno teorijo nosilcev [1, 2]. Kinematične količine tako postanejo odvisne od dveh parametrov kraja in časa. Enačbe dinamičnega ravnotežja nosilca izpeljemo iz izrekov o gibalni in vrtilni količini, ob koncu pa jim dodamo še konstitucijske enačbe, s katerimi opišemo lastnosti materiala.

### 5.1 Matematični model prostorskega nosilca

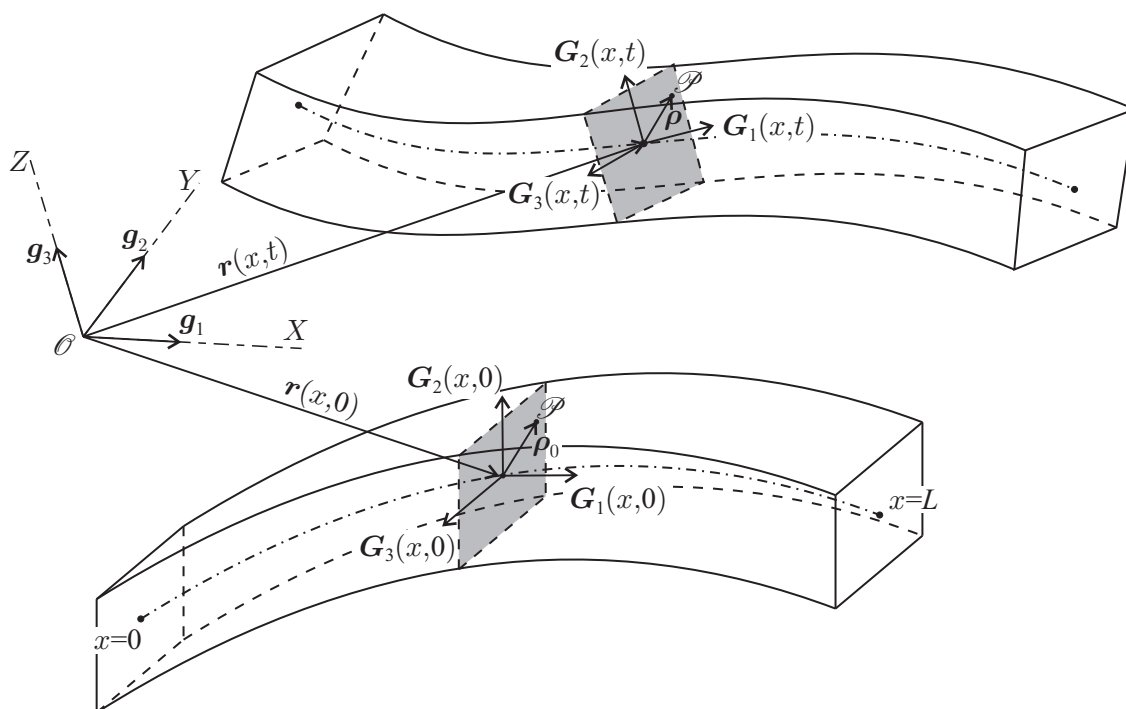
Opazujemo nosilec s poljubno začetno lego in obliko v trirazsežnem Evklidskem prostoru. Nosilec lahko opišemo z družino togih prečnih prereзов [1, 2]. Težišča prečnih prereзов so povezana s krivuljo, ki ji pravimo težiščna os nosilca. Poljubna lega nosilca je natančno določena s krajevnim vektorjem težiščne osi nosilca in z orientacijo prečnih prereзов. Lega nosilca v začetni in poljubni deformirani legi je prikazana na sliki 5.1. Za opis vektorjev in rotacij v prostoru sledimo oznakam, ki smo jih vpeljali v poglavju 2.2:

- (i) Krajevni vektor težiščne osi nosilca označimo z  $\mathbf{r}(x, t)$ . Merimo ga glede na nepomično referenčno točko  $\mathcal{O}$  v prostoru. Pri tem je  $x \in [0, L]$  naravni parameter težiščne osi v začetni konfiguraciji nosilca. Za opis gibanja vpeljemo nepomični sistem ortonormiranih baznih vektorjev  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ .
- (ii) Orientacija poljubnega prečnega prereza je določena s smermi baznih vektorjev ortonormirane pomične baze  $\{\mathbf{G}_1(x, t), \mathbf{G}_2(x, t), \mathbf{G}_3(x, t)\}$ , ki jo pripnemo v težišče prečnega prereza. Vektorja  $\mathbf{G}_2$  in  $\mathbf{G}_3$  sta orientirana vzdolž glavnih vztranzostnih osi prereзов,  $\mathbf{G}_1$  je normala:  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3$ . Preslikavo med obema bazama določa rotacijska matrika  $\mathbf{R}(x, t)$ , tako da je:  $\mathbf{G}_i(x, t) = \mathbf{R}(x, t) \mathbf{g}_i$ .

### 5.2 Kinematične enačbe

Gibanje nosilca je odvisno od časovnega parametra  $t$  in prostorskega parametra  $x$ . Kinematične enačbe podajajo zveze med pomiki in rotacijami ter njihovimi odvodi po parametrih. Odvode osnovnih kinematičnih spremenljivk po času smo zapisali že v kinematičnih enačbah, ki veljajo za delec in poljubno pomično bazo pripeto na delec (2.6)–(2.7), (3.11) in (3.14). Te enačbe veljajo tudi za vsak delec na





Slika 5.1: Matematični model nosilca.

Figure 5.1: Mathematical model of the beam.

težiščni osi nosilca

$$\dot{\mathbf{r}}_g(x,t) = \mathbf{v}_g(x,t) \quad (5.1)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_g(x,t) = \mathbf{a}_g(x,t) \quad (5.2)$$

$$\dot{\mathbf{R}}(x,t) = \mathbf{R}(x,t)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_G(x,t)) \quad (5.3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_G(x,t) = \boldsymbol{\alpha}_G(x,t). \quad (5.4)$$

Ponovimo:  $\mathbf{v}_g(x,t)$  in  $\mathbf{a}_g(x,t)$  sta hitrost in pospešek delca na težiščni osi, določenega s parametrom  $x$ .  $\boldsymbol{\omega}_G(x,t)$  in  $\boldsymbol{\alpha}_G(x,t)$  sta kotna hitrost in kotni pospešek pomične baze, pripete na prerez, določen s točko  $x$  na težiščni osi.

Kinematičnim enačbam (5.1)–(5.4) pripadajo začetni pogoji:

$$\mathbf{r}_g(x,0) = \mathbf{r}_g^{[0]}(x) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{v}_g(x,0) = \mathbf{v}_g^{[0]}(x) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{R}(x,0) = \mathbf{R}^{[0]}(x) \quad (5.7)$$

$$\boldsymbol{\omega}_G(x,0) = \boldsymbol{\omega}_G^{[0]}(x). \quad (5.8)$$

Geometrijsko točna teorija nosilcev za opis deformiranja težiščne osi nosilca vpelje deformacijski vektor  $\boldsymbol{\gamma}(x,t)$ . Spreminjanje orientacije lokalne baze vzdolž osi pa opisuje z deformacijskim vektorjem  $\boldsymbol{\kappa}(x,t)$ . Zveze med kinematičnimi in deformacijskimi količinami so izpeljane tako, da zadoščajo izreku

o virtualnem delu. Splošna oblika teh enačb se glasi

$$\mathbf{r}'_g(x, t) = \mathbf{R}(x, t) (\boldsymbol{\gamma}_G(x, t) - \mathbf{c}_G(x)) \quad (5.9)$$

$$\mathbf{R}'(x, t) = \mathbf{R}(x, t) \mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa}_G(x, t) - \mathbf{d}_G(x)). \quad (5.10)$$

S črtico ( $'$ ) označimo odvod po parametru prostora  $x$ . Enačbe (5.9)–(5.10) so točne kinematične enačbe prostorskih nosilcev. Utemeljitelja takega opisa kinematike nosilcev sta Reissner [1] in Simo [2]. Konstanti  $\mathbf{c}_G$  in  $\mathbf{d}_G$  sta odvisni od začetne oblike nosilca.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_G(x) &= -\mathbf{R}^T(x, 0) \mathbf{r}'_g(x, 0) \\ \mathbf{S}(\mathbf{d}_G(x)) &= -\mathbf{R}^T(x, 0) \mathbf{R}'(x, 0). \end{aligned}$$

Nosilec obravnavamo kot element konstrukcije, zato je njegovo deformiranje odvisno od umestitve v konstrukcijo. Element se na robovih lahko stika z več drugimi elementi, robovi nosilca so lahko podprti ali prosti, lahko pa jim pomike in zasuke tudi predpišemo. Kinematičnim enačbam (5.9)–(5.10) tako pripadajo še bistveni robni pogoji, ki jih formalno zapišemo kot

$$\mathbf{r}_g(0, t) = \mathbf{r}_g^0(t) \quad (5.11)$$

$$\mathbf{R}(0, t) = \mathbf{R}^0(t) \quad (5.12)$$

$$\mathbf{r}_g(L, t) = \mathbf{r}_g^L(t) \quad (5.13)$$

$$\mathbf{R}(L, t) = \mathbf{R}^L(t). \quad (5.14)$$

Za parametrizacijo rotacij izberemo rotacijski vektor (3.22). Časovno kinematično enačbo za rotacije, parametrizirane z rotacijskim vektorjem, smo izpeljali že v poglavju 3.4.2. Odvod rotacijskega vektorja po času izrazimo iz enačbe (3.42):

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_g(x, t) = \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\vartheta}_g(x, t)) \boldsymbol{\omega}_G(x, t). \quad (5.15)$$

Povsem analogno lahko izpeljemo izraz za odvod rotacijskega vektorja po prostorskem parametru. Kinematična enačba za rotacije, parametrizirane z rotacijskim vektorjem, ima obliko:

$$\boldsymbol{\vartheta}'_g(x, t) = \mathbf{T}^{-T}(\boldsymbol{\vartheta}_g(x, t)) (\boldsymbol{\kappa}_G(x, t) - \mathbf{d}_G(x)), \quad (5.16)$$

pripadajoči robni pogoji pa so enaki

$$\boldsymbol{\vartheta}_g(0, t) = \boldsymbol{\vartheta}_g^0(t) \quad (5.17)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_g(L, t) = \boldsymbol{\vartheta}_g^L(t). \quad (5.18)$$

### 5.3 Gibalne enačbe

Z upoštevanjem predpostavk matematičnega modela nosilca lahko gibalno (2.3) in vrtilno (2.5) količino nosilca ali njegovega poljubnega dela  $0 \leq x_1 < x_2 \leq L$  glede na nepomično izhodišče  $\mathcal{O}$  zapišemo kot:

$$\mathbf{K}_g = \int_{x_1}^{x_2} \rho A(x) \mathbf{v}_g(x, t) dx \quad (5.19)$$

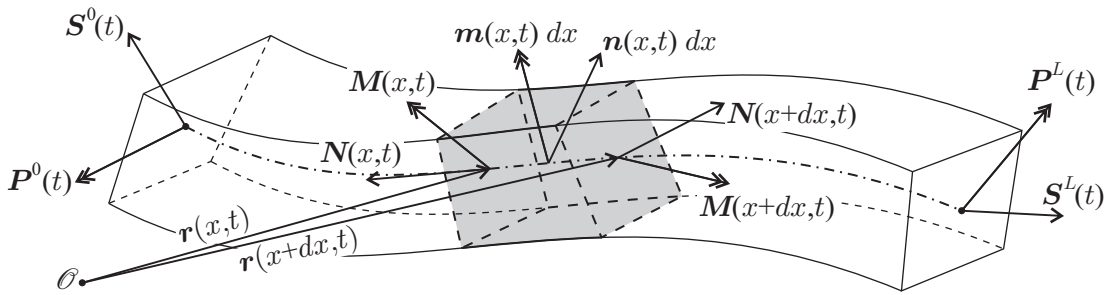
$$\mathbf{L}_g^{\mathcal{O}} = \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{r}_g(x, t) \times \rho A(x) \mathbf{v}_g(x, t) + \mathbf{R}(x, t) \mathbf{J}(x) \mathbf{R}^T(x, t) \boldsymbol{\omega}_g(x, t)] dx. \quad (5.20)$$

Produkt gostote  $\rho$  in površine prečnega prereza  $A$  označuje maso na enoto dolžine nosilca.  $\mathbf{J}$  je mehanska vztrajnostna matrika, zapisana glede na glavne vztrajnostne osi prereza  $\{\mathbf{G}_1(x, t), \mathbf{G}_2(x, t), \mathbf{G}_3(x, t)\}$ . Za zapis osnovnih izrekov potrebujemo še odvoda gibalne in vrtilne količine po času:

$$\dot{\mathbf{K}}_g = \int_{x_1}^{x_2} \rho A(x) \mathbf{a}_g(x, t) dx \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_g^{\mathcal{O}} = \int_{x_1}^{x_2} & [\mathbf{r}_g(x, t) \times \rho A(x) \mathbf{a}_g(x, t) + \mathbf{R}(x, t) \mathbf{J}(x) \mathbf{R}^T(x, t) \boldsymbol{\alpha}_g(x, t) \\ & + \boldsymbol{\omega}_g(x, t) \times \mathbf{R}(x, t) \mathbf{J}(x) \mathbf{R}^T(x, t) \boldsymbol{\omega}_g(x, t)] dx. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Nosilec je obtežen z zunanjimi linijskimi silami  $\mathbf{n}(x, t)$  in momenti  $\mathbf{m}(x, t)$ . Na robovih nosilca delujejo točkovne sile  $\mathbf{S}^0(t)$ ,  $\mathbf{S}^L(t)$  in momenti  $\mathbf{P}^0(t)$ ,  $\mathbf{P}^L(t)$ . Na elementaren del nosilca poleg zunanjih linijskih sil delujeta še rezultanti notranjih sil  $\mathbf{N}(x, t)$  in momentov  $\mathbf{M}(x, t)$  (slika 5.2). Gibalne enačbe



Slika 5.2: Obtežba nosilca.

Figure 5.2: Loading of the beam.

nosilca izpeljemo iz izrekov o gibalni (2.2) in vrtilni (2.4) količini, ki ju zapišemo za infinitezimalen del nosilca dolžine  $dx$ , glede na izhodišče  $\mathcal{O}$ . Izrek o gibalni količini dobi obliko

$$\int_x^{x+dx} \rho A(\tilde{x}) \mathbf{a}_g(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = -\mathbf{N}_g(x, t) + \int_x^{x+dx} \mathbf{n}_g(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \mathbf{N}_g(x + dx, t).$$

Izrek o vrtilni količini, zapisan za elementarni del nosilca, pa dobi obliko

$$\begin{aligned} & \int_x^{x+dx} [\mathbf{r}_g(\tilde{x}, t) \times \rho A(\tilde{x}) \mathbf{a}_g(\tilde{x}, t) + \mathbf{R}(\tilde{x}, t) \mathbf{J}(\tilde{x}) \mathbf{R}^T(\tilde{x}, t) \boldsymbol{\alpha}_g(\tilde{x}, t) \\ & + \boldsymbol{\omega}_g(\tilde{x}, t) \times \mathbf{R}(\tilde{x}, t) \mathbf{J}(\tilde{x}) \mathbf{R}^T(\tilde{x}, t) \boldsymbol{\omega}_g(\tilde{x}, t)] d\tilde{x} = -\mathbf{M}_g(x, t) \\ & - \mathbf{r}_g(x, t) \times \mathbf{N}_g(x, t) + \int_x^{x+dx} \mathbf{m}_g(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \int_x^{x+dx} \mathbf{r}_g(\tilde{x}, t) \times \mathbf{n}_g(\tilde{x}, t) d\tilde{x} \\ & + \mathbf{M}_g(x + dx, t) + \mathbf{r}_g(x + dx, t) \times \mathbf{N}_g(x + dx, t). \end{aligned}$$

V limiti, ko gre  $dx$  proti nič, dobimo enačbe dinamičnega ravnotežja linijskega nosilca:

$$\mathbf{N}'_g(x, t) = \rho A \mathbf{a}_g(x, t) - \mathbf{n}_g(x, t) \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_g(x, t) = & \mathbf{R}(x, t) \mathbf{J} \mathbf{R}^T(x, t) \boldsymbol{\alpha}_g(x, t) + \boldsymbol{\omega}_g(x, t) \times \mathbf{R}(x, t) \mathbf{J} \mathbf{R}^T(x, t) \boldsymbol{\omega}_g(x, t) \\ & - \mathbf{r}'_g(x, t) \times \mathbf{N}_g(x, t) - \mathbf{m}_g(x, t). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ravnotežni pogoji morajo biti izpolnjeni tudi na robovih nosilca. Pripadajoči naravni robni pogoji so tako enaki:

$$\mathbf{N}_g(0, t) = -\mathbf{S}^0(t) \quad (5.25)$$

$$\mathbf{M}_g(0, t) = -\mathbf{P}^0(t) \quad (5.26)$$

$$\mathbf{N}_g(L, t) = \mathbf{S}^L(t) \quad (5.27)$$

$$\mathbf{M}_g(L, t) = \mathbf{P}^L(t). \quad (5.28)$$

#### 5.4 Konstitutivne enačbe

Deformacijsko–napetostno stanje v nosilcu je odvisno od lastnosti snovi, iz katere je zgrajen nosilec. Zveze med rezultantnimi silami in momenti ter deformacijami v poljubnem prerezu nosilca so podane s konstitutivnimi enačbami:

$$\mathbf{N}_G^C(x, t) = \mathcal{C}_N(\boldsymbol{\gamma}_G(x, t), \boldsymbol{\kappa}_G(x, t)) \quad (5.29)$$

$$\mathbf{M}_G^C(x, t) = \mathcal{C}_M(\boldsymbol{\gamma}_G(x, t), \boldsymbol{\kappa}_G(x, t)) \quad (5.30)$$

V izpeljavi enačb se ne omejimo na specifičen material. Dovolj je, da privzamemo, da sta  $\mathcal{C}_N$  in  $\mathcal{C}_M$  znana in vsaj enkrat odvedljiva operatorja.

#### 5.5 Enačbe konsistence

Napetosti, določene iz ravnotežnih enačb, so teoretično enake napetostim, ki ustrezajo konstitutivnim enačbam. V zapisanih enačbah tega dejstva še nismo upoštevali. Sledimo konceptu, ki sta ga predstavila Vratinar in Saje [52], in eksplicitno zahtevamo enakost ravnotežnih in konstitucijskih sil in momentov v prerezi nosilca

$$\mathbf{N}_g(x, t) = \mathbf{R}(x, t) \mathbf{N}_G^C(x, t) \quad (5.31)$$

$$\mathbf{M}_g(x, t) = \mathbf{R}(x, t) \mathbf{M}_G^C(x, t) \quad (5.32)$$

Velika večina formulacij končnih elementov te enakosti ne zagotavlja.

#### 5.6 Povzetek enačb

Zapisali smo vse enačbe, s katerimi je problem dinamike prostorskega nosilca natančno definiran. Povzetek enačb je skupaj s pripadajočimi začetnimi in robnimi pogoji zapisan v preglednici 5.1.

Preglednica 5.1: Pregled enačb za dinamiko prostorskega nosilca v skladu z geometrijsko točno teorijo nosilcev.

Table 5.1: Summary of equations for dynamics of three-dimensional beam according to geometrically exact beam theory.

kinematične enačbe po času	začetni pogoji
$\dot{\mathbf{r}}_g(x, t) = \mathbf{v}_g(x, t)$	$\mathbf{r}_g(x, 0) = \mathbf{r}_g^{[0]}(x)$
$\dot{\mathbf{v}}_g(x, t) = \mathbf{a}_g(x, t)$	$\mathbf{v}_g(x, 0) = \mathbf{v}_g^{[0]}(x)$
$\dot{\mathbf{R}}(x, t) = \mathbf{R}(x, t)\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_G(x, t))$	$\mathbf{R}(x, 0) = \mathbf{R}^{[0]}(x)$
$\dot{\boldsymbol{\omega}}_G(x, t) = \boldsymbol{\alpha}_G(x, t)$	$\boldsymbol{\omega}_G(x, 0) = \boldsymbol{\omega}_G^{[0]}(x)$
kinematične enačbe po kraju	robni pogoji
$\mathbf{r}'_g(x, t) = \mathbf{R}(x, t)(\boldsymbol{\gamma}_G(x, t) - \mathbf{c}_G(x))$	$\mathbf{r}_g(0, t) = \mathbf{r}_g^0(t) \quad \mathbf{r}_g(L, t) = \mathbf{r}_g^L(t)$
$\mathbf{R}'(x, t) = \mathbf{R}(x, t)\mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa}_G(x, t) - \mathbf{d}_G(x))$	$\mathbf{R}(0, t) = \mathbf{R}^0(t) \quad \mathbf{R}(L, t) = \mathbf{R}^L(t)$
ravnotežne enačbe	robni pogoji
$\mathbf{N}'_g(x, t) = \rho A \mathbf{a}_g(x, t) - \mathbf{n}_g(x, t)$	$\mathbf{N}_g(0, t) = -\mathbf{S}^0(t) \quad \mathbf{N}_g(L, t) = \mathbf{S}^L(t)$
$\mathbf{M}'_g(x, t) = \mathbf{R}(x, t)\mathbf{J}\mathbf{R}^T(x, t)\boldsymbol{\alpha}_g(x, t)$ $+ \boldsymbol{\omega}_g(x, t) \times \mathbf{R}(x, t)\mathbf{J}\mathbf{R}^T(x, t)\boldsymbol{\omega}_g(x, t)$ $- \mathbf{r}'_g(x, t) \times \mathbf{N}_g(x, t) - \mathbf{m}_g(x, t)$	$\mathbf{M}_g(0, t) = -\mathbf{P}^0(t) \quad \mathbf{M}_g(L, t) = \mathbf{P}^L(t)$
konsistenčne enačbe	konstitutivne enačbe
$\mathbf{N}_g(x, t) - \mathbf{R}(x, t)\mathbf{N}_G^C(x, t) = \mathbf{0}$	$\mathbf{N}_G^C(x, t) = \mathcal{C}_N(\boldsymbol{\gamma}_G(x, t), \boldsymbol{\kappa}_G(x, t))$
$\mathbf{M}_g(x, t) - \mathbf{R}(x, t)\mathbf{M}_G^C(x, t) = \mathbf{0}$	$\mathbf{M}_G^C(x, t) = \mathcal{C}_M(\boldsymbol{\gamma}_G(x, t), \boldsymbol{\kappa}_G(x, t))$

V skupno 12 vektorskih enačbah (6 kinematičnih, 2 ravnotežnih, 2 konstitutivskih in 2 konsistenčnih) nastopa 12 neznanih vektorskih količin:  $\mathbf{r}_g(x, t)$ ,  $\mathbf{R}(x, t)$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_G(x, t)$ ,  $\boldsymbol{\kappa}_G(x, t)$ ,  $\mathbf{v}_g(x, t)$ ,  $\mathbf{a}_g(x, t)$ ,  $\boldsymbol{\omega}_G(x, t)$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_G(x, t)$ ,  $\mathbf{N}_g(x, t)$ ,  $\mathbf{M}_g(x, t)$ ,  $\mathbf{N}_G^C(x, t)$  in  $\mathbf{M}_G^C(x, t)$ . Na tem mestu se moramo odločiti, katere od neznanek bomo izbrali za osnovne neznanke in katere bodo tiste, ki jih bomo izrazili z osnovnimi neznankami. Izbira je načeloma poljubna, zavedamo pa se, da so vse neznanke zvezne količine in jih bomo v postopku numeričnega reševanja enačb iskali v diskretni obliki. To pa pomeni, da jih bomo interpolirali. Z interpolacijo nekaterih količin so lahko povezane tudi precejšnje numerične težave pri reševanju enačb.

V delih Zupana in Sajeta [9, 17] so za statično analizo prostorskih nosilcev za osnovne neznanke izbrane deformacijske količine. Taka izbira se je izkazala za zelo uspešno, zato ji sledimo tudi pri reševanju dinamičnih enačb prostorskih nosilcev.

## 5.7 Zveze med deformacijami in hitrostmi

Deformacije so krajevni odvodi pomikov in rotacij, hitrosti pa so časovni odvodi istih količin. Zanima nas zveza med deformacijami in hitrostmi.

Ponovno si oglejmo osnovne kinematične enačbe.

$$\mathbf{r}'_g(x, t) = \tilde{\gamma}_g(x, t) \quad (5.33)$$

$$\dot{\mathbf{r}}'_g(x, t) = \mathbf{v}_g(x, t) \quad (5.34)$$

$$\mathbf{R}'(x, t) = \mathbf{R}(x, t) \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_G(x, t)) \quad (5.35)$$

$$\dot{\mathbf{R}}(x, t) = \mathbf{R}(x, t) \mathbf{S}(\omega_G(x, t)). \quad (5.36)$$

Zaradi preglednejšega zapisa smo v enačbi (5.33) deformacijski vektor  $\gamma$  zapisali v nepomični bazi skupaj s konstanto  $\mathbf{c}$ :  $\tilde{\gamma}_g = \mathbf{R}(\gamma_G - \mathbf{c}_G)$ , v enačbi (5.35) pa smo vpeljali oznako:  $\tilde{\kappa}_G = \kappa_G - \mathbf{d}_G$ .

Oglejmo si najprej zvezo med hitrostjo  $\mathbf{v}_g$  in deformacijskim vektorjem  $\tilde{\gamma}_g$ . Enačbo (5.33) odvajamo po času, enačbo (5.34) pa po kraju:

$$\dot{\mathbf{r}}'_g(x, t) = \dot{\tilde{\gamma}}_g(x, t)$$

$$\dot{\mathbf{r}}'_g(x, t) = \mathbf{v}'_g(x, t).$$

Primerjava obeh rezultatov pove, da je hitrost deformacije  $\dot{\tilde{\gamma}}_g$  kar enaka krajevemu odvodu vektorja hitrosti  $\mathbf{v}'_g$ :

$$\dot{\tilde{\gamma}}_g(x, t) = \mathbf{v}'_g(x, t). \quad (5.37)$$

Na podoben način izpeljemo zvezo med kotno hitrostjo  $\omega_G$  in deformacijskim vektorjem  $\tilde{\kappa}_G$ . Enačbo (5.35) odvajamo po času, enačbo (5.36) pa po kraju in dobimo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}'(x, t) &= \dot{\mathbf{R}}(x, t) \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_G(x, t)) + \mathbf{R}(x, t) \mathbf{S}(\dot{\tilde{\kappa}}_G(x, t)) \\ &= \mathbf{R}(x, t) \mathbf{S}(\omega_G(x, t)) \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_G(x, t)) + \mathbf{R}(x, t) \mathbf{S}(\dot{\tilde{\kappa}}_G(x, t)) \\ \dot{\mathbf{R}}'(x, t) &= \mathbf{R}'(x, t) \mathbf{S}(\omega_G(x, t)) + \mathbf{R}(x, t) \mathbf{S}(\omega'_G(x, t)) \\ &= \mathbf{R}(x, t) \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_G(x, t)) \mathbf{S}(\omega_G(x, t)) + \mathbf{R}(x, t) \mathbf{S}(\omega'_G(x, t)). \end{aligned}$$

S primerjavo obeh izrazov dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\omega_G) \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_G) + \mathbf{S}(\dot{\tilde{\kappa}}_G) &= \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_G) \mathbf{S}(\omega_G) + \mathbf{S}(\omega'_G) \\ \mathbf{S}(\omega_G) \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_G) - \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_G) \mathbf{S}(\omega_G) &= \mathbf{S}(\omega'_G) - \mathbf{S}(\dot{\tilde{\kappa}}_G). \end{aligned}$$

Če upoštevamo še lastnosti antisimetričnih matrik, lahko zapišemo

$$\omega_G(x, t) \times \tilde{\kappa}_G(x, t) = \omega'_G(x, t) - \dot{\tilde{\kappa}}_G(x, t). \quad (5.38)$$

Krajevni odvod kotne hitrosti je torej v tesni povezavi s hitrostjo deformacije  $\dot{\tilde{\kappa}}_G$ .

Izraz lahko izpeljemo tudi za nepomično bazo. V fiksni bazi velja

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(x, t) &= \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_g(x, t)) \mathbf{R}(x, t) \\ \dot{\mathbf{R}}(x, t) &= \mathbf{S}(\omega_g(x, t)) \mathbf{R}(x, t), \end{aligned}$$

mešana odvoda pa sta enaka

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}'(x, t) &= \mathbf{S}\left(\dot{\tilde{\kappa}}_g(x, t)\right) \mathbf{R}(x, t) + \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_g(x, t)) \dot{\mathbf{R}}(x, t) \\ &= \mathbf{S}\left(\dot{\tilde{\kappa}}_g(x, t)\right) \mathbf{R}(x, t) + \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_g(x, t)) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_g(x, t)) \mathbf{R}(x, t) \\ \dot{\mathbf{R}}'(x, t) &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}'_g(x, t)) \mathbf{R}(x, t) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_g(x, t)) \mathbf{R}'(x, t) \\ &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}'_g(x, t)) \mathbf{R}(x, t) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_g(x, t)) \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_g(x, t)) \mathbf{R}(x, t).\end{aligned}$$

S primerjavo obeh rezultatov ugotovimo

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\left(\dot{\tilde{\kappa}}_g(x, t)\right) + \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_g(x, t)) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_g(x, t)) &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}'_g(x, t)) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_g(x, t)) \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_g(x, t)) \\ \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_g(x, t)) \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_g(x, t)) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_g(x, t)) \mathbf{S}(\tilde{\kappa}_g(x, t)) &= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}'_g(x, t)) - \mathbf{S}\left(\dot{\tilde{\kappa}}_g(x, t)\right). \\ \tilde{\kappa}_g(x, t) \times \boldsymbol{\omega}_g(x, t) &= \boldsymbol{\omega}'_g(x, t) - \dot{\tilde{\kappa}}_g(x, t).\end{aligned}$$

Rezultata (5.37) in (5.38) nas napeljeta k razmišljanju, da pojem deformacijske količine v dinamiki nekoliko razširimo. K deformacijskim količinam štejemo tudi količine, ki merijo hitrost deformiranja:  $\dot{\gamma}_G$ ,  $\dot{\kappa}_G$ ,  $v'_g$  in  $\boldsymbol{\omega}'_G$ .

## 6 NUMERIČNO REŠEVANJE ENAČB

V preglednici 5.1 smo zapisali sistem enačb, ki vodi gibanje prostorskega nosilca. Rešitev enačb želimo poiskati v krepki obliki brez dodatnih predpostavk in veznih enačb, ki so značilne za nekatere formulacije prostorskih nosilcev (npr. šibka oblika kinematičnih enačb [32], šibka oblika ravnotežnih enačb [10, 27, 53], vezne enačbe za ortogonalnost rotacij [54]). Časovno diskretizacijski shemi, predstavljeni v poglavjih 4.1 in 4.2, sta primerni za tako reševanje, saj ne posegata v strukturo enačb. Uporabimo ju za diskretizacijo kinematičnih količin pri neznanem času  $t_{n+1}$  z znanimi vrednostmi pri času  $t_n$ . Celoten problem se potem prevede na iskanje rešitev pri nekem diskretnem času  $t_{n+1}$ . Potek reševanja enačb je odvisen od izbire osnovnih neznank problema. Odločimo se, da za osnovne neznanke izberemo deformacijske količine. Načrt reševanja enačb lahko strnemo v nekaj točk:

- (i) Ker smo za osnovne neznanke izbrali deformacijske količine, najprej upoštevamo kinematične enačbe in izrazimo preostale količine v odvisnosti od izbranih deformacijskih količin.
- (ii) Ob znani kinematiki in zunanji obtežbi lahko iz ravnotežnih enačb določimo ravnotežne sile in momente.
- (iii) Ostanejo še konsistenčne enačbe, v katerih upoštevamo konstitutivne enačbe in izpeljane izraze za ravnotežne sile. Konsistenčne enačbe skupaj s kinematičnimi in ravnotežnimi robnimi pogoji tvorijo sistem vodilnih enačb pri nekem diskretnem času  $t_{n+1}$ , iz katerih izračunamo osnovne neznanke.
- (iv) Iskanje zveznih rešitev nadomestimo z iskanjem diskretnih rešitev, zato zvezne enačbe diskretiziramo, osnovne neznanke pa interpoliramo. Izberemo kolokacijsko metodo diskretizacije, ki je bila uspešno implementirana že v formulaciji deformacijskih linijskih elementov za statično analizo [9, 17, 36]. Diskretizirani sistem enačb rešujemo iterativno, zato ga lineariziramo.

### 6.1 Kinematične enačbe

Pri obravnavi kinematičnih enačb (5.1)–(5.4) in (5.9)–(5.10) izberemo dva različna pristopa, ki se razlikujeta v izbiri metode diskretizacije kinematičnih enačb po času in v izbiri osnovnih neznank.

V prvem pristopu za diskretizacijo kinematičnih količin po času izberemo Newmarkovo shemo. Za osnovne neznanke diskretizacije kinematičnih količin po kraju pa izberemo deformacijska vektorja. S tako izbiro osnovnih neznank zadostimo enemu glavnih ciljev te naloge, saj deformacijske elemente [9, 36], ki so bili pripravljene za statično analizo konstrukcij, vpeljemo tudi na področje dinamične analize.

V drugem pristopu za časovno diskretizacijo izberemo modificirano Newmarkovo shemo, ki je zasnovana na hitrostih in kotnih hitrostih. V poglavju 5.7 smo pokazali, da so krajevni odvodi hitrosti in kotnih hitrosti tudi mere za hitrost deformacije. To nas motivira, da jih izberemo za osnovne neznanke diskretizacije kinematičnih količin po kraju.



### 6.1.1 Newmarkova shema, osnovne neznanke so deformacije

Diskretizacija kinematičnih količin z Newmarkovo shemo je zasnovana na izbiri pomikov in rotacij za osnovne neznanke. Pomike in rotacije lahko izrazimo z integracijo krajevnih kinematičnih enačb ob predpostavki, da sta deformacijska vektorja  $\gamma_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x)$  in  $\kappa_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x)$  znani funkciji parametra  $x$  pri nekem diskretnem času  $t_{n+1}$ . Krajevni vektor poljubne točke nosilca izrazimo z integracijo enačbe (5.9)

$$\mathbf{r}_g^{[n+1]}(x) = \mathbf{r}_g^{[n+1]}(0) + \int_0^x \mathbf{R}^{[n+1]}(\tilde{x}) \left( \gamma_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(\tilde{x}) - \mathbf{c}_{G^{[n+1]}}(\tilde{x}) \right) d\tilde{x}. \quad (6.1)$$

Diferencialne enačbe (5.16) ne moremo neposredno integrirati, ker je zveza med rotacijskim vektorjem in vektorjem deformacij izrazito nelinearna. Rešitev lahko formalno zapišemo kot

$$\boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}(x) = \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}(0) + \int_0^x \mathbf{T}^{-T} \left( \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) \right) \left( \kappa_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(\tilde{x}) - \mathbf{d}_{G^{[n+1]}}(\tilde{x}) \right) d\tilde{x}, \quad (6.2)$$

dejansko pa jo poiščemo numerično z orodji za reševanje diferencialnih enačb prvega reda.

Enačbi (6.1)–(6.2) veljata za poljuben  $x$ , torej tudi za  $x = L$ . Zaradi zadoščanja robnim pogojem moramo enačbi, izraženi pri  $x = L$ , upoštevati v sklopu robnih enačb problema

$$\mathbf{r}_g^{L[n+1]} = \mathbf{r}_g^{[n+1]}(L) = \mathbf{r}_g^{0[n+1]} + \int_0^L \mathbf{R}^{[n+1]}(x) \left( \gamma_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) - \mathbf{c}_{G^{[n+1]}}(x) \right) dx \quad (6.3)$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_g^{L[n+1]} = \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}(L) = \boldsymbol{\vartheta}_g^{0[n+1]} + \int_0^L \mathbf{T}^{-T} \left( \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}(x) \right) \left( \kappa_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) - \mathbf{d}_{G^{[n+1]}}(x) \right) dx. \quad (6.4)$$

Ko poznamo pomike in rotacije, lahko izrazimo preostale kinematične količine: hitrosti in pospeške, kotne hitrosti in kotne pospeške. Uporabimo Newmarkovo shemo (4.6)–(4.7) in dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_g(x) &= \mathbf{r}_g^{[n+1]}(x) - \mathbf{r}_g^{[n]}(x) \\ \mathbf{v}_g^{[n+1]}(x) &= \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{u}_g + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \mathbf{v}_g^{[n]}(x) + h \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \mathbf{a}_g^{[n]}(x) \\ \mathbf{a}_g^{[n+1]}(x) &= \frac{1}{\gamma h} \left( \mathbf{v}_g^{[n+1]}(x) - \mathbf{v}_g^{[n]}(x) \right) + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{a}_g^{[n]}(x) \\ \boldsymbol{\theta}_G(x) &= \text{Spurr} \left( \mathbf{R}^{[n]T}(x) \mathbf{R}^{[n+1]}(x) \right) \\ \boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) &= \frac{\gamma}{\beta h} \boldsymbol{\theta}_G(x) + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \boldsymbol{\omega}_{G^{[n]}}^{[n]}(x) + h \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n]}}^{[n]}(x) \\ \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) &= \frac{1}{\gamma h} \left( \boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) - \boldsymbol{\omega}_{G^{[n]}}^{[n]}(x) \right) + \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \right) \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n]}}^{[n]}(x). \end{aligned}$$

Če v zgornji shemi upoštevamo enačbe (6.1)–(6.2), dobimo Newmarkovo časovno integracijsko shemo, prirejeno za deformacijske količine. V novi shemi namesto pomikov  $\mathbf{r}_g(x)$  in zasukov  $\boldsymbol{\vartheta}_g(x)$  kot osnovne neznanke nastopajo robne vrednosti pomikov in zasukov  $\mathbf{r}_g^0$ ,  $\boldsymbol{\vartheta}_g^0$  in deformacijska vektorja  $\gamma_G(x)$ ,  $\kappa_G(x)$ . Izrazi so precej obsežni in neprimerni za numerično implementacijo metode, zato končnih formul ne podajamo. V računalniškem algoritmu pomike in rotacije računamo posebej, dobljene vrednosti pa uporabimo za račun hitrosti, kotnih hitrosti, pospeškov in kotnih pospeškov.

Količine, ki nastopajo v kinematičnih enačbah, smo izrazili kot funkcije zveznih vrednosti deformacijskih vektorjev  $\gamma_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x)$  in  $\kappa_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x)$  ter diskretnih vrednosti pomikov in rotacij na robovih  $\mathbf{r}_g^{0[n+1]}$ ,  $\mathbf{v}_g^{0[n+1]}$ ,  $\mathbf{r}_g^{L[n+1]}$  in  $\mathbf{v}_g^{L[n+1]}$ , ki jih prav tako proglasimo za osnovne neznanke. Zraven pa smo zaradi specifične izbire neznank pridobili nova pogoja (6.3) in (6.4), ki ju dodamo sistemu vodilnih enačb in rešujemo sočasno z ostalimi enačbami.

### 6.1.2 Modificirana Newmarkova shema, osnovne neznanke so hitrosti

Za reševanje časovnih kinematičnih enačb tokrat izberemo modificirano Newmarkovo shemo (4.28), (4.32). Osnovni neznanki nove sheme sta povprečna hitrost  $\bar{\mathbf{v}}_g(x)$  in povprečna kotna hitrost  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x)$ . Naša naloga je, da preostale kinematične količine izrazimo z osnovnima neznankama. Za poljubno točko osi nosilca lahko zapišemo časovne kinematične enačbe v diskretni obliki v skladu z novo shemo (4.28), (4.32):

$$\mathbf{r}_g^{[n+1]}(x) = \mathbf{r}_g^{[n]}(x) + h\bar{\mathbf{v}}_g(x) \quad (6.5)$$

$$\mathbf{v}_g^{[n+1]}(x) = \frac{\beta-1}{\beta}\mathbf{v}_g^{[n]}(x) + \frac{1}{\beta}\bar{\mathbf{v}}_g(x) \quad (6.6)$$

$$\mathbf{a}_g^{[n+1]}(x) = \frac{\gamma-1}{\gamma}\mathbf{a}_g^{[n]}(x) - \frac{1}{\beta\gamma h}\mathbf{v}_g^{[n]}(x) + \frac{1}{\beta\gamma h}\bar{\mathbf{v}}_g(x) \quad (6.7)$$

$$\mathbf{R}^{[n+1]}(x) = \mathbf{R}^{[n]}(x)\mathbf{R}(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x)). \quad (6.8)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) = \frac{\beta-1}{\beta}\boldsymbol{\omega}_{G^{[n]}}^{[n]}(x) + \frac{1}{\beta}\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x) \quad (6.9)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) = \frac{\gamma-1}{\gamma}\boldsymbol{\alpha}_{G^{[n]}}^{[n]}(x) - \frac{1}{h\beta\gamma}\boldsymbol{\omega}_{G^{[n]}}^{[n]}(x) + \frac{1}{h\beta\gamma}\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x). \quad (6.10)$$

Potrebujemo še zvezo med deformacijskima vektorjema in vektorjema povprečne hitrosti. Ravnamo podobno kot pri izpeljavi izrazov (5.37) in (5.38). Zahtevamo, da rešitvi (6.5) in (6.8) ustrezata kinematičnim enačbam po kraju:

$$\mathbf{r}_g'^{[n+1]}(x) = \mathbf{R}^{[n+1]}(x)\left(\boldsymbol{\gamma}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) - \mathbf{c}_{G^{[n+1]}}(x)\right) \quad (6.11)$$

$$\mathbf{R}'^{[n+1]}(x) = \mathbf{R}^{[n+1]}(x)\mathbf{S}\left(\boldsymbol{\kappa}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) - \mathbf{d}_{G^{[n+1]}}(x)\right). \quad (6.12)$$

Enačbi (6.5) in (6.8) odvajamo po parametru  $x$

$$\mathbf{r}_g'^{[n+1]}(x) = \mathbf{r}_g'^{[n]}(x) + h\bar{\mathbf{v}}_g'(x) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{R}'^{[n+1]}(x) = \mathbf{R}'^{[n]}(x)\mathbf{R}(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x)) + \mathbf{R}^{[n]}(x)\mathbf{R}'(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x)) \quad (6.14)$$

in primerjamo z enačbama (6.11)–(6.12). Dobimo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) - \mathbf{c}_{G^{[n+1]}}(x) &= \mathbf{R}^{[n+1]T}(x)\mathbf{r}_g'^{[n]}(x) + \mathbf{R}^{[n+1]T}(x)h\bar{\mathbf{v}}_g'(x) \\ \mathbf{S}\left(\boldsymbol{\kappa}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) - \mathbf{d}_{G^{[n+1]}}(x)\right) &= \mathbf{R}^{[n+1]T}(x)\mathbf{R}'^{[n]}(x)\mathbf{R}(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x)) \\ &\quad + \mathbf{R}^{[n+1]T}(x)\mathbf{R}^{[n]}(x)\mathbf{R}'(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x)). \end{aligned}$$

Odvide pomikov in rotacij pri času  $t_n$  izrazimo iz kinematičnih enačb (6.11)–(6.12), ki jih zapišemo pri času  $t_n$ . Dobimo izraze, ki deformacije povezujejo s hitrostmi, oziroma njihovimi krajevnimi odvodi.

Deformacijski vektor  $\gamma_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x)$  izrazimo kot

$$\gamma_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) - \mathbf{c}_{G^{[n+1]}}(x) = \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G(x))^T \left( \gamma_{G^{[n]}}^{[n]}(x) - \mathbf{c}_{G^{[n]}}(x) \right) + \mathbf{R}^{[n+1]T}(x) h\bar{\mathbf{v}}'_g(x). \quad (6.15)$$

Deformacijski vektor  $\kappa_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x)$  je izražen z antisimetrično matriko

$$\mathbf{S} \left( \kappa_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) - \mathbf{d}_{G^{[n+1]}}(x) \right) = \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G(x))^T \mathbf{S} \left( \kappa_{G^{[n]}}^{[n]}(x) - \mathbf{d}_{G^{[n]}}(x) \right) \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G(x)) \\ + \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G(x))^T \mathbf{R}'(h\bar{\omega}_G(x)).$$

Produkt matrik  $\mathbf{R}(h\bar{\omega}_G(x))^T \mathbf{R}'(h\bar{\omega}_G(x))$  je antisimetrična matrika, njen osni vektor pa izrazimo s pomočjo zveze (3.43) in lastnosti (3.40).  $\kappa_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x)$  je tako enak

$$\kappa_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) - \mathbf{d}_{G^{[n+1]}}(x) = \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G(x))^T \left( \kappa_{G^{[n]}}^{[n]}(x) - \mathbf{d}_{G^{[n]}}(x) \right) + \mathbf{T}(h\bar{\omega}_G(x))^T h\bar{\omega}'_G(x). \quad (6.16)$$

Enačbi (6.15) in (6.16) predstavljata diskretizacijo deformacijskih vektorjev po času v skladu z modificirano Newmarkovo shemo. Diskretizacija je kinematično konsistentna, ker smo jo izpeljali s pomočjo točnih kinematičnih zvez (6.11)–(6.12).

Pokazali smo, da sta krajevna odvoda povprečne hitrosti  $\bar{\mathbf{v}}'_g(x)$  in povprečne kotne hitrosti  $\bar{\omega}'_G(x)$  količini, ki (podobno kot deformacijska vektorja) opisujeta deformacijsko stanje v poljubnem prerezu nosilca. Izberemo ju za osnovni neznaniki pri reševanju kinematičnih enačb z modificirano Newmarkovo shemo. Hitrosti in kotne hitrosti vzdolž nosilca dobimo z integracijo:

$$\bar{\mathbf{v}}_g(x) = \bar{\mathbf{v}}_g(0) + \int_0^x \bar{\mathbf{v}}'_g(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (6.17)$$

$$\bar{\omega}_G(x) = \bar{\omega}_G(0) + \int_0^x \bar{\omega}'_G(\tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (6.18)$$

V izrazu (6.18) integriramo vektor zapisan v pomični bazi, ki je odvisna od parametra  $x$ , taka integracija pa je v splošnem lahko zahtevna. V skladu z dogovorom (3.20) je z  $\bar{\omega}'_G$  označen relativni odvod  $\bar{\omega}_G$  po parametru  $x$ . Z enačbo (3.21) smo pokazali, da je integral relativnega odvoda vektorja v pomični bazi do konstante natančno enak vektorju samemu, zato je v enačbi (6.18) dovolj integrirati komponente relativnega odvoda  $\bar{\omega}'_G$ .

Nosilec je v konstrukcijo umeščen z robnimi vrednostmi pomikov in rotacij:  $\mathbf{r}_g^0(t)$ ,  $\mathbf{r}_g^L(t)$ ,  $\mathbf{R}^0(t)$  in  $\mathbf{R}^L(t)$ . Robne vrednosti pri nekem diskretnem času  $t_{n+1}$  lahko izrazimo v skladu s časovno diskretizacijsko shemo (4.28),(4.32):

$$\mathbf{r}_g^{0[n+1]} = \mathbf{r}_g^{0[n]} + h\bar{\mathbf{v}}_g^0 \quad (6.19)$$

$$\mathbf{r}_g^{L[n+1]} = \mathbf{r}_g^{L[n]} + h\bar{\mathbf{v}}_g^L \quad (6.20)$$

$$\mathbf{R}^{0[n+1]} = \mathbf{R}^{0[n]} \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G^0) \quad (6.21)$$

$$\mathbf{R}^{L[n+1]} = \mathbf{R}^{L[n]} \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G^L). \quad (6.22)$$

$\mathbf{r}_g^{0[n]}$ ,  $\mathbf{r}_g^{L[n]}$ ,  $\mathbf{R}^{0[n]}$  in  $\mathbf{R}^{L[n]}$  so znane vrednosti robnih pomikov in rotacij pri času  $t_n$ . Če predpostavimo, da so pri času  $t = 0$  robni pogoji zadoščeni in so robne vrednosti pomikov in rotacij znane funkcije časa,

jih lahko nadomestimo z robnimi vrednostmi hitrosti  $\bar{v}_g^0, \bar{v}_g^L$  in kotnih hitrosti  $\bar{\omega}_G^0, \bar{\omega}_G^L$ . Robni pogoji, ki so primernejši za neposredno uporabo skupaj z modificirano Newmarkovo shemo, so tako oblike:

$$\bar{v}_g(0) = \bar{v}_g^0 \quad (6.23)$$

$$\bar{v}_g(L) = \bar{v}_g^L \quad (6.24)$$

$$\bar{\omega}_G(0) = \bar{\omega}_G^0 \quad (6.25)$$

$$\bar{\omega}_G(L) = \bar{\omega}_G^L. \quad (6.26)$$

Robni pogoji na levem robu nosilca (6.23)–(6.26) so povezani prek enačb (6.17)–(6.18). Tako morajo relativni odvodi hitrosti in kotnih hitrosti zadostiti tudi pogoje na robovih, kar zapišemo s sledečima enačbama

$$\bar{v}_g(L) = \bar{v}_g^0 + \int_0^L \bar{v}'_g(x) dx = \bar{v}_g^L \quad (6.27)$$

$$\bar{\omega}_G(L) = \bar{\omega}_G^0 + \int_0^L \bar{\omega}'_G(x) dx = \bar{\omega}_G^L, \quad (6.28)$$

ki ju dodamo naboru vodilnih enačb problema.

Predstavili smo rešitve kinematičnih enačb nosilca, v katerih kot osnovne neznanke nastopajo zvezne funkcije krajevnih odvodov vektorjev hitrosti in kotne hitrosti  $\bar{v}'_g(x), \bar{\omega}'_G(x)$  in robne vrednosti hitrosti in kotnih hitrosti  $\bar{v}_g^0, \bar{\omega}_G^0, \bar{v}_g^L$  in  $\bar{\omega}_G^L$ .

## 6.2 Ravnotežne enačbe

Ob predpostavki, da poznamo vse kinematične količine in da so vektorji zunanjih linijskih sil in momentov znane funkcije parametra  $x$ , lahko rešitve ravnotežnih enačb (5.23)–(5.24) dobimo z integracijo. Ravnotežne sile pri diskretnem času  $t_{n+1}$  so enake

$$\mathbf{N}_g^{[n+1]}(x) = \mathbf{N}_g^{[n+1]}(0) - \int_0^x \mathbf{n}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_0^x \rho A(\tilde{x}) \mathbf{a}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad (6.29)$$

ravnotežni momenti pa

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_g^{[n+1]}(x) &= \mathbf{M}_g^{[n+1]}(0) - \int_0^x \mathbf{r}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) \times \mathbf{N}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_0^x \mathbf{m}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\quad + \int_0^x \mathbf{R}^{[n+1]}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \mathbf{R}^{T[n+1]}(\tilde{x}) \boldsymbol{\alpha}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\quad + \int_0^x \boldsymbol{\omega}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) \times \mathbf{R}^{[n+1]}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \mathbf{R}^{T[n+1]}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

V enačbah (6.29) in (6.30) nastopata neznanani robni vrednosti ravnotežnih sil in momentov  $\mathbf{N}_g(0, t)$  in  $\mathbf{M}_g(0, t)$ . Obe neznanani količini dodamo k naboru neznank problema.

Iz strukture integriranih ravnotežnih enačb lahko identificiramo komponente, ki so posledica notranjih vplivov  $(i)$ , zunanjih vplivov  $(e)$  in vztrajnostnih vplivov  $(m)$ . Ravnotežno silo in moment lahko potem zapišemo kot vsoto

$$\mathbf{N}_g^{[n+1]}(x) = \mathbf{N}_g^{i[n+1]}(x) + \mathbf{N}_g^{e[n+1]}(x) + \mathbf{N}_g^{m[n+1]}(x) \quad (6.31)$$

$$\mathbf{M}_g^{[n+1]}(x) = \mathbf{M}_g^{i[n+1]}(x) + \mathbf{M}_g^{e[n+1]}(x) + \mathbf{M}_g^{m[n+1]}(x), \quad (6.32)$$

kjer so komponente ravnotežne sile enake

$$\mathbf{N}_g^{i[n+1]}(x) = \mathbf{N}_g^{[n+1]}(0) \quad (6.33)$$

$$\mathbf{N}_g^{e[n+1]}(x) = - \int_0^x \mathbf{n}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (6.34)$$

$$\mathbf{N}_g^{m[n+1]}(x) = \int_0^x \rho A(\tilde{x}) \mathbf{a}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad (6.35)$$

komponente ravnotežnega momenta pa

$$\mathbf{M}_g^{i[n+1]}(x) = \mathbf{M}_g^{[n+1]}(0) - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}_g^{[n+1]}(\tilde{x})) \mathbf{N}_g^{i[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (6.36)$$

$$\mathbf{M}_g^{e[n+1]}(x) = - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}_g^{[n+1]}(\tilde{x})) \mathbf{N}_g^{e[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_0^x \mathbf{m}_g^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_g^{m[n+1]}(x) = & - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}_g^{[n+1]}(\tilde{x})) \mathbf{N}_g^{m[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_0^x \mathbf{R}^{[n+1]}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ & + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}^{[n+1]}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(\tilde{x})) \mathbf{R}^{[n+1]}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(\tilde{x}) d\tilde{x}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

V gornjih enačbah smo vektorske produkte zapisali z uporabo pravila (3.29). Kotne hitrosti in pospeške pa smo zapisali v pomični bazi:  $\mathbf{R}^{T[n+1]} \boldsymbol{\omega}_g^{[n+1]} = \boldsymbol{\omega}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}$  in  $\mathbf{R}^{T[n+1]} \boldsymbol{\alpha}_g^{[n+1]} = \boldsymbol{\alpha}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}$ . Komponentni zapis ravnotežnih sil in momentov omogoča preglednejšo linearizacijo, pomemben pa je tudi za izvedbo numeričnega dušenja, ki ga prikažemo v poglavju 6.5.

### 6.3 Vodilne enačbe dinamike prostorskega linijskega elementa

Opravili smo delo, ki smo ga zapisali v točkah (i) in (ii) na začetku tega poglavja. Izmed celotnega nabora enačb dinamike prostorskega nosilca smo del enačb formalno zadostili, ostale so enačbe konsistence, konstitutivni zakoni ter naravni robni pogoji ravnotežja sil na robovih. V obeh pristopih reševanja kinematičnih enačb smo dobili dodatni enačbi, ki ju dodamo preostalim enačbam. Skupaj tvorijo vodilni sistem enačb dinamike prostorskega nosilca, ki jih rešujemo s pomočjo pomožnih enačb, predstavljenih v točkah 6.1 in 6.2 tega poglavja.

Zaradi različnih metod za diskretizacijo kinematičnih enačb smo dobili tudi dva različna nabora osnovnih neznank. V nadaljevanju zapišemo vodilna sistema enačb za vsako izbiro osnovnih neznank posebej.

### 6.3.1 Element z interpolacijo deformacij

Pri reševanju kinematičnih enačb z Newmarkovo shemo smo za osnovni neznanki izbrali deformacijska vektorja  $\gamma_G(x)$  in  $\kappa_G(x)$ , neznane pa so tudi robne vrednosti pomikov in rotacijskih vektorjev:  $\mathbf{r}_g^0, \boldsymbol{\vartheta}_g^0, \mathbf{r}_g^L, \boldsymbol{\vartheta}_g^L$ . Z integracijo ravnotežnih sil in momentov smo pridobili še neznana vektorja ravnotežnih sil in momentov na levem robu elementa  $\mathbf{N}_g^0$  in  $\mathbf{M}_g^0$ .

Vodilni sistem enačb sestavljajo konsistenčni pogoji (5.31)–(5.32), robni enačbi za pomike in zasuke krajišč nosilca (6.3)–(6.3) ter naravni robni pogoji (5.25)–(5.28):

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{R}^{[n+1]}(x) \mathbf{N}_{G^{[n+1]}}^C(x) - \mathbf{N}_g^{[n+1]}(x) = \mathbf{0} \quad (6.39)$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{R}^{[n+1]}(x) \mathbf{M}_{G^{[n+1]}}^C(x) - \mathbf{M}_g^{[n+1]}(x) = \mathbf{0} \quad (6.40)$$

$$\mathbf{f}_3 = \mathbf{r}_g^{L[n+1]} - \mathbf{r}_g^{[n+1]}(L) = \mathbf{0} \quad (6.41)$$

$$\mathbf{f}_4 = \boldsymbol{\vartheta}_g^{L[n+1]} - \boldsymbol{\vartheta}_g^{[n+1]}(L) = \mathbf{0} \quad (6.42)$$

$$\mathbf{f}_5 = \mathbf{S}^{0[n+1]} + \mathbf{N}_g^{[n+1]}(0) = \mathbf{0} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{f}_6 = \mathbf{P}^{0[n+1]} + \mathbf{M}_g^{[n+1]}(0) = \mathbf{0} \quad (6.44)$$

$$\mathbf{f}_7 = \mathbf{S}^{L[n+1]} - \mathbf{N}_g^{[n+1]}(L) = \mathbf{0} \quad (6.45)$$

$$\mathbf{f}_8 = \mathbf{P}^{L[n+1]} - \mathbf{M}_g^{[n+1]}(L) = \mathbf{0}. \quad (6.46)$$

Enačbe rešujemo numerično, zato vpeljemo interpolacijo komponent deformacijskih vektorjev. Funkciji  $\gamma_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x)$  in  $\kappa_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x)$  nadomestimo z diskretnimi vrednostmi v poljubno izbranih interpolacijskih točkah  $x_p, p = 1, \dots, N$  in interpoliramo z interpolacijskimi funkcijami  $I_p(x)$ :

$$\gamma_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) = \sum_{p=1}^N I_p(x) \gamma_{G^{[n+1]}}^{p[n+1]} \quad (6.47)$$

$$\kappa_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) = \sum_{p=1}^N I_p(x) \kappa_{G^{[n+1]}}^{p[n+1]}. \quad (6.48)$$

Diskretizacija osnovnih neznank omogoča diskretizacijo zveznih enačb (6.39)–(6.40) glede na parameter  $x$  po metodi končnih elementov. Izberemo kolokacijsko metodo in enačbam (6.39)–(6.40) zadostimo le v  $N$  izbranih diskretnih točkah  $x_q, q = 1, \dots, N$ :

$$\mathbf{f}_{1,q} = \mathbf{R}^{[n+1]}(x_q) \mathbf{N}_G^C(x_q) - \mathbf{N}_g^{[n+1]}(x_q) = \mathbf{0} \quad (6.49)$$

$$\mathbf{f}_{2,q} = \mathbf{R}^{[n+1]}(x_q) \mathbf{M}_G^C(x_q) - \mathbf{M}_g^{[n+1]}(x_q) = \mathbf{0}. \quad (6.50)$$

Dobimo sistem  $2N + 6$  diskretnih nelinearnih vektorskih enačb za  $2N + 6$  osnovnih neznank  $\gamma_{G^{[n+1]}}^{p[n+1]}, \kappa_{G^{[n+1]}}^{p[n+1]}, \mathbf{r}_g^{0[n+1]}, \boldsymbol{\vartheta}_g^{0[n+1]}, \mathbf{r}_g^{L[n+1]}, \boldsymbol{\vartheta}_g^{L[n+1]}, \mathbf{N}_g^{0[n+1]}$  in  $\mathbf{M}_g^{0[n+1]}, p = 1, \dots, N$ .

### 6.3.2 Element z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti

V drugem pristopu smo za časovno diskretizacijo kinematičnih enačb uporabili modificirano Newmarkovo shemo, za osnovne neznanke pa smo izbrali krajevne odvode povprečne vrednosti hitrosti  $\bar{\mathbf{v}}_g'(x)$  in kotne hitrosti  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_G'(x)$  ter robne vrednosti povprečnih hitrosti in kotnih hitrosti:  $\bar{\mathbf{v}}_g^0, \bar{\boldsymbol{\omega}}_G^0, \bar{\mathbf{v}}_g^L, \bar{\boldsymbol{\omega}}_G^L$ . Z

integracijo ravnotežnih sil in momentov smo pridobili še neznana vektorja ravnotežnih sil in momentov na levem robu elementa  $\mathbf{N}_g^0$  in  $\mathbf{M}_g^0$ .

Vodilni sistem enačb tudi v tem primeru sestavimo iz konsistenčnih pogojev (5.31)–(5.32), kinematičnih robnih enačb (6.27)–(6.28), ki smo jih zapisali v odvisnosti od hitrosti in kotnih hitrosti, in naravnih robnih pogojev (5.25)–(5.28):

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{R}^{[n+1]}(x) \mathbf{N}_{G^{[n+1]}}^{C^{[n+1]}}(x) - \mathbf{N}_g^{[n+1]}(x) = \mathbf{0} \quad (6.51)$$

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{R}^{[n+1]}(x) \mathbf{M}_{G^{[n+1]}}^{C^{[n+1]}}(x) - \mathbf{M}_g^{[n+1]}(x) = \mathbf{0} \quad (6.52)$$

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{v}_g^{L[n+1]} - \mathbf{v}_g^{[n+1]}(L) = \mathbf{0} \quad (6.53)$$

$$\mathbf{h}_4 = \boldsymbol{\omega}_G^{L[n+1]} - \boldsymbol{\omega}_G^{[n+1]}(L) = \mathbf{0} \quad (6.54)$$

$$\mathbf{h}_5 = \mathbf{S}^{0[n+1]} + \mathbf{N}_g^{[n+1]}(0) = \mathbf{0} \quad (6.55)$$

$$\mathbf{h}_6 = \mathbf{P}^{0[n+1]} + \mathbf{M}_g^{[n+1]}(0) = \mathbf{0} \quad (6.56)$$

$$\mathbf{h}_7 = \mathbf{S}^{L[n+1]} - \mathbf{N}_g^{[n+1]}(L) = \mathbf{0} \quad (6.57)$$

$$\mathbf{h}_8 = \mathbf{P}^{L[n+1]} - \mathbf{M}_g^{[n+1]}(L) = \mathbf{0}. \quad (6.58)$$

Diskretizacija po metodi končnih elementov temelji na interpolaciji osnovnih zveznih neznank, ki jih nadomestimo z diskretnimi vrednostmi in interpolacijo:

$$\bar{\mathbf{v}}_g'(x) = \sum_{p=1}^N I_p(x) \bar{\mathbf{v}}_g^{p'} \quad (6.59)$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_G'(x) = \sum_{p=1}^N I_p(x) \bar{\boldsymbol{\omega}}_G^{p'}. \quad (6.60)$$

$\bar{\mathbf{v}}_g^{p'}$  in  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_G^{p'}$  so vrednosti osnovnih neznank v poljubno izbranih interpolacijskih točkah  $x_p$ ,  $p = 1, \dots, N$ ,  $I_p(x)$  pa so interpolacijske funkcije. Zveznim enačbam (6.51)–(6.52) tudi v tem primeru zadostimo v poljubno izbranih točkah  $x_q$ ,  $q = 1, \dots, N$ :

$$\mathbf{h}_{1,q} = \mathbf{R}^{[n+1]}(x_q) \mathbf{N}_G^{C^{[n+1]}}(x_q) - \mathbf{N}_g^{[n+1]}(x_q) = \mathbf{0} \quad (6.61)$$

$$\mathbf{h}_{2,q} = \mathbf{R}^{[n+1]}(x_q) \mathbf{M}_G^{C^{[n+1]}}(x_q) - \mathbf{M}_g^{[n+1]}(x_q) = \mathbf{0}. \quad (6.62)$$

Sistem enačb (6.61)–(6.62), (6.53)–(6.58) je sistem  $2N + 6$  diskretnih nelinearnih enačb, v katerem kot osnovne neznanke nastopajo:  $\bar{\mathbf{v}}_g^{p'}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_G^{p'}$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_g^0$ ,  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_G^0$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_g^L$ ,  $\bar{\boldsymbol{\omega}}_G^L$ ,  $\mathbf{N}_g^{0[n+1]}$  in  $\mathbf{M}_g^{0[n+1]}$ ,  $p = 1, \dots, N$ .

#### 6.4 Reševanje diskretnih enačb

Diskretna sistema enačb (6.49)–(6.50), (6.41)–(6.46) in (6.61)–(6.62), (6.53)–(6.58) rešujemo iterativno z Newtonovo metodo. Diskretne enačbe lineariziramo in pojasnimo dodajanje iterativnih popravkov, ki jih dobimo z rešitvijo lineariziranega sistema. Linearizacijo zapišemo za obe formulaciji vodilnih enačb elementa v pregledni obliki, ki je primerna za programiranje. Zaradi boljše preglednosti izrazov opuščamo oznako za diskreten čas  $t_{n+1}$ , pri katerem rešujemo enačbe.

### 6.4.1 Element z interpolacijo deformacij

#### Linearizacija

Enačbe (6.49)–(6.50) in (6.41)–(6.46) variiramo okrog trenutne iterativne konfiguracije v smereh osnovnih neznank:  $\delta\gamma_G^p$ ,  $\delta\kappa_G^p$ ,  $\delta\mathbf{r}_g^0$ ,  $\delta\boldsymbol{\vartheta}_g^0$ ,  $\delta\mathbf{r}_g^L$ ,  $\delta\boldsymbol{\vartheta}_g^L$ ,  $\delta\mathbf{N}_g^0$  in  $\delta\mathbf{M}_g^0$ . Preden zapišemo variacije celotnega sistema enačb, pripravimo variacije količin, ki nastopajo v enačbah.

Variacije zveznih vrednosti deformacijskih vektorjev dobimo z upoštevanjem interpolacije (6.47)–(6.48):

$$\delta\gamma_G(x) = \sum_{p=1}^N I_p(x) \delta\gamma_G^p \quad (6.63)$$

$$\delta\kappa_G(x) = \sum_{p=1}^N I_p(x) \delta\kappa_G^p. \quad (6.64)$$

Nadaljujemo z variiranjem krajevnih kinematičnih enačb. Variacija odvoda krajevnega vektorja po kraju (5.9) je enaka

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{r}'_g(x) &= -\mathbf{S}(\mathbf{R}(x)(\gamma_G(x) - \mathbf{c}_G(x)))\delta\boldsymbol{\vartheta}_g(x) + \mathbf{R}(x)\delta\gamma_G(x) \\ &= -\mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(x))\delta\boldsymbol{\vartheta}_g(x) + \mathbf{R}(x)\delta\gamma_G(x). \end{aligned} \quad (6.65)$$

Variirajmo še kinematično enačbo za rotacije (5.10):

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{R}'(x) &= \delta\mathbf{R}(x)\mathbf{S}(\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) + \mathbf{R}(x)\mathbf{S}(\delta\kappa_G(x)) \\ &= \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\vartheta}_g(x))\mathbf{R}(x)\mathbf{S}(\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) + \mathbf{R}(x)\mathbf{S}(\delta\kappa_G(x)) \\ &= \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\vartheta}_g(x))\mathbf{R}'(x) + \mathbf{R}(x)\mathbf{S}(\delta\kappa_G(x)). \end{aligned}$$

Izraziti želimo variacijo rotacijskega vektorja  $\delta\boldsymbol{\vartheta}_g(x)$ , zato po kraju odvajamo izraz za variacijo rotacijske matrike (3.44):

$$\delta\mathbf{R}'(x) = \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\vartheta}'_g(x))\mathbf{R}(x) + \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\vartheta}_g(x))\mathbf{R}'(x).$$

S primerjavo obeh zapisov variacij odvoda rotacijske matrike dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\delta\boldsymbol{\vartheta}'_g(x)) &= \mathbf{R}(x)\mathbf{S}(\delta\kappa_G(x))\mathbf{R}^T(x) \\ \delta\boldsymbol{\vartheta}'_g(x) &= \mathbf{R}(x)\delta\kappa_G(x). \end{aligned} \quad (6.66)$$

Izraza (6.65)–(6.66) predstavljata točne kinematične enačbe Reisnerjevega nosilca v šibki obliki.

Variacije pomikov in rotacij dobimo kar z integracijo šibkih zvez (6.65)–(6.66):

$$\delta\mathbf{r}_g(x) = \delta\mathbf{r}_g^0 - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x}))\delta\boldsymbol{\vartheta}_g(\tilde{x})d\tilde{x} + \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x})\delta\gamma_G(\tilde{x})d\tilde{x} \quad (6.67)$$

$$\delta\boldsymbol{\vartheta}_g(x) = \delta\boldsymbol{\vartheta}_g^0 + \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x})\delta\kappa_G(\tilde{x})d\tilde{x}. \quad (6.68)$$



Integrirane izraze poenostavimo tako, da upoštevamo šibka interpolacijska nastavka (6.63)–(6.64) in vpeljemo nekaj pomožnih količin:

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \delta\gamma_G(\tilde{x}) d\tilde{x} &= \sum_{p=1}^N \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) I_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \delta\gamma_G^p \\ \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \delta\kappa_G(\tilde{x}) d\tilde{x} &= \sum_{p=1}^N \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) I_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \delta\kappa_G^p \\ \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \delta\vartheta_g(\tilde{x}) d\tilde{x} &= \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) d\tilde{x} \delta\vartheta_g^0 + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \delta\kappa_G^p.\end{aligned}$$

Dobimo kompakten zapis variacij pomikov in rotacij:

$$\delta\mathbf{r}_g(x) = \delta\mathbf{r}_g^0 - \mathbf{U}(x) \delta\vartheta_g^0 - \sum_{p=1}^N \mathbf{V}_p(x) \delta\kappa_G^p + \sum_{p=1}^N \mathbf{W}_p(x) \delta\gamma_G^p \quad (6.69)$$

$$\delta\vartheta_g(x) = \delta\vartheta_g^0 + \sum_{p=1}^N \mathbf{W}_p(x) \delta\kappa_G^p, \quad (6.70)$$

kjer so

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x) &= \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) d\tilde{x} \\ \mathbf{W}_p(x) &= \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) I_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ \mathbf{V}_p(x) &= \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x}.\end{aligned}$$

Iz znanih variacij pomikov in rotacij lahko izrazimo variacije hitrosti in pospeškov, ki smo jih v zapisali v enačbah (4.15)–(4.16) in (4.19)–(4.20):

$$\delta\mathbf{v}_g(x) = \frac{\gamma}{\beta h} \left( \delta\mathbf{r}_g^0 - \mathbf{U}(x) \delta\vartheta_g^0 - \sum_{p=1}^N \mathbf{V}_p(x) \delta\kappa_G^p + \sum_{p=1}^N \mathbf{W}_p(x) \delta\gamma_G^p \right) \quad (6.71)$$

$$\delta\mathbf{a}_g(x) = \frac{1}{\beta h^2} \left( \delta\mathbf{r}_g^0 - \mathbf{U}(x) \delta\vartheta_g^0 - \sum_{p=1}^N \mathbf{V}_p(x) \delta\kappa_G^p + \sum_{p=1}^N \mathbf{W}_p(x) \delta\gamma_G^p \right) \quad (6.72)$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_G(x) = \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G(x))^{-T} \mathbf{R}^T(x) \left( \delta\vartheta_g^0 + \sum_{p=1}^N \mathbf{W}_p(x) \delta\kappa_G^p \right) \quad (6.73)$$

$$\delta\boldsymbol{\alpha}_G(x) = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G(x))^{-T} \mathbf{R}^T(x) \left( \delta\vartheta_g^0 + \sum_{p=1}^N \mathbf{W}_p(x) \delta\kappa_G^p \right). \quad (6.74)$$

Pripravili smo vse potrebno za variiranje ravnotežnih sil in momentov. Zaradi preglednosti izkoristimo aditivni razcep ravnotežnih sil in momentov po enačbah (6.31)–(6.32). Variaciji sumandov, ki sta posledica notranjih (6.33) in zunanjih sil (6.34), sta trivialni:

$$\delta\mathbf{N}_g^i(x) = \delta\mathbf{N}_g^0 \quad (6.75)$$

$$\delta\mathbf{N}_g^e(x) = \mathbf{0}. \quad (6.76)$$

Variacijo vztrajnostnega dela ravnotežne sile (6.35) formalno zapišemo kot

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{N}_g^m(x) &= \int_0^x \rho A \delta \mathbf{a}_g(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= \tilde{\mathbf{N}}_r^m(x) \delta \mathbf{r}_g^0 + \tilde{\mathbf{N}}_\vartheta^m(x) \delta \boldsymbol{\vartheta}_g^0 + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{\kappa,p}^m(x) \delta \boldsymbol{\kappa}_G^p + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{\gamma,p}^m(x) \delta \boldsymbol{\gamma}_G^p,\end{aligned}\quad (6.77)$$

kjer je

$$\tilde{\mathbf{N}}_r^m(x) = \frac{1}{\beta h^2} \int_0^x \rho A \mathbf{I} d\tilde{x} \quad (6.78)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_\vartheta^m(x) = -\frac{1}{\beta h^2} \int_0^x \rho A \mathbf{U}(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (6.79)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_{\kappa,p}^m(x) = -\frac{1}{\beta h^2} \int_0^x \rho A \mathbf{V}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (6.80)$$

$$\tilde{\mathbf{N}}_{\gamma,p}^m(x) = \frac{1}{\beta h^2} \int_0^x \rho A \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (6.81)$$

Z variiranjem komponent ravnotežnega momenta (6.32) imamo več dela. Najprej pripravimo osnovne izraze:

$$\delta \mathbf{M}_g^i(x) = \delta \mathbf{M}_g(0) - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \delta \mathbf{N}_g^i(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g^i(\tilde{x})) \delta \mathbf{r}'_g(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (6.82)$$

$$\delta \mathbf{M}_g^e(x) = - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \delta \mathbf{N}_g^e(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g^e(\tilde{x})) \delta \mathbf{r}'_g(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{M}_g^m(x) &= - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \delta \mathbf{N}_g^m(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g^m(\tilde{x})) \delta \mathbf{r}'_g(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\quad + \int_0^x \delta \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(x) \boldsymbol{\alpha}_G(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(x) \delta \boldsymbol{\alpha}_G(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\quad - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(x) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \delta \mathbf{R}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\quad - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(x) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{R}(\tilde{x}) \delta \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\quad + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \delta \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(x) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\quad + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(x) \delta \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x}) d\tilde{x},\end{aligned}\quad (6.84)$$

nato pa upoštevamo že izpeljane izraze za variacije kinematičnih količin. Variacijo  $\delta \mathbf{M}_g^i$  lahko zapišemo

kot

$$\delta M_g^i(x) = \delta M_g^0 + \tilde{\mathbf{M}}_N^i \delta N_g^0 + \tilde{\mathbf{M}}_\vartheta^i \delta \vartheta_g^0 + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^i(x) \delta \kappa_G^p + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^i(x) \delta \gamma_G^p,$$

pomožne matrike pa so enake

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_N^i(x) &= - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) d\tilde{x} \\ \tilde{\mathbf{M}}_\vartheta^i(x) &= - \int_0^x \mathbf{S}(N_g^i(\tilde{x})) \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) d\tilde{x} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^i(x) &= - \int_0^x \mathbf{S}(N_g^i(\tilde{x})) \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^i(x) &= \int_0^x \mathbf{S}(N_g^i(\tilde{x})) I_p(\tilde{x}) \mathbf{R}(\tilde{x}) d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Podoben je tudi formalen zapis variacije člena, ki je posledica zunanjih sil

$$\delta M_g^e(x) = \tilde{\mathbf{M}}_\vartheta^e \delta \vartheta_g^0 + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^e(x) \delta \kappa_G^p + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^e(x) \delta \gamma_G^p,$$

kjer je

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_\vartheta^e(x) &= - \int_0^x \mathbf{S}(N_g^e(\tilde{x})) \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) d\tilde{x} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^e(x) &= - \int_0^x \mathbf{S}(N_g^e(\tilde{x})) \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^e(x) &= \int_0^x \mathbf{S}(N_g^e(\tilde{x})) I_p(\tilde{x}) \mathbf{R}(\tilde{x}) d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Ostane še variacija vztrajnostnega člena ravnotežnega momenta, ki jo zapišemo kot

$$\delta M_g^m(x) = \tilde{\mathbf{M}}_r^m \delta r_g^0 + \tilde{\mathbf{M}}_\vartheta^m \delta \vartheta_g^0 + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^m(x) \delta \kappa_G^p + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^m(x) \delta \gamma_G^p.$$

Pomožne matrike pri variacijah so enake

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_r^m &= - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \tilde{\mathbf{N}}_r^m(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ \tilde{\mathbf{M}}_\vartheta^m(x) &= - \int_0^x \mathbf{S}(N_g^m(\tilde{x})) \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) d\tilde{x} - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \tilde{\mathbf{N}}_\vartheta^m(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\quad - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \boldsymbol{\alpha}_G(\tilde{x})) d\tilde{x} + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) d\tilde{x} \\ &\quad - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) d\tilde{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\beta h^2} \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G(\tilde{x}))^{-T} \mathbf{R}^T(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
& - \frac{\gamma}{\beta h} \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G(\tilde{x}))^{-T} \mathbf{R}^T(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
& + \frac{\gamma}{\beta h} \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G(\tilde{x}))^{-T} \mathbf{R}^T(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
\tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^m(x) = & - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g^m(\tilde{x})) \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \tilde{\mathbf{N}}_{\kappa}^m(\tilde{x}) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
& - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \boldsymbol{\alpha}_G(\tilde{x})) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
& + \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
& - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
& + \frac{1}{\beta h^2} \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G(\tilde{x}))^{-T} \mathbf{R}^T(\tilde{x}) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
& - \frac{\gamma}{\beta h} \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G(\tilde{x}))^{-T} \mathbf{R}^T(\tilde{x}) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
& + \frac{\gamma}{\beta h} \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{R}(\tilde{x}) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(\tilde{x}) \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_G(\tilde{x}))^{-T} \mathbf{R}^T(\tilde{x}) \mathbf{W}_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
\tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^m(x) = & \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g^m(\tilde{x})) I_p(\tilde{x}) \mathbf{R}(\tilde{x}) d\tilde{x} - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \tilde{\mathbf{N}}_{\gamma,p}^m(\tilde{x}) d\tilde{x}.
\end{aligned}$$

Za linearizacijo konstitucijskih zvez (5.29)–(5.30) zadošča določiti parcialne odvode operatorjev  $\mathcal{C}_N$  in  $\mathcal{C}_M$  v odvisnosti od komponent deformacijskih vektorjev  $\boldsymbol{\gamma}_G$  in  $\boldsymbol{\kappa}_G$ . Parcialne odvode zaradi preglednosti označimo kot

$$\mathbf{C}_{\gamma\gamma} = \left[ \frac{\partial \mathcal{C}_i^N}{\partial \gamma_j} \right], \quad \mathbf{C}_{\gamma\kappa} = \left[ \frac{\partial \mathcal{C}_i^N}{\partial \kappa_j} \right], \quad \mathbf{C}_{\kappa\gamma} = \left[ \frac{\partial \mathcal{C}_i^M}{\partial \gamma_j} \right], \quad \mathbf{C}_{\kappa\kappa} = \left[ \frac{\partial \mathcal{C}_i^M}{\partial \kappa_j} \right], \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.85)$$

Variacije konstitucijskih notranjih sil in momentov so potem enake

$$\delta \mathbf{N}_G^C(x) = \mathbf{C}_{\gamma\gamma}(x) \delta \boldsymbol{\gamma}_G(x) + \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x) \delta \boldsymbol{\kappa}_G(x) \quad (6.86)$$

$$\delta \mathbf{M}_G^C(x) = \mathbf{C}_{\kappa\gamma}(x) \delta \boldsymbol{\gamma}_G(x) + \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x) \delta \boldsymbol{\kappa}_G(x). \quad (6.87)$$

V konsistenčnih enačbah nastopajo variacije konstitutivnih sil v nepomični bazi. Z uporabo izpeljanih izrazov za variacijo rotacijske matrike in prostorske diskretizacije variacij deformacijskih vektorjev

dobimo

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{R}(x) \mathbf{N}_G^C(x)) &= -\mathbf{S}(\mathbf{R}(x) \mathbf{N}_G^C(x)) \delta \vartheta_g^0 - \mathbf{S}(\mathbf{R}(x) \mathbf{N}_G^C(x)) \sum_{p=1}^N \mathbf{W}_p(x) \delta \kappa_G^p \\ &\quad + \sum_{p=1}^N I_p(x) \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\gamma\gamma}(x) \delta \gamma_G^p + \sum_{p=1}^N I_p(x) \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x) \delta \kappa_G^p \end{aligned} \quad (6.88)$$

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{R}(x) \mathbf{M}_G^C(x)) &= -\mathbf{S}(\mathbf{R}(x) \mathbf{M}_G^C(x)) \delta \vartheta_g^0 - \mathbf{S}(\mathbf{R}(x) \mathbf{M}_G^C(x)) \sum_{p=1}^N \mathbf{W}_p(x) \delta \kappa_G^p \\ &\quad + \sum_{p=1}^N I_p(x) \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\kappa\gamma}(x) \delta \gamma_G^p + \sum_{p=1}^N I_p(x) \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x) \delta \kappa_G^p. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Končno lahko zapišemo linearizacijo celotnega sistema enačb (6.49)–(6.50) in (6.41)–(6.46) kot linearno kombinacijo variacij osnovnih neznank sistema:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{f}_{1,q} &= -\tilde{\mathbf{N}}_r^m(x_q) \delta \mathbf{r}_g^0 - [\mathbf{S}(\mathbf{R}(x_q) \mathbf{N}_G^C(x_q)) + \tilde{\mathbf{N}}_{\vartheta}^m(x_q)] \delta \vartheta_g^0 - \delta \mathbf{N}_g^0 \\ &\quad + \sum_{p=1}^N [I_p(x_q) \mathbf{R}(x_q) \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x_q) - \mathbf{S}(\mathbf{R}(x_q) \mathbf{N}_G^C(x_q)) \mathbf{W}_p(x_q) - \tilde{\mathbf{N}}_{\kappa,p}^m(x_q)] \delta \kappa_G^p \\ &\quad + \sum_{p=1}^N [I_p(x_q) \mathbf{R}(x_q) \mathbf{C}_{\gamma\gamma}(x_q) - \tilde{\mathbf{N}}_{\gamma,p}^m(x_q)] \delta \gamma_G^p \\ \delta \mathbf{f}_{2,q} &= -\tilde{\mathbf{M}}_r^m(x_q) \delta \mathbf{r}_g^0 - [\mathbf{S}(\mathbf{R}(x_q) \mathbf{M}_G^C(x_q)) + \tilde{\mathbf{M}}_{\vartheta}^i(x_q) + \tilde{\mathbf{M}}_{\vartheta}^e(x_q) + \tilde{\mathbf{M}}_{\vartheta}^m(x_q)] \delta \vartheta_g^0 \\ &\quad - \tilde{\mathbf{M}}_N^i(x_q) \delta \mathbf{N}_g^0 - \delta \mathbf{M}_g^0 + \sum_{p=1}^N [I_p(x_q) \mathbf{R}(x_q) \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x_q) \\ &\quad - \mathbf{S}(\mathbf{R}(x_q) \mathbf{M}_G^C(x_q)) \mathbf{W}_p(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^i(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^e(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^m(x_q)] \delta \kappa_G^p \\ &\quad + \sum_{p=1}^N [I_p(x_q) \mathbf{R}(x_q) \mathbf{C}_{\kappa\gamma}(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^i(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^e(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^m(x_q)] \delta \gamma_G^p \\ \delta \mathbf{f}_3 &= -\delta \mathbf{r}_g^0 + \delta \mathbf{r}_g^L + \mathbf{U}(L) \delta \vartheta_g^0 + \sum_{p=1}^N \mathbf{V}_p(L) \delta \kappa_G^p - \sum_{p=1}^N \mathbf{W}_p(L) \delta \gamma_G^p \\ \delta \mathbf{f}_4 &= -\delta \vartheta_g^0 + \delta \vartheta_g^L - \sum_{p=1}^N \mathbf{W}_p(L) \delta \kappa_G^p \\ \delta \mathbf{f}_5 &= \delta \mathbf{N}_g^0 \\ \delta \mathbf{f}_6 &= \delta \mathbf{M}_g^0 \\ \delta \mathbf{f}_7 &= -\tilde{\mathbf{N}}_r^m(L) \delta \mathbf{r}_g^0 - \tilde{\mathbf{N}}_{\vartheta}^m(L) \delta \vartheta_g^0 - \delta \mathbf{N}_g^0 - \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{\kappa,p}^m(L) \delta \kappa_G^p - \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{\gamma,p}^m(L) \delta \gamma_G^p \\ \delta \mathbf{f}_8 &= -\tilde{\mathbf{M}}_r^m(L) \delta \mathbf{r}_g^0 - [\tilde{\mathbf{M}}_{\vartheta}^i(L) + \tilde{\mathbf{M}}_{\vartheta}^e(L) + \tilde{\mathbf{M}}_{\vartheta}^m(L)] \delta \vartheta_g^0 - \tilde{\mathbf{M}}_N^i(L) \delta \mathbf{N}_g^0 \\ &\quad - \delta \mathbf{M}_g^0 + \sum_{p=1}^N [-\tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^i(L) - \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^e(L) - \tilde{\mathbf{M}}_{\kappa,p}^m(L)] \delta \kappa_G^p \\ &\quad + \sum_{p=1}^N [-\tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^i(L) - \tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^e(L) - \tilde{\mathbf{M}}_{\gamma,p}^m(L)] \delta \gamma_G^p. \end{aligned}$$

## Dodajanje popravkov

Vzemimo, da poznamo vrednosti vseh količin pri  $i$ -ti iteraciji. Z rešitvijo lineariziranega sistema vodilnih enačb dobimo iterativne popravke osnovnih neznank:  $\delta\gamma_{i,G_i}^p$ ,  $\delta\kappa_{i,G_i}^p$ ,  $\delta\mathbf{r}_{i,g}^0$ ,  $\delta\vartheta_{i,g}^0$ ,  $\delta\mathbf{r}_{i,g}^L$ ,  $\delta\vartheta_{i,g}^L$ ,  $\delta\mathbf{N}_{i,g}^0$  in  $\delta\mathbf{M}_{i,g}^0$ .

Pomiki, ravnotežne sile in deformacijski vektor  $\gamma_G$  so aditivne količine, zato lahko njihove popravke kar prištejemo trenutnim iterativnim vrednostim:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{i+1,g}^0 &= \mathbf{r}_{i,g}^0 + \delta\mathbf{r}_{i,g}^0 \\ \mathbf{r}_{i+1,g}^L &= \mathbf{r}_{i,g}^L + \delta\mathbf{r}_{i,g}^L \\ \mathbf{N}_{i+1,g}^0 &= \mathbf{N}_{i,g}^0 + \delta\mathbf{N}_{i,g}^0 \\ \mathbf{M}_{i+1,g}^0 &= \mathbf{M}_{i,g}^0 + \delta\mathbf{M}_{i,g}^0 \\ \gamma_{i+1,G_{i+1}}^p &= \gamma_{i,G_i}^p + \delta\gamma_{i,G_i}^p\end{aligned}$$

Zaradi nelinearnosti prostorskih rotacij moramo več pozornosti nameniti količinam, povezanim z rotacijami. Če želimo zadostiti robnemu pogoju za rotacije na desnem robu elementa, se morajo iterativni popravki rotacijskega vektorja ujemati z njihovimi variacijami. Iz kinematične enačbe (6.68) potem sledi:

$$\delta\vartheta_{i,g}(x) = \delta\vartheta_{i,g}^0 + \int_0^x \mathbf{R}_i(\tilde{x}) \delta\kappa_{i,G_i}(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Aditivni popravek deformacijskega vektorja  $\Delta_A\kappa_{i,G_{i+1}}$  potem izračunamo iz krepke oblike kinematične enačbe (5.16), v kateri upoštevamo, da se variacijska konstanta  $d_G$  ne spreminja. Podrobnosti izpeljave najdemo v članku [9], rezultat pa je enak

$$\delta_A\kappa_{i,G_{i+1}} = \mathbf{T}^T (\mathbf{R}_i^T \delta\vartheta_{i,g}) \delta\kappa_{i,G_i}.$$

Tako dobljen popravek deformacijskega vektorja  $\kappa_G$  preprosto prištejemo trenutni iterativni vrednosti:

$$\kappa_{i+1,G_{i+1}} = \kappa_{i,G_i} + \delta_A\kappa_{i,G_{i+1}}.$$

Ker smo izbrali, da se popravki rotacij ujemajo z njihovimi variacijami, popravke rotacij kar dodamo trenutnim iterativnim vrednostim v skladu z multiplikativno naravo rotacij:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\vartheta_{i+1,g}^0) &= \mathbf{R}(\delta\vartheta_{i,g}^0) \mathbf{R}(\vartheta_{i,g}^0) \\ \mathbf{R}(\vartheta_{i+1,g}^L) &= \mathbf{R}(\delta\vartheta_{i,g}^L) \mathbf{R}(\vartheta_{i,g}^L).\end{aligned}$$

Popravljenе vrednosti rotacijskih vektorjev  $\vartheta_{i+1,g}$  pa izračunamo iz rotacijskih matrik s pomočjo Spurrijevega algoritma [40]. Račun popravljenih vrednosti hitrosti in pospeškov pri diskretizaciji z Newmarkovo shemo smo predstavili v poglavju 4.1.2.

### 6.4.2 Element z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti

#### Linearizacija

Sistem enačb (6.61)–(6.62), (6.53)–(6.58) variiramo v smereh osnovnih neznank  $\delta\bar{\mathbf{v}}_g^p$ ,  $\delta\bar{\omega}_G^p$ ,  $\delta\bar{\mathbf{v}}_g^0$ ,  $\delta\bar{\omega}_G^0$ ,  $\delta\bar{\mathbf{v}}_g^L$ ,  $\delta\bar{\omega}_G^L$ ,  $\delta\mathbf{N}_g^0$  in  $\delta\mathbf{M}_g^0$ .

Najprej zapišimo variacije zveznih vrednosti osnovnih neznank, ki jih dobimo z variiranjem interpolacijskih nastavkov (6.59)–(6.60):

$$\delta \bar{\mathbf{v}}'_g(x) = \sum_{p=1}^N I_p(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'}$$

$$\delta \bar{\omega}'_G(x) = \sum_{p=1}^N I_p(x) \delta \bar{\omega}_G^{p'}$$

Variacije povprečnih hitrosti in kotnih hitrosti dobimo z integracijo gornjih izrazov:

$$\delta \bar{\mathbf{v}}_g(x) = \delta \bar{\mathbf{v}}_g(0) + \sum_{p=1}^N \int_0^x I_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'} = \delta \bar{\mathbf{v}}_g(0) + \sum_{p=1}^N Q_p(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'}$$

$$\delta \bar{\omega}_G(x) = \delta \bar{\omega}_G(0) + \sum_{p=1}^N \int_0^x I_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \delta \bar{\omega}_G^{p'} = \delta \bar{\omega}_G(0) + \sum_{p=1}^N Q_p(x) \delta \bar{\omega}_G^{p'}$$

Variacije preostalih kinematičnih količin smo predstavili že v poglavju 4.2.1. Ponovno jih zapišimo z upoštevanjem diskretizacije po kraju:

$$\delta \mathbf{r}_g(x) = h \delta \bar{\mathbf{v}}_g(x) = h \sum_{p=1}^N Q_p(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'} \quad (6.90)$$

$$\delta \mathbf{v}_g(x) = \frac{1}{\beta} \delta \bar{\mathbf{v}}_g(x) = \frac{1}{\beta} \sum_{p=1}^N Q_p(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'} \quad (6.91)$$

$$\delta \mathbf{a}_g(x) = \frac{1}{\beta \gamma h} \delta \bar{\mathbf{v}}_g(x) = \frac{1}{\beta \gamma h} \sum_{p=1}^N Q_p(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'} \quad (6.92)$$

$$\delta \mathbf{R}(x) = \mathbf{R}^{[n]}(x) \delta \mathbf{R}(h \bar{\omega}_G(x)) \quad (6.93)$$

$$\delta \mathbf{R}(x) \mathbf{u} = \mathbf{R}(x) \mathbf{S}(\mathbf{u})^T \mathbf{T}(h \bar{\omega}_G(x))^T \sum_{p=1}^N Q_p(x) h \delta \bar{\omega}_G^{p'} \quad (6.94)$$

$$\delta \omega_G(x) = \frac{1}{\beta} \delta \bar{\omega}_G(x) = \frac{1}{\beta} \sum_{p=1}^N Q_p(x) \delta \bar{\omega}_G^{p'} \quad (6.95)$$

$$\delta \alpha_G(x) = \frac{1}{\beta \gamma h} \delta \bar{\omega}_G(x) = \frac{1}{\beta \gamma h} \sum_{p=1}^N Q_p(x) \delta \bar{\omega}_G^{p'} \quad (6.96)$$

Deformacije izrazimo iz kinematičnih zvez (5.9)–(5.10)

$$\boldsymbol{\gamma}_G(x) = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{r}'_g(x) + \mathbf{c}_G(x)$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa}_G(x)) = \mathbf{R}(x)^T \mathbf{R}'(x) + \mathbf{S}(\mathbf{d}_G(x)),$$

izraza variiramo, pri tem pa upoštevamo, da sta  $\mathbf{c}_G$  in  $\mathbf{d}_G$  variacijski konstanti:

$$\delta \boldsymbol{\gamma}_G(x) = \delta \mathbf{R}^T(x) \mathbf{r}'_g(x) + \mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{r}'_g(x)$$

$$\mathbf{S}(\delta \boldsymbol{\kappa}_G(x)) = \delta \mathbf{R}^T(x) \mathbf{R}'(x) + \mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}'(x).$$

Variacijo transponirane rotacijske matrike izrazimo z variiranjem lastnosti (3.1)

$$\delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \delta \mathbf{R}^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{R}^T = -\mathbf{R}^T \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T.$$

Zadnji člen variacije deformacijskega vektorja  $\kappa_G$  vsebuje variacijo krajevnega odvoda rotacije. Operaciji variiranja in odvajanja po kraju lahko zamenjamo, zato najprej zapišemo krajevni odvod produkta matrik  $\mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}(x)$

$$\frac{d}{dx} \left( \mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}(x) \right) = \mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}'(x) + \mathbf{R}^{T'}(x) \delta \mathbf{R}(x),$$

od koder sledi, da je produkt matrik  $\mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}'(x)$  enak

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}'(x) &= \frac{d}{dx} \left( \mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}(x) \right) - \mathbf{R}^{T'}(x) \delta \mathbf{R}(x) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}(x) \right) + \mathbf{R}^T(x) \mathbf{R}'(x) \mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}(x). \end{aligned}$$

Variacije deformacij potem izrazimo kot

$$\begin{aligned} \delta \gamma_G(x) &= -\mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}(x) \mathbf{R}^T(x) \mathbf{r}'_g(x) + \mathbf{R}^T(x) \frac{d}{dx} \delta \mathbf{r}_g(x) \\ \mathbf{S}(\delta \kappa_G(x)) &= -\mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}(x) \mathbf{R}^T(x) \mathbf{R}'(x) + \mathbf{R}^T(x) \mathbf{R}'(x) \mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}(x) \\ &\quad + \frac{d}{dx} \left( \mathbf{R}^T(x) \delta \mathbf{R}(x) \right). \end{aligned}$$

Iz kinematičnih enačb (5.9)–(5.10) sledi, da je produkt  $\mathbf{R}^T \mathbf{r}'_g$  enak deformaciji  $\gamma_G - \mathbf{c}_G$ , produkt  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}'$  pa  $\mathbf{S}(\kappa_G - \mathbf{d}_G)$ . Variacije pomikov in rotacij smo že zapisali z enačbami (6.90) in (6.93). Poenostavimo še produkt  $\mathbf{R}^T \delta \mathbf{R}$  s pomočjo pravila (3.50) za variacijo rotacijske matrike, parametrizirane z aditivnim rotacijskim vektorjem

$$\mathbf{R}^T \delta \mathbf{R} = \mathbf{R}^T(h\bar{\omega}_G) \mathbf{R}^{[n]T} \mathbf{R}^{[n]} \delta \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G) = \mathbf{R}^T(h\bar{\omega}_G) \delta \mathbf{R}(h\bar{\omega}_G) = \mathbf{S}(\mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G) h\delta\bar{\omega}_G).$$

Variacijo deformacijskega vektorja  $\gamma_G$  potem zapišemo kot

$$\begin{aligned} \delta \gamma_G(x) &= -\mathbf{S}(\mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) h\delta\bar{\omega}_G(x)) (\gamma_G(x) - \mathbf{c}_G(x)) + \mathbf{R}^T(x) \frac{d}{dx} (h\delta\bar{\mathbf{v}}_g(x)) \\ &= \mathbf{S}(\gamma_G(x) - \mathbf{c}_G(x)) \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) h\delta\bar{\omega}_G(x) + \mathbf{R}^T(x) h\delta\bar{\mathbf{v}}'_g(x). \end{aligned} \quad (6.97)$$

Antisimetrično matriko, sestavljeno iz komponent variacije deformacijskega vektorja  $\kappa_G$ , pa izrazimo kot

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\delta \kappa_G(x)) &= -\mathbf{S} \left( \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) h\delta\bar{\omega}_G(x) \right) \mathbf{S}(\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) \\ &\quad + \mathbf{S}(\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) \mathbf{S} \left( \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) h\delta\bar{\omega}_G(x) \right) \\ &\quad + \frac{d}{dx} \left( \mathbf{S}(\mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) h\delta\bar{\omega}_G(x)) \right). \end{aligned}$$

Če upoštevamo lastnost antisimetričnih matrik (3.27), se zgornji izraz poenostavi:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\delta \kappa_G(x)) &= \mathbf{S} \left( \mathbf{S}(\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) h\delta\bar{\omega}_G(x) \right) \\ &\quad + \mathbf{S} \left( \frac{d}{dx} \left( \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) h\delta\bar{\omega}_G(x) \right) \right). \end{aligned}$$

Od tod pa sledi, da je variacija deformacijskega vektorja  $\delta \kappa_G$  enaka

$$\begin{aligned} \delta \kappa_G(x) &= \mathbf{S}(\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) h\delta\bar{\omega}_G(x) + \mathbf{T}^{T'}(h\bar{\omega}_G(x)) h\delta\bar{\omega}_G(x) \\ &\quad + \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) h\delta\bar{\omega}'_G(x). \end{aligned} \quad (6.98)$$



Ko poznamo variacije kinematičnih količin, je variiranje preostalih enačb preprosto. Ravnotežne enačbe zopet variiramo glede na adicijski razcep. Variacije sumandov v izrazu za ravnotežno silo so enake:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{N}_g^i(x) &= \delta \mathbf{N}_g^0 \\ \delta \mathbf{N}_g^e(x) &= \mathbf{0} \\ \delta \mathbf{N}_g^m(x) &= \int_0^x \rho A \delta \mathbf{a}_g(\tilde{x}) d\tilde{x} = \tilde{\mathbf{N}}_{v^0}^m(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^0 + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{v',p}^m(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'},\end{aligned}$$

kjer je

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{N}}_{v^0}^m(x) &= \frac{1}{\beta \gamma h} \int_0^x \rho A \mathbf{I} d\tilde{x} \\ \tilde{\mathbf{N}}_{v',p}^m(x) &= \frac{1}{\beta \gamma h} \int_0^x \rho A Q_p(\tilde{x}) \mathbf{I} d\tilde{x}.\end{aligned}$$

Variacije ravnotežnega momenta lahko ponovno zapišemo v splošni obliki (6.82)–(6.84), nato pa upoštevamo variacije kinematičnih količin. Variacijo člena ravnotežnega momenta, ki pripada notranjim silam, izrazimo z

$$\delta \mathbf{M}_g^i(x) = \delta \mathbf{M}_g^0 + \tilde{\mathbf{M}}_N^i(x) \delta \mathbf{N}_g^0 + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^i(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'},$$

pri tem sta pripadajoči matriki enaki:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}_N^i(x) &= - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) d\tilde{x} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^i(x) &= h \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g^i(\tilde{x})) I_p(\tilde{x}) d\tilde{x}.\end{aligned}$$

Močno se poenostavi tudi variacija člena ravnotežnega momenta zaradi zunanjih sil

$$\delta \mathbf{M}_g^e(x) = \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^e(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'},$$

kjer je

$$\tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^e(x) = h \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g^e(\tilde{x})) I_p(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Razcep variacije vztrajnostnega člena ravnotežnega momenta zapišemo z vsoto

$$\delta \mathbf{M}_g^m(x) = \tilde{\mathbf{M}}_{v^0}^m(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^0 + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^m(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'} + \tilde{\mathbf{M}}_{\omega^0}^m(x) \delta \bar{\omega}_G^0 + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{\omega',p}^m(x) \delta \bar{\omega}_G^{p'},$$

pripadajoče matrike pa so enake

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{M}}_{v_0}^m(x) &= - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \tilde{\mathbf{N}}_{v_0}^m d\tilde{x} \\
\tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^m(x) &= - \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{r}'_g(\tilde{x})) \tilde{\mathbf{N}}_{v',p}^m d\tilde{x} + h \int_0^x \mathbf{S}(\mathbf{N}_g^m(\tilde{x})) I_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
\tilde{\mathbf{M}}_{\omega_0}^m(x) &= -h \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{S}(\mathbf{J}(x) \boldsymbol{\alpha}_G(\tilde{x})) \mathbf{T}^T(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(\tilde{x})) d\tilde{x} + \frac{1}{\beta\gamma h} \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(x) d\tilde{x} \\
&\quad + h \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{J}(x) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{T}^T(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(\tilde{x})) d\tilde{x} \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) (\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{J}(x) - \mathbf{S}(\mathbf{J}(x) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x}))) d\tilde{x} \\
\tilde{\mathbf{M}}_{\omega',p}^m(x) &= -h \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{S}(\mathbf{J}(x) \boldsymbol{\alpha}_G(\tilde{x})) \mathbf{T}^T(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(\tilde{x})) Q_p(\tilde{x}) d\tilde{x} + \frac{1}{\beta\gamma h} \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{J}(x) Q_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
&\quad + h \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) \mathbf{S}(\mathbf{S}(\mathbf{J}(x) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{T}^T(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(\tilde{x})) Q_p(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \int_0^x \mathbf{R}(\tilde{x}) (\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x})) \mathbf{J}(x) - \mathbf{S}(\mathbf{J}(x) \boldsymbol{\omega}_G(\tilde{x}))) Q_p(\tilde{x}) d\tilde{x}.
\end{aligned}$$

Variacije konstitucijskih sil tako kot v izrazih (6.86) in (6.87) zapišemo s pomočjo parcialnih odvodov konstitucijskih operatorjev  $\mathcal{C}_N$  in  $\mathcal{C}_M$  po komponentah deformacijskih vektorjev. Ko upoštevamo še izraze za variacije deformacijskih vektorjev (6.97) in (6.98), dobimo

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{N}_G^C(x) &= \mathbf{C}_{\gamma\gamma}(x) \mathbf{R}^T(x) h \delta \bar{\mathbf{v}}'_g(x) + \left[ \mathbf{C}_{\gamma\gamma}(x) \mathbf{S}(\boldsymbol{\gamma}_G(x) - \mathbf{c}_G(x)) \mathbf{T}(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x))^T \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x) \mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa}_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) \mathbf{T}(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x))^T + \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x) \mathbf{T}'(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x))^T \right] h \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x) \\
&\quad + \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x) \mathbf{T}(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x))^T h \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}'_G(x) \\
\delta \mathbf{M}_G^C(x) &= \mathbf{C}_{\kappa\gamma}(x) \mathbf{R}^T(x) h \delta \bar{\mathbf{v}}'_g(x) + \left[ \mathbf{C}_{\kappa\gamma}(x) \mathbf{S}(\boldsymbol{\gamma}_G(x) - \mathbf{c}_G(x)) \mathbf{T}(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x))^T \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x) \mathbf{S}(\boldsymbol{\kappa}_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) \mathbf{T}(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x))^T + \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x) \mathbf{T}'(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x))^T \right] h \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x) \\
&\quad + \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x) \mathbf{T}(h\bar{\boldsymbol{\omega}}_G(x))^T h \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}'_G(x)
\end{aligned}$$

Variacije konstitucijskih sil potrebujemo v konsistenčnih enačbah zapisane v nepomični bazi. Zaradi boljšega pregleda pa jih zopet zapišemo z vsotami

$$\delta(\mathbf{R}(x) \mathbf{N}_G^C(x)) = \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{v',p}^C(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'} + \tilde{\mathbf{N}}_{\omega_0}^C(x) \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_G^0 + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{\omega',p}^C(x) \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_G^{p'} \quad (6.99)$$

$$\delta(\mathbf{R}(x) \mathbf{M}_G^C(x)) = \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^C(x) \delta \bar{\mathbf{v}}_g^{p'} + \tilde{\mathbf{M}}_{\omega_0}^C(x) \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_G^0 + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{\omega',p}^C(x) \delta \bar{\boldsymbol{\omega}}_G^{p'}. \quad (6.100)$$

Pripadajoče matrice, neodvisne od variacij, so enake:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{N}}_{v',p}^C(x) &= \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\gamma\gamma}(x) \mathbf{R}^T I_p(x) \\
 \tilde{\mathbf{N}}_{\omega^0}^C(x) &= h \mathbf{R}(x) [\mathbf{C}_{\gamma\gamma}(x) \mathbf{S}(\gamma_G(x) - \mathbf{c}_G(x)) + \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x) \mathbf{S}(\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) \\
 &\quad - \mathbf{S}(\mathbf{N}_G^C(x))] \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) + h \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x) \mathbf{T}^{T'}(h\bar{\omega}_G(x)) \\
 \tilde{\mathbf{N}}_{\omega',p}^C(x) &= h \mathbf{R}(x) [\mathbf{C}_{\gamma\gamma}(x) \mathbf{S}(\gamma_G(x) - \mathbf{c}_G(x)) + \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x) \mathbf{S}(\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) \\
 &\quad - \mathbf{S}(\mathbf{N}_G^C(x))] \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) Q_p(x) + h \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x) \mathbf{T}^{T'}(h\bar{\omega}_G(x)) Q_p(x) \\
 &\quad + h \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\gamma\kappa}(x) \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) I_p(x) \\
 \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^C(x) &= \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\kappa\gamma}(x) \mathbf{R}^T I_p(x) \\
 \tilde{\mathbf{M}}_{\omega^0}^C(x) &= h \mathbf{R}(x) [\mathbf{C}_{\kappa\gamma}(x) \mathbf{S}(\gamma_G(x) - \mathbf{c}_G(x)) + \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x) \mathbf{S}(\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) \\
 &\quad - \mathbf{S}(\mathbf{M}_G^C(x))] \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) + h \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x) \mathbf{T}^{T'}(h\bar{\omega}_G(x)) \\
 \tilde{\mathbf{M}}_{\omega',p}^C(x) &= h \mathbf{R}(x) [\mathbf{C}_{\kappa\gamma}(x) \mathbf{S}(\gamma_G(x) - \mathbf{c}_G(x)) + \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x) \mathbf{S}(\kappa_G(x) - \mathbf{d}_G(x)) \\
 &\quad - \mathbf{S}(\mathbf{M}_G^C(x))] \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) Q_p(x) + h \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x) \mathbf{T}^{T'}(h\bar{\omega}_G(x)) Q_p(x) \\
 &\quad + h \mathbf{R}(x) \mathbf{C}_{\kappa\kappa}(x) \mathbf{T}^T(h\bar{\omega}_G(x)) I_p(x).
 \end{aligned}$$

Pripravili smo vse potrebne količine za zapis variacij diskretnih enačb (6.61)–(6.62), (6.53)–(6.58). Variirane enačbe tvorijo linearen sistem enačb elementa z interpoliranimi krajevnimi odvodi hitrosti in kotnih hitrosti, ki ga v odvisnosti od variacij osnovnih neznank  $\delta\bar{\mathbf{v}}_g^{p'}$ ,  $\delta\bar{\omega}_G^{p'}$ ,  $\delta\bar{\mathbf{v}}_g^0$ ,  $\delta\bar{\omega}_G^0$ ,  $\delta\bar{\mathbf{v}}_g^L$ ,  $\delta\bar{\omega}_G^L$ ,  $\delta\mathbf{N}_g^0$  in  $\delta\mathbf{M}_g^0$  zapišemo kot

$$\begin{aligned}
 \delta\mathbf{h}_1(x_q) &= -\tilde{\mathbf{N}}_{v^0}^m(x_q) \delta\bar{\mathbf{v}}_g^0 + \tilde{\mathbf{N}}_{\omega^0}^C(x_q) \delta\bar{\omega}_G^0 - \delta\mathbf{N}_g^0 + \sum_{p=1}^N (\tilde{\mathbf{N}}_{v',p}^C(x_q) - \tilde{\mathbf{N}}_{v',p}^m(x_q)) \delta\bar{\mathbf{v}}_g^{p'} \\
 &\quad + \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{\omega',p}^C(x_q) \delta\bar{\omega}_G^{p'} \\
 \delta\mathbf{h}_2(x_q) &= -\tilde{\mathbf{M}}_{v^0}^m(x_q) \delta\bar{\mathbf{v}}_g^0 + (\tilde{\mathbf{N}}_{\omega^0}^C(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{\omega^0}^m(x_q)) \delta\bar{\omega}_G^0 - \tilde{\mathbf{M}}_N^i(x_q) \delta\mathbf{N}_g^0 - \delta\mathbf{M}_g^0 \\
 &\quad + \sum_{p=1}^N (\tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^C(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^i(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^e(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^m(x_q)) \delta\bar{\mathbf{v}}_g^{p'} \\
 &\quad + \sum_{p=1}^N (\tilde{\mathbf{M}}_{\omega',p}^C(x_q) - \tilde{\mathbf{M}}_{\omega',p}^m(x_q)) \delta\bar{\omega}_G^{p'} \\
 \delta\mathbf{h}_3 &= -\delta\bar{\mathbf{v}}_g^0 + \delta\bar{\mathbf{v}}_g^L - \sum_{p=1}^N Q_p(L) \delta\bar{\mathbf{v}}_G^{p'} \\
 \delta\mathbf{h}_4 &= -\delta\bar{\omega}_G^0 + \delta\bar{\omega}_G^L - \sum_{p=1}^N Q_p(L) \delta\bar{\omega}_G^{p'} \\
 \delta\mathbf{h}_5 &= \delta\mathbf{N}_g^0 \\
 \delta\mathbf{h}_6 &= \delta\mathbf{M}_g^0 \\
 \delta\mathbf{h}_7 &= -\tilde{\mathbf{N}}_{v^0}^m(L) \delta\bar{\mathbf{v}}_g^0 - \delta\mathbf{N}_g^0 - \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{N}}_{v',p}^m(L) \delta\bar{\mathbf{v}}_g^{p'} \\
 \delta\mathbf{h}_8 &= -\tilde{\mathbf{M}}_{v^0}^m(L) \delta\bar{\mathbf{v}}_g^0 - \tilde{\mathbf{M}}_{\omega^0}^m(L) \delta\bar{\omega}_G^0 - \tilde{\mathbf{M}}_N^i(L) \delta\mathbf{N}_g^0 - \delta\mathbf{M}_g^0 \\
 &\quad + \sum_{p=1}^N (-\tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^i(L) - \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^e(L) - \tilde{\mathbf{M}}_{v',p}^m(L)) \delta\bar{\mathbf{v}}_G^{p'} - \sum_{p=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{\omega',p}^m(L) \delta\bar{\omega}_G^{p'}.
 \end{aligned}$$

## Dodajanje popravkov

Vse osnovne neznanke elementa z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti so aditivne količine. Račun novih približkov osnovnih neznank se zato zelo poenostavi. Denimo, da poznamo vse količine v  $i$ -ti iteraciji reševanja vodilnih enačb. Z rešitvijo lineariziranega sistema enačb dobimo popravke osnovnih neznank  $\delta\bar{v}_{i,g}^{p'}$ ,  $\delta\bar{\omega}_{i,G}^{p'}$ ,  $\delta\bar{v}_{i,g}^0$ ,  $\delta\bar{\omega}_{i,G}^0$ ,  $\delta\bar{v}_{i,g}^L$ ,  $\delta\bar{\omega}_{i,G}^L$ ,  $\delta\mathbf{N}_{i,g}^0$  in  $\delta\mathbf{M}_{i,g}^0$ , ki jih prištejemo trenutnim iterativnim vrednostim:

$$\begin{aligned}\bar{v}_{i+1,g}^{p'} &= \bar{v}_{i,g}^{p'} + \delta\bar{v}_{i,g}^{p'} \\ \bar{\omega}_{i+1,G}^{p'} &= \bar{\omega}_{i,G}^{p'} + \delta\bar{\omega}_{i,G}^{p'} \\ \bar{v}_{i+1,g}^0 &= \bar{v}_{i,g}^0 + \delta\bar{v}_{i,g}^0 \\ \bar{\omega}_{i+1,G}^0 &= \bar{\omega}_{i,G}^0 + \delta\bar{\omega}_{i,G}^0 \\ \bar{v}_{i+1,g}^L &= \bar{v}_{i,g}^L + \delta\bar{v}_{i,g}^L \\ \bar{\omega}_{i+1,G}^L &= \bar{\omega}_{i,G}^L + \delta\bar{\omega}_{i,G}^L \\ \mathbf{N}_{i+1,g}(0) &= \mathbf{N}_{i,g}(0) + \delta\mathbf{N}_{i,g}(0) \\ \mathbf{M}_{i+1,g}(0) &= \mathbf{M}_{i,g}(0) + \delta\mathbf{M}_{i,g}(0).\end{aligned}$$

Novo iterativne vrednosti pomikov, hitrosti in pospeškov, določimo v skladu z modificirano Newmarkovo shemo, kot smo pokazali v poglavju 4.2.2. Nove iteracijske vrednosti deformacijskih vektorjev določimo iz absolutnih zvez (6.15)–(6.16).

### 6.4.3 Numerična integracija

V vodilnih in pomožnih enačbah ter koeficientih tangentne matrike obeh formulacij končnih elementov, ki smo jih predstavili, nastopajo integrali, ki so v splošnem prezahtevni, da bi jih lahko izračunali analitično. Zato za račun integralov uporabimo numerično integracijo.

Integral poljubne funkcije  $h(x)$  vzdolž celotne dolžine elementa nadomestimo s kvadraturnim pravilom

$$\int_0^L h(x) dx = \sum_{r=1}^N w_r h(x_r),$$

kjer so  $w_r$  uteži,  $x_r$  pa integracijske točke, ki jih izberemo glede na dolžino elementa  $L$  in izbrano metodo numerične integracije. Za integracijo vzdolž celotne dolžine elementa uporabimo Gaussova kvadratura pravila.

Obe formulaciji končnih elementov sta zasnovani tako, da potrebujemo vrednosti integralov tudi v diskretizacijskih točkah. Integral funkcije  $h(x)$  na intervalu  $[0, x_q]$  izračunamo rekurzivno

$$\int_0^{x_q} h(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^{x_{q-1}} h(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_{x_{q-1}}^{x_q} h(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Lokalno integracijo med dvema diskretizacijskima točkama zopet nadomestimo s kvadraturnim pravilom

$$\int_{x_{q-1}}^{x_q} h(\tilde{x}) d\tilde{x} = \sum_{q_s=1}^{N_q} w_{q_s} h(x_{q_s}),$$

kjer so  $x_{q_s}$  točke lokalne integracije med dvema diskretizacijskima točkama,  $w_{q_s}$  pa ustrezne uteži, odvisne od števila izbranih lokalnih točk  $N_q$  in dolžine intervala  $[x_{q-1}, x_q]$ . Tudi v tem primeru lokalne integracije za določitev točk in uteži izberemo Gaussova kvadratura pravila. Integral  $H^q = \int_0^{x_q} h(\tilde{x}) d\tilde{x}$  ( $H^0 = 0$ ) je potem enak

$$H^q = H^{q-1} + \sum_{q_s=1}^{N_q} w_{q_s} h(x_{q_s}).$$

Pri računu vgnezenih integralov moramo integral funkcije  $h(x)$  iz vrednotiti tudi v lokalni integracijski točki  $x_q$ . Tudi v tem primeru uporabimo rekurzivno formulo

$$\int_0^{x_{q_s}} h(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_0^{x_{q-1}} h(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_{x_{q-1}}^{x_{q_s}} h(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Integral  $H^{q_s} = \int_{x_{q-1}}^{x_{q_s}} h(\tilde{x}) d\tilde{x}$  med točko globalne in lokalne integracije lahko zapišemo kot

$$H^{q_s} = \int_{x_{q-1}}^{x_{q_s-1}} h(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_{x_{q_s-1}}^{x_{q_s}} h(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Integral med dvema točkama lokalne integracije tokrat izračunamo s trapeznim pravilom

$$\int_{x_{q_s-1}}^{x_{q_s}} h(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{h(x_{q_s}) + h(x_{q_s-1})}{2} (x_{q_s} - x_{q_s-1}).$$

Integral funkcije  $h(x)$  na intervalu  $[0, x_{q_s}]$  je tako enak

$$\int_0^{x_{q_s}} h(\tilde{x}) d\tilde{x} = H^{q-1} + H^{q_s-1} + \frac{h(x_{q_s}) + h(x_{q_s-1})}{2} (x_{q_s} - x_{q_s-1}).$$

Predstavljena numerična integracija se je izkazala za natančno in računsko učinkovito.

## 6.5 Numerično dušenje

Dinamični odziv konstrukcij je sestavljen iz neskončnega števila nihajnih oblik, ki različno prispevajo k celotnemu odzivu. Praviloma je vpliv nihajnih oblik z višjimi frekvencami manjši od tistih z nižjimi frekvencami, ne pa nujno. Konstrukcije modeliramo z diskretnimi matematičnimi modeli, ki imajo končno število prostostnih stopenj, s tem pa tudi končno število nihajnih oblik. Mreža končnih elementov, s katero diskretiziramo konstrukcijo, pa praviloma ne zadošča za opis kompleksnih višjih nihajnih oblik. Pri časovni diskretizaciji dinamičnega odziva uporabljamo končno velike časovne korake, s katerimi zanemarimo vpliv nihajnih oblik, ki imajo manjši nihajni čas od izbranega koraka.

Tako časovna kot tudi krajevna diskretizacija konstrukcij vplivata na pomanjkljiv opis nihajnih oblik konstrukcije, ki ga v numerični analizi zaznamo kot numerično motnjo ali šum, ki vpliva na natančnost in stabilnost reševanja. Numerične motnje, ki so posledica vpliva višjih nihajnih oblik, izločimo z umetno povzročenim numeričnim dušenjem.

V literaturi lahko najdemo veliko število metod z numeričnim dušenjem. V primeru analize linearnih dinamičnih sistemov sta taki tudi Newmarkova shema in modificirana Newmarkova shema, če izberemo vrednost parametra  $\gamma > \frac{1}{2}$  (točki 4.1.3, 4.2.3). Taka izbira ni optimalna, saj vpliva na vse frekvence, z numeričnim dušenjem pa želimo vplivati le na višje frekvence. Za obravnavo linearnih dinamičnih sistemov so bile zato razvite metode, ki poskušajo doseči optimalno razmerje med disipacijo visokih in nizkih frekvenc, taki metodi sta na primer HHT metoda Hilbera, Hughesa in Taylorja [23] in WBZ- $\alpha$  metoda Wooda, Bossaka in Zienkiewicza [55]. Chung in Hulbert [24] sta predstavila posplošeno  $\alpha$ -metodo, v kateri kot posebna primera nastopata HHT in WBZ- $\alpha$  metodi. Posplošena- $\alpha$  metoda in njena posebna primera se pogosto uporabljajo tudi v nelinearni dinamiki kljub dejstvu, da metode niso brezpogojno stabilne in v splošnem ne zagotavljajo disipacije energije [56].

Posplošeno  $\alpha$ -metodo uporabimo za numerično dušenje v formulaciji končnega elementa z interpolacijo deformacij v primerih, ko rešitev ni mogoče dobiti z Newmarkovo shemo. Posplošeno  $\alpha$ -metodo izberemo zaradi njene razširjenosti in dokaj preproste implementacije, ki temelji na Newmarkovi shemi. Osnovna ideja metode je, da dinamično ravnotežje pri času  $t_{n+1}$  nadomestimo z ravnotežjem pri nekem vmesnem času  $t_n < t_n + \xi h < t_{n+1}$ , tako da notranje in zunanje ravnotežne sile in momente izvednotimo pri času  $t_{n+1-\alpha_f}$ , vztrajnostne sile in momente pa pri času  $t_{n+1-\alpha_m}$ .  $\alpha_f$  in  $\alpha_m$  sta parametra metode, ki določata vmesne čase za izračun sil in momentov:

$$t_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) t_{n+1} + \alpha_f t_n$$

$$t_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m) t_{n+1} + \alpha_m t_n.$$

Ravnotežne sile in momente pri vmesnih časih izračunamo kot linearno kombinacijo vrednosti pri časih  $t_n$  in  $t_{n+1}$ :

$$\mathbf{N}_g^{i[n+1-\alpha_f]} = (1 - \alpha_f) \mathbf{N}_g^{i[n+1]} + \alpha_f \mathbf{N}_g^{i[n]}$$

$$\mathbf{N}_g^{e[n+1-\alpha_f]} = (1 - \alpha_f) \mathbf{N}_g^{e[n+1]} + \alpha_f \mathbf{N}_g^{e[n]}$$

$$\mathbf{N}_g^{m[n+1-\alpha_m]} = (1 - \alpha_m) \mathbf{N}_g^{m[n+1]} + \alpha_m \mathbf{N}_g^{m[n]}$$

$$\mathbf{M}_g^{i[n+1-\alpha_f]} = (1 - \alpha_f) \mathbf{M}_g^{i[n+1]} + \alpha_f \mathbf{M}_g^{i[n]}$$

$$\mathbf{M}_g^{e[n+1-\alpha_f]} = (1 - \alpha_f) \mathbf{M}_g^{e[n+1]} + \alpha_f \mathbf{M}_g^{e[n]}$$

$$\mathbf{M}_g^{m[n+1-\alpha_m]} = (1 - \alpha_m) \mathbf{M}_g^{m[n+1]} + \alpha_m \mathbf{M}_g^{m[n]}$$

Tako kombiniranje sil sta za implementacijo poplošene  $\alpha$ -metode uporabila tudi Kuhl in Crisfield [57] pri implementaciji posplošene  $\alpha$ -sheme na dinamične enačbe nosilcev, povprečenje sil pa je tudi sicer običajen pristop energijskih metod.

Diskretizirane vodilne enačbe elementa z interpolacijo deformacij (6.49)–(6.50) in (6.41)–(6.46), na katerih implementiramo posplošeno  $\alpha$ -metodo, imajo potem obliko

$$\mathbf{f}_{1,q} = \mathbf{R}^{[n+1]}(x_q) \mathbf{N}_{G^{[n+1]}}^{C[n+1]}(x_q) - \mathbf{N}_g^{i[n+1-\alpha_f]}(x_q) - \mathbf{N}_g^{e[n+1-\alpha_f]}(x_q) - \mathbf{N}_g^{m[n+1-\alpha_m]}(x_q) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{f}_{2,q} = \mathbf{R}^{[n+1]}(x_q) \mathbf{M}_{G^{[n+1]}}^{C[n+1]}(x_q) - \mathbf{M}_g^{i[n+1-\alpha_f]}(x_q) - \mathbf{M}_g^{e[n+1-\alpha_f]}(x_q) - \mathbf{M}_g^{m[n+1-\alpha_m]}(x_q) = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_3 &= \mathbf{r}_g^{L[n+1]} - \mathbf{r}_g^{[n+1]}(L) = \mathbf{0} \\
 \mathbf{f}_4 &= \mathbf{\vartheta}_g^{L[n+1]} - \mathbf{\vartheta}_g^{[n+1]}(L) = \mathbf{0} \\
 \mathbf{f}_5 &= \mathbf{S}^{0[n+1-\alpha_f]} + \mathbf{N}_g^{[n+1-\alpha_f]}(0) = \mathbf{0} \\
 \mathbf{f}_6 &= \mathbf{P}^{0[n+1-\alpha_f]} + \mathbf{M}_g^{[n+1-\alpha_f]}(0) = \mathbf{0} \\
 \mathbf{f}_7 &= \mathbf{S}^{L[n+1-\alpha_f]} - \mathbf{N}_g^{i[n+1-\alpha_f]}(L) - \mathbf{N}_g^{e[n+1-\alpha_f]}(L) - \mathbf{N}_g^{m[n+1-\alpha_m]}(L) = \mathbf{0} \\
 \mathbf{f}_8 &= \mathbf{P}^{L[n+1-\alpha_f]} - \mathbf{M}_g^{i[n+1-\alpha_f]}(L) - \mathbf{M}_g^{e[n+1-\alpha_f]}(L) - \mathbf{M}_g^{m[n+1-\alpha_m]}(L) = \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

Optimalno delovanje numeričnega dušenja, pri katerem dosežemo dušenje visokih frekvenc in minimiziramo vpliv dušenja na nizke frekvence, je pogojeno z izbiro parametrov integracijske sheme  $\beta$ ,  $\gamma$  in parametrov metode numeričnega dušenja  $\alpha_f$  in  $\alpha_m$ . Formule za določitev parametrov posplošene- $\alpha$  sheme pri analizi linearnih dinamičnih sistemov sta podala Chung in Hulbert [24]

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad \beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f. \quad (6.101)$$

Parametri so zapisani v odvisnosti od vrednosti spektralnega radija  $\rho_\infty \in [0, 1]$  tangentne matrike diskretiziranega sistema enačb v limiti, ko gre največja realna lastna vrednost matrike proti neskončno. V linearni dinamiki tak izbor parametrov zagotavlja brezpogojno stabilnost metode, v nelinearni dinamiki pa ne. Formule (6.101) kljub temu optimirajo delovanje numeričnega dušenja, zato jih uporabljamo za določitev parametrov sheme tudi v nelinearni dinamiki. Parameter  $\rho_\infty$  je dobra mera za numerično disipacijo, saj neposredno vpliva na njeno velikost. Manjša vrednost parametra pomeni večjo disipacijo in obratno, večja vrednost parametra pomeni manjše numerično dušenje. Zato v kontekstu posplošene- $\alpha$  sheme parameter  $\rho_\infty$  večkrat imenujemo tudi parameter numeričnega dušenja.

Povsem analogno bi posplošeno  $\alpha$ -metodo lahko implementirali v formulacijo končnega elementa z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti. Poglavitni namen implementacije dušenja po  $\alpha$ -metodi je izboljšanje numerične stabilnosti računskega postopka. V numeričnih primerih bomo pokazali, da z uporabo formulacije z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti in hkratno uporabo modificirane Newmarkove sheme povečamo numerično stabilnost algoritma, zato se v tem primeru z implementacijo dušenja ne ukvarjamo.

## 6.6 Numerični testi

Predstavili smo dve formulaciji končnih elementov za dinamično analizo prostorskih nosilcev. V prvi formulaciji smo za osnovne neznanke diskretizacije po kraju izbrali deformacijska vektorja  $\gamma$  in  $\kappa$ , za časovno integracijo enačb pa smo prilagodili Newmarkovo shemo. Formulacijo smo dodatno opremili s posplošeno- $\alpha$  metodo za numerično dušenje. Druga formulacija je osnovana na izbiri krajevnih odvodov hitrosti  $\mathbf{v}'$  in kotnih hitrosti  $\omega'$  za osnovne neznanke, za časovno integracijo pa je izbrana modificirana Newmarkova shema.

Obe formulaciji končnih elementov smo vgradili v računalniški program, zapisan v programskem paketu Matlab. Program omogoča analizo prostorskih linijskih konstrukcij, ki so podvržene dinamičnim vplivom, s poljubno, tudi ukrivljeno in zvito, začetno geometrijo in upoštevanje različnih konstitucijskih

zakonov. Za interpolacijo osnovnih neznank v obeh formulacijah končnih elementov uporabljamo Lagrangeve polinome. Končni elementi so zasnovani tako, da so interpolacijske in diskretizacijske točke računa poenotene

$$\{x_p, p = 1, \dots, N\} = \{x_q, q = 1, \dots, N\},$$

s čimer pridobimo na učinkovitosti zapisanih algoritmov. Sistem nelinearnih algebrskih enačb v vsakem časovnem koraku rešujemo z Newtonovo iteracijsko metodo. Za oceno natančnosti rezultatov v vsakem koraku Newtonove iteracije uporabimo Evklidsko normo vektorja neznank  $\|\delta\mathbf{y}\|$  in vektorja desnih strani  $\|\mathbf{f}\|$ . Newtonovo iteracijo prekinemo, ko sta obe normi manjši od predpisane tolerance:  $\|\delta\mathbf{y}\| \leq \varepsilon_y$  in  $\|\mathbf{f}\| \leq \varepsilon_f$ . V numeričnih študijah, ki jih predstavljamo v nadaljevanju, smo za toleranci uporabili vrednosti:  $\varepsilon_y = 10^{-10}$  in  $\varepsilon_f = 10^{-8}$ .

Z numeričnimi študijami želimo pokazati lastnosti in delovanje predstavljenih formulacij končnih elementov in časovno integracijskih shem. Rezultate v prvem in zadnjem primeru primerjamo z analitičnimi rešitvami, v preostalih primerih pa z rešitvami drugih avtorjev.

V vseh numeričnih primerih privzamemo linearno elastične konstitucijske zveze

$$\mathbf{N}_G^C = \begin{bmatrix} EA_1 & 0 & 0 \\ 0 & GA_2 & 0 \\ 0 & 0 & GA_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_G$$

$$\mathbf{M}_G^C = \begin{bmatrix} GI_1 & 0 & 0 \\ 0 & EI_2 & 0 \\ 0 & 0 & EI_3 \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_G.$$

$E$  in  $G$  sta elastični in strižni modul materiala,  $A_1$  je površina prečnega prereza,  $A_2$  in  $A_3$  pa sta površini strižnih prerezov v smereh glavnih vztrajnostnih osi prereza  $G_2$  in  $G_3$ .  $I_1$  je torzijski vztrajnostni moment prereza,  $I_2$  in  $I_3$  pa glavna vztrajnostna momenta prereza okrog osi  $G_2$  in  $G_3$ .

Za parametre Newmarkove in modificirane Newmarkove sheme izberemo vrednosti, priporočene za analizo nelinearnih dinamičnih sistemov, o katerih smo pisali v točkah 4.1.3 in 4.2.3. V primerih, v katerih uporabimo numerično dušenje, parametre posplošene- $\alpha$  metode določimo glede na izbrano vrednost spektralnega radija  $\rho_\infty$ , kot to določajo enačbe (6.101). Pregled parametrov časovno integracijskih shem, ki jih uporabljamo v numeričnih primerih, je podan v preglednici 6.1.

Preglednica 6.1: Parametri časovno integracijskih shem uporabljeni v numeričnih primerih.

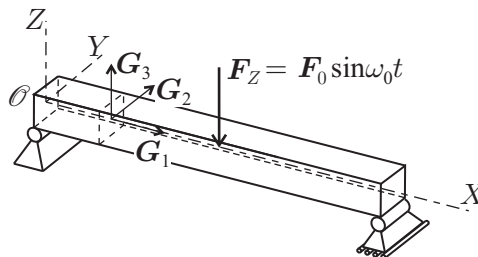
Table 6.1: Parameters of the time integration schemes used in numerical examples.

Element z interpolacijo deformacij		Element z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti
Newmarkova shema	Posplošena- $\alpha$ shema	Modificirana Newmarkova shema
$\beta = \frac{1}{4}$	$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	$\beta = \frac{1}{2}$
$\gamma = \frac{1}{2}$	$\alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}$	$\gamma = \frac{1}{2}$
	$\beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2$	
	$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f$	



### 6.6.1 Vsiljeno nihanje prostoležečega nosilca

Obravnavamo primer prostoležečega nosilca, prikazanega na sliki 6.1. Nosilec je izpostavljen vplivu harmonične sile  $F_Z = F_0 \sin \omega_0 t$ , ki deluje na sredini nosilca.



Slika 6.1: Vsiljeno nihanje prostoležečega nosilca.  
Figure 6.1: Forced vibration of simply supported beam.

V literaturi [58] lahko poiščemo analitične rešitve za tak problem ob predpostavki, da so pomiki in zasuki dovolj majhni, da lahko upoštevamo linearizirano teorijo nosilcev. Rešitev za vertikalne pomike nosilca je podana z neskončno vrsto

$$u(x, t) = \frac{2F_0 \sin \omega_0 t}{\rho A L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{L}}{\omega_n^2 - \omega_0^2} \left( 1 - \frac{\omega_0 \sin \omega_n t}{\omega_n \sin \omega_0 t} \right),$$

kjer je  $\omega_n$  lastna frekvenca  $n$ -te nihajne oblike

$$\omega_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$

Formulaciji končnih elementov, predstavljeni v točkah 6.3.1 in 6.3.2, sta osnovani na geometrijsko točni teoriji nosilcev. Kljub temu morata pri amplitudah sile vzburjanja, pri katerih nastanejo majhni pomiki, dati rezultate, primerljive z analitičnimi rešitvami, ki veljajo za linearizirano teorijo nosilcev. Primer izkoristimo za študij konvergence numerične rešitve v odvisnosti od:

- števila elementov,  $n_e$ , izbranih za modeliranje nosilca,
- števila interpolacijskih točk,  $N$ , v posameznem elementu in
- izbranega časovnega koraka  $h$ .

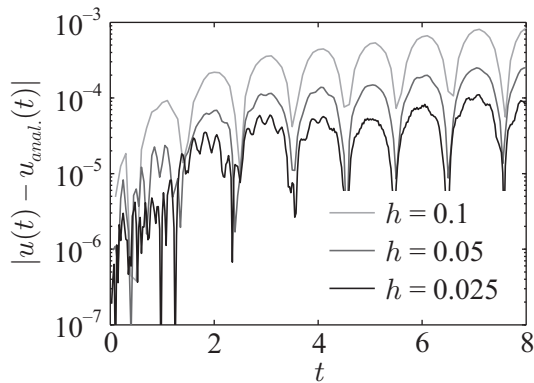
Numerične rešitve primerjamo med sabo in z analitičnimi rešitvami.

Obravnavamo nosilec z dolžino  $L = 10$  in maso  $\rho A = 1$ . Analitična rešitev ne upošteva vpliva vztrajnostnih karakteristik prečnega prereza nosilca, zato jih v računu zanemarimo:  $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ . Preostale materialne in geometrijske lastnosti so enake:

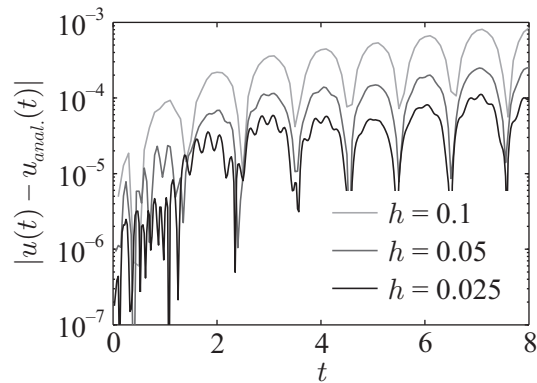
$$EA_1 = GA_2 = GA_3 = 10^5, \quad GI_1 = EI_2 = EI_3 = 10^3.$$

Za amplitudo sile vzburjanja izberemo vrednost  $F_0 = 0.3$ , za frekvenco vzburjanja pa  $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ . Maksimalen pomik, ki ga pri teh vrednostih obtežbe predvideva analitična rešitev, nastopi pri času  $t = 1.34$  na sredini nosilca in je enak  $u\left(\frac{L}{2}\right) = 0.01076$ . Velikost maksimalnega pomika je približno tisočinka dolžine

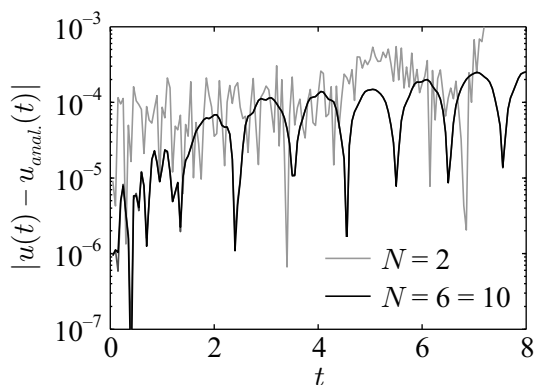
nosilca, zato je primerjava pomikov, dobljenih z linearizirano in geometrijsko točno teorijo nosilcev, smiselna.



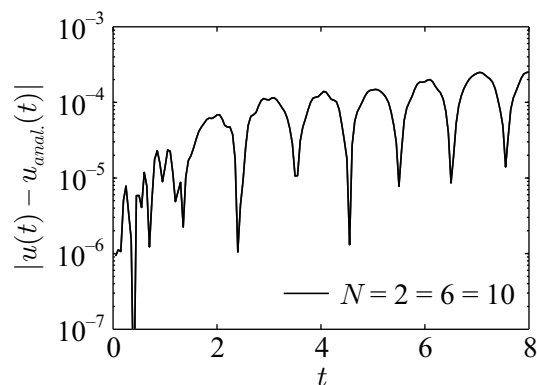
(a) Element z interpolacijo deformacij,  $N = 6$ ,  $n_e = 20$



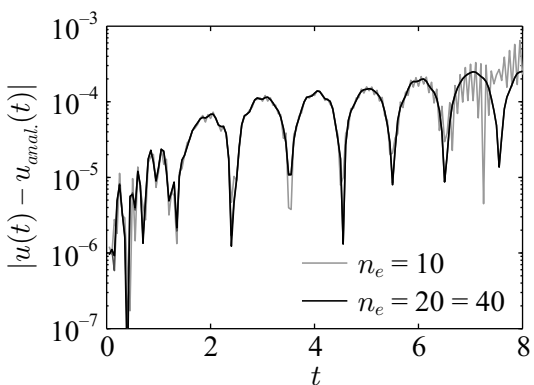
(b) Element z interpolacijo krajevni odvodov hitrosti,  
 $N = 6$ ,  $n_e = 20$



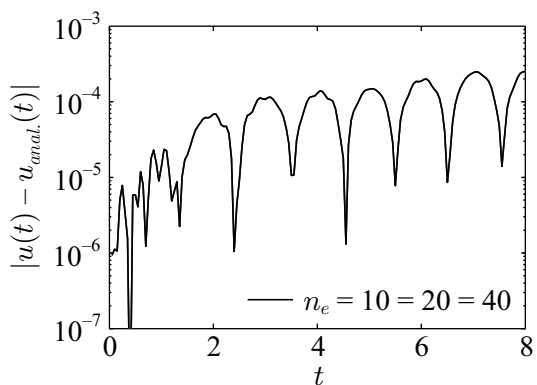
(c) Element z interpolacijo deformacij,  $h = 0.05$ ,  $n_e = 20$



(d) Element z interpolacijo krajevni odvodov hitrosti,  
 $h = 0.05$ ,  $n_e = 20$



(e) Element z interpolacijo deformacij,  $h = 0.05$ ,  $N = 6$



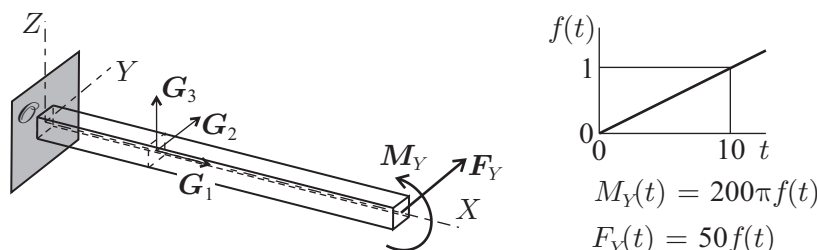
(f) Element z interpolacijo krajevni odvodov hitrosti,  
 $h = 0.05$ ,  $N = 6$

Slika 6.2: Vsiljeno nihanje prostoležečega nosilca. Absolutne napaka pomika na sredini nosilca na intervalu  $t \in [0, 8]$  ( $h =$  časovni korak,  $n_e =$  število elementov,  $N =$  število interpolacijskih točk).  
Figure 6.2: Forced vibration of simply supported beam. Absolute error of midspan deflection on the interval  $t \in [0, 8]$  ( $h =$  time step,  $n_e =$  number of elements,  $N =$  number of interpolation points).

Analize opravimo s tremi časovnimi koraki,  $h = 0.1, 0.05, 0.025$ , s tremi različnimi mrežami končnih elementov,  $n_e = 10, 20, 40$ , in tremi stopnjami interpolacije,  $N = 2, 6, 10$ . Numerične rešitve primerjamo z analitičnimi na časovnem intervalu  $t \in [0, 8]$ . Na sliki 6.2 prikazujemo absolutne napake vertikalnih pomikov na sredini nosilca. Kratkoročni odziv nosilca je dobro opisan že z redkejšo mrežo končnih elementov in elementi nižjega reda. Napake se s časom seštevajo, največji vpliv na zmanjšanje napak pa ima izbira manjših časovnih korakov. Del napak je posledica dejstva, da primerjamo rešitve dobljene z različnima teorijama nosilce. Zato povečanje števila elementov in števila interpolacijskih točk ne vpliva bistveno na velikost napak, ki so enakega velikostnega reda za obe formulaciji končnih elementov.

### 6.6.2 Konzola upognjena v spiralo

Deformacijski elementi, razviti za statično analizo [9], odlično delujejo pri velikih pomikih in, kar je še bolj pomembno, pri poljubno velikih prostorskih rotacijah. Tako obnašanje pričakujemo tudi od novega elementa z interpoliranimi krajevnimi odvodi hitrosti in kotnih hitrosti.



Slika 6.3: Konzola upognjena v spiralo.  
Figure 6.3: Cantilever bent to a helical form.

Element preizkusimo na primeru konzole, ki je na prostem koncu obremenjena z upogibnim momentom  $M_Y$  in silo  $F_Y$ , ki konzolo potiska iz ravnine  $XZ$ . Začetna lega in obtežba konzole sta prikazani na sliki 6.3.

Dolžina konzole je  $L = 10$ , preostali geometrijski in materialni podatki pa so:

$$EA_1 = GA_2 = GA_3 = 10^4$$

$$GI_1 = EI_2 = EI_3 = 10^2.$$

Primer konzole na sliki 6.3 s statično obtežbo je prvi predstavil Ibrahimbegović [38]. Rezultate statične analize pa sta predstavila tudi Zupan in Saje [9]. V naši analizi dinamične vplive zanemarimo tako, da porazdeljeni masi elementov in komponentam vztrajnostnega tenzorja pripišemo majhne vrednosti:  $\rho A = 10^{-15}$ ,  $J_1 = J_2 = J_3 = 10^{-15}$ .

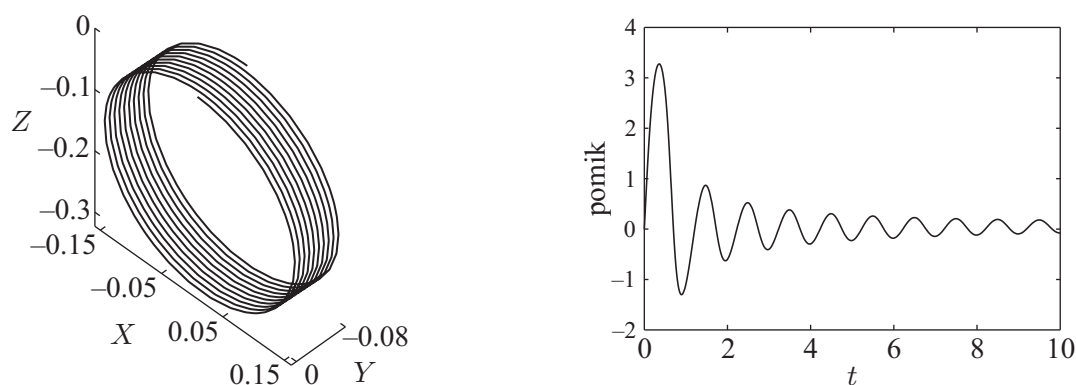
Konzolo modeliramo z različnimi mrežami končnih elementov in različnimi stopnjami interpolacije osnovnih spremenljivk. Za vse analize uporabimo časovni korak  $h = 0.01$ . V preglednici 6.2 primerjamo pomike konca konzole v smeri obtežbe pri času  $t = 10$ , dobljene z obema formulacijama končnih elementov. Opazimo, da je konvergenca pomikov dobljenih z elementi z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti celo nekoliko hitrejša od konvergence deformacijskih elementov.

Preglednica 6.2: Pomik prostega krajišča konzole v smeri obtežbe pri času  $t = 10$ .Table 6.2: Displacement of the free-end of the cantilever in the direction of load at time  $t = 10$ .

	Element z interpolacijo deformacij			Element z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti		
	$N = 3$	$N = 5$	$N = 8$	$N = 3$	$N = 5$	$N = 8$
$n_e = 10$				-0.04625	-0.07844	-0.07640
$n_e = 25$				-0.07711	-0.07634	-0.07642
$n_e = 50$	-0.03611	-0.04406	-0.05281	-0.07645	-0.07644	-0.07644
$n_e = 100$	-0.07042	-0.07159	-0.07298	-0.07644	-0.07644	-0.07644
$n_e = 200$	-0.07565	-0.07580	-0.07598			

$n_e =$  število elementov,  $N =$  stopnja interpolacije

Pri času  $t = 10$  komponenti obtežbe dosežeta vrednosti  $F_Y = 50$  in  $M_Y = 200\pi$ , konzola je zvita v spiralo z desetimi obroči, pomik v smeri sile  $F_Y$  pa konvergira k vrednosti  $u_Y = -0.07644$ . Deformirana lega konzole, modelirane s 25 elementi z 8 točkovno interpolacijo hitrosti pri času  $t = 10$ , je prikazana na sliki 6.4(a). Slika 6.4(b) prikazuje spreminjanje komponente pomika v smeri obtežbe s časom. Prikazani rezultati se zelo dobro ujemajo z rezultati predstavljenimi v literaturi [9, 38]. S tem smo pokazali, da tudi nova formulacija z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti zmore natančno opisati deformiranje konstrukcij, z izrazito velikimi rotacijami.

(a) Deformirana lega konzole zvite v spiralo pri času  $t = 10$ 

(b) Pomik prostega krajišča konzole v smeri obtežbe

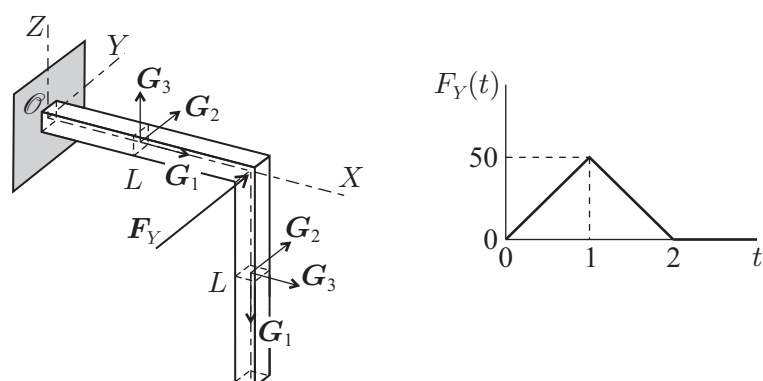
Slika 6.4: Konzola upognjena v spiralo. Rezultati analize s 25 elementi z 8 točkovno interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti.

Figure 6.4: Cantilever bent to a helical form. Results of the analysis with 25 elements with 8 point interpolation of spatial derivatives of velocities.

### 6.6.3 Kolenasta konzola

Obravnavamo kolenasto konzolo, predstavljeno na sliki 6.5. Primer sta prva predstavila Simo in Vu-Quoc [4], za primerjavo z novo razvitimi formulacijami linijskih elementov pa so ga povzeli tudi drugi

avtorji npr. Ibrahimbegović in Al Mikdad [13]. Konzola je med gibanjem izpostavljena velikim pomikom in rotacijam in je zato zelo primerna za študij tako prostorske kot tudi časovne diskretizacije.



Slika 6.5: Kolenasta konzola.  
Figure 6.5: Right-angle cantilever.

Geometrijske in materialne lastnosti konzole so:

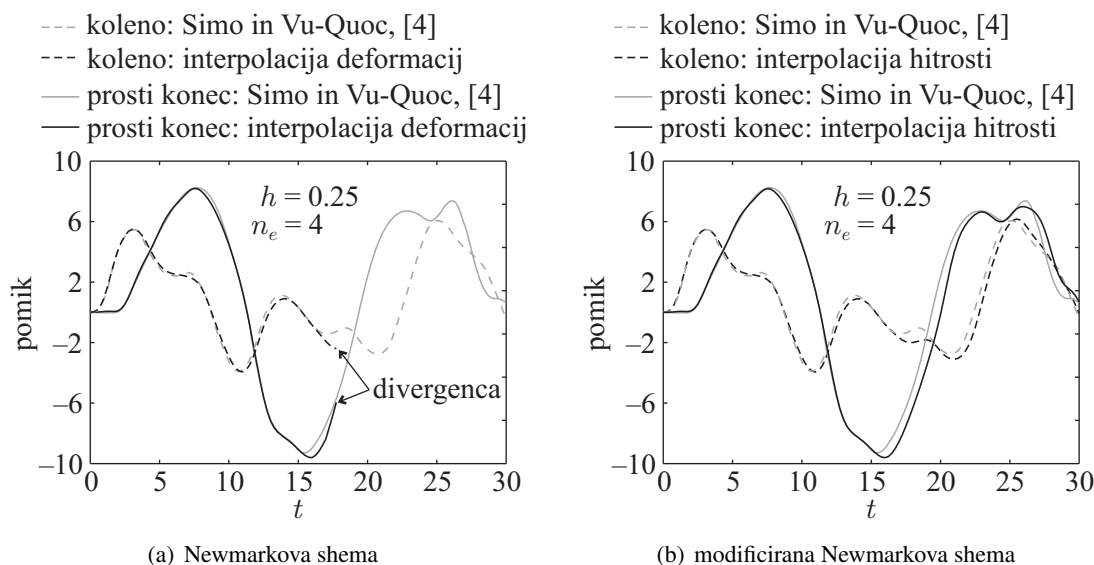
$$L = 10, \quad EA_1 = GA_2 = GA_3 = 10^6, \quad GI_1 = EI_2 = EI_3 = 10^3, \\ \rho A = 1, \quad J_1 = 20, \quad J_2 = J_3 = 10.$$

Obtežba deluje v kolenu konzole in je usmerjena izven ravnine konzole. S časom se spreminja v obliki trikotne sheme, predstavljene na sliki 6.5. Po koncu delovanja obtežbe konzola prosto niha. Nihanje opazujemo do časa  $t = 30$ . Avtorja v [4] predstavita rezultate, dobljene za konzolo, modelirano s štirimi elementi - dva elementa za vsak nosilec in dvajsetimi elementi - deset elementov za vsak nosilec. Pomiki in inkrementalni zasuki so interpolirani s kvadratnimi polinomi. Simulacija je bila opravljena z Newmarkovim integratorjem s konstantnim časovnim korakom  $h = 0.25$ .

Eksperiment ponovimo z novima formulacijama končnih elementov. Deformacije in hitrosti interpoliramo s kvadratnimi polinomi. Pri računu z deformacijskim končnim elementom izberemo Newmarkov integrator, pri računu s končnim elementom z interpolacijo hitrosti pa modificirano Newmarkovo shemo.

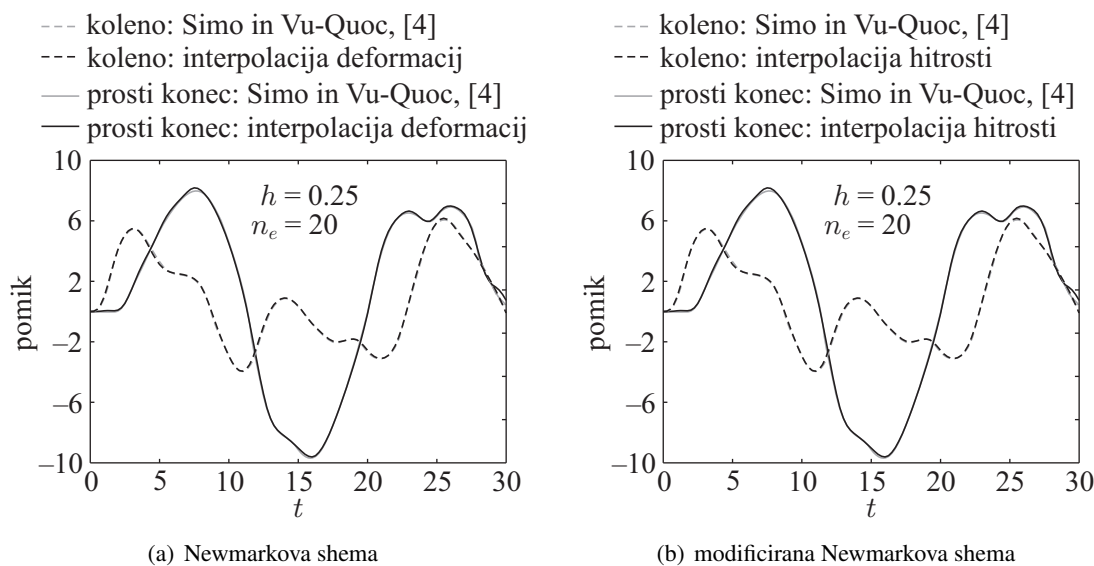
V obeh primerih izberemo konstanten časovni korak  $h = 0.25$ , simulacijo pa ponovimo tudi z manjšim korakom  $h = 0.1$ . Konzolo modeliramo s štirimi in dvajsetimi končnimi elementi. Pomiki kolena in prostega konca konzole pri analizi s štirimi končnimi elementi so prikazani na sliki 6.6. Račun z deformacijskim elementom z Newmarkovo shemo pri času  $t = 17.75$  divergira, račun z elementom z interpolacijo hitrosti pa je stabilen ves čas integracije. Na sliki 6.7 so predstavljeni pomiki kolena in prostega konca konzole iz ravnine, dobljeni z analizo z 20 končnimi elementi. V tem primeru je račun z obema formulacijama stabilen ves opazovani interval. Rezultati, dobljeni z gosto mrežo, se dobro ujemajo za obe formulaciji končnih elementov in z rezultati predstavljenimi v [4]. Pomiki, ki jih izračunamo z redkejšo mrežo končnih elementov z interpolacijo hitrosti, se razlikujejo od pomikov, ki sta jih za mrežo štirih elementov pokazala avtorja v [4], zelo dobro pa se ujemajo z rezultati, dobljenimi z mrežo dvajsetih končnih elementov.

Pomiki kolena in prostega konca konzole pri natančnejši analizi z mrežo 20 končnih elementov in časovnim korakom  $h = 0.1$  so prikazani na sliki 6.8. Z obema formulacijama dobimo povsem enake



Slika 6.6: Kolenasta konzola. Pomik kolena in prostega konca konzole iz ravnine pri analizi s 4 elementi.

Figure 6.6: Right-angle cantilever. Out-of-plane displacements of the elbow and the free-end of the cantilever obtained with analysis with 4 elements.

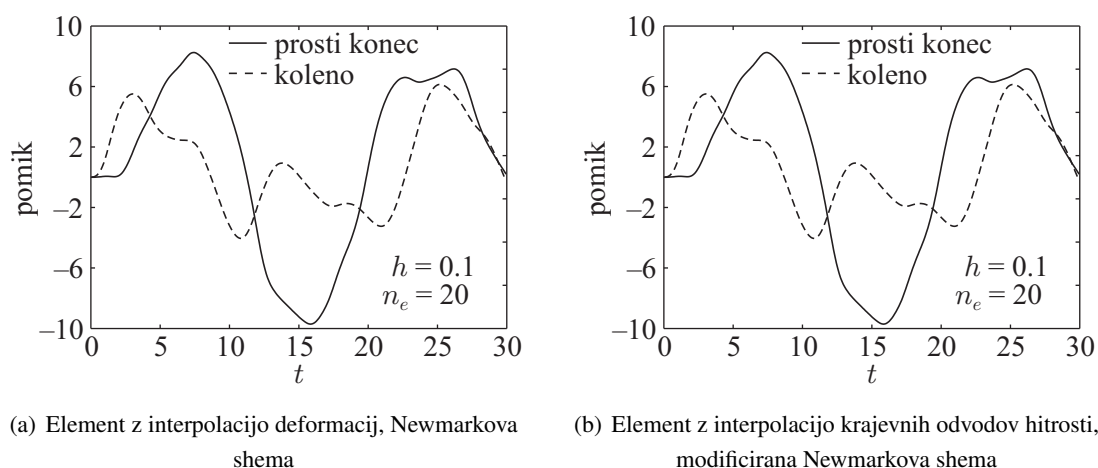


Slika 6.7: Kolenasta konzola. Pomik kolena in prostega konca konzole iz ravnine pri analizi s 20 elementi.

Figure 6.7: Right-angle cantilever. Out-of-plane displacements of the elbow and the free-end of the cantilever obtained with analysis with 20 elements.

rezultate. Opazimo tudi, da se pomiki, dobljeni z manjšim časovnim korakom, v zadnji tretjini opazovane časa razlikujejo od pomikov, dobljenih z večjim korakom.

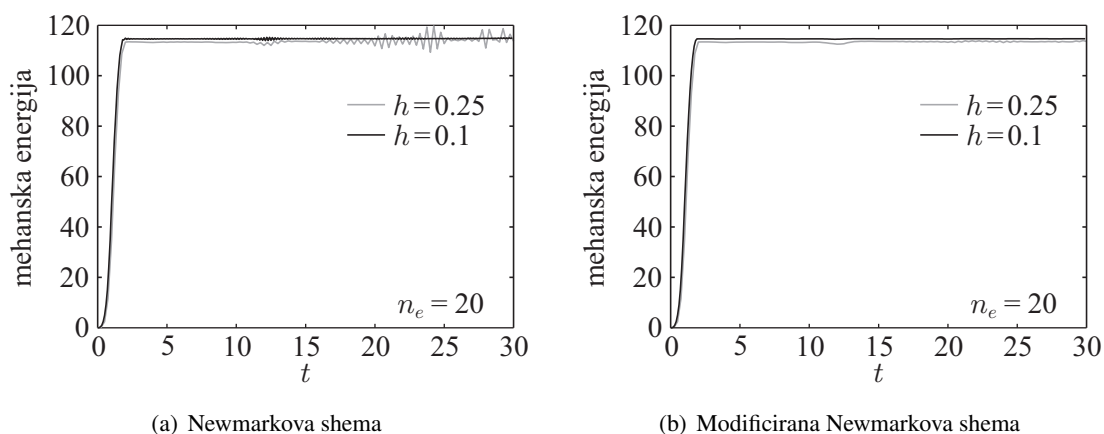
Na sliki 6.9 prikazujemo še časovni potek mehanske energije kolenaste konzole, modelirane z 20 elementi. V fazi prostega nihanja je energijsko stanje konzole stabilno pri obeh formulacijah končnih ele-



Slika 6.8: Kolenasta konzola. Pomiki kolena in prostega konca konzole iz ravnine, pri analizi s korakom  $h = 0.1$ .

Figure 6.8: Right-angle cantilever. Out-of-plane displacements of the elbow and the free-end of the cantilever, obtained with the time step  $h = 0.1$ .

mentov. Pri deformacijski formulaciji z Newmarkovo shemo v drugi polovici analize opazimo večje oscilacije energije okrog konstantne vrednosti, medtem ko so oscilacije energije pri formulaciji z modificiranim Newmarkovim integratorjem skoraj neopazne tudi za večji časovni korak. V tem smislu lahko govorimo o povečani stabilnosti časovne integracije s formulacije končnih elementov z modificirano shemo v primerjavi s formulacijo z Newmarkovo shemo.



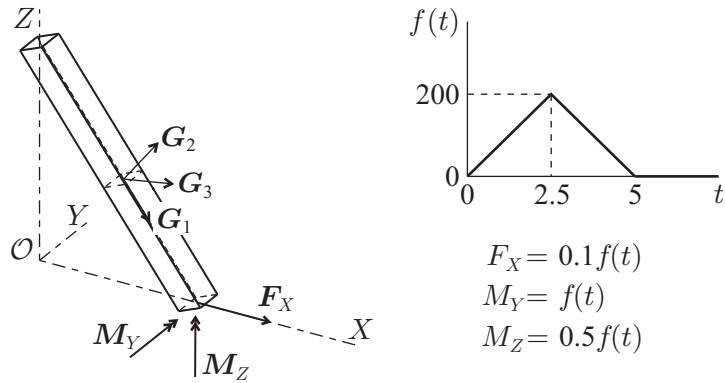
Slika 6.9: Kolenasta konzola. Mehanska energija.

Figure 6.9: Right-angle cantilever. Mechanical energy.

#### 6.6.4 Nepodprti podajni nosilec v prostem letu

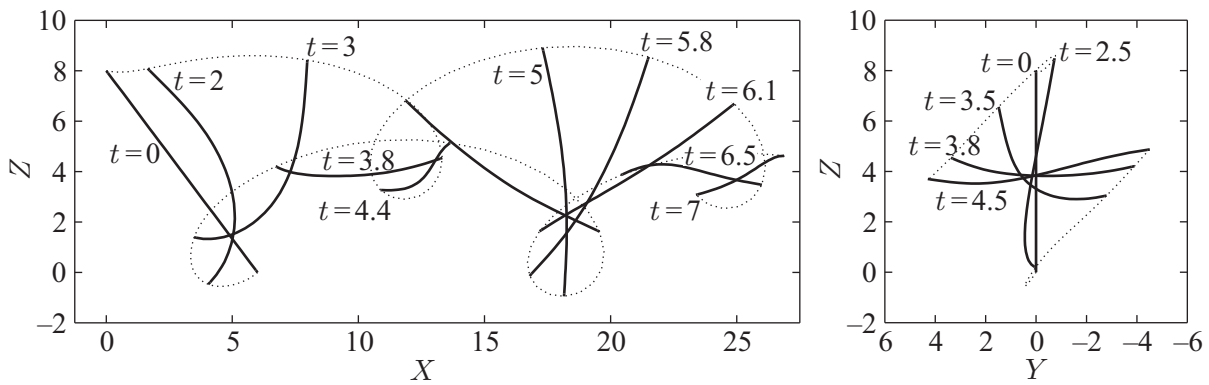
Opazujemo gibanje nepodprtega podajnega nosilca, ki se med gibanjem močno deformira in doseže izjemno velike pomike in rotacije. Primer sta prva obravnavala Simo in Vu-Quoc [4], kasneje pa tudi Simo s sodelavci [10] in mnogi drugi. Primer je dober test za obnašanje linijskih elementov pri velikih

pomikih in rotacijah, predvsem pa je dober test za stabilnost časovnih integratorjev.

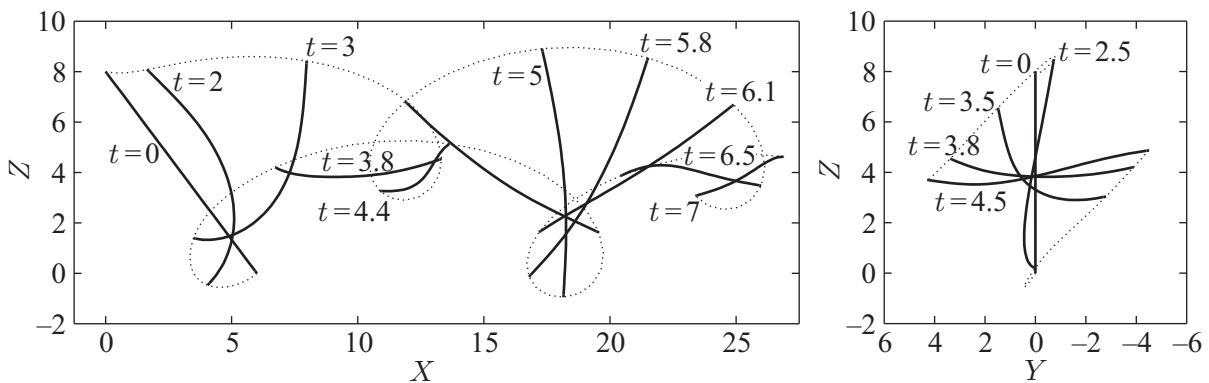


Slika 6.10: Nepodprti podajni nosilec v prostem letu.

Figure 6.10: Flexible beam in free flight.



(a) Element z interpolacijo deformacij, projekcija na ravnini XZ in YZ



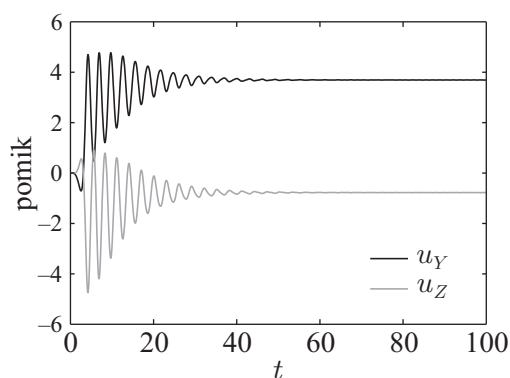
(b) Element z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti, projekcija na ravnini XZ in YZ

Slika 6.11: Podajni nosilec v prostem letu. Projekcije deformiranih leg.

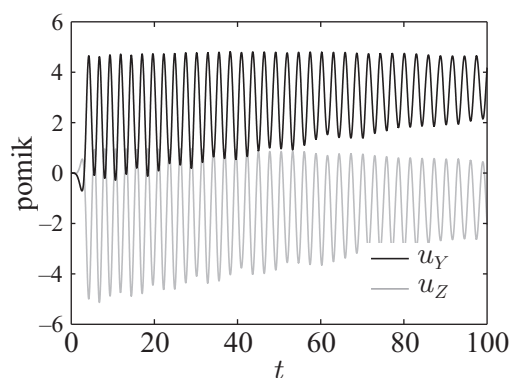
Figure 6.11: Flexible beam in free flight. Side views of deformed shapes.

Raven nosilec dolžine  $L = 10$  je v začetni legi postavljen v ravnino XZ, koordinati robnih točk težiščne osi nosilca sta enaki  $(6, 0, 0)$  in  $(0, 0, 8)$ . Na spodnji rob deluje točkovna sila  $F_X$  in par momentov  $M_Y$  in  $M_Z$ . Začetna lega nosilca in spreminjanje obtežbe s časom sta predstavljena na sliki 6.10.

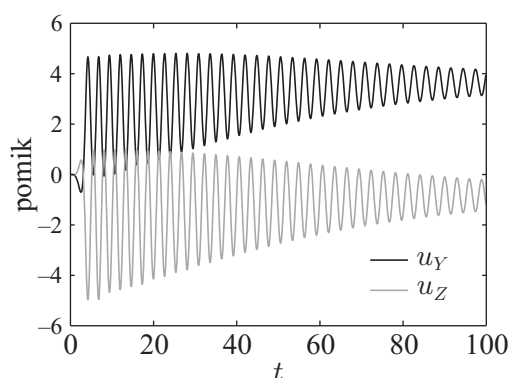




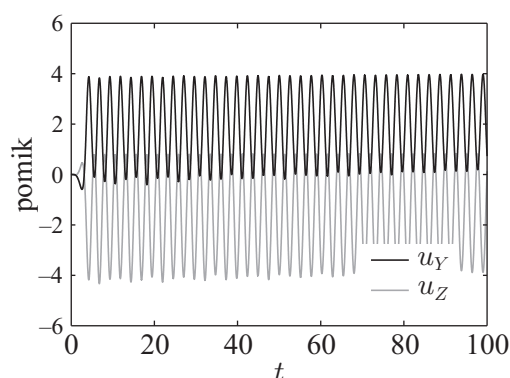
(a) Element z interpolacijo deformacij, posplošena- $\alpha$  shema:  $\rho_\infty = 0.5$ ,  $h = 0.1$



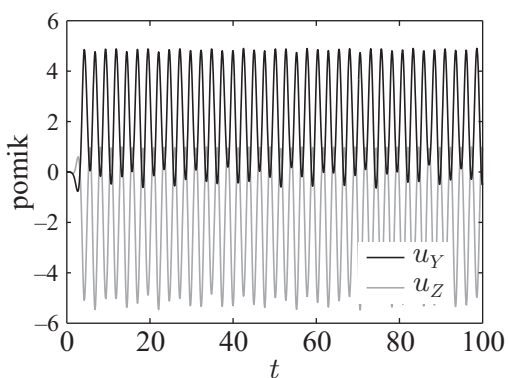
(b) Element z interpolacijo deformacij, posplošena- $\alpha$  shema:  $\rho_\infty = 0.5$ ,  $h = 0.01$



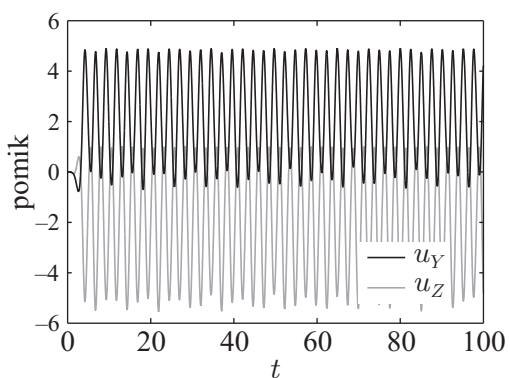
(c) Element z interpolacijo deformacij, posplošena- $\alpha$  shema:  $\rho_\infty = 0.9$ ,  $h = 0.1$



(d) Element z interpolacijo deformacij, posplošena- $\alpha$  shema:  $\rho_\infty = 0.9$ ,  $h = 0.01$



(e) Element z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti, modificirana Newmarkova shema:  $h = 0.1$



(f) Element z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti, modificirana Newmarkova shema:  $h = 0.01$

Slika 6.12: Podajni nosilec v prostem letu. Pomiki obteženega vozlišča.

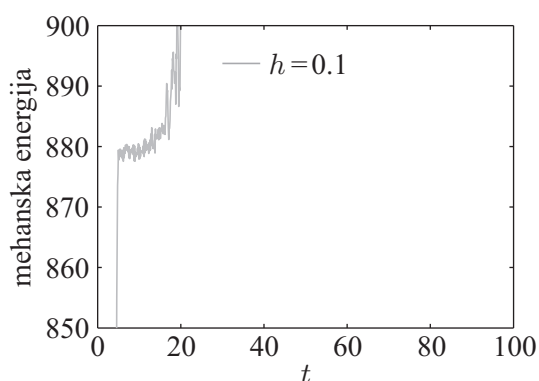
Figure 6.12: Flexible beam in free flight. Displacements of the loaded end of the beam.

Nosilec modeliramo z 10 končnimi elementi, prvič z linearno interpoliranimi deformacijami in drugič z linearno interpoliranimi krajevnimi odvodi hitrosti. Izberemo časovni korak, ki je priporočen v literaturi:  $h = 0.1$ . Za analizo gibanja z deformacijskim elementom izberemo Newmarkovo shemo, analizo z elementom z interpolacijo hitrosti pa izvajamo z modificirano Newmarkovo shemo.

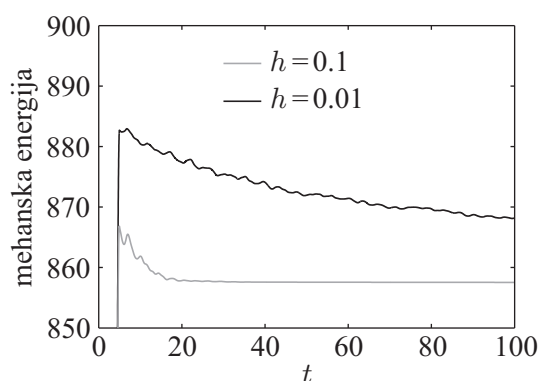
V začetku gibanja obe analizi dajeta enake rezultate. Na sliki 6.11 so prikazane projekcije deformiranih leg nosilca na ravnini  $XZ$  in  $YZ$ . Projekcije, dobljene z različnima elementoma, so identične, dobro pa se ujemajo tudi s projekcijami predstavljenimi v literaturi [4, Fig. 17 in Fig. 19].

Analizo z Newmarkovo shemo približno ob času  $t = 16$  zaznamuje nenaden porast mehanske energije, ki vodi k odpovedi numerične analize, kot kaže slika 6.13(a). Porast energije se zgodi zaradi napak, ki izvirajo iz časovne diskretizacije z Newmarkovo shemo, posledično pa pride do prevelikega vpliva visokih frekvenc na odziv konstrukcije. Pri analizi z modificirano Newmarkovo shemo teh težav ne zaznamo, časovna integracija pa gladko teče do časa  $t = 100$ , pri katerem prenehamo z opazovanjem gibanja.

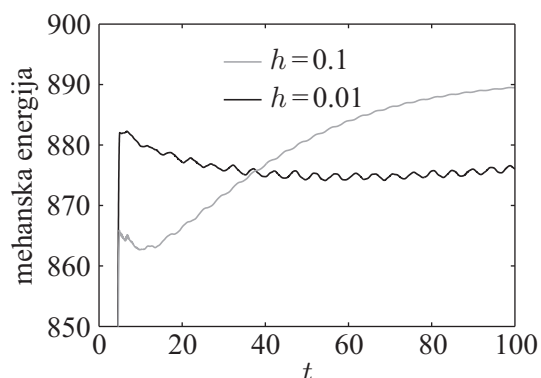
Analizo gibanja z deformacijskim elementom ponovimo z uporabo posplošene  $\alpha$ -metode. Opazujemo vpliv izbire parametra  $\rho_\infty$  in velikost izbranega koraka  $h$  na odziv nosilca. Na sliki 6.12 primerjamo pomike obteženega vozlišča nosilca dobljene s časovnima korakoma  $h = 0.1$ ,  $h = 0.01$  in vrednostma parametra  $\rho_\infty = 0.5$  in  $\rho_\infty = 0.9$ . Predstavljena je tudi referenčna rešitev, dobljena z modificirano Newmarkovo shemo. Vpliv numeričnega dušenja na odziv konstrukcije je velik, uporaba prevelikega dušenja in prevelikega časovnega koraka pa se odraža v napačnem odzivu konstrukcije. Pomiki, dobljeni z modificirano Newmarkovo shemo, so enaki za oba izbrana časovna koraka.



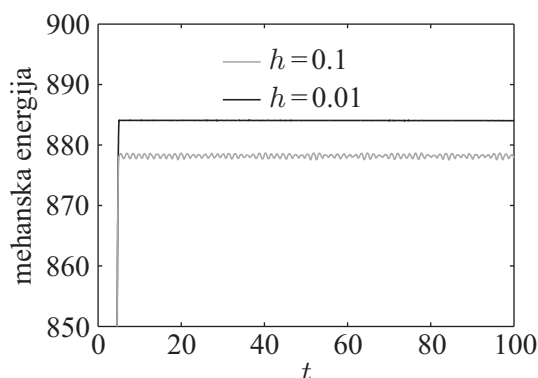
(a) Element z interpolacijo deformacij, Newmarkova shema



(b) Element z interpolacijo deformacij, posplošena  $\alpha$ -shema:  $\rho_\infty = 0.5$



(c) Element z interpolacijo deformacij, posplošena  $\alpha$ -shema:  $\rho_\infty = 0.9$



(d) Element z interpolacijo krajevnihih odvodov hitrosti, modificirana Newmarkova shema

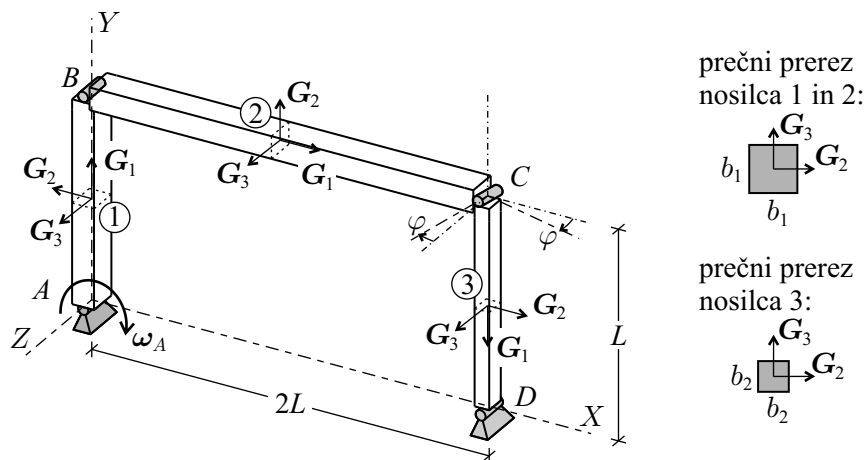
Slika 6.13: Podajni nosilec v prostem letu. Mehanska energija.

Figure 6.13: Flexible beam in free flight. Mechanical energy.

Na sliki 6.13 prikažemo spreminjanje mehanske energije nosilca s časom za vse opravljene analize. Potrdimo ugotovitev [57], da numerična disipacija za poljubne vrednosti parametra  $\rho_\infty$  ne zagotavlja nujno tudi disipacijo mehanske energije, slika 6.13(c), to pa lahko popravimo z uporabo manjših časovnih korakov. Ponovno pa se pokaže prednost analize z modificirano Newmarkovo shemo, pri kateri se mehanska energija pri konservativnih problemih obnaša izrazito stabilno. Za večje časovne korake lahko razberemo manjše oscilacije okrog konstantne vrednosti, ki pa ne vplivajo na dolgoročni časovni odziv.

### 6.6.5 Problem štiričlenskega mehanizma

Obravnavamo primer, ki ga je prvi predstavil Bauchau [32]. Mehanizem, predstavljen na sliki 6.14, je sestavljen iz treh nosilcev, ki v začetni legi ležijo v ravnini  $XY$ . Nosilci so v točkah  $B$  in  $C$  med sabo povezani z enoosnima členkoma ter podprti v točkah  $A$  in  $D$ . Obe podpori sta nepomični in dovoljujeta rotacijo mehanizma okrog normale na ravnino  $XY$ . Os vrtenja enoosnega členka v točki  $B$  je v začetni legi pravokotna na ravnino v kateri leži mehanizem. Posebnost primera je, da je os vrtenja členka v točki  $C$  v začetni legi zavrtena tako, da oklepa z normalo na ravnino mehanizma kot  $\varphi = 5^\circ$  in leži v ravnini vzporedni z ravnino  $XZ$ . Z rotacijo členka je modelirana začetna nepopolnost mehanizma. Mehanizem se vrti s predpisano kotno hitrostjo  $\omega_A$  okrog osi členka v podpori  $A$ . Posledica nepopolnosti je prostorski odziv mehanizma, pri katerem nastopajo velike notranje sile.



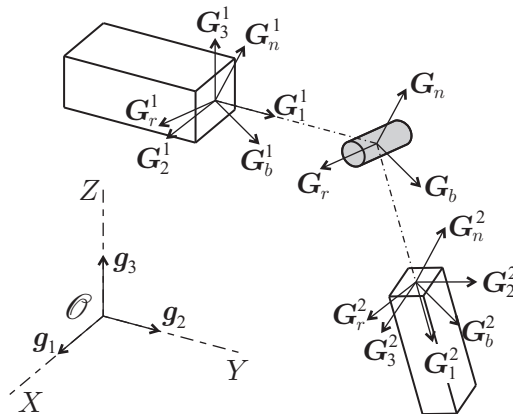
Slika 6.14: Štiričlenski mehanizem.

Figure 6.14: Four bar mechanism.

Enoosne členke modeliramo s kinematičnimi vezmi, ki jih v sistem enačb konstrukcije vpeljemo z metodo Lagrangejevih množiteljev. Vzemimo enoosni členek, predstavljen na sliki 6.15, v katerem se stikata nosilca, označena z 1 in 2. Naj bo  $\{\mathbf{G}_r(t), \mathbf{G}_n(t), \mathbf{G}_b(t)\}$  desnosučna ortonormirana baza pripeta na členek, tako da je bazni vektor  $\mathbf{G}_r$  usmerjen v smeri osi vrtenja členka. V robno točko nosilca 1 pripravimo bazo  $\{\mathbf{G}_r^1(t), \mathbf{G}_n^1(t), \mathbf{G}_b^1(t)\}$ , v robno točko nosilca 2 pa bazo  $\{\mathbf{G}_r^2(t), \mathbf{G}_n^2(t), \mathbf{G}_b^2(t)\}$ , tako da bazni vektorji obeh baz sovpadajo z baznimi vektorji členka:

$$\mathbf{G}_r(t) = \mathbf{G}_r^1(t) = \mathbf{G}_r^2(t), \quad \mathbf{G}_n(t) = \mathbf{G}_n^1(t) = \mathbf{G}_n^2(t), \quad \mathbf{G}_b(t) = \mathbf{G}_b^1(t) = \mathbf{G}_b^2(t).$$

Algebrski vezni enačbi, s katerima je enoosni členek enolično opisan, zahtevata da sta normalni  $\mathbf{G}_n^2$  in



Slika 6.15: Enosni členek.

Figure 6.15: Revolute joint.

$G_b^2$  pravokotni na os vrtenja,  $G_r^1$ , v poljubni deformirani legi:

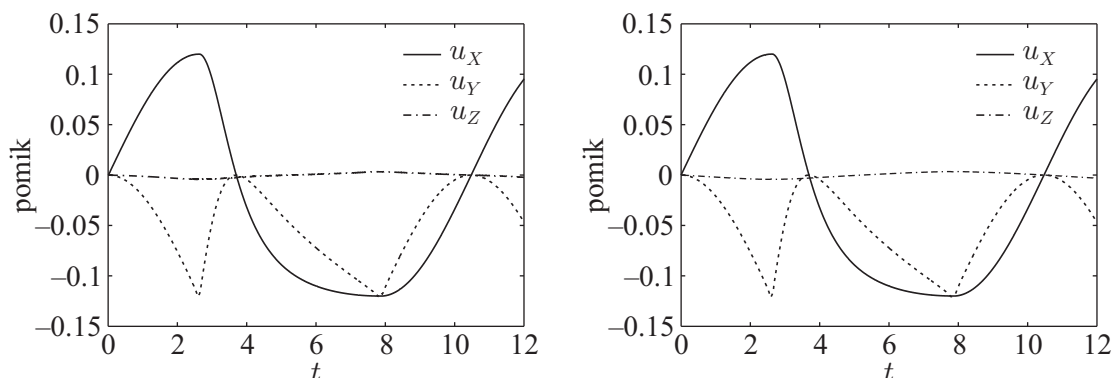
$$\Phi_1 = G_r^1(t) \cdot G_n^2(t) = 0$$

$$\Phi_2 = G_r^1(t) \cdot G_b^2(t) = 0.$$

Primer štiričlenskega mehanizma je obsežno dokumentiran na spletnem naslovu [59], kjer so prikazani rezultati, dobljeni s programskim paketom Dymore [60]. Materialne in geometrijske karakteristike mehanizma zato povzamemo iz reference [59]:

$$E = 207 \cdot 10^9, \quad \nu = 0.3, \quad \rho = 7800, \quad L = 0.12, \quad b_1 = 0.016, \quad b_2 = 0.008.$$

Isti vir navaja predpisano velikost kotne hitrosti  $\omega_A = 0.6$ . Vsak od nosilcev je modeliran s štirimi končnimi elementi s kubično interpolacijo osnovnih neznank. Analizo opravimo z obema formulacijama, odziv mehanizma pa opazujemo do časa  $t = 12$ .

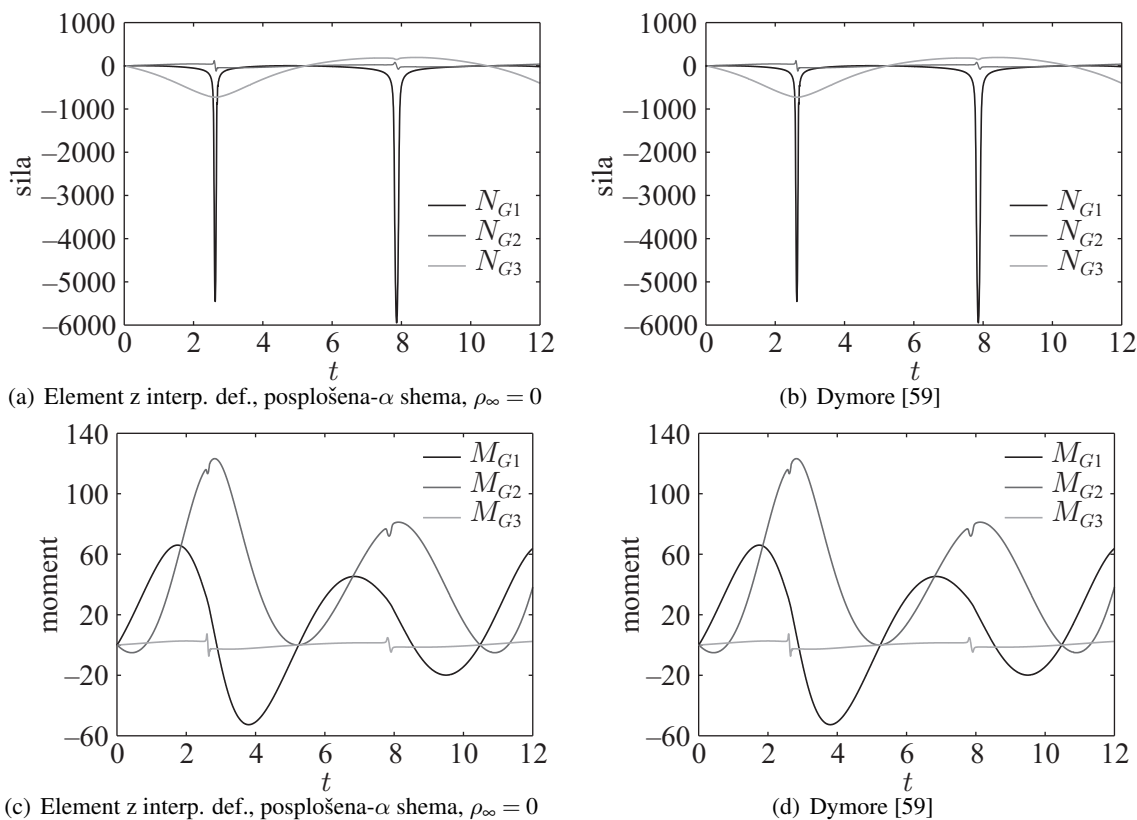


(a) Element z interpolacijo deformacij, posplošena- $\alpha$  shema:  $\rho_\infty = 0$

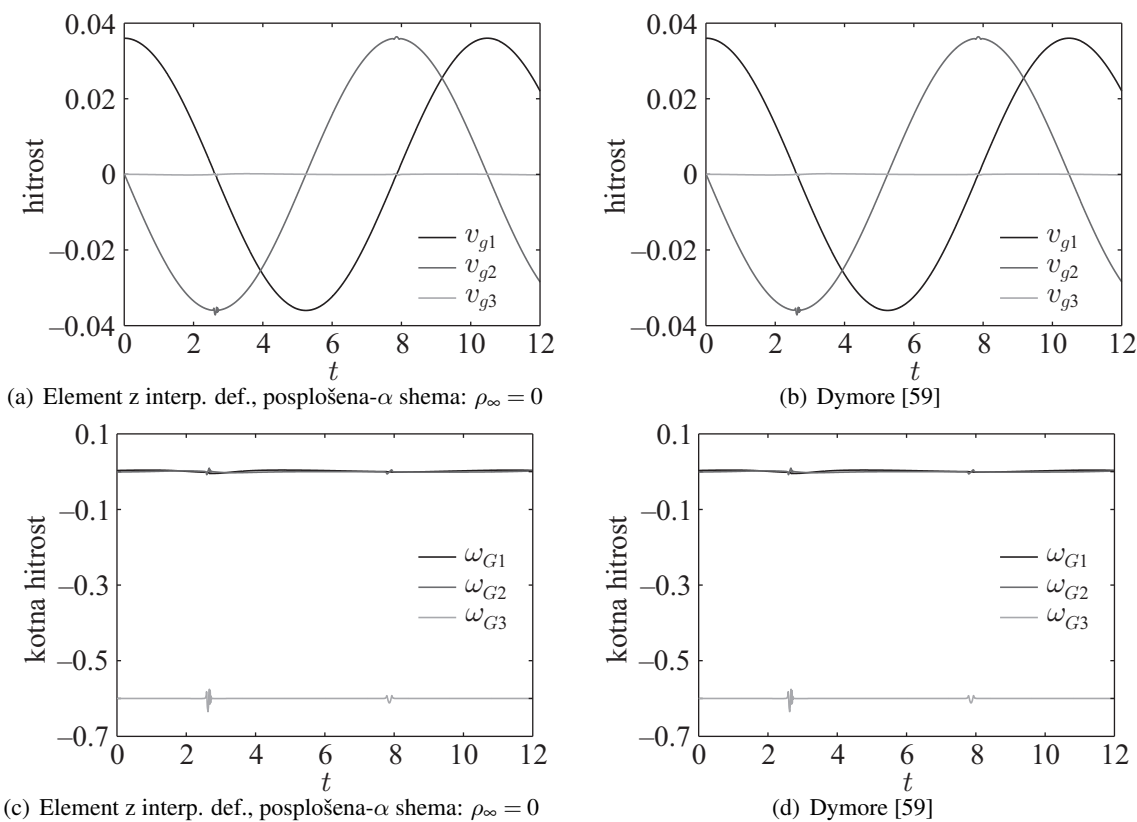
(b) Dymore [59]

Slika 6.16: Štiričlenski mehanizem. Pomiki vozlišča  $C$ .

Figure 6.16: Four bar mechanism. Displacements at point  $C$ .



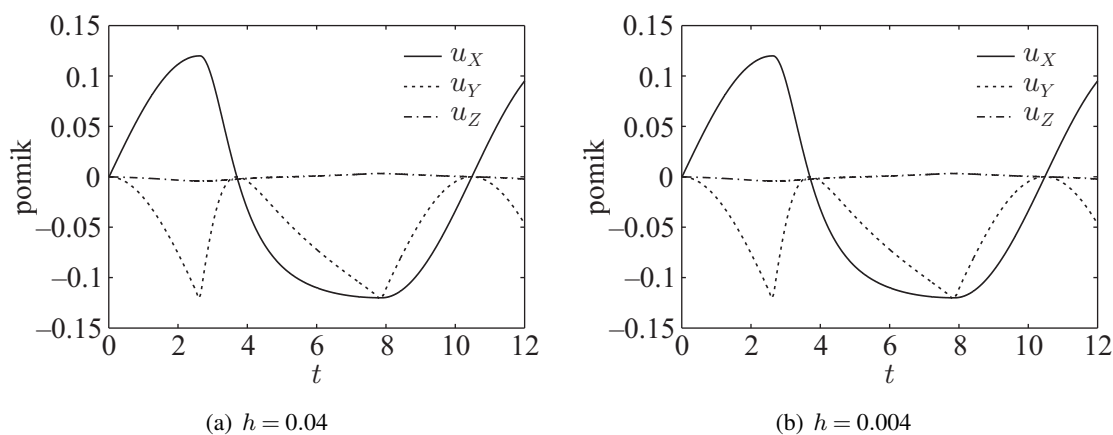
Slika 6.17: Štiričlenski mehanizem. Notranje sile in momenti na sredini prvega nosilca.  
 Figure 6.17: Four bar mechanism. Internal forces and moments at the midpoint of the first beam.



Slika 6.18: Štiričlenski mehanizem. Hitrosti in kotne hitrosti na sredini prvega nosilca.  
 Figure 6.18: Four bar mechanism. Velocities and angular velocities at the midpoint of the first beam.

Rezultati predstavljeni v viru [59] so pridobljeni s časovnim korakom  $h = 0.004$  in z asimptotičnim numeričnim dušenjem, pri katerem je vrednost parametra  $\rho_\infty = 0$ . Potreba po numeričnem dušenju se pokaže tudi pri analizi s končnimi elementi z interpolacijo deformacij, pri katerih uporabljamo Newmarkovo shemo. Zaradi motenj, ki so posledica zavrnjenega členka v vozlišču  $C$ , pride do velikih oscilacij deformacijskih vektorjev in posledične slabe konvergence numerične rešitve ne glede na izbran časovni korak. Pri velikosti koraka  $h = 0.004$  račun preneha konvergirati pri času  $t = 4.7$ . Analizo ponovimo s posplošeno- $\alpha$  shemo z vrednostjo parametra  $\rho_\infty = 0$ . Z uporabo dušenja postane račun stabilen ves opazovani časovni interval, če uporabimo časovni korak manjši ali enak  $h = 0.004$ . Primerjavo rezultatov naše analize z rezultati, predstavljenimi v [59], prikazujemo na slikah 6.16, 6.17 in 6.18. Na sliki 6.16 so prikazani pomiki vozlišča  $C$  v odvisnosti od časa. Primerjava notranjih sil in momentov na sredini nosilca z oznako 1 je prikazana na sliki 6.17, primerjava hitrosti in kotnih hitrosti v isti točki pa je prikazana na sliki 6.18. Vse rešitve se zelo dobro ujemajo z referenčnimi rešitvami [59].

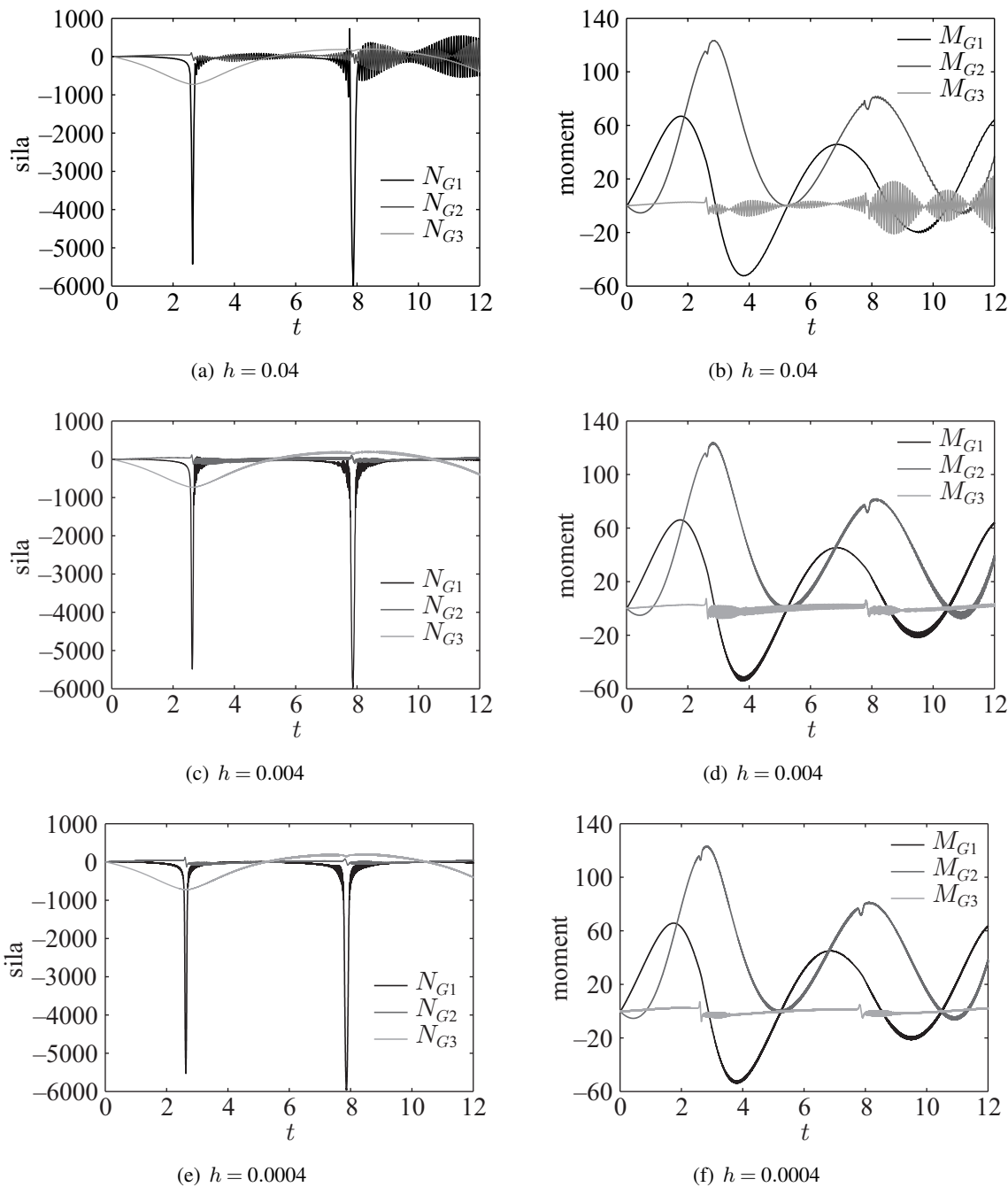
Analizo opravimo še z elementi z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti in modificirano Newmarkovo shemo s časovnimi koraki  $h = 0.04$ ,  $h = 0.004$  in  $h = 0.0004$ . Kljub odsotnosti numeričnega dušenja je analiza v vseh treh primerih stabilna ves opazovani čas. Rezultate analiz primerjamo na slikah 6.19, 6.20 in 6.21.



Slika 6.19: Štiričlenski mehanizem. Analiza z elementi z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti – pomiki vozlišča  $C$ .

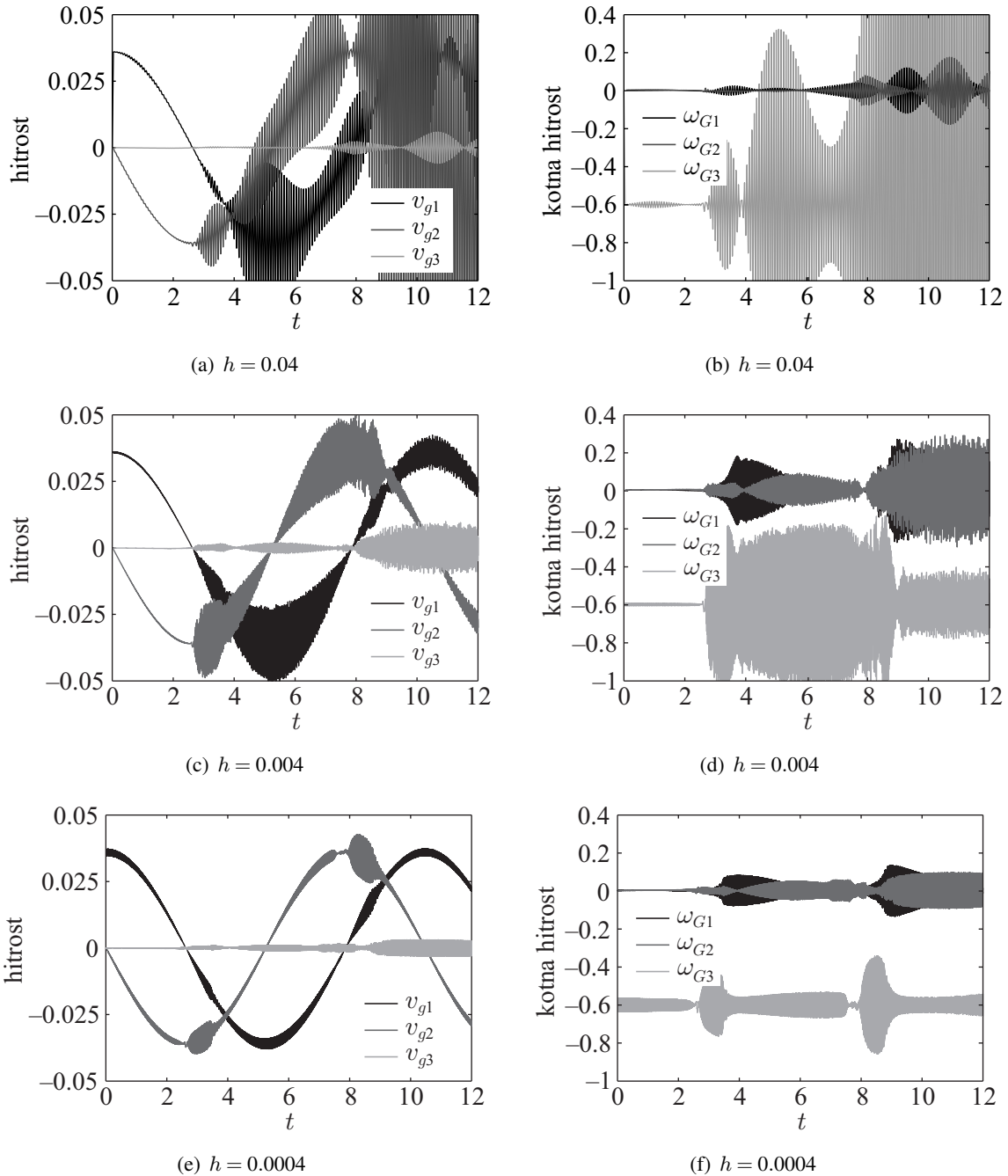
Figure 6.19: Four bar mechanism. Analysis with elements with interpolation of spatial derivatives of velocities – displacements at point  $C$ .

Razlika med pomiki vozlišča  $C$ , ki jih dobimo pri računu s tremi različnimi časovnimi koraki, je neopazna – na sliki 6.19 prikazani pomiki vozlišča  $C$ , dobljeni pri računu s korakoma  $h = 0.04$  in  $h = 0.004$ . Rešitve se tudi zelo dobro ujemajo z referenčnimi rezultati prikazanimi na sliki 6.16(b). Večje razlike v odzivu konstrukcije glede na izbran računski korak opazimo na sliki 6.20, na kateri prikazujemo notranje sile in momente na sredini prvega elementa, in na sliki 6.21, na kateri so prikazane hitrosti in kotne hitrosti na sredini prvega elementa. V odzivu so lepo vidne oscilacije notranjih sil in predvsem oscilacije hitrosti, ki so posledica modeliranja začetne nepopolnosti sistema z algebrskimi veznimi enačbami. Z zmanjševanjem časovnega koraka se povečuje natančnost računa, zato se amplitude oscilacij znatno zmanjšajo. Pomembno je, da oscilacije ne vplivajo na stabilnost računa, kar zopet priča o robustnosti elementov z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti.



Slika 6.20: Štiričlenski mehanizem. Analiza z elementi z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti – notranje sile in momenti na sredini prvega nosilca.

Figure 6.20: Four bar mechanism. Analysis with elements with interpolation of spatial derivatives of velocities – internal forces and moments at the midpoint of the first beam.



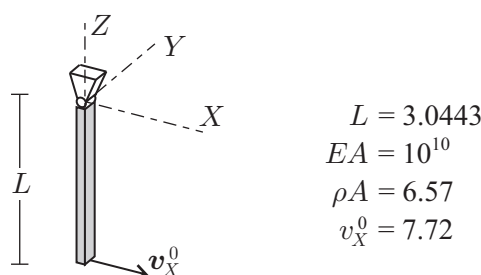
Slika 6.21: Štiričlenski mehanizem. Analiza z elementi z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti – hitrosti in kotne hitrosti na sredini prvega nosilca.

Figure 6.21: Four bar mechanism. Analysis with elements with interpolation of spatial derivatives of velocities – velocities and angular velocities at the midpoint of the first beam.



### 6.6.6 Enostavno nihalo

Številni avtorji za preizkus časovno integracijskih shem in formulacij linijskih končnih elementov obravnavajo enostavna nihala. Posebno občutljivi so primeri zelo togih nihala. Primer analize togega nihala z Newmarkovo časovno integracijsko shemo podrobno obravnava Bathe [41], za njim pa številni drugi avtorji. Za našo analizo izberemo togo nihalo, predstavljeno na sliki 6.22, ki so ga obravnavali Crisfield in Shi [61] ter Kuhl in Crisfield [57]. Ugotovitve avtorjev so, da je za časovno stabilno integracijo z Newmarkovo shemo potreben zelo majhen časovni korak. Pri analizi z večjimi časovnimi koraki pride do velikih oscilacij osnih deformacij nosilca, ki zaradi velike togosti nihala privedejo do porasta celotne energije nihala in napačnih rešitev. Primer zato izkoristimo za oceno delovanja implementacije posplošene- $\alpha$  metode za numerično dušenje, ki smo jo predstavili v točki 6.5 tega poglavja. Obravnavamo



Slika 6.22: Enostavno nihalo.

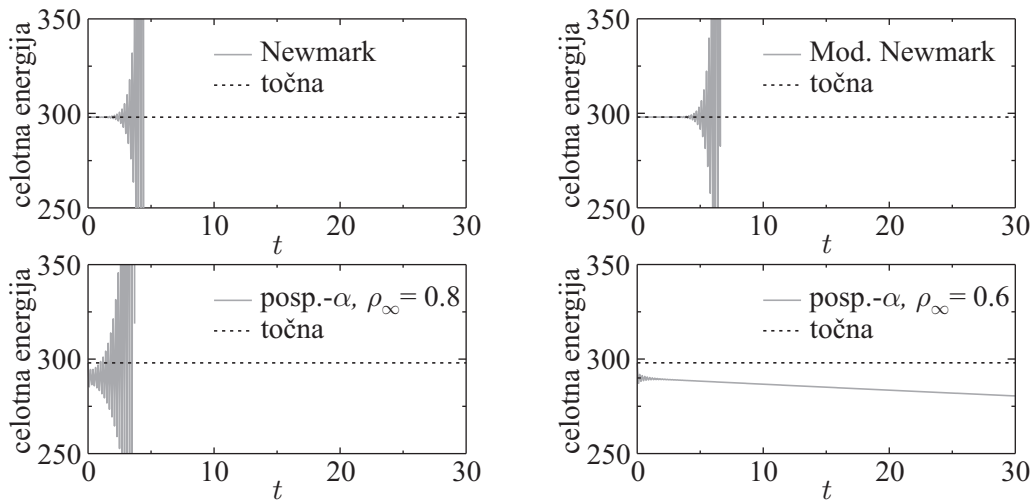
Figure 6.22: Simple Pendulum.

ravninsko gibanje nihala s porazdeljeno maso  $\rho A = 6.57$ , ki ga iz mirovanja poženemo v gibanje z začetno hitrostjo v tangentsni smeri  $v_X^0 = 7.72$ . Nihalo modeliramo s štirimi elementi s po dvema interpolacijskima točkama. Analizo gibanja računamo s tremi časovnimi koraki  $h = 0.1$ ,  $h = 0.05$  in  $h = 0.025$ , gibanje nihala pa opazujemo do časa  $t = 30$ . Račun izvedemo z Newmarkovo shemo, s posplošeno- $\alpha$  shemo z vrednostima parametra  $\rho_\infty = 0.8$  in  $\rho_\infty = 0.6$  in z modificirano Newmarkovo shemo. Ker je nihalo zelo togo, lahko numerične rešitve primerjamo s točnimi rešitvami za popolnoma togo nihalo. Točne rešitve za komponente krajevnega vektorja in vektorja hitrosti prostega konca nihala so enake

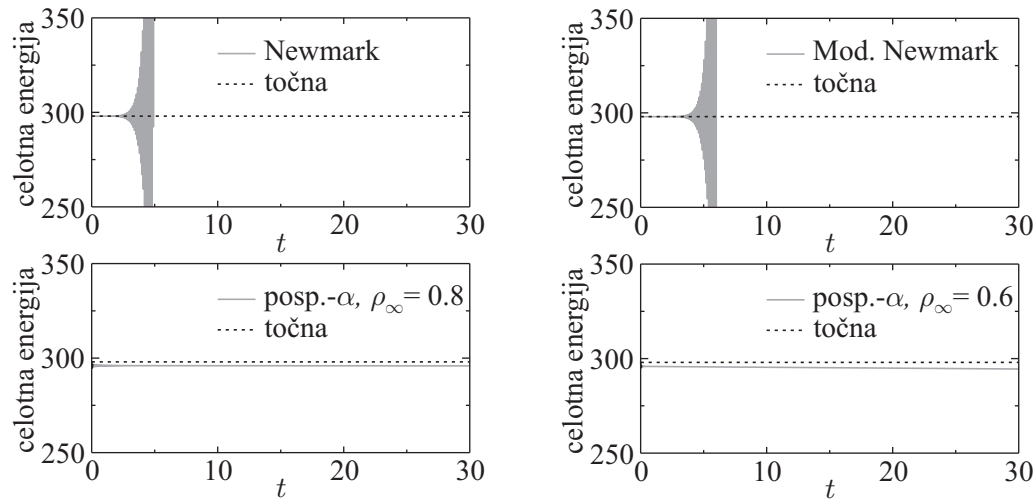
$$r_X(L, t) = L \sin \frac{v_X^0 t}{L}, \quad r_Z(L, t) = -L \cos \frac{v_X^0 t}{L}, \quad (6.102)$$

$$v_X(L, t) = v_X^0 \cos \frac{v_X^0 t}{L}, \quad v_Z(L, t) = v_X^0 \sin \frac{v_X^0 t}{L}. \quad (6.103)$$

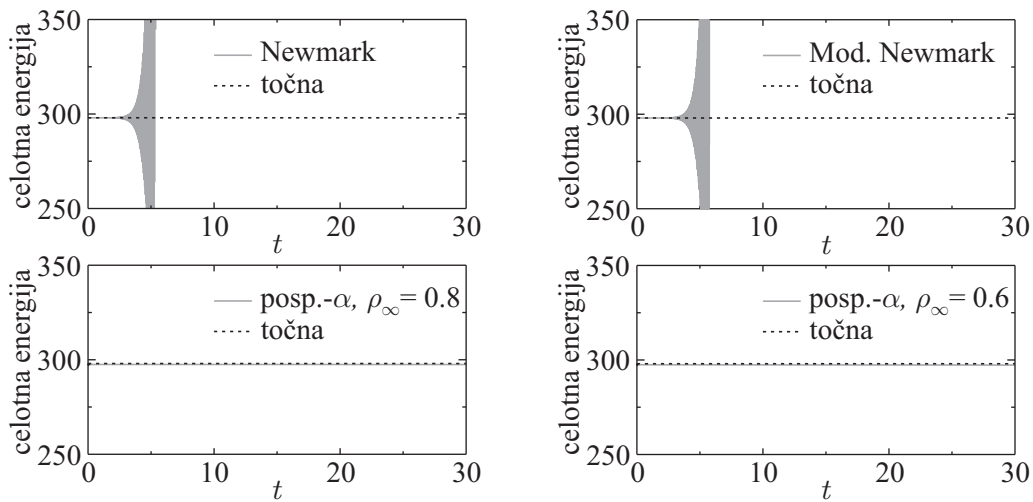
Na sliki 6.23 prikazujemo celotno energijo nihala za vse opravljene analize. Račun s končnimi elementi z interpoliranimi deformacijskimi vektorji je za vse tri izbrane časovne korake neuspešen, kar je v skladu s pričakovanji, saj formulacija uporablja Newmarkovo shemo. Po nekaj sekundah gibanja pride do velikega porasta celotne energije nihala, zato račun prekinemo. Za ta zahteven računski primer tudi račun s formulacijo končnih elementov z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti, ki uporablja modificirano Newmarkovo shemo, ni uspešen. Tudi reševanje z numeričnim dušenjem s posplošeno- $\alpha$  shemo ne zagotavlja brezpogojne stabilnosti računa. Pri analizi s korakom  $h = 0.1$  in parametrom  $\rho_\infty = 0.8$ , slika 6.23(a), kljub numeričnemu dušenju pride do porasta celotne energije nihala. Stabilnost računa pri izbranem časovnem koraku lahko dosežemo le s primerno izbranim parametrom numerične disipacije.



(a) Celotna energija nihala,  $h = 0.1$



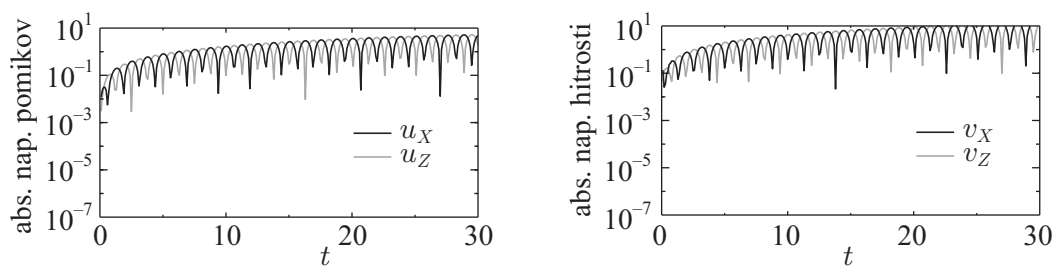
(b) Celotna energija nihala,  $h = 0.05$



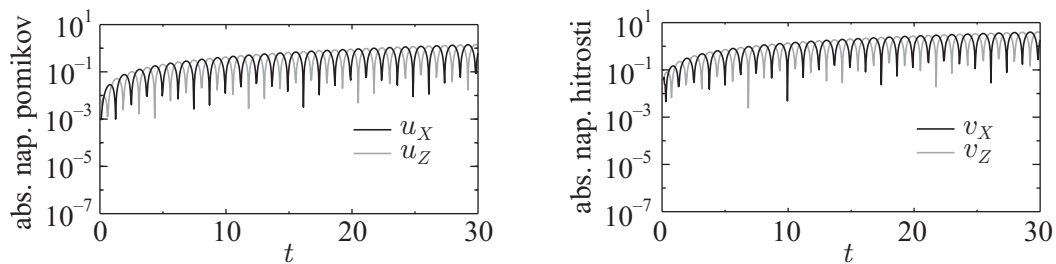
(c) Celotna energija nihala,  $h = 0.025$

Slika 6.23: Enostavno nihalo. Celotna energija nihala v odvisnosti od časa.

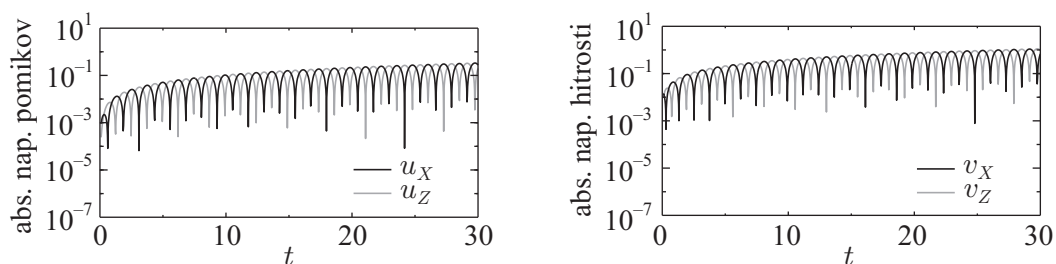
Figure 6.23: Simple pendulum. Total energy of the pendulum versus time.



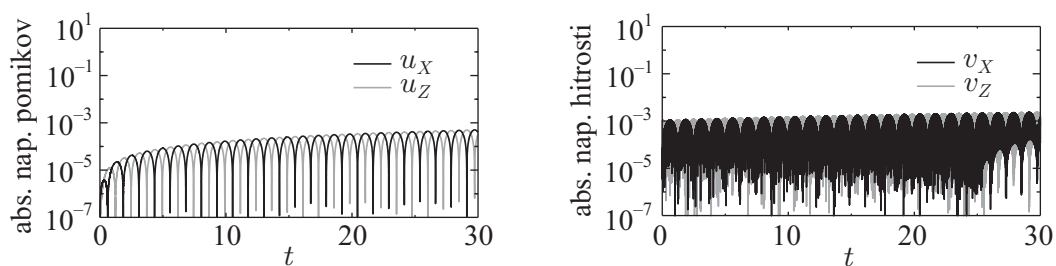
(a) Element z interpolacijo deformacij, posplošena- $\alpha$  shema,  $\rho_\infty = 0.6$ ,  $h = 0.1$



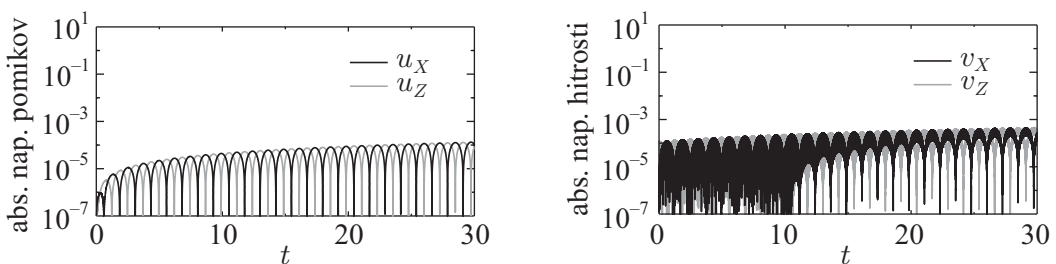
(b) Element z interpolacijo deformacij, posplošena- $\alpha$  shema,  $\rho_\infty = 0.6$ ,  $h = 0.05$



(c) Element z interpolacijo deformacij, posplošena- $\alpha$  shema,  $\rho_\infty = 0.6$ ,  $h = 0.025$



(d) Element z interpolacijo deformacij, Newmarkova shema,  $h = 0.001$



(e) Element z interpolacijo odvodov hitrosti, modificirana Newmarkova shema,  $h = 0.001$

Slika 6.24: Enostavno nihalo. Absolutne napake pomikov in hitrosti.

Figure 6.24: Simple pendulum. Absolute error of displacements and velocities.

O podobnem obnašanju posplošene- $\alpha$  sheme, ko jo uporabimo za reševanje problemov v nelinearni dinamiki, so poročali številni avtorji, na primer [56, 62]. Naši rezultati za togo nihalo pa se ujemajo z rezultati predstavljenimi v članku [57, slika 6]. Od tod sklepamo, da je implementacija posplošene- $\alpha$  sheme, ki jo predstavimo v tem delu, kvalitativno enakovredna formulacijam s posplošeno- $\alpha$  shemo, ki jih srečamo v literaturi.

Uporaba numerične disipacije ima lahko velik vpliv na natančnost dobljenih rezultatov. Na sliki 6.24 prikazujemo absolutne napake pomikov in hitrosti pri analizi s posplošeno- $\alpha$  shemo z  $\rho_\infty = 0.6$  v primerjavi s točnimi rešitvami (6.102)–(6.103). Z manjšanjem časovnih korakov se natančnost računa s posplošeno- $\alpha$  shemo povečuje. Primerjavi dodamo tudi rezultate analiz z Newmarkovo in modificirano Newmarkovo shemo, dobljene s časovnim korakom  $h = 0.001$ , s katerim je bila časovna integracija stabilna skozi celoten opazovani interval. Zanimiva je primerjava natančnosti rezultatov, dobljenih z analizama brez numeričnega dušenja. Opazimo, da je natančnost analize z modificirano Newmarkovo shemo za velikostni red večja od natančnosti analize z Newmarkovo shemo.

## 7 GIBANJE MASNEGA DELCA IN NOSILCA

Dinamičen odziv konstrukcije je lahko posledica časovno spremenljivih obtežb, ki delujejo na konstrukcijo, lahko je posledica predpisanih hitrosti in pospeškov posameznih delov ali pa kar celotne konstrukcije. Primere takih vplivov na konstrukcije smo obravnavali v prejšnjem poglavju. K časovno spremenljivim vplivom pa prištevamo tudi vpliv drugih teles na konstrukcije, pa naj bo to trk dveh konstrukcij, gibanje vozil na konstrukciji, leteči delci, ki udarijo ob konstrukcijo, in mnogi drugi.

Analiza in numerično modeliranje tako splošnih vplivov je mnogo preobsežna tema za namen tega dela. Zato se omejimo na zunanje vplive, ki jih lahko zajamemo s poenostavljenim modelom masnega delca. Z masnim delcem imamo v mislih togo telo s konstantno maso, ki je tako majhno, da lahko zanemarimo njegovo vrtilno količino. Zanima pa nas predvsem dogajanje pri trku masnega delca ob nosilec.

V literaturi lahko poiščemo različne pristope k modeliranju trkov, združimo pa jih lahko v dve večji skupini glede na predpostavke o trajanju trka:

- V prvo skupino prištevamo pristope, ki trk obravnavajo kot nezvezen dogodek. Trajanje trka je tako kratko, da lahko predpostavimo, da se konfiguracija teles v kontaktu med trkom ne spremeni, stiskanje in razmikanje teles ob trku pa prevzame fiktiven deformabilen delec na stiku obeh teles. Tak pristop je bil sprva uporabljen pri obravnavi trkov med togimi telesi [63], kasneje pa je bil prirejen tudi za trk prožnih teles [64].
- V drugo skupino prištevamo pristope, ki trk obravnavajo kot zvezen dogodek, ki ima končno dolgo trajanje. Telesi se v območju kontakta lahko deformirata, deformacije pa so prek konstitutivnega zakona povezane s kontaktnimi silami.

Za modeliranje trka masnega delca in nosilca izberemo pristop s končnim trajanjem trka, predvsem zato, ker omogoča izračun kontaktnih sil. Kontakt masnega delca in nosilca v sistem enačb vpeljemo prek kinematične vezi, kot to predlaga Bauchau [34].

### 7.1 Osnovne enačbe

Obravnavamo povezan problem gibanja masnega delca in nosilca. Gibanje masnega delca vodi izrek o gibalni količini (4.40), iz katerega izpeljemo vodilno gibalno enačbo masnega delca:

$$\mathbf{f}_{delca} = m^d \mathbf{a}_g^d - \sum_i \mathbf{F}_{g,i}^d = \mathbf{0}. \quad (7.1)$$

$m^d$  je masa delca,  $\mathbf{a}_g^d$  je pospešek delca,  $\mathbf{F}_g^d$  pa poljubna sila, ki deluje na delec. Vodilni sistem enačb povezanega sistema delec–nosilec dobimo tako, da gibalno enačbo delca (7.1) dodamo vodilnemu sistemu enačb konstrukcije  $\mathbf{f}_{konst}$

$$\mathbf{f}_{sist} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{konst} \\ \mathbf{f}_{delca} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (7.2)$$

Delec in nosilec sta lahko v kontaktu že na začetku gibanja, delec na primer drsi po nosilcu ali pa je trdno pritrjen na nosilec, do kontakta pa lahko pride med samim gibanjem - masni delec trči ob nosilec. Pogoje kontakta (stik, drsenje, trk) opišemo s kinematičnimi veznimi enačbami, ki jih formalno zapišemo kot

$$\Phi \left( \mathbf{r}^{nosilec}, \dot{\mathbf{r}}^{nosilec}, \mathbf{r}^d, \dot{\mathbf{r}}^d, t \right) = \mathbf{0} \quad (7.3)$$

Vezne enačbe vpeljemo v vodilni sistem enačb z uporabo metode Lagrangejevih množiteljev

$$\mathbf{f}_{sist} - \delta \Phi^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (7.4)$$

$$\Phi = \mathbf{0}. \quad (7.5)$$

Z  $\delta \Phi$  smo označili Jacobijevo matriko, ki pripada kinematičnim vezem,  $\boldsymbol{\lambda}$  pa so Lagrangejevi množitelji. Za primeren opis vezi prepoznamo v Lagrangejevih množiteljih ravno kontaktne sile, tem pa v večini primerov kontakta pripadajo konstitutivni zakoni, ki opisujejo lastnosti kontakta, na primer Coulumbov zakon trenja za drseč kontakt ali pa konstitutivni zakon trka.

## 7.2 Računski primeri

### 7.2.1 Interpolacija osnovnih neznank nosilca s konstantnimi funkcijami

Trku masnega delca ob konstrukcijo običajno sledi buren odziv konstrukcije, pri katerem zaradi mase delca pomembno vlogo igrajo tudi višje nihajne oblike. Za analizo takih dogodkov je zato nujna robustna diskretizacija konstrukcije po metodi končnih elementov in uporaba kratkih časovnih korakov pri integraciji dinamičnih enačb po času.

Pri formulaciji končnih elementov z interpolacijo deformacij (6.3.1) in tudi pri formulaciji z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti (6.3.2) smo za interpolacijske funkcije izbrali Lagrangeve polinome. Pri analizah konstrukcij v stiku z masnimi delci smo pri obeh formulacijah končnih elementov opazili velike oscilacije interpoliranih količin, predvsem v končnih elementih, na katere vpliva masni delec. Posledično je bila konvergenca Newtonovih iteracij pri reševanju enačb počasnejša, za uspešen račun (tudi z numeričnim dušenjem) pa smo morali uporabiti gostejše mreže končnih elementov z nizko stopnjo interpolacije. Podoben fenomen je znan iz statične analize konstrukcij, pri katerih pride do lokalizacije deformacij, o čemer poročajo avtorji v [65, 66]. Ena od rešitev problema je uporaba končnih elementov s predpostavljenim konstantnim potekom interpoliranih količin. Tak pristop se je izkazal kot zelo uspešen, saj omogoča računsko zelo učinkovito formulacijo. Linijski končni element s predpostavljenim konstantnim potekom deformacij za statično analizo konstrukcij je podrobno predstavljen v članku [66]. Podoben pristop izberemo tudi za reševanje povezanega problema gibanja masnega delca in nosilca in pripravimo končne elemente za dinamično analizo s predpostavljenim konstantnim potekom osnovnih neznank.

Pri formulaciji končnega elementa z interpolacijo deformacij interpolacijske nastavke deformacij (6.47)–(6.48) nadomestimo s konstantnim potekom deformacijskih vektorjev:

$$\boldsymbol{\gamma}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]} \quad (7.6)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}(x) = \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{G^{[n+1]}}^{[n+1]}. \quad (7.7)$$

Diskretiziranim vodilnim enačbam (6.49)–(6.50) pa zaradi konstantnosti deformacij zadostimo na sredini elementa

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{R}^{[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) \mathbf{N}_G^{C[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) - \mathbf{N}_g^{[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) = \mathbf{0} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{R}^{[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) \mathbf{M}_G^{C[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) - \mathbf{M}_g^{[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) = \mathbf{0}. \quad (7.9)$$

Enako storimo tudi pri elementu z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti. Interpolacijske nastavke za krajevne odvode hitrosti (6.59)–(6.60) nadomestimo z

$$\bar{\mathbf{v}}_g'^{[n+1]}(x) = \bar{\mathbf{v}}_g'^{[n+1]} \quad (7.10)$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_G'^{[n+1]}(x) = \bar{\boldsymbol{\omega}}_G'^{[n+1]}, \quad (7.11)$$

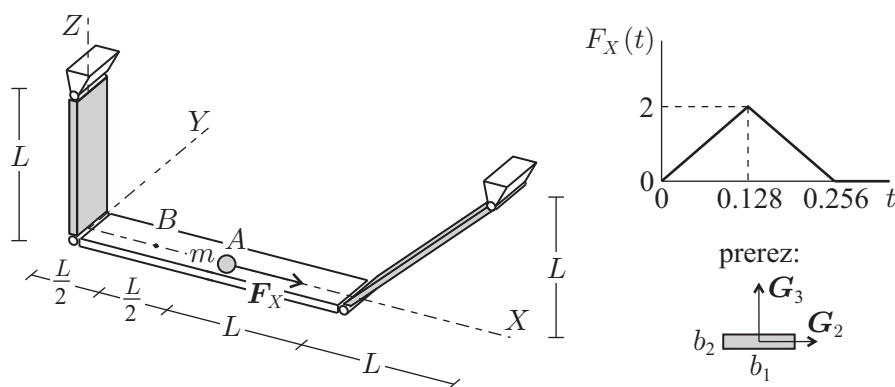
vodilnim enačbam (6.61)–(6.61) pa tudi v tem primeru zadostimo na sredini elementa

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{R}^{[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) \mathbf{N}_G^{C[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) - \mathbf{N}_g^{[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) = \mathbf{0} \quad (7.12)$$

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{R}^{[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) \mathbf{M}_G^{C[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) - \mathbf{M}_g^{[n+1]} \left( \frac{L}{2} \right) = \mathbf{0}. \quad (7.13)$$

## 7.2.2 Nihajoča gugalnica

Obravnavamo gugalnico, prikazano na sliki 7.1. Gugalnica je sestavljena iz togih veznih palic in nosilca, na katerem je pripet masni delec. Računski primer je prvi predstavil Bauchau s sodelavci [11,67], kasneje pa so ga obravnavali številni avtorji, na primer [27, 68]. Posebnost primera so toge vezi in masni delec, ki ima izredno veliko maso v primerjavi z maso nosilca.



Slika 7.1: Nihajoča gugalnica.  
Figure 7.1: The swing pendulum.

Na nosilec, ki je členkasto vpet med togi palici, je v točki A na sredini nosilca togo pripet delec z maso  $m = 0.5$ . Materialne in geometrijske lastnosti nosilca so enake

$$E = 73 \cdot 10^9, \quad G = 28.08 \cdot 10^9, \quad \rho = 2700,$$

$$b_1 = 0.005, \quad b_2 = 0.001, \quad L = 0.72.$$

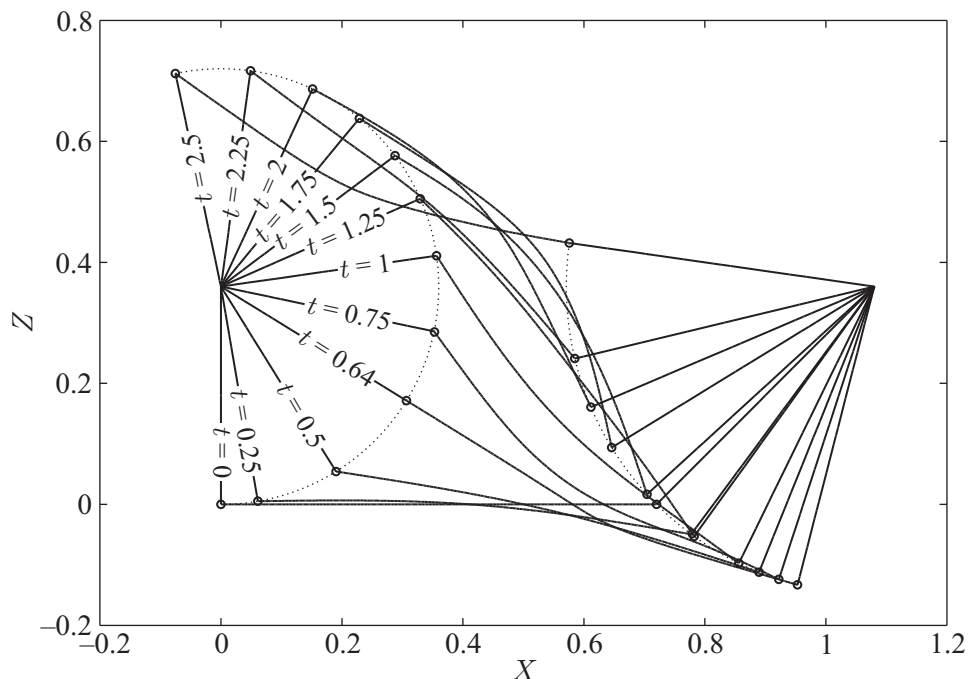
Prečni prerez togih palic je enak prečnemu prerezu nosilca. Maso palic zanemarimo, togost pa modeliramo tako, da elastičnemu modulu palic pripišemo stokrat večjo vrednost od elastičnega modula nosilca.

Nihalo v gibanje požene točkovna sila  $F_X$  s prijemališčem v točki  $A$ , ki se s časom spreminja v obliki trikotnega pulza z maksimalno vrednostjo  $F_X = 2$  pri času  $t = 0.128$ . Pri času  $t = 0.256$  je vrednost sile enaka nič, sistem pa od tega trenutka dalje prosto niha. Nihalo se v začetku gibanja vrti v nasprotni smeri urinega kazalca. Približno pri času  $t = 0.64$  sta leva palica in nosilec povsem poravnana, desna palica pa se začne gibati v smeri urinega kazalca. To povzroči nenadno spremembo v smeri hitrosti gibanja masnega delca, kar zaradi velike mase delca na gibanje sistema učinkuje podobno kot trk masnega delca. Primer je tako dober test za robustnost krajevne in časovne diskretizacije vodilnih enačb.

Ker je masni delec pritrjen na konstrukcijo, njegov vpliv upoštevamo kot negativno obtežbo v točki  $A$ :  $F_m = m\mathbf{a}_g^A$ . Stik delca in nosilca pa bi lahko upoštevali tudi z vezno enačbo, ki zahteva, da sta pomika masnega delca in točke  $A$  enaka

$$\Phi = \mathbf{r}_g^A(t) - \mathbf{r}_g^m(t) = \mathbf{0}.$$

Za prostorsko diskretizacijo nihala izberemo končne elemente s konstantnimi deformacijami in konstantnimi krajevnimi odvodi hitrosti. Vsako togo palico modeliramo s štirimi končnimi elementi, podajni nosilec pa z 52 elementi. Gibanje nosilca opazujemo do časa  $t = 2.5$ .



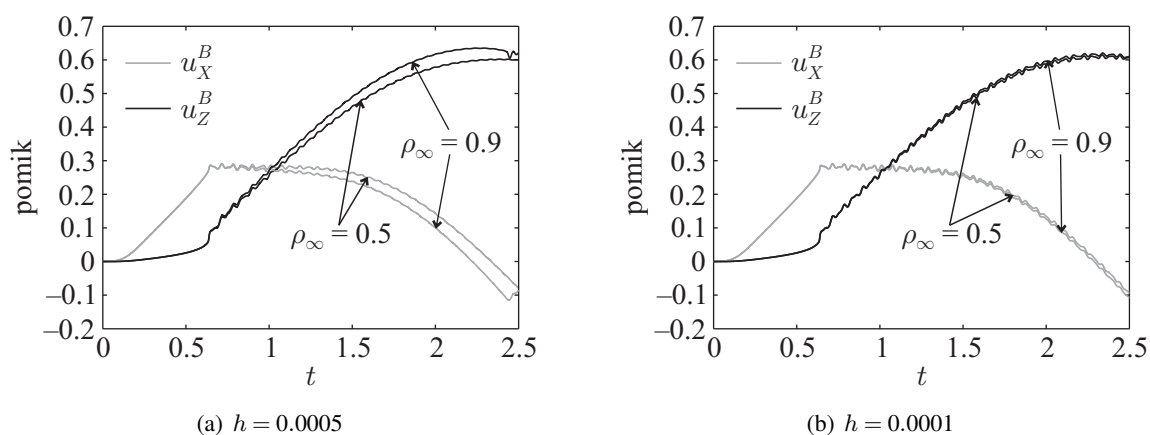
Slika 7.2: Nihajoča gugalnica. Zaporedje deformiranih leg.

Figure 7.2: The swing pendulum. Sequence of deformed shapes of the swing.

Začetne analize opravimo s časovnim korakom, ki ga priporoča literatura  $h = 0.0005$ . Analiza z elementi, ki uporabljajo Newmarkovo shemo se predčasno zaključi zaradi pojava divergence pri času  $t = 0.76$ , analiza z modificirano Newmarkovo shemo pa pri času  $t = 0.86$ . V obeh primerih je analiza neuspešna zaradi velikega porasta celotne energije sistema. Če uporabimo manjši časovni korak  $h = 0.0001$ , opa-

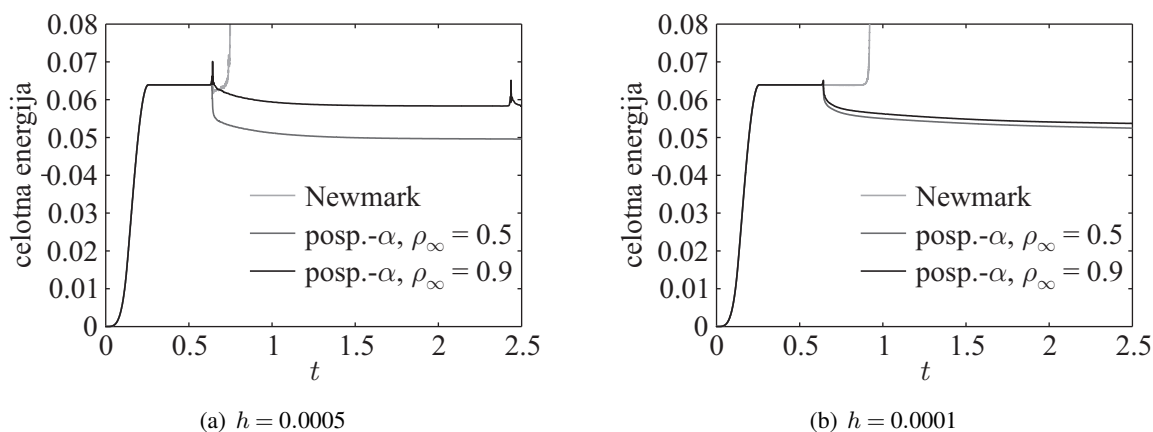


zimo podobno obnašanje. Analizo z Newmarkovo shemo je uspešna do časa  $t = 0.93$ , analiza z modificirano Newmarkovo shemo pa do časa  $t = 1.56$ . Stabilnost računa z Newmarkovo shemo se tudi pri računih s krajšimi časovnimi koraki ne izboljša, zato račun ponovimo še s posplošeno- $\alpha$  shemo z dvema različnima vrednostima parametra numeričnega dušenja  $\rho_\infty = 0.9$  in  $\rho_\infty = 0.5$ . Uporaba numeričnega dušenja stabilizira račun, ki ga uspešno zaključimo pri času  $t = 2.5$ . Pri analizi z elementi s konstantnimi krajevnimi odvodi hitrosti, ki uporabljajo modificirano Newmarkovo shemo, pa opazimo, da se z manjšanjem računskega koraka stabilnost povečuje. Analizo pa uspešno zaključimo s časovnim korakom  $h = 5 \cdot 10^{-5}$ . Rezultate analiz predstavljamo na slikah 7.2–7.6.



Slika 7.3: Nihajoča gugalnica. Pomiki v točki  $B$ , izračunani z elementom s konstantnimi deformacijami in posplošeno- $\alpha$  shemo.

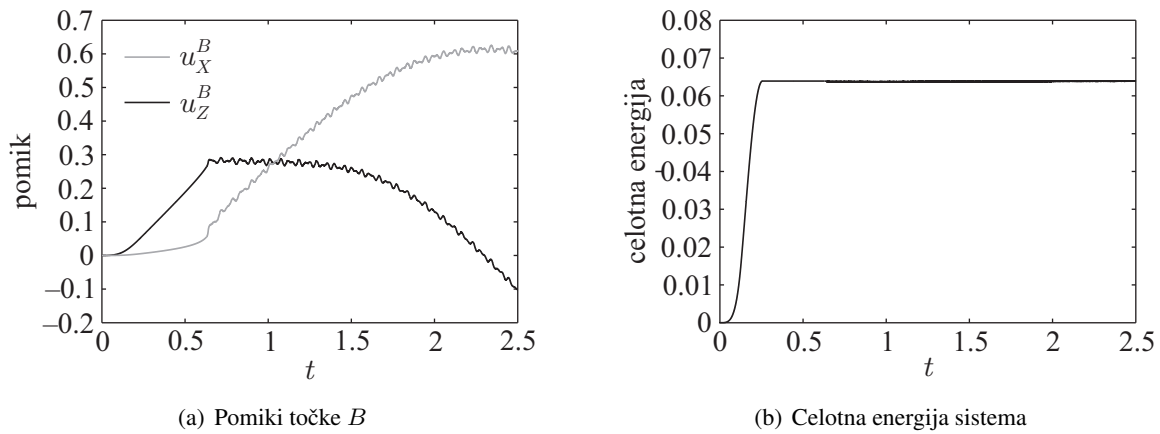
Figure 7.3: The swing pendulum. Displacements at point  $B$ , obtained by constant-strain elements and Generalized- $\alpha$  scheme.



Slika 7.4: Nihajoča gugalnica. Celotna energija masnega delca in gugalnice, diskretizirane z elementi s konstantnimi deformacijami.

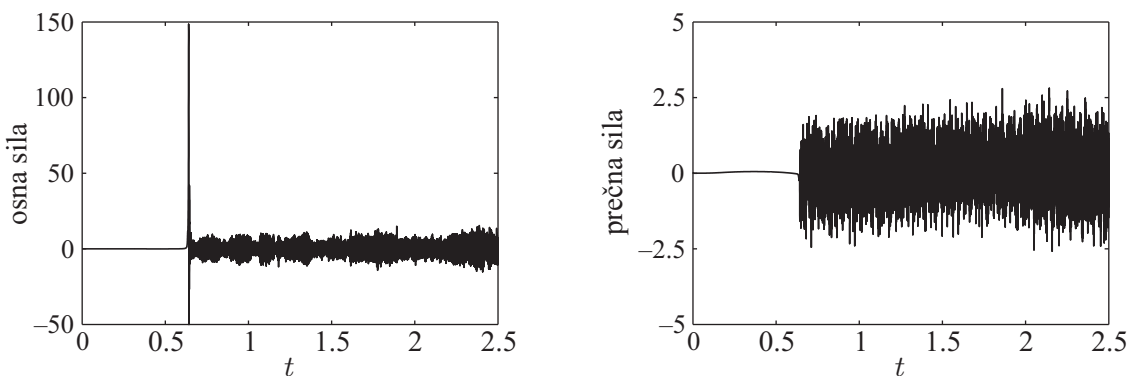
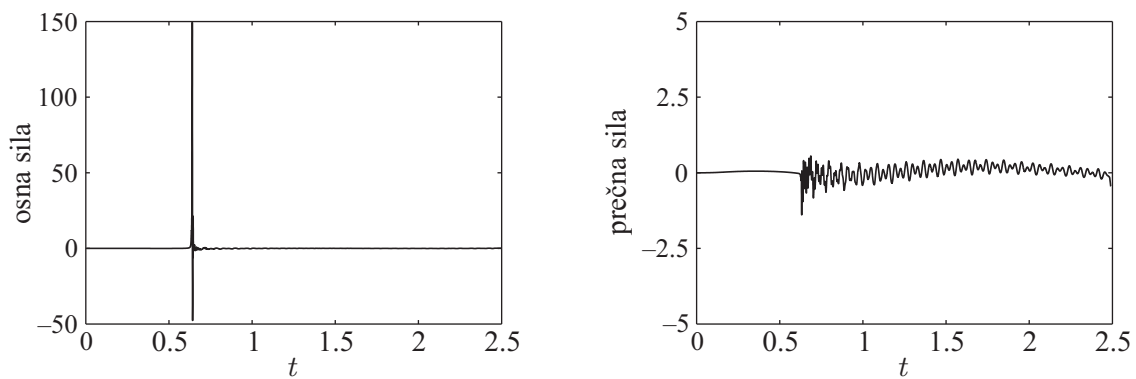
Figure 7.4: The swing pendulum. Total energy of the mass and swing, discretized with constant strain elements.

Slika 7.2 prikazuje zaporedje deformiranih leg gugalnice na intervalu  $t \in [0, 2.5]$ , ki jih dobimo pri analizi z modificirano Newmarkovo shemo s korakom  $h = 5 \cdot 10^{-5}$ . Na sliki 7.3 primerjamo pomike v točki  $B$ ,



Slika 7.5: Nihajoča gugalnica. Pomiki točke  $B$  in celotna energija sistema pri analizi z elementi s konstantnimi krajevnimi odvodi hitrosti in korakom  $h = 5 \cdot 10^{-5}$ .

Figure 7.5: The swing pendulum. Displacements of point  $B$  and total energy of the system obtained with elements with constant spatial derivatives of velocities and time step  $h = 10^{-5}$ .



Slika 7.6: Nihajoča gugalnica. Notranje sile v nosilcu, levo od točke  $A$ .

Figure 7.6: The swing pendulum. Internal forces on the left-hand side of point  $A$ .

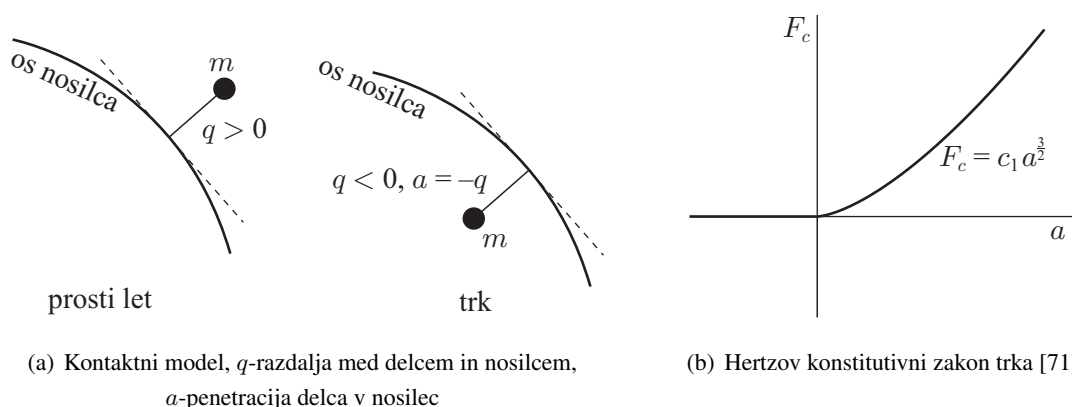
dobljene z analizami z elementi s konstantnimi deformacijami in posplošeno- $\alpha$  shemo, na sliki 7.4 pa pripadajočo celotno energijo nihala. Pri času  $t = 0.64$ , ko se spremeni smer gibanja desne palice, kar povzroči visokofrekvenčne oscilacije v odzivu nosilca, opazimo velik padec celotne energije sistema. Disipacija energije se nato umiri in ostane majhna do konca analize. Pri pomikih opazimo drugačen vpliv numeričnega dušenja. V začetnem delu gibanja, približno do časa  $t = 1$ , je ujemanje pomikov, dobljenih z različnimi vrednostmi parametra  $\rho_\infty$ , kar dobro, prav tako se pomiki dobro ujemajo z rezultati predstavljenimi v [11, 27]. V nadaljevanju gibanja pa razlike postanejo večje.

Pomike točke  $B$  in celotno energijo sistema pri analizi z elementi s konstantnim potekom krajevnih odvodov hitrosti prikazujemo na sliki 7.5. Pomiki na sliki 7.5(a) se do grafične natančnosti ujemajo s pomiki, ki jih v doktorski disertaciji pokaže Gams [69]. Celotna energija je med prostim nihanjem gugalnice konstantna, slika 7.5(b), kar je posledica stabilnega računa te metode. Na sliki 7.6 so prikazane osne in prečne sile v prvi diskretizacijski točki v elementu levo od masnega delca. Opazimo velik vpliv numeričnega dušenja na velikost sil, kljub računu s krajšim časovnim korakom in nizko stopnjo dušenja. Sile izračunane pri analizi z elementi s konstantnim potekom krajevnih odvodov hitrosti se zelo dobro ujemajo z rezultati, ki jih za nedušeno nihanje predstavljajo avtorji v [69, 70].

Elementi s predpostavljenim konstantnim potekom osnovnih neznank so se v obravnavanem primeru izkazali kot zelo robustni. Z dovolj gosto mrežo končnih elementov smo lahko zajeli tudi vpliv višjih nihajnih oblik, ki so zaradi velike mase delca pomembno vplivale na odziv konstrukcije. Visokofrekvenčni odziv je sicer kriv za neuspešne analize z Newmarkovo shemo, medtem ko se je analiza z modificirano Newmarkovo shemo izkazala za zelo stabilno, če smo izbrali dovolj majhen časovni korak.

### 7.2.3 Trk masnega delca ob nosilec

Zanima nas dogajanje pri trku masnega delca ob nosilec. Trk nastopi v trenutku, ko postane razdalja med delcem in nosilcem,  $q$ , enaka nič. Izberemo elastičen model trka, predstavljen na sliki 7.7, ki privzame lokalno deformiranje teles v točki kontakta:  $q \leq 0$ .



Slika 7.7: Matematični model trka masnega delca ob nosilec.

Figure 7.7: Mathematical model of an impact of a mass particle against beam.

Velikost deformacije opišemo s spremenljivko  $a$ , ki meri penetracijo teles v kontaktu. Stanje kontakta

potem opišemo z algebrasko vezno enačbo

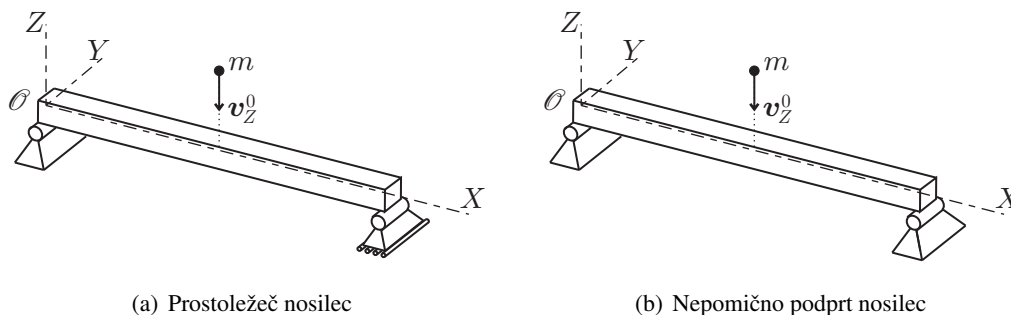
$$\Phi = q + a = 0.$$

Velikost penetracije je odvisna od materialnih in geometrijskih lastnosti teles, opisuje pa jo konstitutivni zakon trka. Konstitutivni zakon podaja zvezo med deformacijo teles v kontaktu,  $a$ , in kontaktno silo,  $F_c$ . V primeru trka masnega delca in nosilca, ki ga obravnavamo v nadaljevanju, izberemo konstitutivni zakon, ki ga je predlagal Hertz [71]

$$F_c = c_1 a^{\frac{3}{2}}, \quad (7.14)$$

kjer je  $c_1$  konstanta, odvisna od materialnih lastnosti teles v trku in geometrije kontaktne površine.

Obravnavamo primer nosilca, ki ga je predstavil Bauchau [34]. Nosilec ima dolžino  $L = 2$  in kvadratni prečni prezek s površino  $A = 10^{-4}$ . Elastični modul nosilca je  $E = 73 \cdot 10^9$ , Poissonov količnik  $\nu = 0.3$ , gostota pa je enaka  $\rho = 2700$ . Nosilec na sredini razpona zadene kroglja z maso  $m = 0.27$  in začetno hitrostjo  $v_Z^0 = -4$ . Opazujemo razlike v odzivu sistema glede na robne pogoje nosilca. Obravnavamo prostoležeči in nepomično podprti nosilec (slika 7.8). Krogljo modeliramo kot masni delec, v analizi pa zanemarimo vpliv sile teže in sile trenja med delcem in nosilcem in upoštevamo le kontaktno silo v smeri normale na nosilec. Vrednost konstante  $c_1$  v konstitutivnem zakonu trka (7.14) je  $c_1 = 9.07 \cdot 10^9$ .



(a) Prostoležeč nosilec

(b) Nepomično podprt nosilec

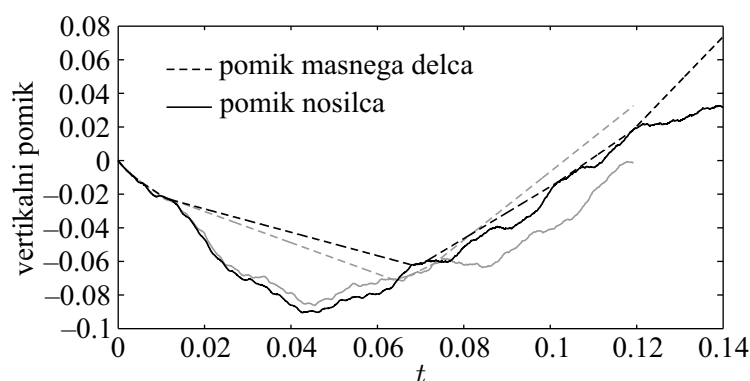
Slika 7.8: Trk masnega delca ob nosilec.

Figure 7.8: Impact of a mass particle against beam.

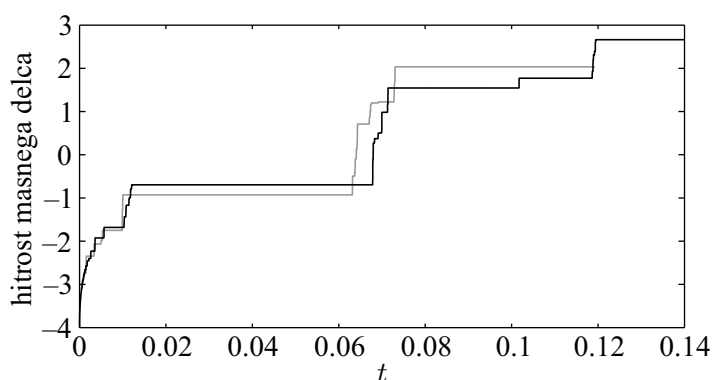
Za modeliranje nosilca izberemo gosto mrežo 80 elementov s konstantnim potekom krajevnih odvodov hitrosti. Analizo opravimo z modificirano Newmarkovo shemo s kratkim časovnim korakom  $h = 10^{-6}$ . Rezultate analiz za oba načina podpiranja nosilca prikazujemo na slikah 7.9 in 7.10.

Odziv masnega delca in nosilca je podoben v obeh primerih podpiranja. Bistveno razliko opazimo v dolžini časovnega intervala, ki ga merimo od začetnega kontakta do trenutka, v katerem se delec popolnoma loči od nosilca in v nadaljevanju gibanja ne pride več v stik z nosilcem. Dolžino tega intervala proglasimo za trajanje trka. Pri trku delca in prostoležečega nosilca je ta dolžina približno enaka  $t = 0.12$ , pri trku delca ob nepomično podprt nosilec pa je ta dolžina približno štirikrat krajša  $t = 0.03$ . Na začetku trka sta delec in nosilec v tesnem stiku, hitrost delca se zmanjšuje, v odzivu nosilca pa opazimo naraščajoče oscilacije. Oscilacije povzročijo, da se delec in nosilec ločita, v nadaljevanju pa večkrat trčita.

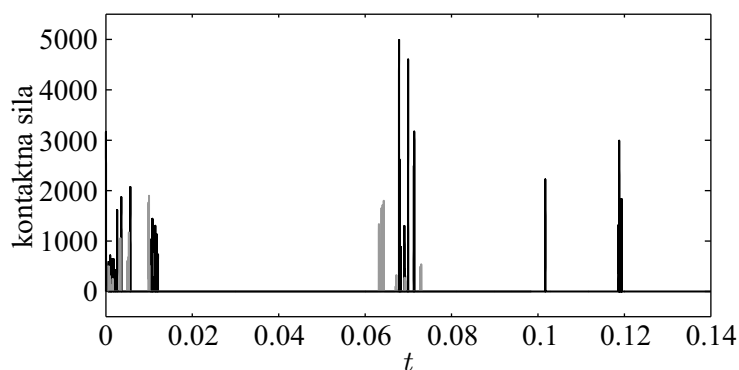
Delec se pri trku s prostoležečim nosilcem giblje navpično navzdol približno do časa  $t = 0.075$ , kar je približno 62% trajanja celotnega trka, potem pa spremeni smer gibanja. To fazo trka imenujemo



(a) Vertikalni pomik masnega delca in točke na sredini nosilca: element s konstantnimi krajevnimi odvodi hitrosti (—), Bauchau [34] (---)



(b) Hitrost masnega delca: element s konstantnimi krajevnimi odvodi hitrosti (—), Bauchau [34] (---)



(c) Kontaktna sila med masnim delcem in nosilcem: element s konstantnimi krajevnimi odvodi hitrosti (—), Bauchau [34] (---)

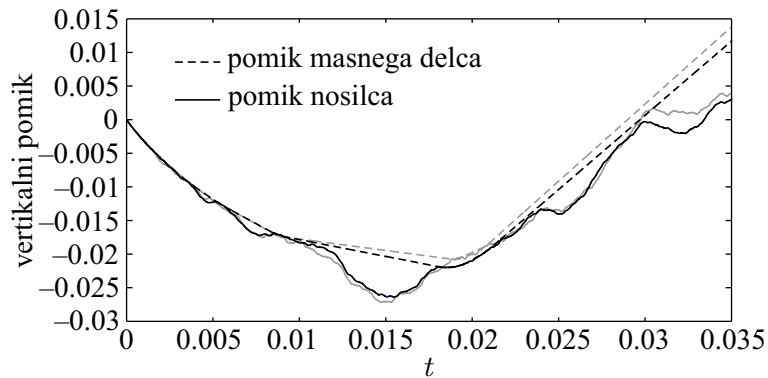
Slika 7.9: Rezultati analize trka masnega delca ob prostoležeči nosilec.

Figure 7.9: Results of the analysis of the impact of a mass particle against simply supported beam.

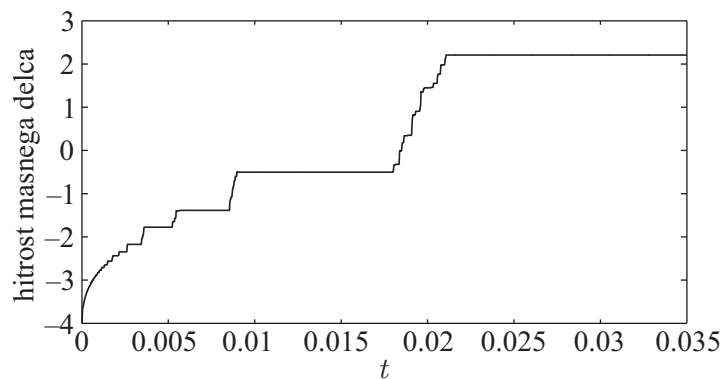
kompresijska faza, preostali del trka, ko se delec giblje navzgor, pa restitucijska faza. Tudi pri trku delca ob nepomično podprti nosilec znaša trajanje kompresijske faze, ki se konča približno pri času  $t = 0.0185$ , 62% dolžine celotnega trka. V obeh obravnavanih primerih ob prehodu kompresijske v restitucijsko fazo trka nastopijo največje kontaktne sile, ki so podobnih velikosti. Pri trku delca in prostoležečega nosilca je največja kontaktna sila približno enaka  $F_c = 5000$ , pri trku delca in nepomično podprtega nosilca pa

$$F_c = 4500.$$

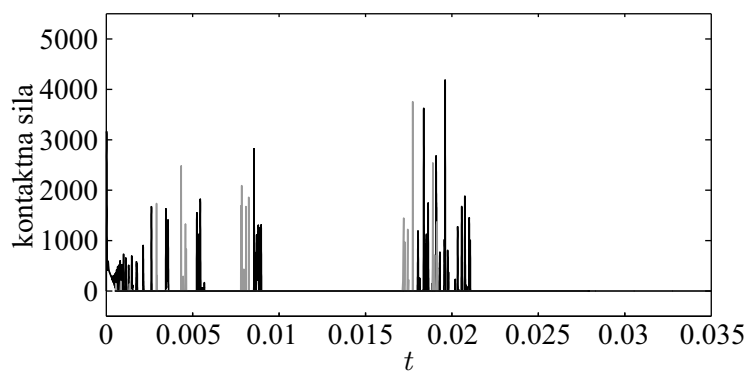
Ob koncu trka je zanimiva primerjava hitrosti delca, ki sta podobni v obeh primerih podpiranja nosilca. Ob koncu trka s prostoležečim nosilcem ima delec hitrost približno  $v_Z = 2.6$ , ob koncu trka z nepomično podprtim nosilcem pa  $v_Z = 2.2$ .



(a) Vertikalni pomik masnega delca in točke na sredini nosilca: element s konstantnimi krajevnimi odvodi hitrosti (—), Bauchau [34] (---)



(b) Hitrost masnega delca



(c) Kontaktna sila med masnim delcem in nosilcem: element s konstantnimi krajevnimi odvodi hitrosti (—), Bauchau [34] (---)

Slika 7.10: Rezultati analize trka masnega delca ob nepomično podprti nosilec.

Figure 7.10: Results of the analysis of the impact of a mass particle against fully supported beam.

Na slikah 7.9 in 7.10 so prikazane tudi rešitve, ki jih je predstavil Bauchau [34] za simulacijo polovične

dolžine nosilca z upoštevanjem simetrije. Model nosilca je bil sestavljen iz 8 elementov s kubično interpolacijo pomikov in rotacij. Simulacija je bila izvršena z energijsko konservativno shemo, podatek o uporabljenem časovnem koraku pa v članku ni podan. Rezultati analiz za prostoležeči nosilec se bistveno razlikujejo v izračunanih kontaktnih silah, posledično pa tudi v odzivu mase in nosilca v restitucijski fazi trka. Boljše je ujemanje rezultatov obeh simulacij za nepomično podprt nosilec.

## 8 ZAKLJUČEK

V doktorski nalogi smo obravnavali numerične metode za analizo konstrukcij, ki so podvržene dinamičnim vplivom. Posebej smo obravnavali metode časovne integracije in reševanje dinamičnih enačb nosilcev. Obe temi v idejnem smislu povezuje razprava o izbiri osnovnih neznank problema, bodisi pri reševanju enačb v odvisnosti od časa bodisi pri reševanju enačb v odvisnosti od parametra kraja. V praktičnem smislu obe temi združimo in pripravimo nabor končnih elementov za dinamično analizo prostorskih linijskih konstrukcij, ki za diskretizacijo enačb po času uporabljajo predstavljene časovno integracijske sheme.

V sklopu analize časovno integracijskih shem smo predstavili znano in splošno uveljavljeno Newmarkovo shemo, prilagojeno za nelinearen prostor rotacij. Poleg tega smo izpeljali povsem novo diskretizacijo kinematičnih enačb po času, ki smo jo poimenovali modificirana Newmarkova shema. Glavne značilnosti nove implicitne sheme so:

- Osnovne neznanke nove sheme so odvodi pomikov in rotacij po času – hitrosti in kotne hitrosti.
- Rezultat take izbire osnovnih neznank je povečana numerična stabilnost časovne integracije diskretiziranega sistema enačb.
- Poenostavi se linearizacija sheme in dodajanje popravkov, posledično pa tudi računski učinkovitost algoritma.
- Splošnost sheme omogoča njeno neposredno vključitev v že obstoječa računski okolja.

V sklopu reševanja dinamičnih enačb prostorskih nosilcev smo predstavili novi formulaciji končnih elementov. Glavne značilnosti formulacij so:

- Formulaciji sta skladni z geometrijsko točno teorijo nosilcev, saj smo pri izpeljavi enačb upoštevali točne zveze med pomiki, zasuki in deformacijami.
- Izpeljani formulaciji omogočata upoštevanje zahtevne (ukrivljene, zvite) začetne geometrije.
- V obeh formulacijah lahko uporabimo poljuben nelinearen materialni model, za katerega poznamo tangentno materialno matriko. V računskih primerih smo obravnavali zgolj primere z linearno elastičnim materialnim modelom.
- Vodilna sistema enačb za obe formulaciji temeljita na obliki, ki sta jo za statično analizo prostorskih linijskih konstrukcij uveljavila Zupan in Saje [9]. Vodilni sistem enačb sestavljajo enačbe konsistence v krepki obliki ter kinematični in ravnotežni robni pogoji. Z upoštevanjem konsistentnih pogojev dosežemo ujemanje ravnotežnih in konstitutivskih notranjih sil in momentov, kar je redkost v formulacijah končnih elementov.
- Osnovne interpolirane neznanke v obeh formulacijah so deformacijske količine. Zaradi aditivnosti deformacijskih količin enake interpolacijske nastavke uporabimo tudi za njihove variacije. V prvi



formulaciji interpoliramo krajevne odvode pomikov in zasukov – deformacije – v drugi formulaciji pa krajevne odvode hitrosti in kotne hitrosti, za katere pokažemo, da so hkrati tudi mere za hitrost deformacij.

- Zvezne enačbe konsistence diskretiziramo s kolokacijsko metodo, tako da ujemanje ravnotežnih in konstitucijskih sil in momentov zagotovimo v vnaprej določenih diskretnih točkah na težiščni osi nosilca. Pri numeričnem reševanju poenotimo diskretizacijske in interpolacijske točke, s čimer pridobimo na računski učinkovitosti in natančnosti.
- Pri elementu z interpolacijo deformacij kinematične enačbe po času diskretiziramo z Newmarkovo shemo. S tako izbiro v formulacijo končnega elementa vpeljemo lastnosti sheme, ki je pri nelinearnih problemih zgolj pogojno stabilna. Stabilnost izboljšamo tako, da v formulacijo končnega elementa vpeljemo numerično disipacijo s posplošeno- $\alpha$  metodo.
- V formulaciji končnega elementa z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti za diskretizacijo kinematičnih zvez po času uporabimo modificirano Newmarkovo shemo. Izboljšana stabilnost sheme omogoča račun zahtevnejših primerov brez uporabe numeričnega dušenja. Element zelo dobro deluje pri analizi primerov, v katerih rešitve iščemo na daljšem časovnem intervalu, in v primerih, kjer so za zadostno natančnost potrebni kratki časovni koraki.
- Z numeričnimi primeri pokažemo, da obe formulaciji končnih elementov zelo dobro opišeta obnašanje konstrukcij pri neomejeno velikih pomikih, zasukih in deformacijah.

V zadnjem delu doktorske naloge smo na kratko obravnavali povezan problem gibanja masnega delca in nosilca. Gibalne enačbe delca smo dodali sistemu enačb konstrukcije, kontaktne pogoje pa smo vpeljali prek kinematičnih vezi z metodo Lagrangejevih množiteljev. Pri aplikaciji numeričnega postopka smo prišli do naslednjih ugotovitev:

- Pri analizi primerov smo opazili slabši odziv elementov, pri katerih za interpolacijo količin uporabljamo Lagrangejeve polinome. Zato smo za povezano dinamično analizo prostorskih nosilcev ob upoštevanju različnih vplivov zunanjih delcev z maso, pripravili nabor končnih elementov s predpostavljenim konstantnim potekom deformacijskih količin. Za posebej robustne so se izkazali elementi s predpostavljenim konstantnim potekom krajevnih odvodov hitrosti in kotnih hitrosti.
- Podrobneje smo obravnavali trk masnega delca ob prostoležeč in nepomično podprt nosilec. Način podpiranja nosilca je bistveno vplival le na trajanje trka. Velikost kontaktnih sil in hitrost delca med trkom pa sta bila predvsem odvisna od uporabljenega kontaktnega modela, mase in začetne hitrosti delca.

## POVZETEK

V disertaciji se ukvarjamo z dinamično analizo prostorskih linijskih konstrukcij. Glavni namen dela je priprava novih matematičnih orodij za natančno in numerično stabilno reševanje enačb, s katerimi opišemo odziv konstrukcij, ki s podvržene dinamičnim vplivom.

Matematični model linijskega nosilca postavimo skladno z geometrijsko točno Reissner-Simovo [1, 2] teorijo nosilcev. Vodilo izpeljav je pristop, ki sta ga za statično analizo prostorskih nosilcev uveljavila Zupan in Saje [9]. Glavne značilnosti pristopa so: (i) omogoča ujemanje konstitucijskih in ravnotežnih sil in momentov v krepki obliki, (ii) zadošča točnim kinematičnim zvezam med pomiki, rotacijami in deformacijami, (iii) osnovne neznanke so deformacijske količine in (iv) zvezne enačbe so diskretizirane s kolokacijsko metodo. Pri formulaciji končnih elementov za dinamiko želimo ohraniti enako strukturo enačb in izbiro osnovnih neznank, s čimer se pri izbiri časovno integracijskih shem omejimo na algoritme, ki diskretizirajo kinematične zveze med pomiki, hitrostmi in pospeški ter rotacijami, kotnimi hitrostmi in kotnimi pospeški.

Problemi v dinamiki konstrukcij in mehanizmov so običajno togi, zato za časovno integracijo dinamičnih enačb izberemo implicitne sheme. Najprej predstavimo Newmarkovo shemo [28] in njeno razširitev na nelinearen prostor rotacij [4], v kateri kot osnovne neznanke nastopajo pomiki in zasuki. Pri reševanju problemov v nelinearni dinamiki je Newmarkova shema zgolj pogojno stabilna, zato predlagamo novo – modificirano Newmarkovo shemo. Osnovne neznanke nove sheme so odvodi pomikov in rotacij po času – hitrosti in kotne hitrosti. Tak izbor osnovnih neznank vpliva na povečano stabilnost časovne integracije pri analizah, v katerih rešitve iščemo na daljšem časovnem intervalu, in še posebej pri analizah, ki jih računamo s kratkim časovnim korakom. Osnovne neznanke nove sheme so aditivne količine, kar močno poenostavi iteracijsko reševanje enačb in računsko učinkovitost algoritma.

Enačbe dinamičnega ravnotežja nosilca izpeljemo iz izrekov o gibalni in vrtilni količini. Za opis materialnih lastnosti nosilca privzamemo povsem splošen materialni model, predpostavimo le, da poznamo tangentno materialno matriko poljubnega prereza nosilca. Pri numeričnem reševanju enačb nosilca konstitucijska sila in moment ne zadoščata nujno ravnotežnim enačbam. Sledimo konceptu, ki sta ga uveljavila Vratinar in Saje [52], in z enačbami konsistence eksplicitno zahtevamo ujemanje ravnotežnih in konstitucijskih sil in momentov. Predstavimo dve formulaciji linijskih končnih elementov, ki temeljita na izbiri deformacijskih količin za osnovne neznanke problema. Vodilne enačbe obeh formulacij so sestavljene iz konsistenčnih enačb, kinematičnih in ravnotežnih robnih pogojev. V prvi formulaciji za osnovne neznanke izberemo krajevne odvode pomikov in rotacij – deformacije. Kinematične zveze po času diskretiziramo z Newmarkovo shemo, za zagotovitev stabilnosti pa vpeljemo posplošeno- $\alpha$  metodo [24] numeričnega dušenja. V drugi formulaciji za diskretizacijo kinematičnih enačb po času izberemo modificirano Newmarkovo shemo. Iz kinematičnih zvez med hitrostmi in deformacijami sledi, da so krajevni odvodi hitrosti in kotnih hitrosti tudi mere za hitrost deformacij. To nas motivira, da jih v formulaciji z modificirano Newmarkovo shemo izberemo za osnovne neznanke diskretizacije kinematičnih količin po kraju. Osnovne neznanke v obeh formulacijah so aditivne količine, zato jih izberemo za edine količine, ki jih interpoliramo. Zvezne enačbe konsistence po kraju diskretiziramo s kolokacijsko metodo, tako da

enakost ravnotežnih in konstitucijskih sil in momentov zahtevamo v naprej izbranih diskretnih točkah. V numerični implementaciji končnih elementov točke interpolacije in kolokacije poenotimo, s čimer pridobimo na natančnosti in računski učinkovitosti algoritma.

Vodilni sistem enačb obeh formulacij končnih elementov s krajevno in časovno diskretizacijo prevedemo na sistem nelinearnih algebraskih enačb, ki ga rešujemo z Newtonovo iteracijsko metodo. Za obe formulaciji podrobno predstavimo linearizacijo in dodajanje popravkov. Nove elemente vgradimo v računalniški program in testiramo na številnih primerih, rezultate pa primerjamo z rešitvami drugih avtorjev. Z numeričnimi študijami pokažemo, da obe formulaciji dobro opišeta obnašanje konstrukcije pri poljubno velikih pomikih, zasukih in deformacijah. Izboljšana stabilnost modificirane Newmarkove sheme pride do izraza v formulaciji elementov z interpolacijo krajevnih odvodov hitrosti, saj omogoča račun zahtevnih računskih primerov brez numeričnega dušenja.

V zadnjem delu doktorske naloge obravnavamo povezan problem gibanja masnega delca in nosilca. Gibalne enačbe delca dodamo sistemu enačb konstrukcije, kontaktne pogoje pa vpeljemo prek kinematičnih vezi [34] z metodo Lagrangejevih množiteljev. Za povezano dinamično analizo prostorskih nosilcev ob upoštevanju različnih vplivov zunanjih delcev z maso pripravimo nabor končnih elementov s predpostavljenim konstantnim potekom deformacijskih količin. Za posebej robustne se izkažejo elementi s predpostavljenim konstantnim potekom krajevnih odvodov hitrosti in kotnih hitrosti. Podrobneje analiziramo trk masnega delca ob nosilec. Trk obravnavamo kot zvezen dogodek s končnim trajanjem, pri katerem se telesi v območju kontakta deformirata.

## SUMMARY

In the present dissertation we study dynamics of beam-like structures in three-dimensional space. The main goal of the present work is the development of new mathematical tools for accurate and numerically stable solution of equations which describe the response of the structures under dynamic influences.

We formulate a mathematical model of the beam based on the Reissner-Simo [1, 2], geometrically exact beam theory. We follow the approach presented by Zupan and Saje [9] for static analysis of spatial beams. The main properties of their approach are: (i) the equality of the equilibrium and constitutive internal forces is satisfied in strong form, (ii) kinematic relations between displacements, rotations and strains are exactly satisfied, (iii) strain measures are the primary variables and (iv) continuous equations are discretized by the use of collocation algorithm. In the finite-element formulation for dynamic analysis we want to keep the same structure of equations and the selection of the primary unknowns. By doing so, we limit the choice of the possible time integration schemes to the algorithms which discretize kinematic relations between displacements, velocities and accelerations and the relations between rotations, angular velocities and angular accelerations.

Problems in dynamics of structures and mechanisms are often described by stiff equations, therefore we select implicit schemes for time integration of dynamic equations. First we introduce Newmark scheme [28] and its extension to the non-linear space of rotations [4], where displacements and rotations are chosen for the primary unknowns. The Newmark scheme is only conditionally stable in non-linear problems, therefore we develop a new – modified Newmark scheme, with improved stability properties. The primary unknowns of the new scheme are time derivatives of displacements and rotations – velocities and angular velocities. Such a selection of primary unknowns improves the stability of the long term analysis and the analysis where small time steps are required. The primary unknowns of the modified scheme are additive quantities which simplifies the iteration process and increases numerical efficiency of the algorithm.

The equations of the dynamic equilibrium of the beam are derived from linear and angular momentum conservation laws. The material properties of the beam are represented by a general form of constitutive equations, where we assume that the tangent constitutive matrix of an arbitrary cross-section of the beam is known. In the numerical solution of the equations of the beam the constitutive force and moment vectors do not automatically satisfy the equilibrium equations. We follow the concept introduced by Vratnar and Saje [52] and explicitly demand the equality of the constitutive and equilibrium force and moment vectors. We introduce two finite-element formulations based on strain measures. The governing system of equations of each formulation consist of consistency conditions, kinematic and equilibrium boundary conditions. The first formulation employs spatial derivatives of displacements and rotations – strains, as the primary unknowns. The Newmark scheme is used for time discretization of kinematic quantities and Generalized- $\alpha$  method is used to assure numerical stability of the strain-based formulation. The second formulation employs the modified Newmark scheme for time discretization of kinematic equations. It follows from kinematic relations between strains and velocities that spatial derivatives of velocities and angular velocities are also strain-rate measures. Thus, we select them as the

primary unknown functions of the spatial discretization of the formulation with the modified Newmark scheme. The primary unknowns of both formulations are additive quantities and are selected to be the only interpolated quantities of the formulations. The continuous consistency equations are discretized by the use of a collocation method, such that the equality of the equilibrium and constitutive forces is satisfied at the chosen discrete points. In numerical implementation of the finite-elements we make the interpolation points to coincide with collocation points, which improves the accuracy and computational efficiency of the algorithm.

When the governing equations of the two formulations are discretized with respect to space and time we obtain non-linear system of equations, which is solved by the iterative Newton's method. Therefore the linearization of equations and the update procedure are presented. The computer code is generated and the performance of the finite-elements is tested on several numerical examples. The results are compared to results presented by other authors. We show that both formulations give accurate results and are able to describe the behaviour of structures where finite displacements, rotations and strains occur. The improved stability of the modified Newmark scheme, implemented in velocity-based formulation, enables us to obtain results of more demanding problems without numerical dissipation.

In the last part of the thesis we consider coupled motion of a mass particle and a beam. The system of equations of the beam is supplemented with equations of motion of a particle; contact conditions are enforced as constraints [34], by the use of Lagrange multiplier technique. For coupled dynamic analysis of spatial beams and various influences of mass particles, we present a special set of finite-elements with assumed constant strain measures. The formulation with assumed constant spatial derivatives of velocities and angular velocities shows great robustness. The impact of a mass particle against the beam is studied in detail. The impact is modelled as an event of finite duration, where local deformation of the contacting bodies occur.

**VIRI**

- [1] Reissner, E. 1981. On finite deformation of space-curved beams. *Z. Angew. Math. Phys.* 32: 734–744.
- [2] Simo, J. C. 1985. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 49: 55–70.
- [3] Simo, J. C., Vu-Quoc, L. 1986. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 58: 79–116.
- [4] Simo, J. C., Vu-Quoc, L. 1988. On the dynamics in space of rods undergoing large motions - A geometrically exact approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 66: 125–161.
- [5] Cardona, A., Geradin, M. 1988. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 26: 2403–2438.
- [6] Ibrahimbegović, A. 1995. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 122: 11–26.
- [7] Jelenić, G., Saje, M. 1995. A kinematically exact space finite strain beam model - finite element formulation by generalized virtual work principle. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 120: 131–161.
- [8] Jelenić, G., Crisfield, M. A. 1999. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 171: 141–171.
- [9] Zupan, D., Saje, M. 2003. Finite-element formulation of geometrically exact three-dimensional beam theories based on interpolation of strain measures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 192: 5209–5248.
- [10] Simo, J. C., Tarnow, N., Doblare, M. 1995. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conserving algorithms. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 38: 1431–1473.
- [11] Bauchau, O. A., Theron, N. J. 1996. Energy decaying scheme for nonlinear elastic multi-body systems. *Comput. Struct.* 59: 317–331.
- [12] Bottasso, C. L., Borri, M. 1997. Energy preserving/decaying schemes for non-linear beam dynamics using the helicoidal approximation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 143: 393–415.
- [13] Ibrahimbegović, A., al Mikdad, M. 1998. Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 41: 781–814.
- [14] Romero, I., Armero, F. 2002. An objective finite element approximation of the kinematics of geometrically exact rods and its use in the formulation of an energy-momentum conserving scheme in dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 54: 1683–1716.

- [15] Argyris, J. H. 1982. An excursion into large rotations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 32: 85–155.
- [16] Atluri, S., Cazzani, A. 1995. Rotations in computational solid mechanics. *Arch. Comput. Meth. Eng.* 2: 49–138.
- [17] Zupan, D., Saje, M. 2003. The three-dimensional beam theory: Finite element formulation based on curvature. *Comput. Struct.* 81: 1875–1888.
- [18] Jelenić, G., Crisfield, M. A. 1999. Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation. *Proc. Roy. Soc. Lond. Math. Phys. Sci.* 455: 1125–1147.
- [19] Planinc, I. 1998. Račun kritičnih točk konstrukcij s kvadratično konvergentnimi metodami. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba I. Planinc): 83 f.
- [20] Choi, J., Lim, J. 1995. General curved beam elements based on the assumed strain fields. *Comput. Struct.* 55: 379–386.
- [21] Friedman, Z., Kosmatka, J. B. 1998. An accurate two-node finite element for shear deformable curved beams. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 41: 473–498.
- [22] Schulz, M., Filippou, F. C. 2001. Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 50: 7361–785.
- [23] Hilber, H. M., Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. 1977. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake. Eng. Struct. Dynam.* 5: 283–292.
- [24] Chung, J., Hulbert, G. M. 1993. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- $\alpha$  method. *J. Appl. Mech.* 60: 371–375.
- [25] Hughes, T. J. R. 1983. Analysis of transient algorithms with particular reference to stability behavior. V: Belytscho, T. (ur.), Hughes, T. J. R. (ur.). *Computational Methods for Transient Analysis*. Amsterdam, North Holland: str. 67–155.
- [26] Simo, J. C., Wong, K. K. 1991. Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 31: 19–52.
- [27] Ibrahimbegovic, A., Mamouri, S. 2002. Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for nonlinear dynamics of three-dimensional beams undergoing finite rotations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 191: 4241–4258.
- [28] Newmark, N. M. 1959. A method of computation for structural dynamics. *J. Eng. Mech. Div.* 85: 67–94.
- [29] Bottasso, C. L., Borri, M. 1998. Integrating finite rotations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 164: 307–331.
- [30] Lee, H. P. 1996. The dynamic response of a Timoshenko beam subjected to a moving mass. *J. Sound. Vib.* 198: 249–256.

- [31] Zupan, E. 2010. Dinamika prostorskih nosilcev s kvaterniono parametrizacijo rotacij. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba E. Zupan): 163 str.
- [32] Bauchau, O. A. 1998. Computational Schemes for Flexible, Nonlinear Multi-Body systems. *Multibody System Dynamics* 2: 169–225.
- [33] Bauchau, O. A. 1999. On the Modeling of Friction and Rolling in Flexible Multi-Body systems. *Multibody System Dynamics* 3: 209–239.
- [34] Bauchau, O. A. 2000. Analysis of Flexible Multibody systems with Intermittent Contacts. *Multibody System Dynamics* 4: 23–54.
- [35] Lens, E. V., Cardona, A. 2008. A nonlinear beam element formulation in the framework of an energy preserving time integration scheme for constrained multibody system dynamics. *Comput. Struct.* 86: 67–94.
- [36] Zupan, D. 2003. Rotacijsko invariantne deformacijske količine v geometrijsko točni teoriji prostorskih nosilcev. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba D. Zupan): 210 str.
- [37] Crisfield, M. A. 1997. *Non-linear finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2, Advanced Topics*. Chichester - New York - Weinheim - Brisbane - Singapore - Toronto, John Wiley & Sons: 494 str.
- [38] Ibrahimbegović, A. 1997. On the choice of finite rotation parameters. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 149: 49–71.
- [39] Curtiss, C. F., Hirschfelder, J. 1952. Integration of stiff equations. *Proc. Natl Acad. Sci. USA* 38: 235–243.
- [40] Spurrier, R. A. 1978. Comment on 'singularity-free extraction of a quaternion from a direction-cosine matrix'. *J. Spacecraft Rockets* 15: 255.
- [41] Bathe, K.-J. 1982. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall: 735 str.
- [42] Hughes, T. J. R. 1976. Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics. *Comput. Struct.* 6: 313–324.
- [43] Hosea, M. E., Shampine, L. F. 1996. Analysis and implementation of TR-BDF2. *Appl. Numer. Math.* 20: 21–37.
- [44] Vidav, I. 1990. *Višja matematika I*. Ljubljana, DMFA: 477 str.
- [45] Krysl, P. 2005. Explicit momentum-conserving integrator for dynamics of rigid bodies approximating the midpoint Lie algorithm. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 63: 2171–2193.
- [46] Hairer, E., Wanner, G. 1991. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Berlin, Springer: 594 str.



- [47] Arnold, V. I. 1989. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, New York, Springer: 516 str.
- [48] Shampine, L. F., Reichelt, M. W. 1997. The MATLAB ODE Suite. *SIAM J. Sci. Comput.* 18: 1–22.
- [49] Lens, E., Cardona, A. 2007. An energy preserving/decaying scheme for nonlinearly constrained multibody systems. *Multibody System Dynamics* 18: 435–470.
- [50] Petzold, L., Lötstedt, P. 1986. Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints II: Practical implications. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 7: 720–733.
- [51] Bottasso, C. L., Bauchau, O. A., Cardona, A. 2007. Time-step-size-independent conditioning and sensitivity to perturbations in the numerical solution of index three differential algebraic equations. *SIAM Journal on Scientific Computing* 29: 397–414.
- [52] Vratinar, B., Saje, M. 1999. A consistent equilibrium in a cross-section of an elastic-plastic beam. *Int. J. Solid. Struct.* 36: 311–337.
- [53] Bottasso, C., Borri, M. 1997. Energy preserving/decaying schemes for non-linear beam dynamics using the helicoidal approximation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 143: 393–415.
- [54] Betsch, P., Steinmann, P. 2002. A DAE Approach to Flexible Multibody Dynamics. *Multibody System Dynamics* 8: 367–391.
- [55] Wood, W. L., Bossak, M., Zienkiewicz, O. C. 1981. An Alpha Modification of Newmark's Method. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 15: 1562–1566.
- [56] Erlicher, S., Bonaventura, L., Bursi, O. S. 2002. The analysis of the Generalized- $\alpha$  method for non-linear dynamic problems. *Comput. Mech.* 28: 83–104.
- [57] Kuhl, D., Crisfield, M. A. 1999. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 45: 569–599.
- [58] W. Weaver, J., Timoshenko, S. P., Young, D. H. 1990. *Vibration Problems in Engineering*. 5. izdaja. Chichester - New York - Weinheim - Brisbane - Singapore - Toronto, John Wiley & Sons: 610 str.
- [59] Bauchau, O. A. Dymore Solutions. Simulation Tools for Flexible Multibody Systems. Benchmark test cases: four-bar mechanism. <http://www.dymoresolutions.com/Benchmarks/FourBar/HeadFourBar.html> (Pridobljeno 1.10.2012).
- [60] Bauchau, O. A. Dymore Solutions. Simulation Tools for Flexible Multibody Systems. <http://www.dymoresolutions.com> (Pridobljeno 1.10.2012).
- [61] Crisfield, M. A., Shi, J. 1994. A co-rotational element/time-integration strategy for non-linear dynamics. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 37: 1897–1913.
- [62] Crisfield, M. A., Galvanetto, U., Jelenić, G. 1997. Dynamics of 3-D co-rotational beams. *Comput. Mech.* 20: 507–519.
- [63] Wehage, R. A., Haug, E. J. 1981. Dynamic analysis of mechanical systems with intermittent motion. *ASME J. Mech. Design* 103: 560–570.

- [64] Khulief, Y. A., Shabana, A. A. 1986. Dynamic analysis of constrained systems of rigid and flexible bodies with intermittent motion. *ASME J. Mech. Transmissions Automat. Design* 108: 38–44.
- [65] Bratina, S. 2003. Odziv armiranobetonskih linijskih konstrukcij na požarno obtežbo. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba S. Bratina): 159 str.
- [66] Češarek, P., Saje, M., Zupan, D. 2012. Kinematically exact curved and twisted strain-based beam. *Int. J. Solid. Struct.* 49: 1802–1817.
- [67] Bauchau, O. A., Damilano, G., Theron, N. J. 1995. Numerical integration of non-linear elastic multi-body systems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 38: 2727–2751.
- [68] Ibrahimbegović, A., Mamouri, S. 1999. Nonlinear dynamics of flexible beams in planar motion: formulation and time-stepping scheme for stiff problems. *Comput. Struct.* 70: 1–22.
- [69] Gams, M. 2008. Geometrijsko točna dinamična analiza elastičnih in armiranobetonskih okvirnih konstrukcij. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba M. Gams): 107 str.
- [70] Bauchau, O. A., Theron, N. J. 1996. Energy decaying scheme for non-linear beam models. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 134: 37–56.
- [71] Timoshenko, S. P., Gere, J. M. 1961. *Theory of Elastic Stability*. New York - Toronto - London, McGraw-Hill: 541 str.