Močnik,
Geometrische Anschauungslehre

1. Abtheilung.

Preis gebunden 75 kr.

Wien
Carl Gerold's Sohn

Geometrische
Anschauungslehre
für
Unter-Gymnasien.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

I. Abtheilung.
(Für die I. und II. Classe.)

Dreiundzwanzigste unveränderte Auflage.

Laut h. Ministerial-Erlass vom 7. April 1893, Z. 6567, zum Lehrgebrauche an Gymnasien mit deutscher Unterrichtssprache allgemein zugelassen.

Mit 110 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Preis in Leinwandband 75 kr.

Wien.
Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.
1893.

Inhalts-Verzeichnis.

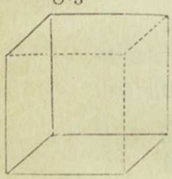
Grundvorstellungen der Raumgebilde.

Grundvorstellungen der Raumgebilde.

1. Betrachtung des Würfels.*)

§. 1. Der Würfel (Fig. 1) nimmt einen Raum ein, der von allen Seiten begrenzt ist. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt ein Körper. Der Würfel ist ein Körper.

Fig. 1.



Der Würfel ist nach drei Richtungen ausgedehnt; von rechts nach links, von vorne nach hinten, von unten nach oben. Die Ausdehnung von rechts nach links heißt gewöhnlich Länge, die von vorne nach hinten Breite und die von unten nach oben Höhe.

Jeder Körper hat drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe (Tiefe, Dicke).

Nenne verschiedene Körper und weise an ihnen die drei Ausdehnungen nach. (Das Buch, das Lineal der Kasten, das Schulzimmer u. s. w.)

§. 2. Der Würfel wird von sechs Flächen begrenzt. Diese sind: die untere, obere, vordere, hintere, rechte und linke Fläche. Die Grenzflächen des Würfels sind ebene Flächen.

Gib die Grenzflächen des Schulzimmers, eines Buches, eines Kastens, der Schultafel an.

Jede Fläche des Würfels ist nach zwei Richtungen ausgedehnt, z. B. die vordere Fläche von rechts nach links und von unten nach oben.

Eine Fläche hat nur zwei Ausdehnungen: Länge und Breite (Höhe).

Alle Grenzflächen eines Körpers zusammen nennt man die Oberfläche desselben.

---

*) Der betrachtete Würfel (aus Holz, Pappe oder Blech) ruht auf einem Tische oder Gestelle so, dass eine Fläche des Würfels dem Auge des Schülers zugewendet ist.

§. 3. Jede Fläche am Würfel wird von vier Kanten oder Kantenlinien begrenzt. Eine Kantenlinie entsteht da, wo zwei Flächen zusammentreffen.

Am Würfel kommen im ganzen 12 Kanten vor: die vordere untere, die vordere obere, die vordere rechte, u. s. w.

Die Kanten des Würfels sind gerade Linien.

Jede Kantenlinie des Würfels ist nur nach einer Richtung ausgedehnt, in die Länge.

Eine Linie hat nur eine Ausdehnung, die Länge.

Alle Grenzlinien einer Fläche zusammen nennt man den Umfang derselben.

§. 4. Jede Kantenlinie des Würfels wird von zwei Eckpunkten begrenzt. Ein Eckpunkt entsteht da, wo drei Flächen zusammentreffen.

Der Würfel hat im ganzen 8 Eckpunkte. Diese sind: der vordere untere rechte, der vordere untere linke, der vordere obere rechte, u. s. w.

Die Eckpunkte des Würfels sind nach keiner Richtung ausgedehnt; sie sind weder lang, noch breit, noch dick.

Ein Punkt hat keine Ausdehnung.

In ähnlicher Weise kann auch die Betrachtung

a) des geraden dreiseitigen Prismas,

b) des Tetraëders,

c) des geraden vierseitigen Pyramidenstumpfes

vorgenommen werden.

2. Betrachtung des Cylinders.

§. 5. Der Cylinder (Fig. 2) nimmt einen allseitig begrenzten Raum ein, er ist ein Körper. Er ist nach drei Richtungen ausgedehnt, in die Länge, Breite und Höhe; die Länge und die Breite sind jedoch gleich groß.

Fig. 2.

Der Cylinder wird von drei Flächen begrenzt. Zwei derselben sind ebene Flächen, die dritte ist eine krumme Fläche. In jeder der beiden ebenen Flächen gibt es einen Punkt, welcher von allen Punkten des Umfanges gleich weit entfernt ist. Eine solche Fläche heißt Kreisfläche.

Der Cylinder hat nur zwei Kanten. Diese sind die krummen Linien, welche die beiden Kreisflächen begrenzen; sie heißen Kreislinien.

Eckpunkte kommen am Cylinder nicht vor.

In gleicher Weise kann noch die Betrachtung
a) des geraden Kegels,
b) des geraden Kegelstumpfes,
c) der Kugel
vorgenommen werden.

3. Zusammenhang der Körper, Flächen, Linien und Punkte.

§. 6. Ein nach allen Seiten begrenzter Raum heißt ein Körper. Jeder Körper dehnt sich nach drei Hauptrichtungen aus, nämlich in die Länge, Breite und Höhe (Tiefe oder Dicke).

Die Grenzen der Körper heißen Flächen. Eine Fläche hat nur zwei Ausdehnungen, Länge und Breite.

Die Grenzen der Flächen heißen Linien. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung, die Länge.

Die Grenzen der Linien heißen Punkte. Der Punkt ist weder lang, noch breit, noch dick, er hat keine Ausdehnung.

Körper, Flächen, Linien und Punkte nennt man Raumgebilde.

Die Körper, Flächen und Linien sind im Raume ausgedehnt und heißen deshalb auch Raumgrößen. Der Punkt hat keine Ausdehnung und ist daher keine Raumgröße.

§. 7. Die Raumgebilde können durch Bewegung erzeugt werden.

Wenn sich ein Punkt im Raume fortbewegt, so ist der von ihm zurückgelegte Weg eine Linie.

Bewegt sich eine Linie im Raume in einer anderen Richtung als in der ihrer Verlängerung fort, so entsteht eine Fläche.

Bewegt sich eine Fläche in einer anderen Richtung als in der ihrer Erweiterung fort, so entsteht ein Körper.

4. Eintheilung der Linien, Flächen und Körper.

§. 8. Die Linien theilt man in gerade und krumme ein.

Bewegt sich ein Punkt im Raume stets in derselben Richtung fort, so ist die Linie, die dadurch entsteht, eine gerade Linie, oder eine Gerade. Wenn aber der sich bewegende Punkt die Richtung seiner Bewegung fortwährend ändert, so ist die dadurch entstehende Linie eine krumme Linie.

§. 9. Die Flächen theilt man in ebene und krumme ein.

Eine Fläche, in welcher sich nach allen Richtungen gerade Linien ziehen lassen, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene; z. B.

die Fläche eines Würfels, die Wand eines Zimmers. Eine Fläche, in welcher nicht nach allen Richtungen gerade Linien gezogen werden können, heißt eine krumme oder gekrümmte Fläche; z. B. die Seitenfläche eines Cylinders, auf der man nur nach einer einzigen Richtung, die Fläche einer Kugel, auf der man nach gar keiner Richtung gerade Linien ziehen kann.

Eine durch Linien vollständig begrenzte Ebene heißt eine ebene Figur.

§. **10**. Die Körper theilt man in eckige und runde ein.

Der Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt ist, heißt ein eckiger (ebenflächiger) Körper; z. B. ein Würfel, ein Kasten. Ein Körper, welcher nicht von lauter Ebenen begrenzt ist, wird ein runder (krummflächiger) Körper genannt, z. B. ein Cylinder, welcher von zwei ebenen und einer krummen Fläche, eine Kugel, welche von einer einzigen krummen Fläche begrenzt wird.

bis daher

5. Geometrie.

§. **11**. Die Lehre von den Raumgebilden heißt Geometrie.

Sie zerfällt in zwei Haupttheile: Die Planimetrie und die Stereometrie. Die Planimetrie ist die Lehre von den Eigenschaften derjenigen Raumgebilde, welche in einer und derselben Ebene liegen; die Stereometrie aber handelt von denjenigen Raumgebilden, die sich nicht in einer einzigen Ebene liegend vorstellen lassen, sondern sich auch noch im Raume außerhalb derselben ausdehnen.

Die Planimetrie.

I. Gerade Linien.

1. Unbegrenzte gerade Linien, Strahlen und Strecken.

§. 12. 1. Durch einen Punkt lassen sich unzählig viele Gerade in allen möglichen Lagen ziehen. Ist noch ein zweiter Punkt gegeben, so wird es unter allen früheren Lagen der Geraden nur eine einzige geben, in welcher die Gerade durch beide Punkte geht. Durch zwei Punkte ist eine Gerade vollkommen bestimmt.

2. Zwei von einander verschiedene Gerade können nur einen gemeinsamen Punkt haben. Man sagt: sie schneiden sich in diesem Punkte, und nennt diesen gemeinsamen Punkt ihren Schnittpunkt.

Zum geometrischen Zeichnen gerader Linien bedient man sich des Lineals.

Bestimme zwei Punkte und verbinde sie aus freier Hand durch eine Gerade.
Bestimme drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen und ziehe durch je zwei eine Gerade. — Wie viele Gerade sind da möglich?

§. 13. Eine unbegrenzte Gerade wird durch jeden in ihr liegenden Punkt in zwei Theile getheilt, deren jeder sich nur nach einer Richtung unbegrenzt ausdehnt. Eine durch einen Punkt halbbegrenzte Gerade heißt ein Strahl. Eine durch zwei Punkte ganz begrenzte Gerade heißt Strecke; die beiden Grenzpunkte nennt man ihre Endpunkte.

Ein Punkt wird dadurch bezeichnet, daſs man zu dem ihn versinnlichenden Tupfen einen Buchstaben oder eine Ziffer setzt; z. B. der Punkt A, der Punkt 1.

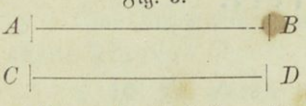
Um eine Strecke zu bezeichnen, setzt man an jeden der Endpunkte des sie versinnlichenden Striches einen Buchstaben oder eine Ziffer und spricht diese aus; z. B. die Strecke AB. Ein Strahl wird durch den Grenzpunkt und einen zweiten in ihm liegenden Punkt bezeichnet.

2. Länge der Strecken.

§. **14**. In Beziehung auf die Länge können zwei Strecken gleich oder ungleich sein.

Zwei Strecken sind gleich, wenn die Endpunkte der einen eben so weit von einander entfernt sind, als die Endpunkte der andern. Legt man bei zwei gleichen Strecken AB und CD (Fig. 3) den Anfangspunkt C der einen auf den Anfangspunkt A der andern, und beide Strecken der Richtung nach aufeinander, so müssen auch die beiden Endpunkte D und B aufeinander fallen und die Strecken einander decken.

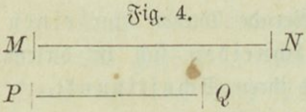
Fig. 3.



Um die Gleichheit der Strecken AB und CD anzuzeigen, schreibt man: $AB = CD$.

Zwei Strecken, deren Endpunkte ungleiche Entfernungen von einander haben, sind ungleich, und zwar ist diejenige die größere, deren Endpunkte weiter voneinander abstehen, die andere die kleinere. Zwei ungleiche Strecken, wie MN und PQ (Fig. 4), können einander nicht decken.

Fig. 4.



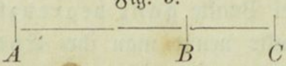
Das Zeichen der Ungleichheit ist $>$ oder $<$; $MN > PQ$ heißt: die Strecke MN ist größer als die Strecke PQ; und $PQ < MN$ heißt: die Strecke PQ ist kleiner als die Strecke MN.

Die Strecke zwischen zwei Punkten ist die kürzeste Linie zwischen denselben.

Die Strecke zwischen zwei Punkten bestimmt daher die Entfernung oder den Abstand derselben.

§. **15**. Mit den Strecken kann man dieselben Rechnungsoperationen vornehmen wie mit den Zahlen.

Fig. 5.



Verlängert man die Strecke AB (Fig. 5) um die Strecke BC, so ist die Strecke AC so groß, als die Strecken AB und BC zusammengenommen, oder es ist AC die Summe der Strecken AB und BC; also

$$AC = AB + BC.$$

Umgekehrt ist die Strecke AB der Unterschied zwischen den Strecken AC und BC, nämlich $AB = AC - BC$.

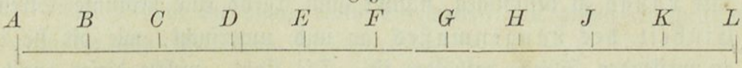
Aufgaben.

1. Zeichne zwei ungleiche Strecken und bestimme sowohl die Summe als den Unterschied derselben.

2. In welche Lage muſs man zwei Strecken bringen, um ſie durch Conſtruction addieren, und in welche, um ſie ſubtrahieren zu können?

§. **16**. Trägt man auf eine Gerade (Fig. 6) die gleichen Strecken AB, BC, CD,... KL auf, ſo iſt

Fig. 6.



AC 2mal ſo groß als AB, AD 3mal,... AL 10mal ſo groß als AB; man erhält alſo dadurch das 2-, 3-, 4-, ... 10fache der Strecke AB. Es iſt daher $AC = 2AB$, $AD = 3AB$, ..., $AL = 10AB$; ferner $AE = 2AC$, $AL = 5AC$, $AL = 2AF$.

Umgekehrt iſt AB die Hälfte von AC, das Drittel von AD, der 4te Theil von AE, der 10te Theil von AL; oder $AB = \frac{AC}{2}$ $AB = \frac{AD}{3}$, $AB = \frac{AE}{4}$, $AB = \frac{AL}{10}$; auch iſt $AC = \frac{AG}{3}$, $AE = \frac{AJ}{2}$.

Aufgaben.

1. Welche Strecke iſt in Fig. 6 gleich:
   a) der Summe BD + DG?
   b) dem Unterſchiede AE — AD?
   c) dem 3fachen der Strecke AC + CD?
   d) dem 4fachen der Strecke AD — CD?

2. Zeichne eine Strecke, welche 2-, 3-, 4mal ſo groß iſt als eine gegebene Strecke.

3. Zeichne eine Strecke, welche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ einer gegebenen Strecke iſt.

4. Zeichne 10 Strecken, von denen die zweite das Doppelte der erſten, die dritte das Dreifache der erſten, u. ſ. w., die zehnte das 10fache der erſten iſt.

5. Zeichne vier Strecken ſo, daſs die nächſtfolgende immer die Hälfte der vorhergehenden ſei.

6. Zeichne mehrere Strecken und theile ſie nach dem Augenmaße in 2, 4, 8, 3, 6, 12, 5, 10, 7, 9 gleiche Theile.

Die Anweiſung über die geometriſche Theilung der Strecken wird weiter unten folgen.

3. Meſſen der Strecken.

§. **17**. Die Größe eines Gegenſtandes beſtimmen, heißt denſelben meſſen.

Um eine Raumgröße zu messen, muſs man irgend eine Raumgröße derselben Art als Einheit annehmen und untersuchen, wie oft diese als Einheit angenommene Größe in der andern enthalten ist. Jede Größe kann nur durch eine Größe derselben Art, daher eine Linie nur durch eine Linie gemessen werden. Um also eine Strecke zu messen, d. i. um ihre Länge zu bestimmen, nimmt man irgend eine bekannte Strecke als Einheit des Längenmaßes an und untersucht, wie oft sie in der zu messenden Strecke enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die Maßzahl der Strecke.

Die Einheit des Längenmaßes der österreichisch-ungarischen Monarchie ist das Meter.

Das Meter (*m*) wird in 10 Decimeter (*dm*) à 10 Centimeter (*cm*) à 10 Millimeter (*mm*) eingetheilt.

Anschauung an einem Meterstabe.

1000 Meter sind 1 Kilometer (*km*), 10000 Meter sind 1 Myriameter (μm).

Will man eine Strecke, z. B. eine nach der Länge des Zimmers gezogene Gerade, nach Meter messen, so untersucht man, wie oft ein Meter auf die Strecke gelegt werden kann. Läſst sich z. B. das Meter darauf genau 8mal auftragen, so ist die Länge dieser Strecke 8mal so groß als die Länge eines Meters und man sagt: die Strecke miſst 8 Meter oder sie ist 8 Meter lang; 8 ist die Maßzahl der Strecke in Beziehung auf das Meter als Längeneinheit.

Aufgaben.

1. Von zwei Strecken ist die eine 12 *m* 5 *dm* 6 *cm*, die andere 7 *m* 3 *dm* 9 *cm* lang; wie groß ist die Summe beider?

2. Wenn (Fig. 5) $AB = 6·63$ *m*, $BC = 3·26$ *m* ist, wie viel beträgt AC?

3. Von zwei Latten miſst die längere 2 *m* 3 *dm*, die kürzere 1 *m* 9 *dm*; wie groß ist ihr Längenunterschied?

4. Wenn von zwei Latten die kleinere 2 *m* 18 *cm* miſst und der Unterschied beider 0·29 *m* beträgt, wie lang ist die größere Latte und wie groß die Summe beider Längen?

5. Eine Strecke ist 7 *m* 4 *dm* 11 *cm* lang und eine andere 5mal so lang; wie lang ist die letztere?

6. Ein Balken von 4 *m* 3 *dm* 2 *cm* Länge soll in vier gleiche Stücke geschnitten werden; wie lang wird jedes Stück sein?

7. Von einer Straße, welche 9 *km* 348 *m* lang werden soll, ist der sechste Theil fertig; wie viel bleibt noch zu bauen übrig?

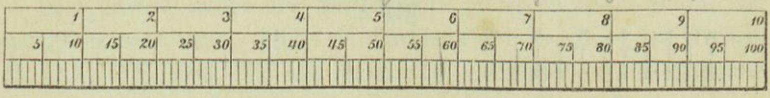
§. **18.** Zum wirklichen Messen längerer Linien gebraucht man die Meterstäbe, oder eine Messschnur, oder die Messkette.

Zum Messen kleinerer Längen bedient man sich der Maßstäbe; diese sind Stäbe aus Holz oder Metall, auf welchen die Länge einer oder mehrerer Längeneinheiten nebst den Untertheilungen aufgetragen ist.

Fig. 7 stellt die Länge eines Decimeters mit dessen Eintheilung in Centimeter und Millimeter dar.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Fig. 7.



Aufgaben.

1. Bestimme durch Messung folgende Längenausdehnungen: a) die Länge und Breite der Schultafel; b) die Breite und Höhe der Thüren und Fenster; c) die Länge, Breite und Höhe des Schulzimmers. Vor dem wirklichen Ausmessen ist zur Übung des Augenmaßes die zu messende Länge jedesmal früher abzuschätzen.

2. Ziehe eine Strecke, gib durch Abschätzung nach dem Augenmaße ihre Länge in *cm* und *mm* an und prüfe das Resultat mit Hilfe des obigen Maßstabes.

3. Zeichne zwei ungleiche Strecken und bestimme ebenso ihre Länge.

4. Zeichne mit Hilfe des Maßstabes eine Strecke von a) 7 *cm*, b) 3 *cm* 5 *mm*, c) 63 *mm*.

5. Zeichne eine Strecke von 4 *cm* 7 *mm* und verlängere sie um 2 *cm* 1 *mm*.

6. Zeichne eine Strecke von 58 *mm* und verkürze sie um 29 *mm*.

7. Zeichne eine Strecke von 1 *cm* 6 *mm*, und dann das 2-, 3-, 4-, 5-fache derselben.

8. Zeichne eine Strecke von 6 *cm*, und dann die Hälfte, den dritten, vierten, fünften Theil derselben.

§. **19.** Will man eine in der Natur gemessene Strecke auf dem Papiere zeichnen, so geschieht dieses gewöhnlich nicht in der wahren Größe, sondern in einem kleineren, verjüngten Maße. Es wird nämlich angenommen, dass eine bestimmte Länge, z. B. 1 *cm*, auf dem Papiere eine bestimmte Länge, z. B. 1 *m* oder 20 *m*, in der Wirklichkeit vorstellen soll.

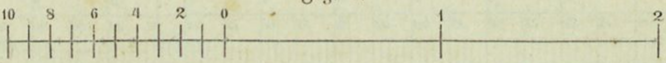
Ein Maßstab, auf welchem die in der Wirklichkeit üblichen Längenmaße verkleinert aufgetragen sind, heißt ein verjüngter Maßstab, im Gegensatze zu einem natürlichen Maßstabe, auf welchem die Längeneinheit in ihrer wahren Größe aufgetragen wird.

Aufgaben.

1. Einen Maßstab von 3 *m*, auf dem man auch Decimeter entnehmen kann, in der Verjüngung 1 *m* = 3 *cm* natürlicher Größe zu zeichnen.

Zeichne (Fig. 8) eine Gerade, trage darauf 3 *cm* natürlicher Größe 3mal auf und theile dann den ersten Theil links in 10 gleiche Theile.

Fig. 8.



2. Ziehe drei Gerade, und trage von dem obigen Maßstabe auf die erste 2 *m*, auf die zweite 1 *m* 5 *dm*, auf die dritte 2 *m* 7 *dm* auf.

3. Ziehe drei Strecken und bestimme nach dem obigen Maßstabe, wie viel Meter und Decimeter die Länge einer jeden beträgt.

4. Zeichne einen Maßstab von 5 *m*, auf dem 1 *m* des natürlichen Maßes gleich 2 *cm* sind, und auf dem man noch 5 *cm* des natürlichen Maßes ablesen kann.

Da 100 *cm* des natürlichen Maßes durch 2 *cm* oder 20 *mm* dargestellt werden, so werden 5 *cm* des natürlichen Maßes durch 1 *mm* dargestellt.

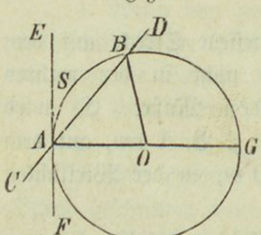
5. Zeichne mit beliebiger Verjüngung einen Maßstab von 40 *m* so, dass man noch die Meter abnehmen kann.

II. Kreislinie.

1. Entstehung des Kreises und Erklärungen.

§. 20. Unter den krummen Linien ist die Kreislinie die einfachste und wichtigste. Sie entsteht, wenn sich in einer Ebene eine Strecke OA (Fig. 9) um den einen als fest gedachten Endpunkt O in derselben Richtung so lange dreht, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt; der zweite Endpunkt A beschreibt während dieser Drehung eine krumme Linie, welche Kreislinie oder Kreis heißt. Die Kreislinie ist also eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, dass alle ihre Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit entfernt sind. Der Punkt O, von welchem alle Punkte der Kreislinie gleich weit abstehen, heißt der Mittelpunkt oder das Centrum des Kreises.

Fig. 9.



Zum geometrischen Zeichnen des Kreises bedient man sich des Zirkels.

Die ganze in sich selbst zurückkehrende Kreislinie wird die Peripherie oder der Kreisumfang, und die von demselben begrenzte Fläche die Kreisfläche genannt.

Die Hälfte des Umfanges heißt insbesondere ein Halbkreis, der vierte Theil ein Quadrant, der sechste Theil ein Sextant, und der achte Theil ein Octant.

Eine Strecke, welche vom Mittelpunkte zu irgend einem Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein Halbmesser (radius) des Kreises, z. B. OA, OB, OG. Da alle Punkte der Peripherie vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, so sind alle Halbmesser eines Kreises einander gleich.

Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, oder in dem Umfange desselben, oder außerhalb des Kreises, je nachdem die Entfernung des Punktes vom Kreismittelpunkte kleiner, eben so groß, oder größer ist als der Halbmesser des Kreises.

Zwei Kreise, welche gleiche Halbmesser haben, heißen einander gleich. Zwei gleiche Kreise müssen, wenn sie mit ihren Mittelpunkten aufeinander gelegt werden, sich vollkommen decken, da sonst nicht alle Punkte ihrer Umfänge von dem Mittelpunkte denselben Abstand hätten.

Zwei Kreise, welche ungleiche Halbmesser haben, heißen ungleich.

§. 21. Eine Gerade hat mit der Kreislinie zwei Punkte, oder nur einen Punkt, oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich, je nachdem ihre Entfernung vom Kreismittelpunkte kleiner, eben so groß, oder größer ist als der Halbmesser des Kreises.

Eine Strecke AB, welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt eine Sehne. Eine Sehne AG, welche durch den Mittelpunkt geht, heißt ein Durchmesser. Ein Durchmesser des Kreises ist doppelt so groß als ein Halbmesser desselben; daher sind auch alle Durchmesser eines Kreises einander gleich.

Eine Gerade CD, welche durch die Verlängerung einer Sehne AB über ihre Endpunkte hinausgeht, heißt eine Secante des Kreises. Eine Secante schneidet die Kreislinie in zwei Punkten.

Dreht man die Secante so um den Punkt A, daß der zweite Schnittpunkt B immer näher gegen A rückt, bis er endlich mit diesem zusammenfällt, so geht die Secante in die Gerade EF über, welche mit der Kreislinie nur in dem Punkte A zusammentrifft.

Eine Gerade EF, welche mit der Kreislinie einen einzigen Punkt A gemeinsam hat und übrigens ganz außerhalb des Kreises liegt, heißt eine Tangente des Kreises, und der Punkt A der Berührungspunkt.

§. **22.** Ein Theil AB der Peripherie heißt ein Bogen (arcus).

Zwei Bogen desselben Kreises oder gleicher Kreise sind gleich, wenn sie aufeinander gelegt sich vollkommen decken; sonst sind sie ungleich.

Ein Theil AOBSA der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und dem dazwischenliegenden Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisausschnitt oder Sector. Ein Theil ABSA der Kreisfläche, welcher von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen begrenzt wird, heißt ein Kreisabschnitt oder Segment.

Jeder Durchmesser theilt die Peripherie in zwei gleiche Bogen und die Kreisfläche in zwei gleiche Abschnitte. Jede Sehne, welche kein Durchmesser ist, theilt die Peripherie in zwei ungleiche Bogen und die Kreisfläche in zwei ungleiche Abschnitte. Ohne besondere Hervorhebung ist immer der kleinere von beiden Bogen, sowie der kleinere von beiden Abschnitten als der zur Sehne gehörige anzunehmen.

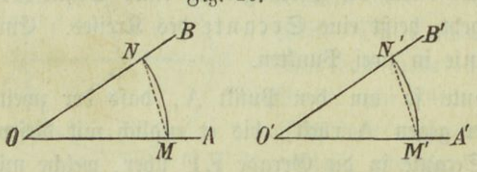
Sind zwei Bogen eines Kreises einander gleich, so müssen sie so aufeinander gelegt werden können, daſs ihre Endpunkte aufeinander fallen; dann müssen sich aber auch die zugehörigen Sehnen, als die Strecken zwischen jenen Endpunkten, decken. Sind umgekehrt zwei Sehnen eines Kreises gleich, so müssen sich, wenn man sie so aufeinander legt, daſs ihre Endpunkte zusammenfallen, auch die zugehörigen Bogen decken, da alle ihre Punkte vom Mittelpunkte des Kreises gleich weit abstehen.

Zu gleichen Bogen gehören daher in demselben Kreise (oder auch in gleichen Kreisen) gleiche Sehnen; und umgekehrt: zu gleichen Sehnen gehören gleiche Bogen.

§. **23.** Aufgaben.

1. Einen gegebenen Bogen zu übertragen, d. h. einen Bogen zu zeichnen, der einem aus dem Mittelpunkte O (Fig. 10) beschriebenen Bogen MN gleich ist.

Fig. 10.



Man ziehe die beliebige Gerade O′A′ und beschreibe aus O′ mit dem Halbmesser OM einen Bogen, welcher die Gerade O′A′ in M′ schneidet. Trägt man nun auf diesen Bogen von M′ aus die Sehne MN auf, so erhält man den

Punkt N', und ist dann Bogen M'N' = Bogen MN, weil beide zu gleichen Sehnen gehören.

2. Einen Punkt zu bestimmen, welcher von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat.

Beschreibt man aus dem gegebenen Punkte als Mittelpunkt mit dem gegebenen Abstande als Halbmesser einen Kreis, so genügen alle Punkte dieser Kreislinie den Bedingungen der Aufgabe.

Eine Aufgabe, welche unendlich viele verschiedene Auflösungen zuläfst, heißt unbestimmt, im Gegensatze zu einer bestimmten Aufgabe, welche entweder nur eine einzige Auflösung oder eine beschränkte, genau bestimmbare Anzahl von Auflösungen zuläfst.

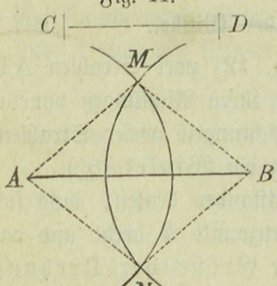
Die obige Aufgabe ist demnach unbestimmt.

Erfüllen alle Punkte, welche in einer Linie liegen, aber auch nur diese Punkte, eine gewisse Bedingung, so heißt die Linie der geometrische Ort jener Punkte.

Die Kreislinie ist also der geometrische Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand haben.

3. Einen Punkt zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten einen gegebenen Abstand hat.

Fig. 11.



Es seien (Fig. 11) A und B die gegebenen Punkte und CD der gegebene Abstand. Der geometrische Ort aller Punkte, welche von A den Abstand CD haben, ist ein aus A mit dem Halbmesser CD beschriebener Kreis; der geometrische Ort aller Punkte, die von B den Abstand CD haben, ist ein aus B mit dem Halbmesser CD beschriebener Kreis; der Punkt, welcher beide Bedingungen erfüllt, muss also dort liegen, wo sich die beiden Kreislinien schneiden. Da sich nun die beiden Kreislinien in zwei Punkten M und N schneiden, so gibt es im allgemeinen zwei verschiedene Punkte, welche der Aufgabe genügen.

Ist CD gleich der Hälfte der Strecke AB, so erhält man nur einen einzigen Punkt, welcher in der Mitte der AB liegt; ist CD kleiner als die Hälfte von AB, so erhält man gar keinen Punkt.

4. Einen Punkt zu bestimmen, welcher von zwei gegebenen Punkten verschiedene gegebene Abstände hat.

Die Auflösung ist derjenigen der Aufgabe 3 analog.

2. Messen der Kreisbogen.

§. 24. Um einen Kreisbogen zu messen, nimmt man einen Grad, d. i. den 360sten Theil des Kreisumfanges, als Einheit des Bogenmaßes an und untersucht, wie oft diese Einheit in dem zu messenden Bogen enthalten ist. Um auch kleinere Bogen messen zu können, wird ein Grad in 60 Minuten und eine Minute in 60 Secunden eingetheilt.

Die Grade, Minuten und Secunden eines Bogens bezeichnet man durch ^{0}, $'$, $''$; z. B.:

52 Grade 41 Minuten 12 Secunden $= 52^0\ 41'\ 12''$.

Aufgaben.

1. Wie viele Grade kommen auf den Halbkreis, wie viele auf den Quadranten, Sextanten, Octanten?

2. Wie viele Grade enthält der 3te, 5te, 9te, 10te Theil des Kreisumfanges?

3. Der wievielte Theil des Kreisumfanges ist ein Bogen von 10^0, 20^0, 30^0, 36^0, 40^0, 60^0, 90^0, 120^0?

III. Winkel.

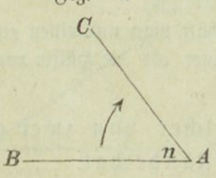
1. Entstehung und Bezeichnung der Winkel.

§. 25. Wenn von einem Punkte A (Fig. 12) zwei Strahlen AB und AC gezogen werden, so weichen sie in ihren Richtungen voneinander ab. Die Größe der Abweichung der Richtungen zweier Strahlen, die einen gemeinsamen Grenzpunkt haben, heißt ein Winkel ($\measuredangle$).

Einen Winkel kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich ein Strahl AB in einer Ebene um den Grenzpunkt A dreht und dadurch in eine zweite Lage AC gelangt; die Größe der Drehung gibt den Winkel an.

Zur Versinnlichung dieser Entstehungsweise des Winkels kann ein Zirkel benützt werden.

Fig. 12.



Die beiden Strahlen AB und AC, welche den Winkel bilden, nennt man die Schenkel, und den Punkt A, in welchem sie zusammentreffen, den Scheitel des Winkels.

Man bezeichnet einen Winkel entweder durch den Buchstaben am Scheitel oder durch einen kleinen Buchstaben, den man nahe an den Scheitel zwischen die beiden Schenkel setzt, oder durch drei Buchstaben, von denen zuerst der Buchstabe an dem einen Schenkel, dann der Buchstabe am Scheitel und zuletzt der Buchstabe an dem andern Schenkel genannt und geschrieben wird. Der Winkel in Fig. 12 heißt entweder der Winkel A, oder der Winkel n, oder der Winkel BAC oder CAB.

2. Größe der Winkel.

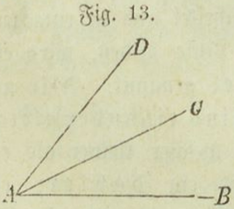
§. **26**. Die Größe eines Winkels hängt nicht von der Länge der Schenkel, sondern bloß von der Größe der Drehung ab, welche erforderlich ist, um den einen Schenkel in die Lage des andern zu bringen. bis daher

Zwei Winkel sind gleich, wenn zur Entstehung beider dieselbe Drehung erforderlich ist. Werden zwei gleiche Winkel so übereinander gelegt, daſs ihre Scheitel zusammenfallen und daſs ein Schenkel des einen längs einem Schenkel des andern zu liegen kommt, so müssen auch die zweiten Schenkel aufeinander fallen; die Winkel decken sich also.

Zwei Winkel sind ungleich, wenn zur Entstehung beider nicht dieselbe Drehung erforderlich ist. Welcher von zwei ungleichen Winkeln ist der größere, welcher der kleinere? Wie überzeugt man sich durch das Aufeinanderlegen zweier ungleicher Winkel, welcher von ihnen der größere und welcher der kleinere ist?

§. **27**. Dreht man in dem Winkel BAC (Fig. 13) den Schenkel AC um den Scheitel A von AB weg, bis er in die Lage AD kommt, so entsteht der Winkel BAD, welcher so groß ist, als die beiden Winkel BAC und CAD zusammengenommen; der Winkel BAD ist also die Summe der beiden Winkel BAC und CAD, also

Fig. 13.



$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD.$$

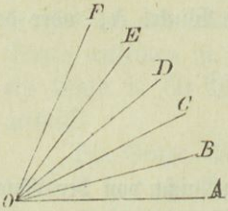
Wird in dem Winkel BAD der Schenkel AD um die Größe des Winkels CAD gegen AB gedreht, so daſs er in die Lage AC kommt, so bleibt noch der Winkel BAC übrig, welcher also die Differenz zwischen den beiden Winkeln BAD und CAD ist; somit

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD - \sphericalangle CAD.$$

Welche Lage müssen der Scheitel und die Schenkel zweier Winkel haben, um ihre Summe, und welche Lage, um ihre Differenz durch die Construction zu erhalten?

§. 28. Sind die Winkel AOB, BOC, COD, DOE, EOF (Fig. 14) einander gleich, so ist $\sphericalangle$ AOC 2mal so groß als AOB, $\sphericalangle$ AOD 3mal so groß, $\sphericalangle$ AOE 4mal, $\sphericalangle$ AOF 5mal so groß als AOB, oder $\sphericalangle AOC = 2 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOD = 3 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOE = 4 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOF = 5 \sphericalangle AOB$.

Fig. 14.



Umgekehrt ist der Winkel AOB die Hälfte von AOC, der dritte Theil von AOD, der vierte Theil von AOE und der fünfte Theil von AOF; oder $\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC = \frac{1}{3} \sphericalangle AOD = \frac{1}{4} \sphericalangle AOE = \frac{1}{5} \sphericalangle AOF$.

Aufgaben.

1. Nenne in Fig. 14 alle einfachen und zusammengesetzten Winkel, sowie die Theile, aus welchen die letzteren zusammengesetzt sind.

2. Welcher Winkel ist gleich:

a) der Summe BOC + COE?

b) der Differenz $\sphericalangle$ AOF — $\sphericalangle$ COF?

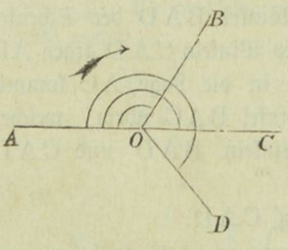
3. Zeichne nach dem Augenmaße drei Winkel, von denen der zweite 2mal, der dritte 5mal so groß ist als der erste.

4. Theile ebenfalls nach dem Augenmaße einen Winkel in zwei gleiche Theile, in 3, 4, 5, 6 gleiche Theile.

3. Gestreckte, hohle und erhabene Winkel.

§. 29. Ein Winkel, dessen Schenkel vom Scheitel aus in entgegengesetzten Richtungen liegen und daher eine gerade Linie bilden, wird ein gestreckter Winkel genannt. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Fig. 15.



Ein Winkel, welcher kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein hohler; ein Winkel, welcher größer als ein gestreckter ist, ein erhabener Winkel. 284 1856

In Fig. 15 ist AOC ein gestreckter, AOB ein hohler, AOD ein erhabener Winkel.

Zur Entstehung eines gestreckten Winkels wird genau die halbe

Umdrehung, zur Entstehung eines hohlen Winkels weniger, und zu der eines erhabenen Winkels mehr als die halbe Umdrehung des sich bewegenden Strahles erfordert.

Zu jedem hohlen Winkel gehört ein erhabener auf der anderen Seite der Schenkel; übrigens ist, wenn von dem Winkel zweier Strahlen gesprochen wird, stets der hohle zu verstehen, wenn man nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt.

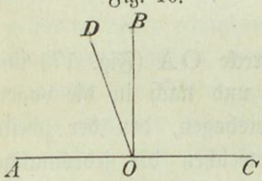
Ein Winkel, welcher durch eine ganze Umdrehung des Strahles entsteht, heißt ein voller. Ein voller Winkel ist doppelt so groß als ein gestreckter. Ein hohler Winkel bildet mit dem auf der andern Seite seiner Schenkel liegenden erhabenen stets einen vollen Winkel.

4. Rechte, spitze und stumpfe Winkel.

§. **30**. Die hohlen Winkel werden in rechte, spitze und stumpfe eingetheilt.

Ein rechter Winkel ist die Hälfte eines gestreckten, er erfordert zu seiner Erzeugung genau den vierten Theil einer Umdrehung des sich bewegenden Schenkels. Er wird gewöhnlich durch den Buchstaben R bezeichnet. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Fig. 16.



Ein Winkel, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt spitz, und ein Winkel, welcher größer als ein rechter, aber kleiner als ein gestreckter ist, stumpf.

Wenn in Fig. 16 der $\measuredangle$ AOB = BOC ist, so ist jeder die Hälfte des gestreckten Winkels AOC, also jeder ein rechter Winkel; AOD ist ein spitzer, COD ein stumpfer Winkel.

Spitze und stumpfe Winkel werden im Gegensatze zu dem rechten auch schiefe Winkel genannt. / bis hieher

Aufgaben.

1. Was für Winkel kommen a) am Würfel, b) am Tetraëder vor?
2. Suche an den Gegenständen im Zimmer rechte Winkel auf.
3. Um wie viel Uhr bilden die beiden Zeiger einer Uhr einen rechten, um wie viel Uhr einen gestreckten Winkel?
4. Zeichne a) einen rechten Winkel, b) einen spitzen, c) einen stumpfen mit gleichen Schenkeln.
5. Zeichne einen rechten Winkel, von dem ein Schenkel das Dreifache des andern sei.

6. Zeichne einen stumpfen Winkel und stelle ihn als die Summe dreier Winkel dar.

§. **31**. Bilden zwei Gerade miteinander einen rechten Winkel, so sagt man, sie stehen aufeinander senkrecht oder normal, und jede heißt in Beziehung auf die andere eine Senkrechte, oder Normale oder ein Perpendikel. Bilden zwei Gerade mit einander einen schiefen Winkel, so sagt man: sie stehen schief aufeinander. In Fig. 16 steht BO senkrecht auf AO, was man so schreibt: BO $\perp$ AO; dagegen steht DO schief auf AO oder auf CO.

Aufgaben.

1. Wie stehen die Kanten a) eines Würfels, b) eines Tetraëders aufeinander?

2. Gib an Gegenständen im Schulzimmer Gerade an, welche aufeinander a) senkrecht, b) schief stehen.

3. Zeichne eine Gerade und ziehe zu derselben von verschiedenen außer ihr liegenden Punkten senkrechte Gerade.

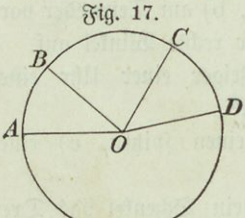
5. Messen der Winkel.

§. **32**. Wenn sich in einer Ebene die Strecke OA (Fig. 17) um den einen Endpunkt O so dreht, dass sie nach und nach in die Lagen OB, OC, OD... kommt, so wird der Kreisbogen, den der zweite Endpunkt beschreibt, und ebenso der Winkel, welchen die jedesmalige Lage der bewegten Strecke mit ihrer Anfangslage bildet, um so größer, je weiter die Drehung fortgeschritten ist. Die ganze Umdrehung gibt den größten Kreisbogen, d. i. die ganze Peripherie, und den größten am Mittelpunkte möglichen Winkel, d. i. den vollen Winkel.

Ein Winkel AOB, dessen Schenkel Halbmesser eines Kreises sind, heißt ein Centriwinkel.

Sind die Centriwinkel AOB und COD einander gleich, so sind auch die dazu gehörigen Bogen AB und CD gleich. Legt man nämlich den Winkel COD so über den Winkel AOB, dass der Scheitel O auf O, und der Schenkel OC auf OA zu liegen kommt, so müssen wegen der Gleichheit der Winkel auch die Schenkel OD und OB aufeinander fallen; dann müssen sich aber auch die Bogen CD und AB decken, weil alle Punkte des einen Bogens dieselbe Entfernung von O haben, als die Punkte des andern.

Fig. 17.



Ebenso kann man zeigen, dass, wenn die Bogen AB und CD gleich sind, auch die Winkel AOB und COD gleich sein müssen.

Daraus folgt:

a) Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen desselben.

b) Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Centriwinkel.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel zu übertragen.

Die Auflösung ist übereinstimmend mit der in §. 23 angeführten Lösung der Aufgabe, einen gegebenen Bogen zu übertragen.

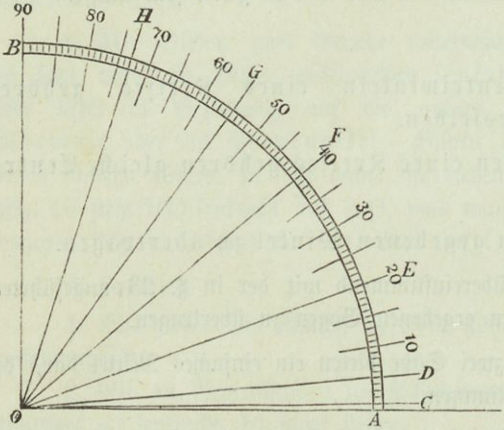
§. **33**. Die letzten zwei Sätze bieten ein einfaches Mittel dar, die Größe der Winkel zu bestimmen.

Theilt man die Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile, so dass jeder Theil ein Bogengrad ist, und zieht zu jedem Theilungspunkte einen Halbmesser, so erhält man 360 Centriwinkel, welche zusammen einen vollen Winkel betragen, und, da sie zu gleichen Bogen gehören, unter einander gleich sind. Jeder solche Winkel, der zu einem Bogengrade gehört, wird auch ein Grad, und zwar ein Winkelgrad genannt. Ein Winkelgrad, d. i. der 360ste Theil eines vollen Winkels, bildet nun die Einheit des Winkelmaßes; er wird in 60 Winkelminuten, und jede Winkelminute in 60 Winkelsecunden eingetheilt. Um einen Winkel zu messen, sollte man eigentlich untersuchen, wie oft ein Winkelgrad in dem zu messenden Winkel enthalten ist. In der That aber geschieht diese Untersuchung nicht unmittelbar, sondern es wird für den Winkel der dazugehörige Kreisbogen als Maß angenommen, indem man dabei schließt: Jeder Winkel hat eben so viele Winkelgrade, Winkelminuten und Winkelsecunden, als der aus seinem Scheitel beschriebene Kreisbogen Bogengrade, Bogenminuten, Bogensecunden enthält.

Die Grade, Minuten und Secunden bei den Winkeln werden, so wie die Bogengrade und ihre Unterabtheilungen, durch ^{0}, $'$, $''$ bezeichnet.

Ist der Bogen AB (Fig. 18), welcher den vierten Theil des Kreisumfanges vorstellen soll, in 90 gleiche Theile getheilt, und denkt man sich jeden Theilungspunkt mit dem Mittelpunkt O verbunden, so bezeichnet die Zahl, wie viele Grade jeder Bogen hat, zugleich auch die Anzahl der Winkelgrade des dazu gehörigen Winkels.

Fig. 18.



So ist AOC ein Winkel von einem Grade, oder ∡ AOC = 1°, der Winkel AOD ein Winkel von 5 Graden ∡ AOE = 20°, ∡ AOF = 40°, ∡ AOG = 55°, ∡ AOH = 73°, ∡ AOB = 90°. Hiernach hat ein voller Winkel 360°, ein gestreckter 180°, ein hohler weniger als 180°, ein erhabener mehr als 180°, ferner ein rechter Winkel 90°, ein spitzer weniger als 90°, ein stumpfer mehr als 90°, aber weniger als 180°.

Zwei Winkel, deren Summe 90° beträgt, heißen complementäre Winkel, z. B. die Winkel von 60° und 30°. Von zwei complementären Winkeln ist jeder das Complement des andern. Gleiche Winkel haben auch gleiche Complemente; und umgekehrt.

Zwei Winkel, deren Summe 180° beträgt, heißen supplementäre Winkel, z. B. die Winkel von 120° und 60°. Von zwei supplementären Winkeln ist jeder das Supplement des andern. Gleiche Winkel haben auch gleiche Supplemente; und umgekehrt.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Winkel, den der Stundenzeiger einer Uhr in 1, 2, 5, 12 Stunden beschreibt?

2. Wie groß ist der Winkel, den der Minutenzeiger in 1 Stunde, in 1, 5, 10, 30 Zeitminuten beschreibt?

3. Wie groß ist der Winkel, den die beiden Zeiger einer Uhr um 1, 2, 5, 6, 8, 9, 11 Uhr bilden?

4. Suche die Summe der Winkel 37° 48′ 35″, 29° 39′ und 78° 9′ 55″.

5. Wie groß ist die Differenz der Winkel 128° 15′ 31″ und 69° 42′ 18″?

6. Wie groß ist das Complement eines Winkels von a) 35°, b) 48° 12′, c) 75° 8′ 30″?

7. Wie groß ist das Supplement eines Winkels von a) 55°, b) 96° 20′, c) 137° 51′ 28″?

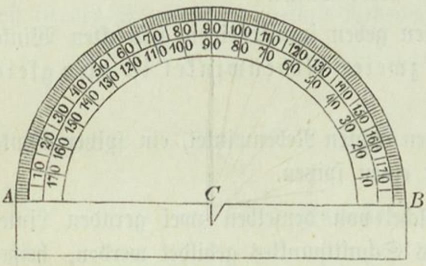
8. Bestimme das 2-, 3-, 4-, 5fache von 18° 35′, von 9° 12′ 48″.

9. Suche die Hälfte, den dritten, vierten, fünften Theil von 72° 27′, von 58° 20′.

10. Untersuche, wie oft ein Winkel von a) 8°, b) 15′ 28″, c) 12° 35′ 49″ bezüglich in einem Winkel von a) 96°, b) 108° 16′, c) 100° 46′ 32″ enthalten ist.

§. **34.** Zum Messen und zum Zeichnen der Winkel bedient man sich, wenn keine große Genauigkeit erfordert wird, des Transporteurs (Fig. 19), d. i. eines in Grade eingetheilten Halbkreises, bei welchem die Kante AB den Durchmesser und der Punkt C am Einschnitte den Mittelpunkt vorstellt.

Fig. 19.



Aufgaben.

1. Wie wird mit dem Transporteur ein Winkel auf dem Papier gemessen?

2. Zeichne verschiedene Winkel, schätze ihre Größe zuerst nach dem Augenmaße ab und miss dann dieselben mit dem Transporteur.

3. Ziehe von einem Punkte einer Geraden auf einer Seite derselben mehrere Strahlen, miss die dadurch entstehenden nebeneinander liegenden Winkel und addiere sie. Wie groß ist die Summe? Wie groß muss die richtige Summe sein?

4. Ziehe von einem Punkte aus drei, vier oder mehrere Strahlen, miss alle rings um den Punkt gelegenen Winkel und suche ihre Summe.

5. Ziehe durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, Gerade und bestimme die von diesen Geraden gebildeten Winkel mit Hilfe des Transporteurs.

6. Wie kann man mit dem Transporteur einen Winkel zeichnen, der eine bestimmte Anzahl Grade hat?

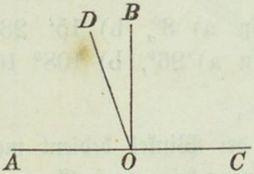
7. Zeichne einen Winkel von 20°, ferner einen Winkel von 30°, 50°, 90°, 15°, 65°, 24°, 79°, 81°, 100°, 150°, 142°, 180°, 209°, 270°, 326°.

8. Zeichne einen spitzen und einen stumpfen Winkel, und sodann mit Hilfe des Transporteurs zu jedem einen gleichen Winkel.

6. Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

§. 35. Zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinsamen Schenkel haben, und deren beide anderen Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen eine gerade Linie bilden, heißen Nebenwinkel. Verlängert man einen Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so erhält man dessen Nebenwinkel. So ist (Fig. 20) AOB ein Nebenwinkel von BOC, ebenso sind AOD und COD Nebenwinkel.

Fig. 20.

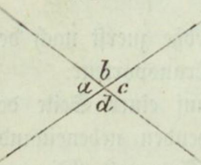


Zwei Nebenwinkel zusammen geben immer einen gestreckten Winkel oder zwei Rechte; die Summe zweier Nebenwinkel ist also gleich zwei Rechten oder 180°.

Ein rechter Winkel hat einen rechten Nebenwinkel, ein spitzer Winkel einen stumpfen und ein stumpfer einen spitzen.

§. 36. Zwei Winkel, welche von denselben zwei geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten ihres Schnittpunktes gebildet werden, heißen Scheitelwinkel. Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus, so erhält man den Scheitelwinkel desselben. In Fig. 21 ist a der Scheitelwinkel von c, und b der Scheitelwinkel von d.

Fig. 21.



Da zwei Scheitelwinkel von denselben zwei Geraden gebildet werden, und diese auf der einen Seite ihres Schnittpunktes eben so von einander abweichen als auf der andern, so folgt:

Je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt auch aus der oben von den Nebenwinkeln angeführten Eigenschaft. Da b ein Nebenwinkel sowohl von a als von c ist, so hat man

$$a + b = 2R,$$
$$b + c = 2R.$$

Sind aber zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch unter sich gleich; also ist

$$a + b = b + c.$$

Subtrahiert man $\underline{\quad b = b,}$ so bleibt

$$a = c;$$

denn Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.

Zeige auf dieselbe Art, dass auch b = d ist.

Wenn man von den vier Winkeln, a, b, c, d den einen kennt, so kann man daraus auch die übrigen drei bestimmen.

Aufgaben.

1. Berechne den Nebenwinkel von 10^0, 39^0, 63^0, 85^0, 100^0, $15^0\ 48'$, $56^0\ 30'$, $128^0\ 24'$, $68^0\ 6'\ 35''$, $102^0\ 51'\ 55''$.

2. In Fig. 21 sei der Winkel a = 75^0; wie groß ist c, wie groß sind b und d?

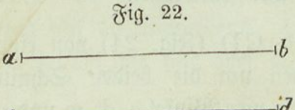
3. Ein Winkel beträgt a) 81^0, b) $17^0\ 38'$, c) $131^0\ 18'\ 47''$; wie groß ist der Scheitelwinkel seines Nebenwinkels?

IV. Parallele Linien.

1. Parallele und nicht parallele Gerade.

§. 37. Zwei Gerade, welche in derselben Ebene liegen und, wenn wenn man sie noch so weit verlängert, nie zusammentreffen, heißen parallel.

Fig. 22.



Dass die Geraden ab und cd (Fig. 22) parallel sind, drückt man so aus: ab || cd. Zwei parallele Gerade können entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtungen haben.

Aus dem Begriffe der parallelen Linien folgt:

1. Durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt kann nur eine Parallele zu derselben gezogen werden.

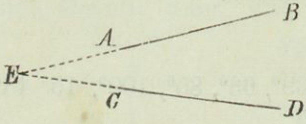
2. Zwei gerade Linien, welche zu derselben dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel.

3. Schneidet eine Gerade die eine von zwei Parallelen, so schneidet sie auch die andere.

4. Die Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden ändern sich nicht, wenn die eine parallel zu sich selbst fortschreitet.

Zwei Gerade derselben Ebene, welche nicht parallel sind, müssen hinreichend verlängert in einem Punkte zusammentreffen; wie AB und CD (Fig. 23). Zwei nichtparallele Gerade heißen in der Richtung nach dem gemeinsamen Schnittpunkte hin convergierend, und nach der entgegengesetzten Richtung divergierend.

Fig. 23.



Aufgaben.

1. Welche Kanten eines Würfels sind parallel, welche nichtparallel?

2. Welche Lage gegeneinander haben die Kanten a) eines Tetraëders, b) eines Pyramidenstumpfes?

3. Welche Lage gegen einander haben die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen?

4. Nenne verschiedene Gegenstände, an denen a) parallele, b) nichtparallele Linien vorkommen.

5. Zeichne eine Gerade und zu ihr in beliebiger Entfernung eine Parallele.

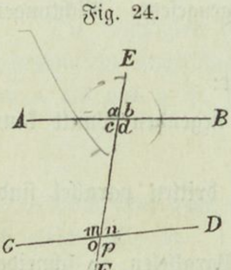
6. Zeichne eine Gerade und zu ihr in gleichen Entfernungen vier Parallele.

7. Wie können mit Hilfe der sogenannten Winkelbrettchen Parallele gezogen werden?

2. Gegenwinkel, Wechselwinkel und Anwinkel.

§. 38. Werden die Geraden AB und CD (Fig. 24) von einer dritten Geraden EF geschnitten, so entstehen um die beiden Schnittpunkte acht Winkel. Die vier Winkel c, d, m und n, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere Winkel, die anderen vier a, b, o und p äußere Winkel.

Fig. 24.



Ein äußerer und ein innerer Winkel an verschiedenen Scheiteln und auf derselben Seite der schneidenden Geraden heißen Gegenwinkel; wie a und m, b und n, c und o, d und p.

Zwei äußere Winkel, oder auch zwei innere Winkel an verschiedenen Scheiteln und auf den entgegengesetzten Seiten der schneidenden Geraden heißen Wechselwinkel; wie a und p, b und o, c und n, d und m.

Zwei innere oder auch zwei äußere Winkel an verschiedenen Scheiteln und auf derselben Seite der Schnittlinie nennt man *Anwinkel*. So sind a und o, b und p äußere, c und m, d und n innere Anwinkel.

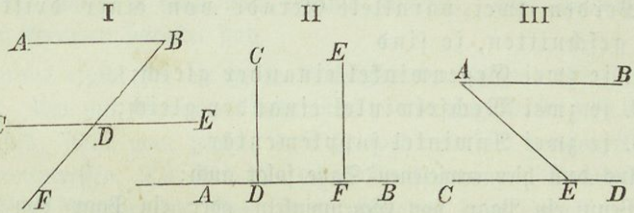
Aufgaben.

1. Suche in Fig. 24 zu dem Winkel a den Scheitelwinkel, die beiden Nebenwinkel, den Gegen-, den Wechsel- und den Anwinkel auf; ebenso zu dem Winkel b, zu c, d, m, n, o, p.

2. Es sei der Winkel a $= 98^0$ und m $= 110^0$; wie groß sind dann die übrigen Winkel?

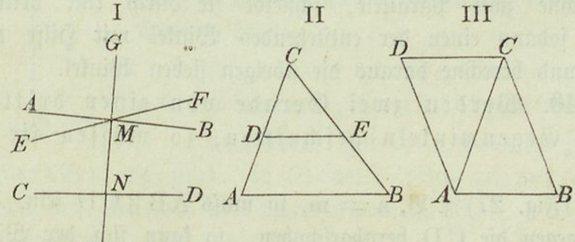
3. Suche die Gegen-, Wechsel- und Anwinkel in Fig. 25, I, II und III auf.

Fig. 25.



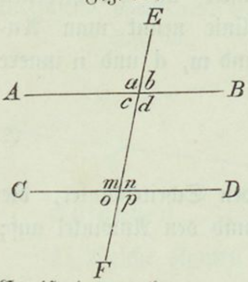
4. Gib ferner die Gegen-, Wechsel- und Anwinkel in Fig. 26 an, und zwar in I, indem einmal die AB und CD, und dann die EF und CD als die geschnittenen Geraden angenommen werden; in II zuerst in Bezug auf die Schneidende AC und dann in Bezug auf die Schneidende BC; in III für alle dort möglichen Fälle.

Fig. 26.



§. **39.** Besonders merkwürdig ist die Beschaffenheit der Gegen-, Wechsel- und Anwinkel, wenn die beiden geschnittenen Geraden AB und CD (Fig. 27) parallel sind.

Fig. 27.



Schreitet die Gerade AB parallel zu sich selbst längs der EF fort, so bildet sie mit dieser stets dieselben vier Winkel; es fallen daher, wenn AB in die Lage CD gelangt, je zwei Gegenwinkel auf einander, sind also einander gleich; je zwei Wechselwinkel gehen in Scheitelwinkel über, sind also auch einander gleich; je zwei Anwinkel endlich werden zu Nebenwinkeln, betragen also zusammen 2R.

Es ist demnach

1) $a = m$,	2) $a = p$,	3) $a + o = 2R$,
$b = n$,	$b = o$,	$b + p = 2R$,
$c = o$,	$c = n$,	$c + m = 2R$,
$d = p$,	$d = m$,	$d + n = 2R$; d. h.;

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten Geraden geschnitten, so sind

1. je zwei Gegenwinkel einander gleich;
2. je zwei Wechselwinkel einander gleich;
3. je zwei Anwinkel supplementär.

Aus dem hier erwiesenen Satze folgt auch:

Wenn ein Paar von Gegenwinkeln oder ein Paar von Wechselwinkeln ungleich ist, oder wenn ein Paar von Anwinkeln nicht supplementär ist, so können die beiden geschnittenen Geraden nicht parallel sein; sie müssen nach derjenigen Seite, wo die Summe der inneren Anwinkel kleiner als 2R ist, hinreichend verlängert in einem Punkte zusammentreffen.

Aufgabe.

Zeichne zwei Parallele, schneide sie durch eine dritte Gerade, bestimme sodann einen der entstehenden Winkel mit Hilfe des Transporteurs und berechne daraus die übrigen sieben Winkel.

§. **40**. Werden zwei Gerade von einer dritten unter gleichen Gegenwinkeln geschnitten, so müssen sie parallel sein.

Ist (Fig. 27) z. B. $a = m$, so muss $AB \parallel CD$ sein. Denn, wird die AB gegen die CD herabgeschoben, so kann sich der Winkel a nur dann gleich bleiben, wenn bei dieser Verschiebung AB die Richtung nicht ändert, d. i. wenn AB mit der ursprünglichen Lage parallel bleibt; es wird daher auch die letzte Lage CD, damit $m = a$ sei, mit der anfänglichen parallel sein müssen.

Da bei dem Durchschnitte zweier Geraden von einer dritten die drei Eigenschaften, daſs die Gegenwinkel gleich, die Wechselwinkel gleich und je zwei Anwinkel supplementär sind, nicht abgesondert vorkommen können, sondern, sobald die eine dieser Eigenschaften eintritt, immer auch die andern zwei stattfinden müssen; so ergeben sich aus dem letzten Satze auch noch folgende zwei Sätze:

Werden zwei Gerade von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten, so müssen sie parallel sein.

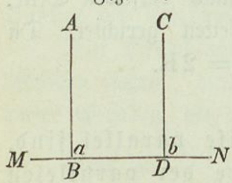
Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, daſs ein Paar von Anwinkeln supplementär sind, so müssen die geschnittenen Geraden parallel sein.

Ist daher bekannt, daſs entweder ein Paar von Gegenwinkeln oder ein Paar von Wechselwinkeln gleich ist, oder daſs ein Paar von Anwinkeln Supplemente sind, so kann man daraus schließen, daſs die beiden geschnittenen Geraden parallel sind.

Daraus ergibt sich die große Wichtigkeit der Gegen-, Wechsel- und Anwinkel. Um mit Gewiſsheit behaupten zu können, daſs zwei Gerade parallel sind, sollte man zeigen, daſs sie fort und fort verlängert, doch nie zusammentreffen. Da aber eine solche Verlängerung nicht ausführbar ist, so wird die parallele Lage zweier Geraden ganz einfach durch die Winkel entschieden, welche entstehen, wenn diese Geraden von einer dritten geschnitten werden.

§. **41**. Es sei (Fig. 28) $AB \perp MN$ und $CD \perp MN$. Da $a = R$, $b = R$, also $a = b$ ist, müssen die beiden Geraden AB und CD, welche von der dritten MN geschnitten, mit ihr gleiche Gegenwinkel bilden, parallel sein. Daraus folgt:

Fig. 28.



Sind zwei gerade Linien zu einer dritten normal, so sind sie parallel.

Umgekehrt: Ist eine Gerade zu einer anderen Geraden normal, so ist auch jede zu der ersteren Parallele zu der zweiten Geraden normal.

Denn: ist $AB \perp MN$ und $CD \parallel AB$, daher $a = R$ und $b = a$ (als Gegenwinkel), so muſs auch $b = R$, d. i. $CD \perp MN$ sein.

§. **42**. 1. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden kann zu dieser nur **eine** Normale gezogen werden.

Denn ließe sich von dem gegebenen Punkte auf die Gerade noch eine zweite Normale ziehen, so hätten die beiden Normalen diesen Punkt gemeinschaftlich und müßten nach §. 41 zugleich parallel sein, was einen Widerspruch enthält.

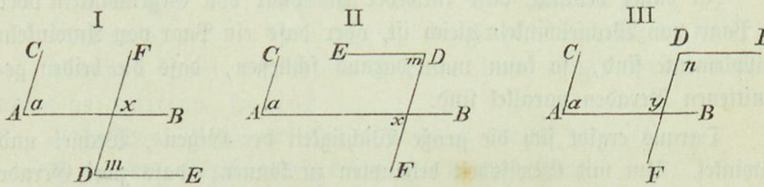
Ebenso folgt:

2. In einem Punkte einer Geraden kann auf diese nur **eine** Normale errichtet werden.

3. Winkel, deren Schenkel parallel oder zu einander normal sind.

§. **43.** Es sei (Fig. 29) AB || DE und AC || DF.

Fig. 29.



In I sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m gleichgerichtet und ist, da Winkel a = x und m = x als Gegenwinkel, auch a = m.

In II sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m entgegengesetzt gerichtet; da a dem Winkel x als Wechselwinkel und m dem Winkel x als Gegenwinkel gleich ist, so ist auch in diesem Falle a = m.

In III haben die Winkel a und n auch paarweise parallele Schenkel, es ist jedoch nur ein Paar paralleler Schenkel nach derselben Seite, das andere Paar aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet. Da a + y = 2R und n = y ist, so ist auch a + n = 2R.

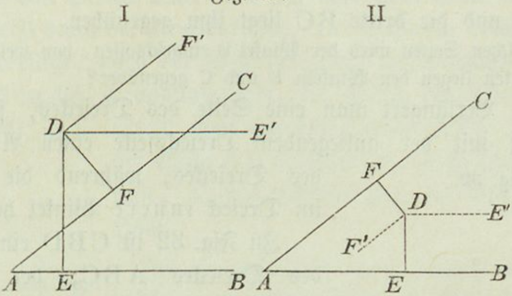
Daraus folgt:

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise parallel sind, sind a) einander gleich, wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite oder beide Paare nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, dagegen b) supplementär, wenn nur ein Paar nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist. / bis hieher.

§. **44.** Es sei (Fig. 30) DE ⊥ AB und DF ⊥ AC. Man drehe die Schenkel DE und DF des Winkels EDF als eine feste

Verbindung um den Scheitel D um 90°, so daſs sie in die Lage DE′ und DF′ kommen.

Fig. 30.



In I haben die Winkel E′DF′ und BAC paarweise parallele und nach derselben Seite gerichtete Schenkel; also ist ∡E′DF′ = ∡BAC, folglich auch ∡EDF = ∡BAC. — In II sind auch die Schenkel der Winkel E′DF′ und BAC paarweise parallel, jedoch ein Paar nach derselben, das andere Paar nach entgegengesetzten Seiten gerichtet; also ist ∡E′DF′ + ∡BAC = 2R, folglich auch ∡EDF + ∡BAC = 2R.

Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise zu einander normal sind, sind entweder gleich oder supplementär.

Wann findet die erste und wann die zweite Beziehung statt?

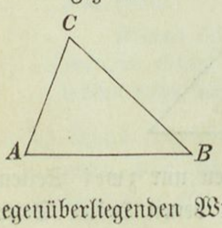
V. Dreiecke.

1. Erklärungen.

§. **45.** Jede von drei Strecken begrenzte ebene Figur wird ein **Dreieck** (△) genannt; die drei Strecken heiſsen die **Seiten** und ihre Summe der **Umfang** des Dreieckes.

Ein Dreieck entsteht, indem man drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, durch Gerade verbindet, oder auch durch Vereinigung dreier Geraden, die nicht durch denselben Punkt gehen.

Fig. 31.



Ein **Dreieck** hat drei Seiten, drei Winkel und drei Eckpunkte. Im Dreieck ABC (Fig. 31) sind AB, AC und BC die Seiten, A, B und C die Winkel, und ihre Scheitel die Eckpunkte. bis daher

Jede Seite hat zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel; z. B. die Seite AB hat die beiden anliegenden Winkel A und B und den gegenüberliegenden Winkel C.

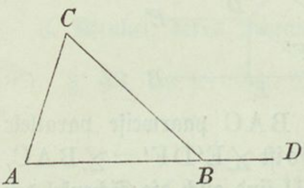
Welche Winkel liegen an der Seite AC, welche an der BC? Welche Winkel liegen diesen Seiten gegenüber?

Jeder Winkel, z. B. A, wird von zwei Seiten AB und AC eingeschlossen und die dritte BC liegt ihm gegenüber.

Von welchen Seiten wird der Winkel B eingeschlossen, von welchen der Winkel C? Welche Seiten liegen den Winkeln B und C gegenüber?

§. **46**. Verlängert man eine Seite des Dreieckes, so bildet diese Verlängerung mit der anliegenden Dreiecksseite einen Außenwinkel des Dreieckes, während die drei Winkel im Dreieck innere Winkel heißen.

Fig. 32.



In Fig. 32 ist CBD ein Außenwinkel des Dreieckes ABC; der Nebenwinkel ABC ist der ihm anliegende, die Winkel BAC und ACB sind die ihm nicht anliegenden inneren Winkel des Dreieckes.

Verlängere jede Seite des Dreieckes nach beiden Seiten; wie viele Außenwinkel werden dadurch gebildet? Wie sind je zwei von ihnen beschaffen? Nenne zu jedem Außenwinkel den inneren anliegenden und die beiden nicht anliegenden Winkel.

2. Seiten des Dreieckes.

§. **47**. Jede Seite eines Dreieckes ist kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten.

Dieser Satz ist von selbst klar; denn der Umweg über AC und CB (Fig. 31), um von A nach B zu kommen, ist offenbar länger als der gerade Weg über AB; also $AB < AC + BC$.

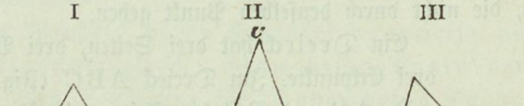
Aus $AB < AC + BC$ oder $AC + BC > AB$ folgt auch

$$AC > AB - BC \text{ und } BC > AB - AC, \text{ d. h.}$$

Jede Seite eines Dreieckes ist größer als die Differenz der beiden anderen Seiten.

Mit Rücksicht auf die Länge der Seiten kann es dreierlei Dreiecke geben: gleichseitige (Fig. 33, I), in denen alle drei Seiten

Fig. 33.

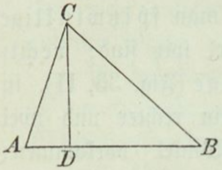


gleich sind; gleichschenklige (Fig. 33, II), in denen nur zwei Seiten gleich sind; und ungleichseitige (Fig. 33, III), in denen keine Seite einer andern gleich ist.

Zeichne a) ein gleichseitiges, b) ein gleichschenkliges, c) ein ungleichseitiges Dreieck. (§. 23)

§. **48**. Ein Dreieck kann man sich über jeder Seite errichtet denken; diese Seite heißt dann die Grundlinie. Der Eckpunkt, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, wird der Scheitel, und die Normale, welche man vom Scheitel zu der Grundlinie zieht, die Höhe des Dreieckes genannt.

Fig. 34.



Stellt man sich das Dreieck ABC (Fig. 34) über der Seite AB errichtet vor, so ist AB die Grundlinie, C der Scheitel und die Normale CD die Höhe.

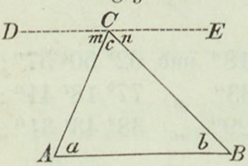
Im gleichschenkligen Dreiecke wird immer die dritte verschiedene Seite als Grundlinie angenommen; die zwei gleichen Seiten heißen Schenkel des Dreieckes.

Nenne in Fig. 33, II die Grundlinie, den Scheitel und die Schenkel.

3. Winkel des Dreieckes.

§. **49**. Um zu erfahren, wie groß die Summe der Winkel a, b, c eines beliebigen Dreieckes ABC (Fig. 35) sei, wird man sie alle nebeneinander um denselben Scheitel s herum darstellen. Zu diesem

Fig. 35.



Ende zieht man durch C eine Gerade DE parallel mit AB, wodurch man die neuen Winkel m und n erhält; der Winkel m ist dann als Wechselwinkel gleich a und der Winkel n als Wechselwinkel gleich b. Die Summe der drei Winkel a, b, c ist daher so groß als die Summe der Winkel m, c, n.

In jedem Dreiecke ist daher die Summe der drei inneren Winkel gleich zwei Rechten oder 180°.

§. **50**. Aus diesem wichtigen Lehrsatze folgt:

a) Die Summe zweier Dreieckswinkel muss stets kleiner als 2R sein.

Können in einem Dreiecke zwei rechte Winkel, oder zwei stumpfe Winkel, oder ein rechter und ein stumpfer Winkel vorkommen? In jedem Dreiecke müssen daher wenigstens zwei Winkel spitz sein.

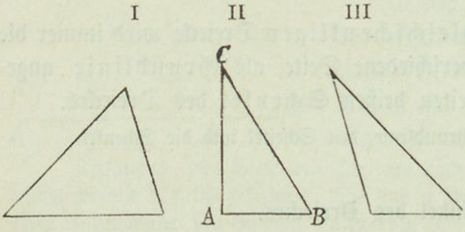
b) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt, so findet man den dritten, indem man die Summe der zwei bekannten Winkel von 180° subtrahiert.

c) Sind zwei Winkel eines Dreieckes gleich zweien Winkeln eines andern Dreieckes, so ist auch der dritte Winkel des einen Dreieckes gleich dem dritten Winkel des zweiten Dreieckes.

d) Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe der beiden spitzen Winkel gleich einem Rechten. Ist daher der eine spitze Winkel bekannt, so kann man auch den andern finden.

Nach der Größe der Winkel unterscheidet man spitzwinklige Dreiecke (Fig. 31, I), in denen alle drei Winkel spitz sind; rechtwinklige (Fig. 33, II), in denen ein rechter und zwei spitze Winkel vorkommen; und stumpfwinklige (Fig. 36, III), welche einen stumpfen und zwei spitze Winkel enthalten. Im rechtwinkligen Dreiecke heißt die Seite BC, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, die Hypotenuse; die beiden anderen Seiten AB und AC, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten.

Fig. 36.



Aufgaben.

1. Zwei Winkel eines Dreieckes sind:

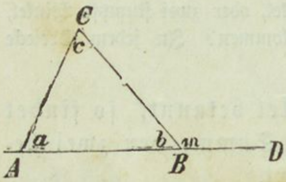
a) 37^0	und 71^0;	d)	$15^0\ 32'\ 18''$	und	$62^0\ 50'\ 57''$;
b) 82^0	" 48^0;	e)	$64^0\ 47'\ 33''$	"	$77^0\ 18'\ 41''$;
c) $50^0\ 48'$	" $17^0\ 39'$;	f)	$108^0\ 5'\ 29''$	"	$38^0\ 43'\ 31''$;

wie groß ist der dritte Winkel?

2. Der eine spitze Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes ist
a) 63^0, b) 37^0, c) $27^0\ 15'$, d) $58^0\ 12'\ 48''$;
wie groß ist der andere?

§. 51. Addiert man (Fig. 37) zu dem Winkel b den Außenwinkel m als Nebenwinkel, so erhält man 180^0; dieselbe Summe erhält man auch, wenn zu b die beiden Winkel a und c addiert werden. Es muss daher der Außenwinkel m eben so groß sein als die Winkel a und c zusammengenommen. Daraus folgt:

Fig. 37.



Ein Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden inneren Winkel.

Ein Außenwinkel ist daher stets größer als ein innerer, ihm nicht anliegender Winkel.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Außenwinkel eines Dreieckes, wenn die beiden inneren, ihm nicht anliegenden Winkel 38° 35′ 28″ und 69° 18′ 46 betragen?

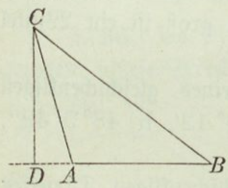
2. Der Außenwinkel eines Dreieckes ist 86°, und einer der inneren, ihm nicht anliegenden Winkel 57° 48′; wie groß ist jeder der beiden anderen Winkel des Dreieckes?

3. In einem rechtwinkligen Dreiecke beträgt der eine Außenwinkel an der Hypotenuse a) 106°, b) 118° 50′, c) 141° 37′ 42″; wie groß ist der zweite Außenwinkel an der Hypotenuse?

4. Wenn man an jedem Eckpunkte eines Dreieckes einen Außenwinkel entstehen läßt, wie groß ist dann die Summe dieser Außenwinkel?

§. 52. Wird in einem stumpfwinkligen Dreiecke BAC (Fig. 38) eine der Seiten, welche den stumpfen Winkel bilden, als Grundlinie angenommen, z. B. die AB, so kann die von dem Scheitel auf die Grundlinie gezogene Senkrechte nicht innerhalb des Dreieckes fallen, weil man sonst ein Dreieck mit einem stumpfen und einem rechten Winkel erhielte, was nicht möglich ist; die Höhe CD wird also außerhalb des Dreieckes liegen, und es muss die Grundlinie AB über A hinaus verlängert werden.

Fig. 38.

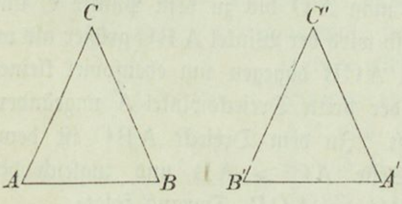


Zeichne ein spitzwinkliges, ein stumpfwinkliges und ein rechtwinkliges Dreieck und die darin möglichen Höhen, und gib dann alle Fälle in Bezug auf die Lage der Höhe an.

4. Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln eines Dreieckes.

§. 53. 1. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 39) die Seite AC = BC.

Fig. 39.



Stellt man sich das Dreieck ABC noch einmal, und zwar umgewendet als A′ B′ C′ vor, so kann man das letztere so auf das erstere legen, dass sich die Winkel C und C′ decken; dann fällt der Punkt B′ auf A, der Punkt A′ auf B, die Seite B′ A′ auf AB, und ist deshalb der Winkel B′ = A; B′ ist aber = B, also ist auch B = A. Hieraus folgt:

Gleichen Seiten eines Dreieckes liegen gleiche Winkel gegenüber.

2. Ist umgekehrt in dem Dreiecke ABC der Winkel B = A, so kann auf gleiche Weise, indem man die Seite B'A' mit der Seite AB sich decken läſst, gezeigt werden, daſs die Seite AC = BC sein muſs; d. h.:

Gleichen Winkeln eines Dreieckes liegen gleiche Seiten gegenüber.

Aus dem ersten Satze folgt:

a) In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

b) In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich.

Aufgaben.

1. Wie groß ist jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes?

2. Wie groß ist jeder Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn der Winkel am Scheitel ein rechter ist?

3. Der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes ist a) $23^0\,35'$, b) $65^0\,10'\,36''$, c) $118^0\,48'\,29''$; wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie?

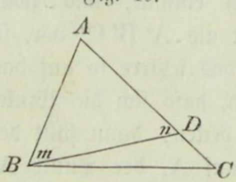
4. Wie groß ist der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn ein Winkel an der Grundlinie a) $15^0\,12'$, b) $48^0\,5'\,49''$, c) $73^0\,41'\,17''$ beträgt?

5. Der Außenwinkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes beträgt a) $82^0\,13'\,55''$, b) $130^0\,51'\,10''$, c) $136^0\,17'\,32''$; wie groß ist jeder Winkel des Dreieckes?

6. Der Außenwinkel, gebildet durch die Verlängerung der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, beträgt a) $120^0\,53'\,37''$, b) $144^0\,31'\,29''$, c) $151^0\,47'\,23''$; wie groß ist jeder Dreieckswinkel?

§. **54.** Ist (Fig. 40) AB = AD, also das Dreieck ABD gleichschenklig, so sind die Winkel m und n an der Grundlinie einander gleich.

Fig. 40.



Verlängert man AD bis zu dem Punkte C und zieht BC, so wird der Winkel ABC größer als m, der Winkel ACB dagegen um ebensoviel kleiner als n, da der dritte Dreieckswinkel A ungeändert geblieben ist. In dem Dreiecke ABC ist demnach die Seite AC > AB und zugleich der Winkel ABC > ACB. Daraus folgt:

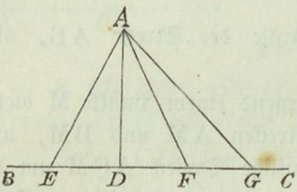
1. Der größeren Seite eines Dreieckes liegt ein größerer Winkel gegenüber; und umgekehrt:

2. Dem größeren Winkel eines Dreieckes liegt eine größere Seite gegenüber.

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse, in einem stumpfwinkligen Dreiecke die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte Seite.

§. **55**. Zieht man von einem Punkte A (Fig. 41) zu einer Geraden BC die Normale AD und zugleich mehrere schiefe Strecken AE, AF, AG, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke ADE, ADF, ADG, in denen die Kathete AD kürzer ist als jede der Hypotenusen AE, AF, AG.

Fig. 41.



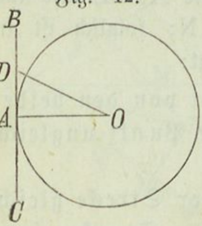
Daraus folgt:

Die Normale ist die kürzeste Strecke, die von einem Punkte zu einer geraden Linie gezogen werden kann.

Die Normale gibt den Abstand eines Punktes von einer Geraden an.

§. **56**. Es sei (Fig. 42) BC ⊥ OA. Jede von O zu der BC gezogene schiefe Strecke OD ist länger als die Normale OA; also liegt der Punkt D außerhalb der Kreislinie. Die Gerade BC hat somit nur den Punkt A mit der Kreislinie gemeinschaftlich, alle anderen Punkte liegen außerhalb des Kreises.

Fig. 42.

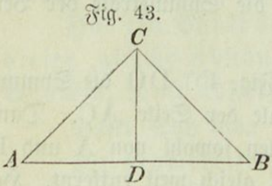


Die im Endpunkte eines Halbmessers zu diesem normale Gerade ist also eine Tangente des Kreises.

5. Die symmetrische Lage.

§. **57**. Zwei Punkte liegen symmetrisch in Beziehung auf eine Gerade, wenn die Strecke, welche sie verbindet, zu dieser Geraden normal ist und durch sie halbiert wird; die Gerade selbst heißt die Symmetrieachse oder Symmetrale. Ist (Fig. 43) CD normal zu AB und AD = BD, so liegen die Punkte A und B symmetrisch in Beziehung auf die Gerade CD, welche die Symmetrale ist.

Fig. 43.



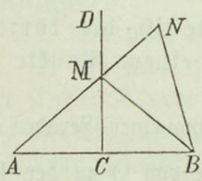
Zwei ebene Gebilde liegen symmetrisch in Beziehung auf eine Gerade, wenn jedem Punkte des einen Gebildes ein symmetrisch liegender Punkt des andern Gebildes entspricht. Zwei symmetrisch liegende Gebilde, wie ADC und BDC, können durch Umwendung um die Symmetrale CD zur Deckung gebracht werden.

Ein ebenes Gebilde ABC heißt symmetrisch, wenn es sich durch eine Gerade (die Symmetrale) in zwei symmetrisch liegende Theile theilen lässt.

§. **58.** Jede Strecke ist ein symmetrisches Gebilde. Die Symmetrale einer Strecke ist die in ihrer Mitte zu ihr errichtete Normale.

Es sei CD (Fig. 44) die Symmetrale der Strecke AB, also $AC = BC$ und $CD \perp AB$.

Fig. 44.



Zieht man zu irgend einem Punkte M dieser Symmetrale die Strecken AM und BM, und wendet das rechtwinklige Dreieck ACM um die Symmetrale CM, so kommt es mit dem Dreiecke BCM zur Deckung, daher ist $AM = BM$, d. h. der Punkt M ist von den Punkten A und B gleich weit entfernt. Jeder außerhalb der Symmetrale liegende Punkt N hat dagegen von A und B ungleiche Abstände AN und BN; denn der Winkel ABN ist größer als ABM, also auch größer als der dem letzteren gleiche Winkel BAN; folglich ist im $\triangle$ ABN auch die Seite $AN > BN$. Daraus folgt:

Jeder Punkt der Streckensymmetrale hat von den beiden Endpunkten der Strecke gleiche, jeder andere Punkt ungleiche Abstände; und umgekehrt:

Hat ein Punkt von den Endpunkten einer Strecke gleiche Abstände, so liegt er in der Symmetrale der Strecke, sonst außerhalb derselben.

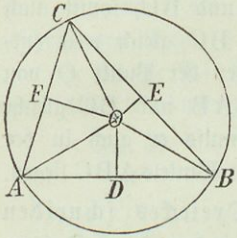
Diesen Satz kann man auch so ausdrücken:

Der geometrische Ort (§. 23, 2) aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten gleiche Abstände haben, ist die Symmetrale der Verbindungsstrecke der beiden Punkte.

§. **59.** Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 45) DO die Symmetrale der Seite AB, und FO die Symmetrale der Seite AC. Dann ist der Schnittpunkt O der beiden Symmetralen sowohl von A und B, als von A und C, somit auch von B und C gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt O von B und C gleiche Abstände, so muss er auch in der Symmetrale der Seite BC liegen.

Die drei Seitensymmetralen eines Dreieckes schneiden also einander in demselben Punkte, der von den drei Eckpunkten gleiche Abstände hat.

Fig. 45.



Beschreibt man aus dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte O der drei Seitensymmetralen mit dem Halbmesser OA einen Kreis, so geht er durch alle drei Eckpunkte des Dreieckes. Ein solcher Kreis heißt dem Dreiecke umgeschrieben.

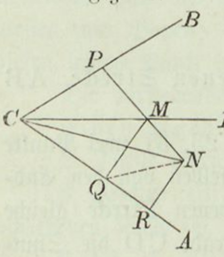
Jedem Dreiecke läßt sich also ein Kreis umschreiben.

§. **60.** Jeder Winkel ist ein symmetrisches Gebilde. Die Symmetrale eines Winkels ist die Halbierungslinie desselben.

Es sei CD (Fig. 46) die Symmetrale des Winkels ACB, also Winkel $ACD = BCD$.

Fällt man von irgend einem Punkte M dieser Symmetrale auf die Schenkel des Winkels ACB die Normalen MP und MQ, und wendet das rechtwinklige Dreieck MPC um die Symmetrale CD, so deckt dieses das Dreieck MQC, daher ist $MP = MQ$, d. h. der Punkt M ist von den Schenkeln des Winkels ACB gleich weit entfernt. Jeder außerhalb der Symmetrale liegende Punkt N hat dagegen von den Schenkeln des Winkels ACB ungleiche Abstände NP und NR. Denn zieht man NQ, so ist $NP = NM + MP = NM + MQ > NQ$; nun ist $NQ >$ Normale NR (§. 55), daher ist umsomehr $NP > NR$.

Fig. 46.



Hieraus folgt:

Jeder Punkt der Winkelsymmetrale hat von den beiden Schenkeln des Winkels gleiche, jeder andere Punkt zwischen beiden Schenkeln ungleiche Abstände; und umgekehrt:

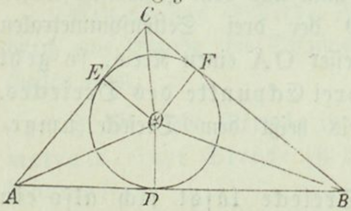
Hat ein Punkt innerhalb der Schenkel eines Winkels von diesen gleiche Abstände, so liegt er in der Symmetrale des Winkels, sonst außerhalb derselben.

Dieser Satz kann auch so ausgedrückt werden:

Der geometrische Ort aller Punkte, welche innerhalb der Schenkel eines gegebenen Winkels liegen und von diesen gleiche Abstände haben, ist die Symmetrale des Winkels.

§. **61**. Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 47) AO die Symmetrale des Winkels BAC und CO die Symmetrale des Winkels ACB. Dann ist der Schnittpunkt O der beiden Symmetralen sowohl von den Schenkeln AB und AC, als von den Schenkeln AC und BC, somit auch von AB und BC gleich weit entfernt. Hat aber der Punkt O von den Schenkeln AB und BC gleiche Abstände, so muss er auch in der Symmetrale des Winkels ABC liegen.

Fig. 47.



Die drei Winkelsymmetralen eines Dreieckes schneiden also einander in demselben Punkte, der von den drei Seiten gleiche Abstände hat.

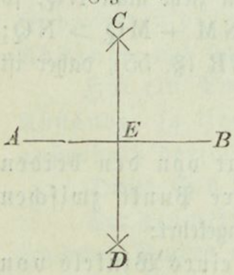
Beschreibt man aus dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte O der drei Winkelsymmetralen mit dem Abstande OD als Halbmesser einen Kreis, so sind die Dreiecksseiten Tangenten dieses Kreises (§. 56), d. h. der Kreis berührt alle drei Seiten des Dreieckes. Ein solcher Kreis heißt dem Dreiecke eingeschrieben.

Jedem Dreiecke lässt sich also ein Kreis einschreiben.

6. Constructionsaufgaben.

§. **62**. 1. Die Symmetrale einer gegebenen Strecke AB (Fig. 48) zu construieren.

Fig. 48.



Bestimmt man (nach §. 23, 3) zwei Punkte C und D so, dass jeder derselben von den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke gleiche Abstände hat, so ist die Gerade CD die Symmetrale der Strecke AB (§. 58).

Die Auflösung ist also: Um die Symmetrale einer Strecke zu construieren, beschreibe man aus ihren Endpunkten mit demselben Halbmesser nach oben und unten Kreisbogen, welche sich in zwei Punkten schneiden, und ziehe durch diese Punkte eine Gerade.

Dieselbe Construction liefert auch die Lösung für die Aufgaben:

Die Symmetrale zweier gegebener Punkte zu construieren.

Eine gegebene Strecke zu halbieren.

2. Ziehe mehrere Strecken und theile jede, zuerst nach dem Augenmaße und dann geometrisch, in zwei gleiche Theile.

3. Theile eine Strecke in 4, in 8 gleiche Theile.

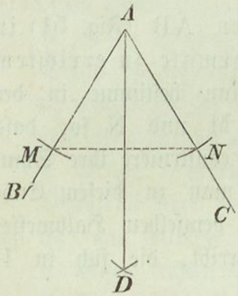
4. Halbiere jede Seite eines Dreieckes und ziehe von jeder Mitte die Strecke zu dem gegenüberliegenden Eckpunkte — die Mittellinie.

In wie vielen Punkten schneiden sich die drei Mittellinien?

5. Zeichne ein beliebiges Dreieck und construiere den ihm umgeschriebenen Kreis (§. 59).

§. **63**. 1. Die Symmetrale eines gegebenen Winkels BAC (Fig. 49) zu construieren.

Fig. 49.



Bestimmt man auf den Schenkeln zwei Punkte M und N, welche vom Scheitel A gleich weit abstehen, und dann in der Winkelfläche den Punkt D so, dass er von M und N ebenso weit absteht, so ist die Gerade AD die Symmetrale der Strecke MN, folglich ist sie auch, wie man sich durch Deckung überzeugen kann, die Symmetrale des Winkels BAC.

Construction: Um die Symmetrale eines Winkels zu erhalten, beschreibe man aus dem Scheitel einen Bogen, welcher die beiden Schenkel schneidet; aus den Schnittpunkten beschreibe man mit demselben Halbmesser zwei Bogen, die sich in einem Punkte schneiden, und ziehe durch diesen letzten Punkt und durch den Scheitel des Winkels eine Gerade.

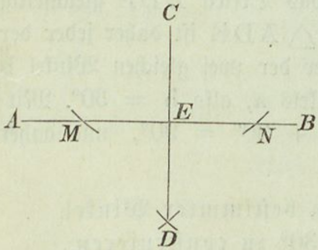
Die vorstehende Aufgabe ist übereinstimmend mit der Aufgabe: Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

2. Theile einen Winkel in 4, in 8 gleiche Theile.

3. Zeichne ein beliebiges Dreieck und construiere den ihm eingeschriebenen Kreis (§. 61).

§. **64**. 1. Zu einer gegebenen Geraden AB (Fig. 50) von einem außer ihr liegenden Punkte B die Normale zu ziehen.

Fig. 50.



Bestimmt man auf der Geraden zwei Punkte M und N, welche von dem gegebenen Punkte C gleich weit abstehen, und construiert zu M und N die Symmetrale CD, so steht diese zu AB normal.

Man hat daher folgende Auflösung:

Um von einem Punkte außerhalb einer Geraden zu dieser die Normale zu construieren, beschreibe man aus jenem Punkte mit einem hinlänglich großen Halbmesser einen Bogen, welcher die Gerade in zwei Punkten schneidet; aus diesen beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser zwei Bogen und verbinde ihren Schnittpunkt mit dem gegebenen Punkte durch eine Gerade; diese ist die verlangte Normale.

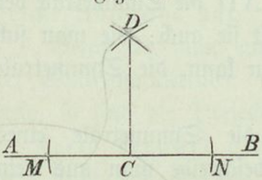
Durch dieselbe Construction wird auch folgende Aufgabe gelöst:

Zu einem gegebenen Punkte in Beziehung auf eine gegebene Gerade den symmetrisch liegenden Punkt zu construieren.

2. Ziehe von jedem Eckpunkte eines Dreieckes die Normale zu der gegenüberliegenden Seite — die Höhe. — In wie vielen Punkten schneiden sich die drei Höhen?

§. **65**. 1. Zu einer gegebenen Geraden AB (Fig. 51) in einem gegebenen Punkte C derselben die Normale zu errichten.

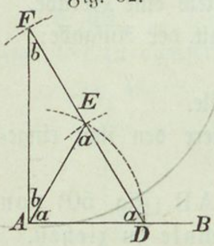
Fig. 51.



Auflösung. Man bestimme in der Geraden zwei Punkte M und N so, dass CM = CN ist, und construiere ihre Symmetrale CD, indem man zu diesem Ende aus M und N mit demselben Halbmesser zwei Kreisbogen beschreibt, die sich in D schneiden.

2. Im Endpunkte A (Fig. 52) einer Strecke AB zu dieser die Normale zu errichten.

Fig. 52.



Auflösung. Man beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die AB in D schneidet; mit demselben Halbmesser durchschneide man aus D den früheren Kreisbogen in E, und beschreibe aus E einen neuen Bogen, welcher von der durch D und E gezogenen Geraden in F geschnitten wird. Zieht man nun die AF, so ist diese zu AB normal.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Vermöge der Construction ist das Dreieck ADE gleichseitig und das Dreieck AEF gleichschenklig. Im $\triangle$ ADE ist daher jeder der drei Winkel a $= 60^0$; im $\triangle$ AFE ist jeder der zwei gleichen Winkel b an der Grundlinie die Hälfte des Außenwinkels a, also b $= 30^0$. Mithin ist Winkel BAF $=$ a $+$ b $= 60^0 + 30^0 = 90^0$, und daher AF $\perp$ AB.

§. **66**. Geometrische Construction bestimmter Winkel.

1. Einen Winkel von a) 60^0, b) 30^0 zu construieren.

a) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck.

b) Construiere einen Winkel von 60° und halbiere denselben.

2. Einen Winkel von a) 120°, b) von 150° zu construieren.

a) Construiere einen Winkel von 60° und zu diesem den Nebenwinkel.

b) Durch Construction des Nebenwinkels von 30°.

3. Einen Winkel von a) 15°, b) 165° zu construieren.

4. Einen Winkel von a) 90°, b) 45° zu construieren.

a) Durch Construction zweier zu einander normaler Geraden (nach §. 64 oder §. 65), oder durch Summierung der Winkel von 60° und 30°, wie in Fig. 52.

b) Durch Halbierung des Winkels von 90°.

5. Einen Winkel von 75° zu construieren.

Durch Summierung der Winkel von 45° und 30°.

6. Einen Winkel von a) 105°, b) 135° zu construieren.

Als Nebenwinkel von a) 75°, b) 45°.

7. Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

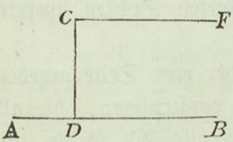
Beschreibe über dem einen Schenkel ein gleichseitiges Dreieck ADE (Fig. 52) und halbiere dann den Winkel DAE.

8. Einen rechten Winkel in 6, 8 gleiche Theile zu theilen.

9. Einen gestreckten Winkel in 3, 4, 6, 8 gleiche Theile zu theilen.

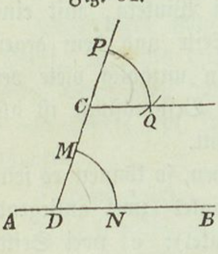
§. **67**. Durch einen Punkt C (Fig. 53) außerhalb einer gegebenen Geraden AB zu dieser die Parallele zu ziehen.

Fig. 53.



a) Man ziehe von C die CD normal zu AB und errichte in C zu CD die Normale CF; dann sind CF und AB beide zu CD normal, daher zu einander parallel.

Fig. 54.



b) Man ziehe durch C (Fig. 54) eine Gerade, welche die gegebene Gerade AB in D schneidet, und construiere zu dem Winkel CDB im Punkte C einen gleichen Gegenwinkel PCQ; dann ist CQ || AB.

Man könnte im Punkte C auch zu dem Winkel CDA einen gleichen Wechselwinkel DCQ construieren, wodurch man ebenfalls CQ || AB erhält.

VI. Congruenz der Dreiecke.

1. Construction der Dreiecke und Congruenz derselben.

§. 68. Zwei Dreiecke heißen congruent, wenn sie dieselbe Größe und dieselbe Gestalt haben, so dass sie aufeinander gelegt sich vollständig decken.

Damit dieses möglich sei, müssen in den Dreiecken alle sechs Bestandstücke, die drei Seiten und die drei Winkel, paarweise gleich sein.

In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Da durch die Größe gewisser Seiten und Winkel eines Dreieckes auch die Größe der anderen, z. B. durch die Größe zweier Winkel die Größe des dritten Winkels, bestimmt ist, so kann man aus der Gleichheit von weniger als sechs Bestandstücken in zwei Dreiecken auf ihre Congruenz schließen.

Um zu sehen, wie viele und welche Bestandstücke in zwei Dreiecken paarweise gleich sein müssen, damit die Dreiecke congruent seien, braucht man nur zu untersuchen, wie viele und welche Stücke erforderlich sind, um mit denselben ein Dreieck von bestimmter Größe und Gestalt zu construieren, weil dann alle Dreiecke, welche in diesen Stücken übereinstimmen, congruent sein müssen.

1. Ist nur ein Bestandstück, ein Winkel oder eine Seite gegeben, so lassen sich unzählig viele verschiedene Dreiecke construieren, die alle jenes Stück enthalten. Durch ein Bestandstück ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt.

2. Auch mit zwei Bestandstücken: mit zwei Winkeln, mit einer Seite und einem anliegenden Winkel, mit einer Seite und dem gegenüberliegenden Winkel, oder mit zwei Seiten können unzählig viele verschiedene Dreiecke construiert werden. Durch zwei Bestandstücke ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt.

3. Sind drei Bestandstücke des Dreieckes gegeben, so können es sein: a) alle drei Winkel; b) eine Seite und zwei Winkel (zwei anliegende oder ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel); c) zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel; d) zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel; e) alle drei Seiten.

Da durch zwei Winkel eines Dreieckes auch der dritte Winkel bestimmt ist, mit zwei Winkeln sich aber kein bestimmtes Dreieck construieren läſst, so wird auch durch drei Winkel die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt. Der erste der angeführten fünf Fälle liefert also keine bestimmte Construction.

Es bleiben demnach nur die letzten vier Fälle zu untersuchen übrig.

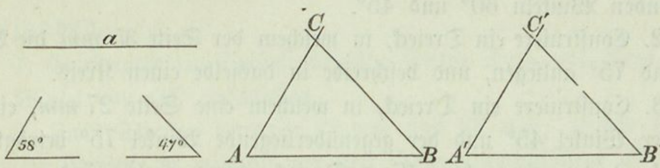
§. **69**. Ein Dreieck zu construieren, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

Die Construction ist nur möglich, wenn die Summe der beiden Winkel kleiner ist als 180°.

Die zwei Winkel sind entweder die der gegebenen Seite anliegenden, oder ein ihr anliegender und ein gegenüberliegender Winkel.

a) Es sei (Fig. 55) a die gegebene Seite und die Winkel von 58° und 47° die ihr anliegenden Winkel.

Fig. 55.



Man ziehe AB = a; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Trägt man in A einen Winkel von 58°, und in B einen Winkel von 47° auf, so geben die Geraden AC und BC, welche mit der Seite AB diese Winkel bilden, die Richtungen der zweiten und der dritten Seite des Dreieckes an; der dritte Eckpunkt C kann daher nur in dem Schnittpunkte dieser Geraden liegen. Man erhält also aus den gegebenen drei Stücken das Dreieck ABC, welches eine ganz bestimmte Größe und Gestalt hat.

Construiert man mit denselben drei Stücken ein zweites Dreieck A'B'C', so muss dieses mit ABC gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben; wenn man daher eines dieser Dreiecke mit den gleichen Stücken auf das andere legt, so müssen sich beide vollständig decken; sie sind also congruent.

Daraus folgt:

1. Durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel wird ein Dreieck vollständig bestimmt.
2. (**I. Congruenzsatz.**) Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

b) Sind von einem Dreiecke eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist dadurch auch der dritte Winkel bestimmt; dann sind aber eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt. Dieser Fall läßt sich also auf den früheren a) zurückführen, und man kann allgemein sagen: Durch eine Seite und zwei Winkel wird ein Dreieck vollständig bestimmt.

Da rechtwinklige Dreiecke immer einen rechten Winkel gleich haben, so gilt auch der Satz:

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie 1. die Hypotenuse und einen spitzen Winkel, 2. eine Kathete und einen spitzen Winkel paarweise gleich haben.

Aufgaben.

1. Construiere ein Dreieck mit der Seite 2 *cm* 9 *mm* und den anliegenden Winkeln 60° und 45°.

2. Construiere ein Dreieck, in welchem der Seite 35 *mm* die Winkel 60° und 75° anliegen, und beschreibe in dasselbe einen Kreis.

3. Construiere ein Dreieck, in welchem eine Seite 27 *mm*, ein anliegender Winkel 45° und der gegenüberliegende Winkel 75° beträgt.

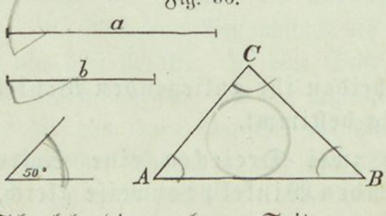
4. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
   a) eine Kathete (25 *mm*) und der anliegende spitze Winkel (30°);
   b) eine Kathete (3 *cm*) und der gegenüberliegende Winkel (75°);
   c) die Hypotenuse (4 *cm*) und ein anliegender Winkel (45°).

5. Construiere ein gleichseitiges Dreieck, wenn dessen Höhe (28 *mm*) gegeben ist.

6. Construiere ein gleichschenkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
   a) die Grundlinie (28 *mm*) und ein anliegender Winkel (75°);
   b) die Grundlinie (3 *cm*) und der gegenüberliegende Winkel (150°);
   c) der Schenkel (26 *mm*) und ein Winkel (30°) an der Grundlinie.

§. **70**. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen geschlossene Winkel gegeben sind.

Fig. 56.



Es seien a und b (Fig. 56) die zwei gegebenen Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich 50°. Um mit diesen drei Stücken ein Dreieck zu beschreiben, zeichne man zuerst einen Winkel A = 50°, trage dann auf dessen Schenkeln die gegebenen Seiten a und b auf. Dadurch ist die Lage der

Eckpunkte B und C, daher auch die dritte Seite bestimmt. ABC ist dann dasjenige Dreieck, welches die gegebenen drei Stücke enthält.

Zeichnet man mit denselben drei Stücken ein zweites Dreieck, so muſs dieses mit ABC in der Größe und in der Gestalt vollkommen übereinstimmen.

Daraus folgt:

1. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel wird ein Dreieck vollständig bestimmt.
2. (II. **Congruenzsatz.**) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind demnach congruent, wenn sie die beiden Katheten paarweise gleich haben.

Aufgaben.

1. Construiere ein Dreieck mit den Seiten 2 *cm* und 3 *cm*, welche einen Winkel von 60° einschließen.

2. Zwei Strecken betragen 27 *mm* und 32 *mm*; zeichne mit denselben ein Dreieck, in welchem der von ihnen eingeschlossene Winkel 45° beträgt.

3. Construiere ein Dreieck, in welchem die Seiten 28 *mm* und 30 *mm* den Winkel 75° einschließen, und beschreibe um dasselbe einen Kreis.

4. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, wenn dessen Schenkel (38 *mm*) und dessen Winkel am Scheitel (150°) gegeben sind.

5. Construiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 2 *cm* 2 *mm* und 2 *cm* 6 *mm* sind.

6. Construiere ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathete 2 *cm* beträgt.

7. Construiere ein gleichschenkliges Dreieck, wenn dessen Grundlinie (32 *mm*) und dessen Höhe (22 *mm*) gegeben sind.

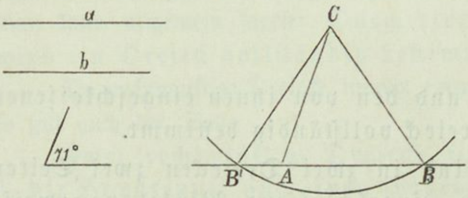
§. **71.** Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Der gegebene Winkel kann der größeren oder der kleineren der beiden Seiten gegenüberliegen.

a) Es seien (Fig. 57) a und b die beiden gegebenen Seiten, und zwar sei a > b; der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel betrage 71°.

Man trage den Winkel von 71^0 auf und mache den einen Schenkel AC gleich der Seite b, deren gegenüberliegender Winkel nicht gegeben ist; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und C, bestimmt. Der dritte Eckpunkt B muss in dem zweiten Schenkel AB liegen und von dem Eckpunkte C um die Strecke a entfernt sein, er muss also zugleich in der Kreislinie liegen, welche aus C mit dem Halbmesser a beschrieben wird. Der Eckpunkt B muss daher in dem Durchschnitte dieser Kreislinie mit dem Schenkel AB liegen. Die Kreislinie schneidet den Schenkel AB in zwei Punkten B und B′, und man erhält somit zwei Dreiecke ABC und AB′C. Von diesen enthält jedoch nur das erste Dreieck ABC die gegebenen drei Stücke; das zweite AB′C hat zwar auch die zwei gegebenen Seiten, aber nicht den gegebenen Winkel, sondern dessen Nebenwinkel, und genügt daher der Aufgabe nicht.

Fig. 57.



Construiert man mit denselben drei Stücken noch ein zweites Dreieck, so muss dieses mit ABC gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben.

Daraus folgt:

1. Durch zwei Seiten und den der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ist ein Dreieck vollständig, und zwar **eindeutig**, bestimmt.
2. (III. **Congruenzsatz.**) Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

Da in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse die größte Seite, und der ihr gegenüberliegende rechte Winkel immer bekannt ist, so kann man auch sagen:

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete paarweise gleich haben.

Aufgaben.

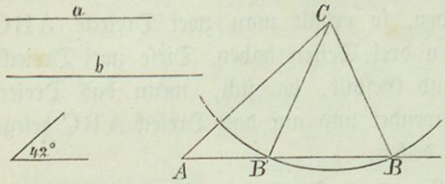
1. Construiere ein Dreieck, worin die Seiten 2 *cm* und 3 *cm* 5 *mm* vorkommen und der zweiten Seite ein Winkel von 75^0 gegenüberliegt.

2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse 25 *mm* und dessen eine Kathete 2 *cm* ist.

3. Construiere ein gleichschenkliges Dreieck, wenn ein Schenkel (38 *mm*) und die Höhe (29 *mm*) gegeben sind.

b) Es seien (Fig. 58) a und b die zwei gegebenen Seiten, und zwar $a < b$, und der Winkel, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt, sei 42^0.

Fig. 58.



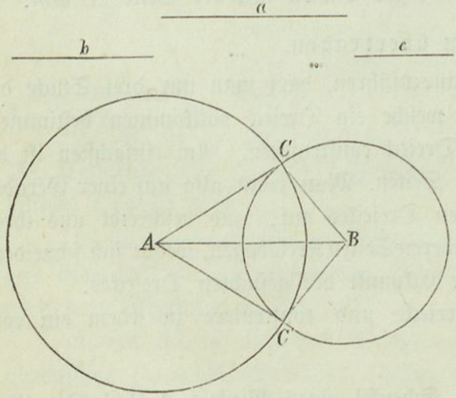
Durch das gleiche Verfahren, wie oben unter a), erhält man zwei Dreiecke ABC und AB′C, welche beide die gegebenen drei Stücke enthalten, aber in der Größe und Gestalt verschieden sind. Durch zwei Seiten und den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel ist also im allgemeinen ein Dreieck nur zweideutig bestimmt und kann aus der Gleichheit dieser Stücke auf die Congruenz der Dreiecke nicht geschlossen werden.

Damit der aus C mit der kleineren Seite a beschriebene Bogen den Schenkel AB in zwei Punkten B und B′ schneide, muss a größer sein als die zur dritten Seite gehörige Höhe. Ist die kleinere Seite a gleich dieser Höhe, so fallen die beiden Schnittpunkte B und B′ in einen einzigen zusammen, d. i. der Kreisbogen berührt die dritte Seite, und man erhält ein rechtwinkliges Dreieck. Ist endlich a kleiner als die Höhe, so entsteht kein Dreieck.

§. **72.** Ein Dreieck zu construieren, wenn alle drei Seiten gegeben sind.

Die Construction ist nur möglich, wenn jede Seite kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden anderen Seiten ist.

Fig. 59.



Es seien (Fig. 59) a, b, c die Längen der drei Seiten. Trägt man die Strecke AB = a auf, so sind dadurch zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Da die zweite Seite AC die Länge b haben soll, so ist die aus A mit dem Halbmesser b beschriebene Kreislinie ein geometrischer Ort für den dritten Eckpunkt C. Da ferner die dritte Seite BC die Länge c haben soll, so ist auch die aus

B mit dem Halbmesser c beschriebene Kreislinie ein geometrischer Ort für den Punkt C. Der dritte Eckpunkt C kann daher nur in dem Durchschnitte dieser beiden Kreislinien liegen. Da sich aber die beiden Kreise in zwei Punkten C und C' schneiden, so erhält man zwei Dreiecke ABC und ABC', welche die gegebenen drei Seiten haben. Diese zwei Dreiecke haben jedoch dieselbe Größe und Gestalt, da sich, wenn das Dreieck ABC' um die Seite AB umgewendet und auf das Dreieck ABC gelegt wird, beide Dreiecke vollständig decken.

Zeichnet man mit denselben drei Stücken a, b und c noch ein zweites Dreieck, so muſs dieses mit dem früheren ABC gleiche Größe und Gestalt haben.

Daraus folgt:

1. Durch drei Seiten ist ein Dreieck vollständig bestimmt.
2. (IV. **Congruenzsatz.**) Sind in zwei Dreiecken alle drei Seiten paarweise gleich, so sind die Dreiecke congruent.

Aufgaben.

1. Construiere mit den Seiten 28 *mm*, 30 *mm*, 41 *mm* ein Dreieck; ebenso ein zweites mit den Seiten 4 *cm*, 3 *cm* 6 *mm*, 3 *cm* 1 *mm*.

2. Construiere mit den Strecken 38 *mm*, 31 *mm* und 27 *mm* ein Dreieck und dann a) den ihm eingeschriebenen, b) den ihm umgeschriebenen Kreis.

3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie 24 *mm* und dessen Schenkel 29 *mm* ist.

4. Construiere ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite 28 *mm*.

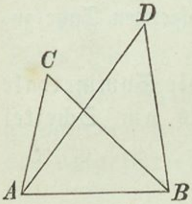
§. **73.** Ein Dreieck zu übertragen.

Um diese Construction auszuführen, darf man nur drei Stücke des gegebenen Dreieckes nehmen, welche ein Dreieck vollkommen bestimmen, und mit denselben das neue Dreieck construieren. Am einfachsten ist die Construction mittelst der drei Seiten. Man trägt also auf einer Geraden zuerst eine Seite des gegebenen Dreieckes auf, und beschreibt aus ihren Endpunkten mit den beiden anderen Seiten Kreisbogen, welche sich schneiden; der Durchschnitt ist der dritte Eckpunkt des gesuchten Dreieckes.

Zeichne verschiedene Dreiecke und construiere zu jedem ein congruentes Dreieck.

§. **74.** Dreht man die Schenkel eines Winkels A B C (Fig. 60), ohne deren Länge zu ändern, von einander, so wird dadurch nicht nur der Winkel größer, sondern es werden auch die Endpunkte der beiden Schenkel weiter von einander entfernt sein. Zieht man daher AC und AD, so haben die Dreiecke ABC und ABD zwei Seiten paarweise gleich, nämlich AB = AB und BC = BD; dagegen ist die dritte Seite AD im △ ABD größer als die dritte Seite AC im △ ABC. Zugleich ist der der Seite AD gegenüberliegende Winkel ABD im △ ABD größer als der der Seite AC gegenüberliegende Winkel ABC im △ ABC.

Fig. 60.



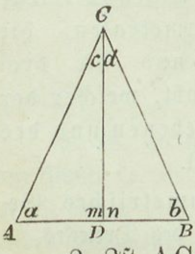
Daraus folgt:

1. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so liegt dem größeren dieser Winkel auch eine größere Seite gegenüber.
2. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten paarweise gleich, die dritten Seiten aber ungleich, so liegt der größeren dieser Seiten auch ein größerer Winkel gegenüber.

2. Das gleichschenklige Dreieck.

§. **75.** 1. Es sei (Fig. 61) AC = BC, also das Dreieck ABC gleichschenklig. Ist ferner AD = BD, so ist, wenn man die Strecke CD zieht, nach dem IV. Congruenzsatze das △ ADC ≅ BDC, daher auch Winkel m = n, d. i. CD ⊥ AB, und Winkel c = d. Daraus folgt:

Fig. 61.



Zieht man in einem gleichschenkligen Dreiecke vom Scheitel zu der Mitte der Grundlinie eine Strecke, so steht diese zur Grundlinie normal und halbiert den Winkel am Scheitel.

2. Ist AC = BC und CD ⊥ AB, also m = n, so ist nach dem III. Congruenzsatze △ ADC ≅ BDC, daher auch AD = BD und Winkel c = d; d. h.:

Zieht man in einem gleichschenkligen Dreiecke vom Scheitel zur Grundlinie die Normale, so halbiert diese die Grundlinie und den Winkel am Scheitel.

3. Ist AC = BC und Winkel c = d, so ist nach dem II. Congruenzsatze △ ADC ≅ BDC, daher auch AD = BD und Winkel m = n, also CD ⊥ AB. Daraus folgt:

Halbiert in einem gleichschenkligen Dreiecke eine Gerade den Winkel am Scheitel, so halbiert sie auch die Grundlinie und steht zu dieser normal.

Die drei voranstehenden Sätze können in dem folgenden Satze zusammengefasst werden:

In einem gleichschenkligen Dreiecke fallen die Symmetrale der Grundlinie, die Symmetrale des Winkels am Scheitel und die Höhe in eine Gerade zusammen.

Aus den obigen Sätzen folgt auch:

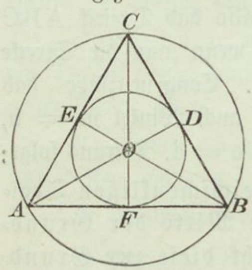
Jedes gleichschenklige Dreieck ist ein symmetrisches Gebilde; seine Symmetrieachse ist die Höhe.

3. Das gleichseitige Dreieck.

§. **76.** Es sei ABC (Fig. 62) ein gleichseitiges Dreieck; AD, BE und CF seien dessen drei Höhen.

Aus den Sätzen über die symmetrische Lage und aus der Congruenz der Dreiecke ergibt sich:

Fig. 62.



1. In einem gleichseitigen Dreiecke ist jede Höhe zugleich eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale.

2. In einem gleichseitigen Dreiecke gehen die drei Seitensymmetralen, die drei Winkelsymmetralen und die drei Höhen durch denselben Punkt, welcher der Mittelpunkt des eingeschriebenen und des umgeschriebenen Kreises ist.

3. Das gleichseitige Dreieck ist ein symmetrisches Gebilde; jede seiner drei Höhen ist eine Symmetrieachse des Dreieckes.

4. Es sei AFC ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Winkel ACF $= 30^0$ ist. Dreht man AFC um die Kathete CF, so erhält man ein zweites Dreieck BFC, welches mit AFC congruent ist, ABC ist dann ein Dreieck, in welchem jeder Winkel $= 60^0$ ist, also ein gleichseitiges Dreieck, und somit AC = AB; nun ist AB = 2 AF, daher auch AC = 2AF. Daraus folgt:

Ist in einem rechtwinkligen Dreiecke einer der spitzen Winkel gleich 30^0, so ist die Hypotenuse doppelt so groß als die kleinere Kathete.

5. Da in dem rechtwinkligen Dreiecke AFO der Winkel $FAO = 30^0$ ist, so ist nach dem vorhergehenden Satze $OA = 2\,OF$; aber $OA = OC$, daher ist auch $OC = 2\,OF$, d. i. wird die Höhe CF in drei gleiche Theile getheilt, so enthält OF einen und OC zwei solche Theile. Hieraus ergibt sich:

Der Halbmesser des einem gleichseitigen Dreiecke eingeschriebenen Kreises beträgt ein Drittel, der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises zwei Drittel der Höhe.

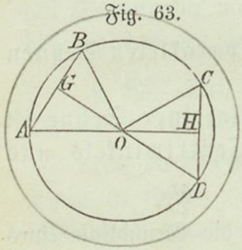
VII. Besondere Eigenschaften des Kreises.

(Hier wird die Wiederholung der §§. 20, 21 und 22 vorausgeschickt.)

1. Sehnen und Bogen.

§. **77.** Es sei die Sehne AB = CD (Fig. 63); dann sind die Dreiecke ABO und CDO congruent (IV.), daher müssen auch ihre gleichliegenden Höhen OG und OH gleich sein; diese Höhen stellen aber die Abstände der gleichen Sehnen AB und CD vom Mittelpunkte dar.

Fig. 63.



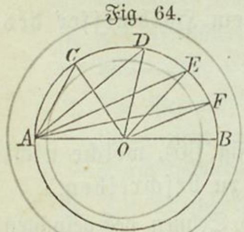
Man kann daraus folgern:

Gleiche Sehnen eines Kreises haben vom Mittelpunkte gleiche Abstände.

(Umkehrung.) Sehnen eines Kreises, welche vom Mittelpunkte gleiche Abstände haben, sind einander gleich.

§. **78.** Dreht sich von dem festen Halbmesser OA (Fig. 64) um den Punkt O ein zweiter Halbmesser so hinweg, dass er nach und nach in die Lagen OC, OD, OE,... kommt, so werden die Endpunkte dieser beiden Halbmesser umsomehr von einander abstehen, je größer der von ihnen begrenzte Bogen wird; es wird also von den Sehnen AC, AD, AE,... jede folgende größer sein als die vorhergehende. Zugleich nähern sich die einzelnen Sehnen umsomehr dem Mittelpunkte, je größer sie werden. Kommt endlich der zweite Halbmesser in die Lage OB, so geht die Sehne durch den Mittelpunkt, wird also zu einem Durchmesser und erreicht ihre größte Länge. Aus dieser Betrachtung ergeben sich folgende Sätze:

Fig. 64.



a) Zu einem größeren Bogen eines Kreises gehört auch eine größere Sehne.

b) Der Durchmesser ist größer als jede andere Sehne.

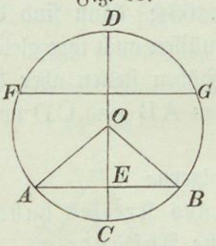
c) Ungleiche Sehnen eines Kreises haben vom Mittelpunkte ungleiche Abstände, und zwar hat die größere Sehne den kleineren Abstand.

d) Sehnen eines Kreises, die vom Mittelpunkte ungleiche Abstände haben, sind ungleich, und zwar ist diejenige die größere, welche näher am Mittelpunkte liegt.

§. **79**. Der Kreis ist ein symmetrisches Gebilde; jeder Durchmesser ist eine Symmetrieachse.

Jeder Sector eines Kreises ist ebenfalls symmetrisch; seine Symmetrale ist die Halbierungslinie des zugehörigen Centriwinkels.

Fig. 65.



Hieraus folgt:

1. Die Symmetrale jeder Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises (Fig. 65).

2. Parallele Sehnen haben dieselbe Symmetrale.

3. Bogen zwischen parallelen Sehnen sind einander gleich.

4. Die Symmetrale einer Sehne ist zugleich die Symmetrale des zugehörigen Centriwinkels und des zugehörigen Bogens.

§. **80**. Die Sehne des Sextanten kann als die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind, betrachtet werden. In diesem Dreiecke beträgt der Centriwinkel am Scheitel, als der sechste Theil eines vollen Winkels, 60^0; es ist daher auch jeder Winkel an der Grundlinie gleich 60^0 und somit das Dreieck gleichseitig, folglich die Sehne gleich dem Halbmesser.

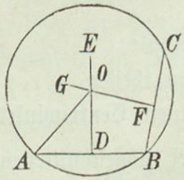
Die Sehne eines Sextanten ist also dem Halbmesser des Kreises gleich.

Aufgabe.

§. **81**. 1. Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 66), welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Man ziehe die Strecken AB und BC, welche Sehnen des gesuchten Kreises sind, und construiere zu denselben die Symmetralen DE und

Fig. 66.



FG. Da jede dieser Symmetralen nach §. 79 durch den Mittelpunkt des Kreises gehen muss, so liegt dieser in dem Schnittpunkte O der beiden Symmetralen, und OA ist der Halbmesser des verlangten Kreises.

Durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte ist ein Kreis vollkommen bestimmt.

2. Den Mittelpunkt eines Kreises oder Kreisbogens zu finden.

Man zieht zwei Sehnensymmetralen, die sich schneiden.

3. Einen Kreis zu construieren, wenn der Halbmesser und zwei Punkte des Umfanges gegeben sind.

4. Einen Kreis zu beschreiben, dessen Mittelpunkt in einer gegebenen Geraden liegt und dessen Peripherie durch zwei gegebene Punkte geht.

§. **82.** Einen Kreisbogen zu halbieren.

Man beschreibe aus den Endpunkten des Bogens mit demselben Halbmesser Kreisbogen, welche sich in einem Punkte schneiden, und verbinde den Schnittpunkt mit dem Mittelpunkte des Kreises durch eine Gerade; diese halbiert den gegebenen Bogen.

§. **83.** Die Peripherie eines Kreises in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Um die Peripherie eines Kreises in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen, darf man nur eben so viele gleiche Winkel um den Mittelpunkt herum construieren. Die Größe eines solchen Winkels findet man, indem man die Summe aller Centriwinkel, nämlich 360^0, durch die Zahl der gleichen Winkel dividiert. Man braucht dann nur einen Centriwinkel in dieser Größe wirklich zu zeichnen und den durch seine Schenkel abgeschnittenen Bogen im Kreise herumzutragen.

Besondere Fälle:

1. Die Peripherie eines Kreises in 2 gleiche Theile zu theilen.
   Man ziehe einen Durchmesser.
2. Die Peripherie eines Kreises in 4 gleiche Theile zu theilen.
   Man zieht zwei aufeinander normale Durchmesser.
   Durch Halbierung der Bogen erhält man dann 8, 16 gleiche Theile.
3. Die Peripherie eines Kreises in 6 gleiche Theile zu theilen.
   Man trage den Halbmesser als Sehne im Kreise herum (§. 80).

Nimmt man zwei solche Bogen für einen einzigen, so wird die Peripherie in 3 gleiche Theile getheilt.

Durch Halbierung der Bogen erhält man 12, 24 gleiche Theile.

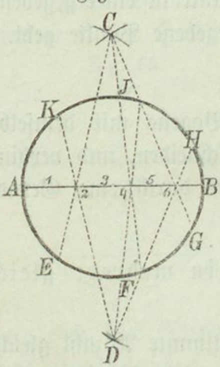
4. Die Peripherie eines Kreises in 5 gleiche Theile zu theilen.

Man construiere mit Hilfe des Transporteurs einen Centriwinkel von $\frac{360^0}{5} = 72^0$ und trage den durch seine Schenkel abgeschnittenen Bogen im Kreise herum.

Durch Halbierung der Bogen erhält man dann 10—20 gleiche Theile.

Mechanisch, und zwar ohne Hilfe des Transporteurs, kann man die Theilung der Peripherie in gleiche Theile **näherungsweise** durch das nachstehende unter dem Namen der **Renaldi'schen Construction** bekannte Verfahren ausführen:

Fig. 67.

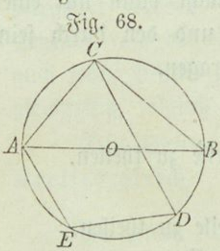


Man ziehe (Fig. 67) den Durchmesser AB, beschreibe um A und B mit AB als Halbmesser Kreisbogen, welche sich in C und D schneiden, theile den Durchmesser in so viele gleiche Theile, als der Kreis Theile erhalten soll, z. B. in 7 gleiche Theile, und ziehe durch C und D und durch die geraden Theilungspunkte 2, 4, 6 des Durchmessers die Strecken CE, CF, CG, DH, DJ, DK, bis sie die Peripherie des Kreises auf der hohlen Seite treffen; die Punkte A, E, F, G, H, J, K sind dann die verlangten Theilungspunkte der Kreislinie.

2. Peripheriewinkel.

§. 84. Ein Winkel ACD (Fig. 68), dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen desselben sind, heißt ein **Peripheriewinkel**.

Fig. 68.



Sowohl von den Centri- als von den Peripheriewinkeln sagt man: **sie stehen auf dem Bogen auf, welcher zwischen ihren Schenkeln liegt.**

Nenne alle Peripheriewinkel in der Fig. 68.

Auf welchem Bogen steht ein jeder dieser Winkel auf?

Ein Peripheriewinkel ACB, welcher auf dem Halbkreise aufsteht, dessen Schenkel also durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, heißt ein **Winkel im Halbkreise**.

Liegen die Schenkel eines Peripheriewinkels in einem Kreisabschnitte, welcher größer oder kleiner als der Halbkreis ist, so heißt derselbe bezüglich ein Winkel im größeren oder kleineren Kreisabschnitte; ACD ist ein Winkel im größeren, AED ein Winkel im kleineren Kreisabschnitte.

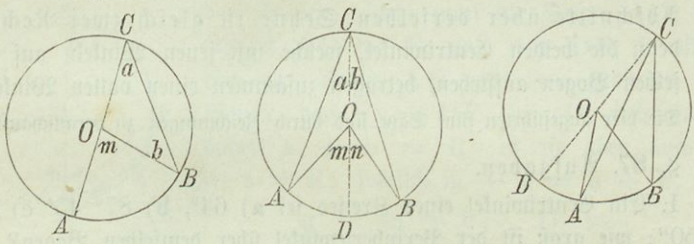
§. 85. Wenn ein Centri- und ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen aufstehen, so liegt entweder

a) der Scheitel des Centriwinkels auf einem Schenkel des Peripheriewinkels (Fig. 69),

b) oder der Scheitel des Centriwinkels liegt innerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels (Fig. 70),

c) oder er liegt außerhalb des Peripheriewinkels (Fig. 71).

Fig. 69. Fig. 70. Fig. 71.



In jedem dieser drei Fälle findet zwischen der Größe des Peripheriewinkels und des Centriwinkels dasselbe Verhältnis statt.

a) Der Winkel m (Fig. 69) ist ein Außenwinkel des Dreieckes BOC, und daher gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel a und b; aber a und b sind als Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes einander gleich, folglich jeder von ihnen die Hälfte des Winkels m; also ist $a = \frac{1}{2}$ m.

b) Der zweite Fall (Fig. 70) läßt sich auf den ersten zurückführen. Zieht man nämlich den Durchmesser CD, so ist a die Hälfte von m, b die Hälfte von n; daher auch die Summe von a und b, d. i. der Winkel ACB halb so groß als die Summe von m und n, d. i. halb so groß als der Winkel AOB.

c) Zieht man ebenso in Fig. 71 den Durchmesser CD, so ist nach a) der Winkel BCD die Hälfte von BOD und ACD die Hälfte von AOD, folglich auch der Unterschied zwischen BCD und ACD,

d. i. der Winkel ACB halb so groß als der Unterschied zwischen BOD und AOD, d. i. halb so groß als der Winkel AOB.

Jeder Peripheriewinkel eines Kreises ist also gleich dem halben Centriwinkel auf gleichem Bogen.

§. **86**. Aus dem vorhergehenden Satze folgt:

a) Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen aufstehen, sind einander gleich; denn jeder von ihnen ist die Hälfte eines und desselben Centriwinkels.

b) Jeder Winkel im Halbkreise ist ein rechter; denn der entsprechende Centriwinkel ist ein gestreckter, und die Hälfte davon ein rechter Winkel.

c) Ein Winkel im größeren Kreisabschnitte ist ein spitzer.

d) Ein Winkel im kleineren Kreisabschnitte ist ein stumpfer.

e) Die Summe der Winkel im größeren und im kleineren Abschnitte über derselben Sehne ist gleich zwei Rechten; denn die beiden Centriwinkel, welche mit jenen Winkeln auf denselben Bogen aufstehen, betragen zusammen einen vollen Winkel.

Die hier angeführten fünf Sätze sind durch Zeichnungen zu veranschaulichen.

§. **87**. Aufgaben.

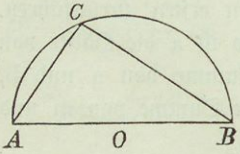
1. Ein Centriwinkel eines Kreises sei **a)** 64°, **b)** 87° 45′ **c)** 128° 13′ 50″; wie groß ist der Peripheriewinkel über demselben Bogen?

2. Ein Peripheriewinkel eines Kreises sei **a)** 56°, **b)** 41° 37′, **c)** 108° 12′ 12″; wie groß ist der Centriwinkel über demselben Bogen?

3. Der über einer Sehne im größeren Abschnitte errichtete Peripheriewinkel ist **a)** 25°, **b)** 49° 55′ **c)** 86° 5′ 39″; wie groß ist der Peripheriewinkel über derselben Sehne im kleineren Abschnitte?

4. Über einer gegebenen Strecke als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren.

Fig. 72.



Es sei (Fig. 72) AB die gegebene Strecke und O ihre Mitte. Beschreibt man aus O mit dem Halbmesser AO einen Halbkreis und zieht von einem beliebigen Punkte C desselben die Strecken AC und BC, so erhält man das Dreieck ABC, welches bei C rechtwinklig ist.

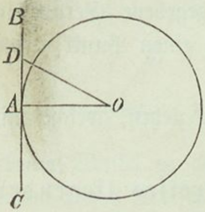
Da der Punkt C willkürlich im Halbkreise angenommen werden kann, so gibt es unzählig viele Dreiecke, welche der Aufgabe genügen, d. i. die Aufgabe ist unbestimmt.

3. Tangenten.

§. **88.** 1. Die Normale im Endpunkte eines Halbmessers ist eine Tangente des Kreises. (Fig. 73.)

Von diesem Satze, dessen Richtigkeit schon im §. 56 nachgewiesen wurde, gelten auch die Umkehrungen:

Fig. 73.

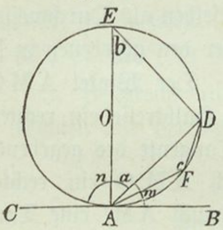


2. Die Normale aus dem Mittelpunkte eines Kreises zu der Tangente geht durch den Berührungspunkt.

3. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben berühren, ist die in diesem Punkte zu der Geraden gezogene Normale.

§. **89.** Zieht man (Fig. 74) den Halbmesser OA und errichtet in A die BC $\perp$ OA, so ist BC eine Tangente des Kreises. Zieht man die Sehne AD, verlängert AO bis E, und zieht DE, so ist in dem zur Sehne AD gehörigen größeren Abschnitte das $\triangle$ ADE bei D rechtwinklig, daher a + b = R; es ist aber auch m + a = R; folglich m + a = a + b, also

Fig. 74.



m = b ... 1)

Zieht man in dem zur Sehne AD gehörigen kleineren Abschnitte zu einem beliebigen Punkte F die Geraden AF und DF, so betragen die Winkel c und b als Winkel in dem größeren und kleineren Abschnitte über derselben Sehne AD zusammen zwei Rechte (§. 86, e) also c + b = 2 R; es ist aber auch n + m = 2 R; folglich n + m = c + b. Da nun m = b ist, so ist auch

n = c ... 2).

Zieht man also durch einen Punkt der Kreislinie eine Tangente und eine Sehne, so ist 1. der von der Tangente und der Sehne gebildete spitze Winkel gleich dem Winkel im größeren Kreisabschnitte, und 2. der von der Tangente und der Sehne gebildete stumpfe Winkel gleich dem Winkel im kleineren Kreisabschnitte.

§. **90.** Aufgaben.

1. Durch einen Punkt A in der Peripherie eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen. (Fig. 73.)

Man ziehe den Halbmesser AO und errichte in A die BC $\perp$ AO; dann ist CB die verlangte Tangente (§. 56).

2. Aus einem gegebenen Mittelpunkte einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt.

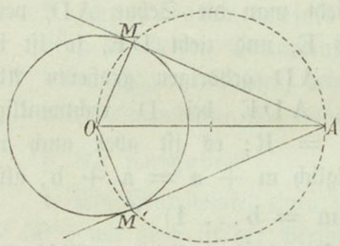
3. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu construieren, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben berührt.

4. Einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte derselben berührt und durch einen Punkt außer dieser Geraden geht.

5. An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

§. **91**. Von einem außerhalb eines Kreises liegenden Punkte A (Fig. 75) eine Tangente an diesen Kreis zu ziehen.

Fig. 75.



Man ziehe die Gerade AO und beschreibe über derselben als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in M und M' schneidet. Der Winkel AMO ist als Winkel im Halbkreise ein rechter, daher AM eine Tangente des gegebenen Kreises. Da auch AM'O ein rechter Winkel ist, so ist auch AM' eine Tangente desselben Kreises. Aus einem außerhalb des Kreises liegenden Punkte lassen sich also an denselben zwei Tangenten ziehen.

Aus der Lösung dieser Aufgabe geht ferner hervor:

a) Die beiden Tangenten AM und AM' sind einander gleich.

b) Wenn sich zwei Tangenten eines Kreises schneiden, und man verbindet ihren Durchschnittspunkt mit dem Mittelpunkte durch eine Gerade, so halbiert diese den Winkel, den die Tangenten bilden, ferner den von ihnen abgeschnittenen Bogen, sowie den zugehörigen Centriwinkel.

Die Aufgabe, an zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen, wird erst später (§. 123) gelöst werden können.

2. Einen Kreis zu construieren, wenn gegeben sind:

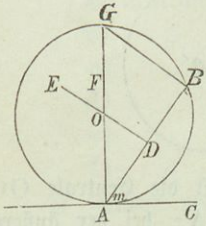
a) der Halbmesser, eine Tangente und der Berührungspunkt;

b) der Halbmesser und zwei nichtparallele Tangenten.

Wie viele Auflösungen sind in jedem Falle möglich?

§. **92.** 1. Über einer gegebenen Strecke AB (Fig. 76) als Sehne einen Kreis zu beschreiben, in welchem alle Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel m gleich sind.

Fig. 76.



Man trage auf dem einen Schenkel des Winkels m vom Scheitel A aus die gegebene Strecke AB auf, halbiere sie in D, und ziehe DE ⊥ AB und AF ⊥ CA, so ist der Durchschnittspunkt O der Senkrechten DE und AF der Mittelpunkt und OA der Halbmesser des Kreises, in dessen größerem Abschnitte AGB jeder Peripheriewinkel, z. B. AGB, dem gegebenen Winkel m gleich ist. Denn AC ist eine Tangente und AB eine Sehne dieses Kreises, daher AGB = m.

Wie wird die Auflösung lauten, wenn der gegebene Winkel ein stumpfer ist?

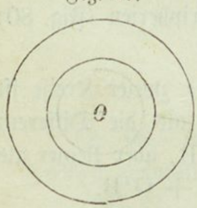
2. Beschreibe über einer gegebenen Strecke als Sehne einen Kreisabschnitt, in welchem jeder Peripheriewinkel a) 90°, b) 45°, c) 135°, d) 60°, e) 120°, f) 30°, g) 105° beträgt.

3. Beschreibe mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreisabschnitt, in welchem alle Peripheriewinkel die in Aufg. 2 angegebene Größe haben.

4. Lage der Kreise gegen einander.

§. **93.** Die Lage zweier Kreise gegen einander hängt von der Lage ihrer Mittelpunkte und von der Größe ihrer Halbmesser ab.

Fig. 77.



Zwei Kreise (Fig. 77), welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen concentrische Kreise.

Die zwischen den Peripherien zweier concentrischer Kreise liegende ebene Fläche heißt Kreisring.

Zwei Kreise, welche keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen excentrische Kreise.

Die Strecke, welche die Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise verbindet, heißt die Centrallinie oder Centrale der beiden Kreise.

§. **94.** Zwei excentrische Kreise können sich entweder berühren, oder schneiden, oder es ist keines von beiden der Fall.

1. Zwei Kreise berühren sich, wenn ihre Umfänge nur einen Punkt gemeinschaftlich haben. Die Berührung geschieht von innen

(Fig. 78), wenn sonst der eine Kreis innerhalb des andern liegt, oder von außen (Fig. 79), wenn die Kreise sonst außerhalb einander liegen.

Fig. 78.

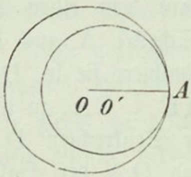
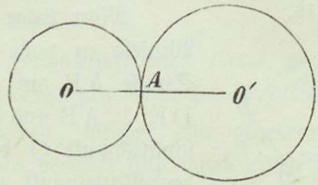


Fig. 79.



Bei der inneren Berührung zweier Kreise ist die Centrale OO′ gleich der Differenz der Halbmesser OA — O′A; bei der äußeren Berührung ist die Centrale OO′ gleich der Summe der Halbmesser OA + O′A. In beiden Fällen liegt der Berührungspunkt auf der Centrale.

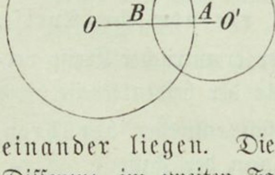
Hieraus folgt auch:

a) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben berühren, ist die durch diesen Punkt und den Mittelpunkt des gegebenen Kreises gehende Gerade;

b) Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Halbmesser haben und einen gegebenen Kreis berühren, ist ein mit diesem concentrischer Kreis, dessen Halbmesser gleich ist der Summe oder der Differenz der beiden gegebenen Halbmesser, je nachdem die Berührung von außen oder von innen stattfindet.

2. Zwei Kreise schneiden sich, wenn ihre Peripherien (Fig. 80) zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

Fig. 80.



Beim Durchschnitte zweier Kreise ist die Centrale OO′ größer als die Differenz der Halbmesser OA — O′B, aber kleiner als die Summe derselben OA + O′B.

3. Zwei excentrische Kreise, welche sich weder berühren noch schneiden, können entweder ganz in einander oder ganz außer einander liegen. Die Centrale ist im ersten Falle kleiner als die Differenz, im zweiten Falle größer als die Summe der Halbmesser.

Welche Fälle sind in Beziehung auf die gegenseitige Lage bei drei Kreisen möglich?

§. **95**. Aufgaben.

1. Zwei Kreise zu construieren, in welchen die Centrale und die Halbmesser folgende Werte haben:

a)	Centrale	42 *mm*,	Halbmesser	26 *mm*	und	16 *mm*;
b)	„	20 *mm*,	„	50 *mm*	„	25 *mm*;
c)	„	55 *mm*,	„	22 *mm*	„	20 *mm*;
d)	„	34 *mm*,	„	48 *mm*	„	35 *mm*;
e)	„	16 *mm*,	„	45 *mm*	„	29 *mm*;
f)	„	0 *mm*,	„	36 *mm*	„	15 *mm*.

2. Zeichne zwei Kreise, deren jeder 18 *mm* zum Halbmesser hat, und die sich von außen berühren.

3. Beschreibe mit den Halbmessern 35 *mm* und 20 *mm* zwei Kreise, die sich von innen berühren.

4. Zeichne mit dem Halbmesser 25 *mm* einen Kreis und dann zwei andere Kreise, welche den ersten schneiden und sich im Mittelpunkte desselben berühren.

5. Einen Kreis zu construieren, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte desselben berührt und durch einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt geht. (Geom. Örter §. 94, a und §. 58.)

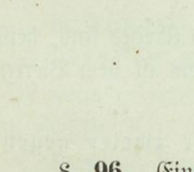
6. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher
a) einen gegebenen Kreis berührt und durch einen Punkt außerhalb desselben geht (Geom. Örter §. 94, b und §. 58);
b zwei sich schneidende Kreise berührt. (Geom. Ort §. 94, b.)

VIII. Vierecke.

1. Bestandstücke des Viereckes.

§. **96**. Eine von vier Strecken begrenzte ebene Figur wird ein Viereck genannt.

Fig. 81.



Jedes Viereck ABCD (Fig. 81) hat vier Seiten, vier Winkel und vier Eckpunkte. Die Summe aller Seiten des Viereckes heißt dessen Umfang.

Eine Strecke AC, welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Viereckes verbindet, heißt Diagonale.

In wie viele Dreiecke wird das Viereck durch eine Diagonale zerlegt? Wie viele Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?

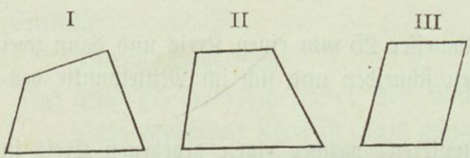
§. **97.** Zieht man in dem Vierecke ABCD (Fig. 81) die Diagonale AC, so wird dadurch das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt und es betragen die vier Winkel des Viereckes genau so viel, als die sechs Winkel der zwei Dreiecke zusammengenommen; die Winkel der beiden Dreiecke betragen nun 4 R. Daraus folgt:

Die Summe aller Winkel eines Viereckes ist gleich vier Rechten oder 360°.

Wenn in einem Vierecke alle vier Winkel gleich sind, wie groß ist jeder derselben?

§. **98.** Mit Rücksicht auf die Lage der gegenüberliegenden Seiten unterscheidet man drei Arten der Vierecke.

Fig. 82.



Ein Viereck, in welchem keine Seite mit einer andern parallel ist, heißt ein Trapezoid (Fig. 82, I). Ein Viereck, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten parallel, die anderen zwei Seiten aber nichtparallel sind, heißt ein Trapez (Fig. 82, II). Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm (Fig. 82, III).

2. Sehnen- und Tangentenvierecke.

§. **99.** Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt ein Sehnenviereck, wie AEDC (Fig. 68); der Kreis ist dem Vierecke umgeschrieben.

In jedem Sehnenvierecke ist die Summe zweier gegenüberliegender Winkel gleich zwei Rechten.

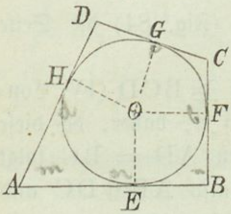
Denn je zwei gegenüberliegende Winkel eines Sehnenviereckes bilden die Winkel im größeren und kleineren Kreisabschnitte über derselben Sehne; ihre Summe ist somit nach §. 86, e) gleich zwei Rechten.

Um ein Viereck läßt sich daher ein Kreis nur dann beschreiben, wenn je zwei gegenüberliegende Winkel des Viereckes zusammen zwei Rechte betragen.

§. **100.** Ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, heißt ein Tangentenviereck; der Kreis ist dem Vierecke eingeschrieben.

In jedem Tangentenvierecke ist die Summe zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der beiden anderen. (Fig. 83).

Fig. 83.



Denn nach §. 91, a) ist

$$AE = AH,$$
$$BE = BF,$$
$$CG = CF,$$
$$DG = DH;$$

daher durch Addition

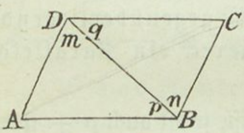
$$AB + CD = BC + AD.$$

In ein Viereck läßt sich daher ein Kreis nur dann beschreiben, wenn die Summen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich sind.

3. Allgemeine Eigenschaften der Parallelogramme.

§. **101**. Es sei (Fig. 84) $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$, also $ABCD$ ein Parallelogramm. Zieht man die Diagonale BD, so sind die Wechselwinkel m und n, und ebenso die Wechselwinkel p und q einander gleich; daher ist $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (I. Congruenzsatz), und folglich $AB = CD$ und $AD = BC$.

Fig. 84.



Daraus folgt:

1. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.
2. In einem Parallelogramme sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich; oder

   Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

Sind in einem Parallelogramme zwei anstoßende Seiten gleich, so sind es alle.

Nach der Länge der Seiten unterscheidet man daher gleichseitige und ungleichseitige Parallelogramme.

Aus dem obigen zweiten Satze folgt auch:

Normale zwischen Parallelen sind einander gleich.

Die Normale zwischen zwei Parallelen gibt den Abstand derselben an.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer gegebenen Geraden auf einer bestimmten Seite derselben einen gegebenen Abstand haben, ist die mit der Geraden auf derselben Seite in dem gegebenen Abstande gezogene Parallele.

Nimmt man in einem Parallelogramme eine der Seiten als **Grundlinie** an, so heißt ihr Abstand von der gegenüberliegenden Seite die **Höhe** des Parallelogramms. Unter der **Höhe** eines Trapezes versteht man den Abstand der zwei parallelen Seiten.

§. **102.** Es seien in dem Vierecke ABCD (Fig. 84) die Seite AB = CD und AD = BC.

Zieht man die Diagonale BD, so ist $\triangle$ ABD $\cong$ BCD (IV. Congruenzsatz); da AB = CD ist, muss auch m = n, daher, da diese Winkel Wechselwinkel sind, AD || BC sein; wegen AD = BC folgt ebenso p = q, und somit AB || DC. Es ist also AB || DC und AD || BC, mithin das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

Sind also in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

§. **103.** Es sei (Fig. 84) AB = CD und AB || DC.

Zieht man die Diagonale BD, so ist p = q als Wechselwinkel, daher $\triangle$ ABD $\cong$ BCD (II.), und folglich AD = BC. Dann ist aber nach dem vorhergehenden Satze ABCD ein Parallelogramm.

Sind also in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

§. **104.** Da (Fig. 84) p = q und n = m ist, so ist auch p + n = q + m; oder $\measuredangle$ B = D. Ebenso läßt sich zeigen, dass $\measuredangle$ A = C ist.

In einem Parallelogramme sind also je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich.

Dieser Satz ergibt sich auch unmittelbar aus §. 43, a.

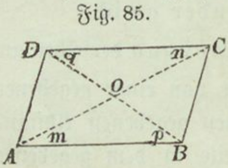
Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind es auch die übrigen; ist ein Winkel ein schiefer, so sind es auch die übrigen.

Nach der **Größe der Winkel** unterscheidet man daher **rechtwinklige** und **schiefwinklige** Parallelogramme.

In einem Parallelogramme ist ein Winkel a) $48^0\ 18'$, b) $94^0\ 35'\ 40''$, c) $109^0\ 28'\ 15''$; wie groß ist jeder der drei anderen?

§. **105.** Zieht man in dem Parallelogramme ABCD (Fig. 85) die Diagonalen AC und BD, so ist $\triangle$ AOB $\cong$ COD (I. Congruenzsatz), weil AB = CD, m = n, p = q ist; es müssen daher die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich sein, also AO = CO, BO = DO. Daraus folgt:

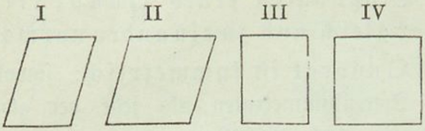
Fig. 85.



In jedem Parallelogramme halbieren sich die Diagonalen.

§. **106**. Mit Rücksicht auf die Größe der Winkel und der Seiten ergeben sich vier Arten von Parallelogrammen: das schiefwinklige ungleichseitige Parallelogramm oder das Rhomboid (Fig. 86, I); das schiefwinklige gleichseitige Parallelogramm oder der Rhombus (Fig. 86, II); das rechtwinklige ungleichseitige Parallelogramm oder das Rechteck (Fig. 86, III); und das rechtwinklige gleichseitige Parallelogramm oder das Quadrat (Fig. 86, IV).

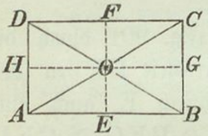
Fig. 86.



4. Das Rechteck, der Rhombus und das Quadrat.

§. **107**. Das Rechteck hat folgende besondere Eigenschaften:

Fig. 87.



1. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.

Es sei ABCD (Fig. 87) ein Rechteck; dann ist $\triangle ABC \cong BAD$ (II. Congruenzsatz), und daher $AC = BD$.

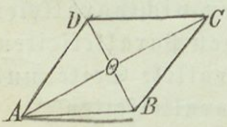
2. Das Rechteck ist symmetrisch; jede der zwei Seitensymmetralen ist eine Symmetrieachse des Rechteckes.

Dass die Symmetrale EF der Seite AB das Rechteck in zwei symmetrisch liegende Theile theilt, ergibt sich, wenn man den einen Theil EBCF um diese Symmetrale umwendet; es fällt dabei B auf A, BC auf AC, und daher auch C auf D.

3. Jedem Rechtecke kann ein Kreis umgeschrieben werden. (§. 99.)

§. **108**. Der Rhombus hat folgende besondere Eigenschaften:

Fig. 88.



1. Die Diagonalen eines Rhombus sind zu einander normal.

Es sei ABCD (Fig. 88) ein Rhombus. Dass $AC \perp BD$ ist, folgt aus der Congruenz der Dreiecke AOB und AOD.

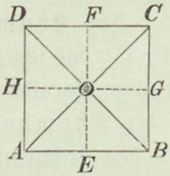
2. Der Rhombus ist symmetrisch; jede der zwei Diagonalen ist eine Symmetrieachse desselben.

Beweis durch Umwenden.

3. Jedem Rhombus kann ein Kreis eingeschrieben werden. (§. 100.)

§. **109**. Ein Quadrat ABCD (Fig. 89) vereinigt in sich die Eigenschaften des Rechteckes und des Rhombus.

Fig. 89.



Man hat daher folgende Sätze:

1. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und zu einander normal.

2. Das Quadrat ist symmetrisch; sowohl jede der zwei Seitensymmetralen als jede der zwei Diagonalen ist eine Achse desselben.

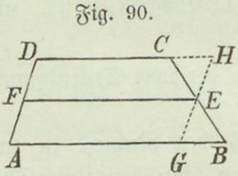
3. Jedem Quadrate kann ein Kreis eingeschrieben und umgeschrieben werden.

5. Das Trapez, das Deltoid und die Parallelen im Dreiecke.

§. **110**. 1. Die an jeder der nichtparallelen Seiten eines Trapezes liegenden Winkel betragen (als Anwinkel) zusammen zwei Rechte.

2. Zieht man in dem Trapeze ABCD (Fig. 90) durch die Mitte E einer der nichtparallelen Seiten eine Parallele EF zu den beiden Parallelseiten und durch E auch eine Parallele zu AD, so ist $\triangle BEG \cong CEH$ (I. Congruenzsatz), daher $EG = EH = \frac{1}{2}GH$ und $BG = CH$. Da $EH = FD$ und $GH = AD$, so ist auch $FD = \frac{1}{2}AD$.

Fig. 90.



Ferner ist

$$AB = AG + BG = FE + BG, \text{ und}$$
$$DC = DH - CH = FE - BG,$$

daher durch Addition

$$AB + DC = 2FE, \text{ oder } FE = \frac{AB + DC}{2}.$$

Man hat daher folgenden Satz:

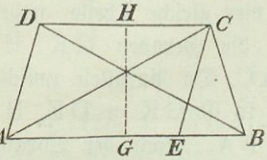
Zieht man durch die Mitte einer der nichtparallelen Seiten eines Trapezes eine Parallele zu den Parallelseiten, so halbiert diese auch die andere nichtparallele Seite. ~~und ist gleich der halben Summe der beiden Parallelseiten.~~

Die Strecke FE heißt die Mittellinie des Trapezes.

§. **111**. Zieht man in dem Trapeze ABCD (Fig. 91) die $CE \parallel DA$, so zerfällt dasselbe in ein Parallelogramm AECD und in ein Dreieck ECB, welches letztere die zwei nichtparallelen Seiten und die Differenz der Parallelseiten des Trapezes zu Seiten hat.

Ist in dem Trapeze ABCD die Seite AD = BC, so ist das Dreieck EBC gleichschenklig, daher ist Winkel B = CEB = A. Ebenso ist dann Winkel BCD = D.

Fig. 91.



Ein Trapez, in welchem die nichtparallelen Seiten einander gleich sind, heißt **gleichschenklig**. Dasselbe hat folgende Eigenschaften:

1. In einem gleichschenkligen Trapeze sind die Winkel an jeder der zwei Parallelseiten einander gleich; und umgekehrt:

Sind in einem Trapeze die Winkel an einer der beiden Parallelseiten einander gleich, so ist das Trapez gleichschenklig.

2. Die Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes sind einander gleich.

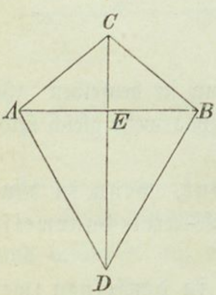
Folgt aus der Congruenz der Dreiecke ABC und BAD.

3. Das gleichschenklige Trapez ist symmetrisch; seine Achse ist die Symmetrale einer Parallelseite.

4. Um jedes gleichschenklige Trapez kann ein Kreis beschrieben werden. (§. 99.)

§. **112**. Ein Viereck, das zwei Paare gleicher anstoßender Seiten hat, heißt ein **Deltoid**. Ist (Fig. 92) AC = BC und AD = BD, so ist ACBD ein Deltoid; dasselbe besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken, deren gemeinsame Grundlinie die Diagonale AB ist.

Fig. 92.



Besondere Eigenschaften:

1. Die Diagonalen eines Deltoids sind zu einander normal.

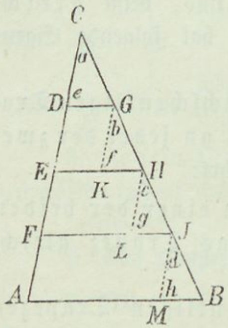
Da die Dreiecke ABC und ABD gleichschenklig sind, so hat sowohl der Punkt C als der Punkt D von den Endpunkten der Diagonale AB gleiche Abstände; folglich ist CD eine Symmetrale der AB, somit zu ihr normal.

2. Das Deltoid ist symmetrisch; seine Symmetrieachse ist die Diagonale, welche die Scheitel der gleichen Schenkel verbindet.

3. In jedes Deltoid kann ein Kreis beschrieben werden. (§. 100.)

§. **113.** Es sei in dem Dreiecke ABC (Fig. 93) die Seite AC in mehrere, z. B. vier, gleiche Theile getheilt, also CD = DE = EF = FA, und man ziehe DG, EH und FJ sämmtlich parallel mit der Seite AB; dann läſst sich beweisen, daſs dadurch auch CB in vier gleiche Theile getheilt wird. — Man ziehe die Geraden GK, HL und JM parallel zu AC. Da Parallele zwischen Parallelen gleich sind, so ist GK = DE, HL = EF und JM = FA. Nach der Voraussetzung sind die Strecken CD, DE, EF und FA gleich, daher müssen auch die Strecken CD, GK, HL und JM gleich sein; in den Dreiecken CDG, GKH, HLJ und JMB sind überdies die Winkel a, b, c und d als Gegenwinkel gleich, ferner die Winkel e, f, g und h gleich, da ihre Schenkel parallel sind. Die genannten vier Dreiecke haben also eine Seite mit den beiden anliegenden Winkeln gleich, sind folglich congruent; den gleichen Winkeln e, f, g und h liegen in diesen Dreiecken die Seiten CG, GH, HJ und JB gegenüber, also ist CG = GH = HJ = JB. Die dritte Seite CB ist somit wirklich in vier gleiche Theile getheilt worden.

Fig. 93.



Wenn also in einem Dreiecke eine Seite in mehrere gleiche Theile getheilt ist, und man zieht durch jeden Theilungspunkt eine Parallele zu einer zweiten Seite, so wird dadurch auch die dritte Seite in ebenso viele unter einander gleiche Theile getheilt.

6. Congruenz der Vierecke.

§. **114.** Zwei Vierecke sind congruent, wenn in denselben alle vier Seiten und alle vier Winkel nach der Ordnung paarweise gleich sind.

Aus dieser Erklärung folgt:

1. Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel paarweise gleich sind.

2. Zwei Rechtecke sind congruent, wenn in denselben zwei anstoßende Seiten paarweise gleich sind.

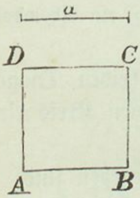
3. Zwei Quadrate sind congruent, wenn sie eine Seite gleich haben.

Um drei Eckpunkte zu bestimmen, sind drei von einander unabhängige Bestimmungsstücke nothwendig; zur Bestimmung des vierten Eckpunktes sind noch zwei weitere Stücke erforderlich. Ein Viereck ist demnach im allgemeinen durch fünf von einander unabhängige Stücke **bestimmt**.

7. Constructionsaufgaben.

§. **115**. 1. **Mit einer gegebenen Seite a (Fig. 94) ein Quadrat zu beschreiben.**

Fig. 94.



Man construiere einen rechten Winkel A, schneide an den Schenkeln AB = AD = a ab und beschreibe aus B und D mit dem Halbmesser a Kreisbogen, welche sich in C schneiden. Zieht man BC und CD, so ist ABCD das verlangte Quadrat.

Durch welche Bestandstücke wird ein Quadrat bestimmt?

2. Zeichne ein Quadrat, dessen Seite 34 *mm* ist, und construiere a) den ihm eingeschriebenen, b) den ihm umgeschriebenen Kreis.

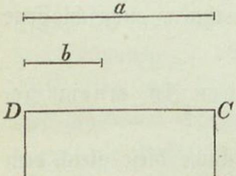
3. Construiere ein Quadrat, dessen Umfang 1 *dm* ist.

4. Zeichne ein Quadrat, welches mit einem gegebenen Rechtecke gleichen Umfang hat.

5. Ein Quadrat zu construieren, wenn dessen Diagonale (36 *mm*) gegeben ist.

§. **116**. 1. **Ein Rechteck zu construieren, wenn zwei anstoßende Seiten a und b (Fig. 95) gegeben sind.**

Fig. 95.



Man zeichne einen rechten Winkel A, mache AB = a, AD = b, und beschreibe aus B mit dem Halbmesser b, und aus D mit dem Halbmesser a Bogen; der Schnittpunkt C ist der vierte Eckpunkt des gesuchten Rechteckes.

Wie viele und welche Bestandstücke müssen zur Bestimmung eines Rechteckes gegeben sein?

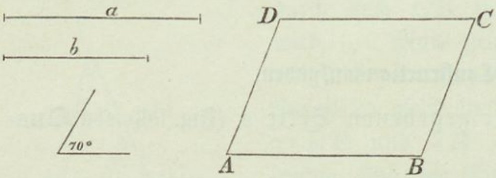
2. Construiere ein Rechteck mit den Seiten 26 *mm* und 38 *mm*, und beschreibe um dasselbe einen Kreis.

3. Zeichne ein Rechteck, wenn eine Seite (22 *mm*) und die Diagonale (31 *mm*) gegeben sind.

4. Zeichne ein Rechteck, in welchem die Diagonale 32 *mm* beträgt und die beiden Diagonalen einen Winkel von 60° bilden.

§. **117**. 1. Ein Parallelogramm zu zeichnen, wenn zwei Seiten a und b und der von ihnen eingeschlossene Winkel, z. B. 70°, gegeben sind. (Fig. 96.)

Fig. 96.



Man construiere den Winkel A = 70°, mache AB = a, AD = b, und beschreibe aus B und D mit den Halbmessern b und a Bogen, welche sich in C schneiden; ABCD ist das gesuchte Parallelogramm.

Durch wie viele und welche Stücke wird a) ein Rhombus, b) ein Rhomboid vollständig bestimmt?

2. Einen Rhombus zu construieren, wenn die beiden Diagonalen (44 *mm*, 32 *mm*) gegeben sind, und ihm dann einen Kreis einzuschreiben.

3. Es soll ein Rhombus construiert werden, wenn gegeben sind:

a) eine Seite und ein Winkel (34 *mm*, 30°);

b) eine Seite und eine Diagonale (24 *mm*, 32 *mm*);

c) die beiden Diagonalen (18 *mm*, 28 *mm*).

4. Zeichne ein Rhomboid, wenn gegeben sind:

a) zwei Seiten (25 *mm* und 33 *mm*) und der von ihnen eingeschlossene Winkel 60°;

b) zwei anstoßende Seiten und die durch ihren Schnittpunkt gehende Diagonale (22 *mm*, 29 *mm*, 35 *mm*);

c) die beiden Diagonalen und eine Seite (31 *mm*, 34 *mm*, 25 *mm*);

d) die beiden Diagonalen und der von ihnen eingeschlossene Winkel (36 *mm*, 43 *mm*, 60°).

§. **118**. 1. Zu einer gegebenen Geraden in einem gegebenen Abstande eine Parallele zu ziehen.

Man errichte zu der Geraden eine Normale, mache diese gleich dem gegebenen Abstande und ziehe zu ihr im Endpunkte wieder die Normale; diese ist zu der gegebenen Geraden parallel. (§. 101.)

2. Ein Dreieck zu construieren, wenn gegeben sind:

a) zwei Seiten und die zur dritten Seite gehörige Höhe (38 *mm*, 45 *mm*, 30 *mm*);

b) zwei Seiten und die zur ersten Seite gehörige Höhe (42 *mm*, 36 *mm*, 28 *mm*).

Der geometrische Ort des Scheitels ist eine Gerade, welche zu der Grundlinie in einem Abstande gleich der Höhe parallel gezogen wird. (§. 101.)

Aufgabe a) gibt zwei verschiedene Auflösungen. Aufgabe b) hat ebenfalls im allgemeinen zwei Auflösungen; wann ist die Aufgabe eindeutig, wann unlösbar?

3. Ein gleichschenkliges Dreieck zu construieren, wenn ein Schenkel (36 *mm*) und die Höhe (28 *mm*) gegeben sind.

4. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construieren, wenn die Hypotenuse (45 *mm*) und die Höhe auf dieselbe (26 *mm*) gegeben sind.

5. Mit einem gegebenen Halbmesser einen **Kreis** zu construieren, welcher

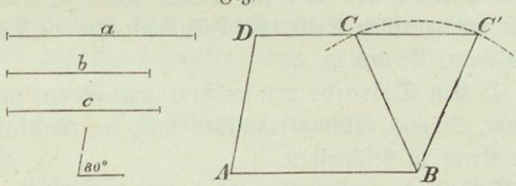
a) eine gegebene Gerade berührt und durch einen außerhalb derselben liegenden Punkt geht (Geometrische Örter §§. 101 und 23);

b) zwei sich schneidende Gerade berührt (Geometrische Örter §§. 60 und 101);

c) einen gegebenen Kreis und eine außerhalb desselben liegende Gerade berührt (Geometrische Örter §§. 94, b, und 101).

§. **119**. 1. **Ein Trapez zu construieren, wenn eine Parallelseite a, die zwei nichtparallelen Seiten b und c und der von a und b eingeschlossene Winkel (80°) gegeben sind.** (Fig. 97.)

Fig. 97.



Man construiere einen Winkel A = 80°, mache AB = a; AD = b. Durch D ziehe man eine Parallele mit AB und beschreibe aus B mit dem Halbmesser c einen Kreisbogen, welcher jene Parallele in C schneidet. Zieht man nun BC, so erhält man das Trapez ABCD, welches die vier gegebenen Stücke enthält. Da aber der aus B beschriebene Kreisbogen die Parallele DC noch in einem zweiten Punkte C' schneidet, so gibt es auch noch ein zweites Trapez ABC'D, welches dieselben vier Stücke enthält. Die Aufgabe läßt also im allgemeinen **zwei** Auflösungen zu. Wann erhält man nur ein, wann gar kein Trapez?

Durch wie viele und welche Stücke wird a) ein Trapez überhaupt, b) ein gleichschenkliges Trapez vollständig bestimmt?

Sind unter den Bestimmungsstücken die beiden Parallelseiten gegeben, so geschieht die Construction mit Hilfe eines Dreieckes, dessen Grundlinie gleich ist der Differenz der Parallelseiten.

2. Construiere ein Trapez, in welchem die Parallelseiten 38 *mm* und 32 *mm* vorkommen und eine der zwei nichtparallelen Seiten 27 *mm* ist und mit der ersteren Parallelseite den Winkel von 60° bildet.

3. Zeichne ein Trapez, wenn gegeben sind:

a) die Parallelseiten und die nichtparallelen Seiten (42 *mm*, 30 *mm*, 36 *mm*, 28 *mm*);

b) die zwei Parallelseiten und die der ersten anliegenden Winkel (45 *mm*, 28 *mm*, 45°, 60°);

c) die zwei Parallelseiten, ein Winkel an denselben und die Höhe (40 *mm*, 32 *mm*, 60°, 26 *mm*);

d) die zwei Parallelseiten, ein Winkel an denselben und eine der nichtparallelen Seiten (42 *mm*, 29 *mm*, 75°, 33 *mm*);

e) die zwei nichtparallelen Seiten, eine Parallelseite und die Höhe (34 *mm*, 42 *mm*, 48 *mm*, 27 *mm*).

Die Aufgabe e) ist zweideutig.

4. Construiere ein gleichschenkliges Trapez, von welchem die Parallelseiten (36 *mm*, 32 *mm*) und die nichtparallele Seite (28 *mm*) gegeben sind, und beschreibe um dasselbe einen Kreis.

5. Construiere ein gleichschenkliges Trapez, wenn gegeben sind:

a) die Parallelseiten und die Höhe (38 *mm*, 3 *cm*, 26 *mm*);

b) die Parallelseiten und ein Winkel (32 *mm*, 24 *mm*, 120°);

c) die nichtparallele Seite, die Diagonale und die Höhe (36 *mm*, 46 *mm*, 28 *mm*).

§. **120**. 1. Ein Deltoid, von welchem zwei Seiten und die Symmetrale (30 *mm*, 36 *mm*, 45 *mm*) gegeben sind, zu construieren und in dasselbe einen Kreis zu beschreiben.

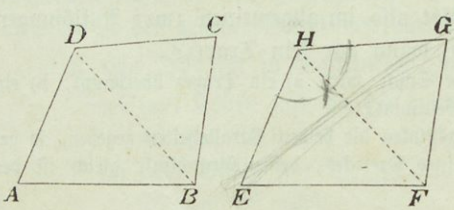
2. Ein Deltoid zu construieren, wenn gegeben sind:

a) zwei Seiten und die von der Symmetrale geschnittene Diagonale (42 *mm*, 31 *mm*, 37 *mm*);

b) die beiden Diagonalen und eine Seite (45 *mm*, 28 *mm*, 32 *mm*).

§. **121**. Ein Viereck zu construieren, welches mit einem gegebenen Vierecke ABCD (Fig. 98) congruent ist.

Fig. 98.

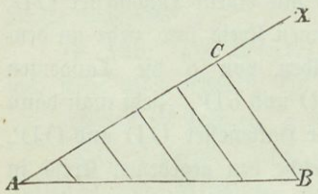


Zieht man die Diagonale BD, construiert das Dreieck $EFH \cong \triangle ABD$, und über FH das Dreieck $FGH \cong \triangle BCD$, so ist das Viereck $EFGH \cong ABCD$. Es ist übrigens nicht nöthig, die Diagonale BD wirklich zu ziehen; man braucht nur die Eckpunkte E, F, G, H des neuen Viereckes entsprechend zu bestimmen, was auf folgende Art geschieht:

Man mache EF = AB, beschreibe aus E und F mit den Halbmessern AD und BD Bogen, welche sich in H schneiden; ferner beschreibe man aus F und H mit den Halbmessern BC und DC Bogen, welche sich in G schneiden, und ziehe EH, HG und GF.

§. **122**. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 99) in mehrere, z. B. in fünf gleiche Theile zu theilen.

Fig. 99.



Man zieht durch den einen Endpunkt A unter einem beliebigen Winkel einen Strahl AX, trägt darauf fünf gleiche Strecken von beliebiger Größe bis C auf und verbindet C mit dem zweiten Endpunkte B. Dadurch erhält man ein Dreieck ACB, in welchem die Seite AC in fünf gleiche Theile getheilt ist; damit auch die Seite AB in fünf gleiche Theile getheilt werde, braucht man nur durch jeden Theilungspunkt der AC eine Parallele zu CB zu ziehen.

Theile eine Strecke in 3, 6, 7, 9, 10, 12 gleiche Theile.

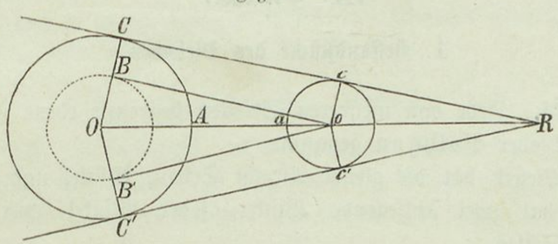
§. **123**. Hier kann auch die folgende Aufgabe gelöst werden:

An zwei gegebene Kreise eine gemeinsame Tangente zu ziehen.

Es seien O und o die Mittelpunkte, OA und oa die Halbmesser der zwei Kreise.

a) Man beschreibe (Fig. 100) aus O mit einem Halbmesser OB, welcher gleich ist der Differenz OA — oa der gegebenen Halbmesser, einen Kreis und ziehe an denselben von o die Tangenten oB und oB'.

Fig. 100.



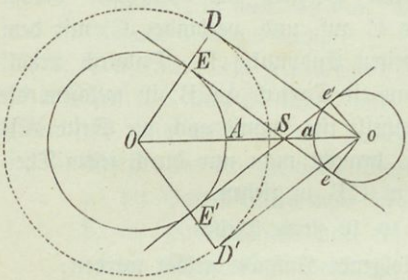
Verlängert man dann die Halbmesser OB und OB' bis zum Durchschnitte des gegebenen Kreises in C und C' und zieht oC || OC und oc' || OC', so sind die Geraden Cc und C'c' zwei gemeinsame, und zwar die äußeren Tangenten der beiden gegebenen Kreise.

Denn das Viereck BCco ist, da die Seiten BC und oc gleich und parallel sind, ein Parallelogramm (§. 103); da in diesem ein Winkel CBo ein rechter ist, so sind es auch die anderen; also ist BCc = R und ocC = R, d. i. Cc ist eine gemeinsame Tangente der zwei Kreise. Ebenso folgt, dass auch C'c' eine Tangente der beiden Kreise ist.

Die äußeren Tangenten zweier Kreise schneiden sich in einem Kreise der verlängerten Centrale.

b) Man beschreibe (Fig. 101) aus O mit einem Halbmesser OD, welcher gleich ist der Summe OA + oa, einen Kreis und ziehe an denselben von o die Tangenten oD und oD'. Zieht man dann die Halbmesser OD und OD', welche den gegebenen Kreis in E und E' schneiden, ferner oe || OE und oe' || OE', so sind die Geraden Ee und E'e' ebenfalls zwei gemeinsame, und zwar die inneren Tangenten der beiden gegebenen Kreise.

Fig. 101.



Die Richtigkeit dieser Lösung lässt sich ebenso wie die der früheren unter a) erweisen.

Die inneren Tangenten zweier Kreise schneiden sich in einem Punkte der Centrale.

IX. Vielecke.

1. Bestandstücke des Vieleckes.

§. **124.** Jede von mehreren Strecken begrenzte ebene Figur wird ein Vieleck oder Polygon genannt.

Ein Vieleck hat die gleiche Anzahl Seiten, Winkel und Eckpunkte; jede Seite hat zwei anliegende Winkel, jeder Winkel zwei ihn einschließende Seiten.

Je nachdem ein Vieleck drei, vier, fünf, sechs, ... Seiten hat, heißt es ein Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck u. s. w.

Eine Strecke, welche zwei Eckpunkte verbindet, die nicht in derselben Seite liegen, heißt Diagonale.

Aufgaben.

1. Kann in einem Dreiecke eine Diagonale gezogen werden?

2. Wie viele Diagonalen können von einem Eckpunkte in einem Vier-, Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehnecke gezogen werden? In wie viele Dreiecke wird dadurch jedes der genannten Vielecke zerlegt?

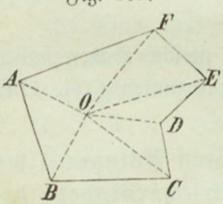
Die Anzahl Diagonalen, die in einem Vielecke von einem Eckpunkte aus gezogen werden können, ist immer um 3 kleiner als die Anzahl der Seiten; und die Anzahl der Dreiecke, in welche dadurch das Vieleck zerlegt wird, ist um 2 kleiner als die Seitenanzahl.

§. **125**. Die Winkel eines Polygons können spitz, recht, stumpf und selbst auch erhaben sein.

Zeichne ein Polygon, in welchem alle diese Arten von Winkeln vorkommen.

Die Summe aller Winkel eines Polygons ist gleich so vielmal zwei Rechten, als das Polygon Seiten hat, weniger vier Rechten.

Fig. 102.



Zieht man von einem Punkte O innerhalb des Polygons ABCDEF (Fig. 102) zu allen Eckpunkten gerade Linien, so erhält man so viele Dreiecke, als das Polygon Seiten hat; die Winkel eines solchen Dreieckes betragen zwei Rechte, daher die Winkel aller Dreiecke so vielmal zwei Rechte, als das Polygon Seiten hat. Unter diesen Winkeln der Dreiecke kommen nun alle Vieleckswinkel vor, aber überdies auch noch die Winkel um den Punkt O herum, die nicht Vieleckswinkel sind und zusammen vier Rechte betragen. Um daher die Summe der Vieleckswinkel zu erhalten, muss man von der Winkelsumme aller Dreiecke noch vier Rechte subtrahieren.

Wie groß ist die Summe aller Winkel eines Fünfeckes, eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehn-, Zwölfeckes?

2. Regelmäßige Vielecke.

§. **126**. Ein Vieleck, in welchem alle Seiten gleich sind, heißt gleichseitig; ein Vieleck, in welchem alle Winkel gleich sind, gleichwinklig; ein Vieleck, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, regelmäßig.

Da in einem regelmäßigen Polygon alle Winkel gleich sind, so ist es leicht, die Größe eines derselben zu finden; man darf nur die Summe aller Winkel suchen, und dieselbe durch die Anzahl der Winkel dividieren. Es beträgt z. B. jeder Winkel

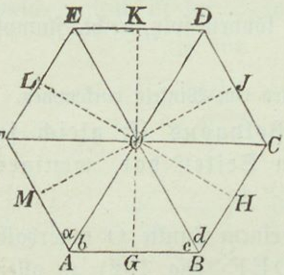
des regelmäßigen Fünfeckes $\frac{540^0}{5} = 108^0$,

" " Sechseckes $\frac{720^0}{6} = 120^0$, u. s. w.

§. **127**. Es sei das Polygon ABCDEF (Fig. 103) regelmäßig, also $AB = BC = CD = DE$ und $A = B = C = D$.

Halbiert man zwei Winkel A und B, die an einer Seite liegen, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck ABO. Zieht man von dem Scheitel O desselben zu den übrigen Eckpunkten die Strecken OC, OD, OE, ... so wird dadurch das Polygon in lauter congruente gleichschenklige Dreiecke getheilt; denn wendet man das erste Dreieck ABO um die Seite OB um, so deckt es das Dreieck BCO; dieses kann ebenso mit dem nächsten zur Deckung gebracht werden, u. s. f. Die Strecken OA, OB, OC, ... sind also einander gleich.

Fig. 103.



Da congruente gleichschenklige Dreiecke auch gleiche Höhen haben, so sind auch die von O auf die Seiten gefällten Normalen OG, OH, OJ, ... einander gleich. Daraus folgt:

1. Halbiert man in einem regelmäßigen Polygon zwei aufeinander folgende Umfangswinkel und verbindet den Schnittpunkt der Halbierungslinien mit den übrigen Eckpunkten des Polygons durch Strecken, so wird dadurch das Polygon in lauter congruente gleichschenklige Dreiecke getheilt.

2. In jedem regelmäßigen Polygon gibt es einen Punkt, der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten gleich weit absteht.

Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Polygons. Man findet ihn, indem man zwei aufeinander folgende Vieleckswinkel halbiert.

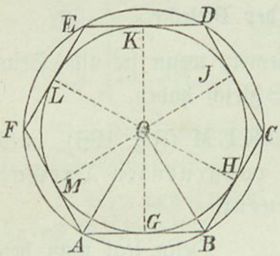
§. **128**. Ein Vieleck, dessen alle Eckpunkte in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben, und der Kreis heißt um das Vieleck beschrieben. Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck wird auch ein Sehnenvieleck genannt.

Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind, heißt dem Kreise umgeschrieben, und der Kreis heißt in das Vieleck beschrieben. Ein dem Kreise umgeschriebenes Vieleck wird auch ein Tangentenvieleck genannt.

Regelmäßige Sehnen- und Tangentenvielecke.

§. **129**. Jedem regelmäßigen Vielecke läst sich ein Kreis a) umschreiben, b) einschreiben.

Fig. 104.



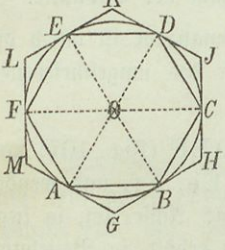
Es sei ABCDEF (Fig. 104) ein regelmäßiges Vieleck. Halbiert man zwei Winkel, z. B. A und B, so ist der Schnittpunkt O der Halbierungslinien von allen Eckpunkten und ebenso von allen Seiten gleichweit entfernt.

a) Beschreibt man daher aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO eine Kreislinie, so muss dieselbe durch alle Eckpunkte A, B, C, D, E, F gehen, und ist somit dem Vielecke umgeschrieben.

b) Sind OG, OH, OJ, OK,.... die gleichen Abstände des Mittelpunktes O von den Seiten des Vieleckes, und beschreibt man aus O mit dem Halbmesser OG einen Kreis, so muss dieser durch die Punkte G, H, J, K,... gehen, und da die Seiten des Vieleckes Tangenten zu dem Kreise sind, so ist dieser dem Vielecke eingeschrieben.

§. **130**. Wird die Peripherie eines Kreises in mehrere gleiche Theile getheilt, so sind die Theilungspunkte a) die Eckpunkte eines eingeschriebenen, und b) die Berührungspunkte eines umgeschriebenen regelmäßigen Vieleckes.

Fig. 105.



Es sei (Fig. 105) die aus O mit dem Halbmesser OA beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Theile getheilt.

a) Zieht man durch die Theilungspunkte die Sehnen AB, BC, CD, DE,.. und dreht das dadurch entstehende, dem Kreise eingeschriebene Vieleck ABCDE.. um den Mittelpunkt O, bis jeder Theilungspunkt den nächstfolgenden deckt, so deckt auch jede Seite des Vieleckes die folgende Seite und jeder Winkel den folgenden Winkel; das Vieleck ist also regelmäßig.

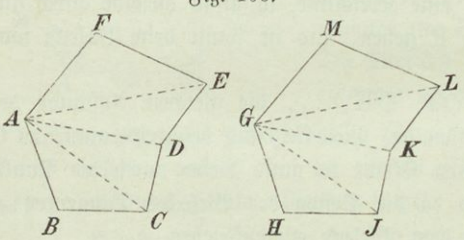
b) Errichtet man in den Theilungspunkten A, B, C, D,... auf die zu denselben gezogenen Halbmesser Normale, so erhält man das dem Kreise umgeschriebene Vieleck GHJKL... Dieses Vieleck ist regelmäßig; denn dreht man dasselbe um den Mittelpunkt, bis jeder Theilungspunkt mit den nächstfolgenden zusammenfällt, so deckt auch jeder Halbmesser den folgenden, daher auch jede Tangente die folgende, und somit auch jeder Winkel des Vieleckes den folgenden.

3. Congruenz und Symmetrie der Vielecke.

§. **131**. Zwei Vielecke sind congruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel nach der Ordnung paarweise gleich haben.

Zwei Vielecke ABCDEF und GHJKLM (Fig. 106), welche aus gleich vielen, der Ordnung nach congruenten Dreiecken zusammengesetzt sind, sind selbst congruent.

Fig. 106.



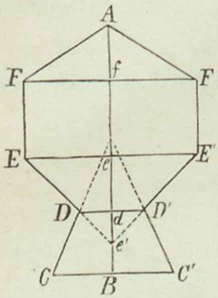
Denn legt man beide Vielecke so aufeinander, dass zwei gleichliegende Dreiecke aufeinander fallen, z. B. ABC auf GHJ, so wird auch das zweite Paar Dreiecke sich decken, folglich auch das dritte Paar,...; daher decken sich auch die ganzen Vielecke, d. i. sie sind congruent.

Zur Bestimmung von drei Eckpunkten sind drei Bestimmungsstücke erforderlich; um jeden neuen Eckpunkt zu erhalten, braucht man zwei weitere, von einander unabhängige Bestimmungsstücke. Die Anzahl der zur Construction eines Polygons nothwendigen unabhängigen Bestimmungsstücke ist also um drei kleiner als die doppelte Anzahl der Eckpunkte.

Ein regelmäßiges Vieleck von gegebener Seitenanzahl ist durch die Seite oder durch den Halbmesser des ein- oder des umgeschriebenen Kreises bestimmt.

§. **132**. Zieht man in dem Vielecke ABCDEF (Fig. 107) von den Eckpunkten zu der AB die Normalen Dd, Ee, Ff, und wendet das Vieleck als eine feste Verbindung um AB als Achse um, so liegt das Vieleck ABC'D'E'F', welches man dadurch erhält, in Beziehung auf die Gerade AB zu dem gegebenen Vielecke symmetrisch, und das ganze Vieleck AFEDCBC'D'E'F' ist in Beziehung auf die Symmetrale AB ein symmetrisches Gebilde (§. 57).

Fig. 107.



Zwei symmetrisch liegende ebene Gebilde sind immer auch congruent; ihre gleichen Bestandstücke folgen jedoch in Beziehung auf die Symmetrale in entgegengesetzter Ordnung auf einander.

§. **133**. Bezüglich der Symmetrie der regelmäßigen Polygone gelten folgende Sätze:

1. Sowohl jede Seitensymmetrale als jede Winkelsymmetrale eines regelmäßigen Vieleckes ist eine Symmetrieachse desselben (Fig. 103).

Von der Richtigkeit überzeugt man sich durch Umwendung um die bezügliche Symmetrale.

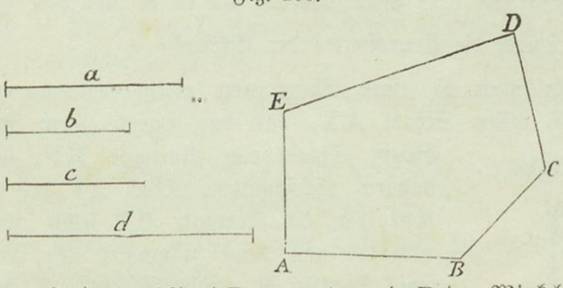
2. Ein regelmäßiges Vieleck hat so viele Symmetrieachsen, als es Seiten hat.

Ist die Seitenanzahl des Vieleckes gerade, so haben immer je zwei gegenüberliegende Seiten und je zwei gegenüberliegende Winkel dieselbe Symmetrale. Ist dagegen die Seitenanzahl ungerade, so fallen immer eine Seiten- und eine Winkelsymmetrale zusammen.

4. Constructionsaufgaben.

§. 134. 1. Ein Fünfeck zu construieren, wenn die Seiten a, b, c, d und die von diesen eingeschlossenen Winkel 132°, 125° und 84° gegeben sind.

Fig. 108.



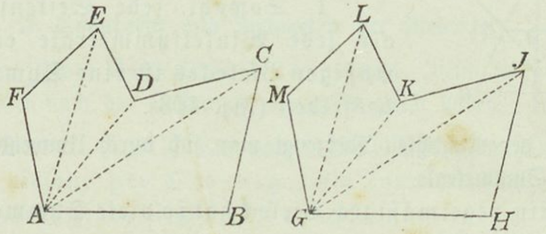
Man mache (Fig. 108) AB = a, trage in B den Winkel 132° auf; auf dem neuen Schenkel schneide man BC = b ab, trage in C den Winkel 125° auf; mache ferner CD = c, zeichne in D den Winkel 84°, und schneide DE = d ab. Zieht man nun AE, so ist ABCDE das verlangte Fünfeck.

2. Zeichne ein Sechseck, in welchem die Seiten 22 *mm*, 37 *mm*, 18 *mm*, 25 *mm*, 40 *mm* nach der Ordnung die Winkel 120°, 105°, 105°, 135° einschließen.

§. **135.** Ein Vieleck zu übertragen.

a) Durch Bestimmung der Eckpunkte mittelst der Construction von Dreiecken.

Fig. 109.

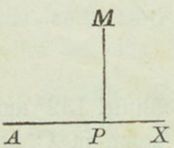


Denkt man sich das gegebene Vieleck ABCDEF (Fig. 109) durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt und das $\triangle$ GHJ $\cong$ ABC, über GJ das $\triangle$ GJK $\cong$ ACD, über GK das $\triangle$ GKL $\cong$ ADE und über GL das $\triangle$ GLM $\cong$ AEF construiert, so ist das Vieleck GHJKLM $\cong$ ABCDEF. Man braucht übrigens nicht diese Dreiecke wirklich zu zeichnen, es genügt, ihre Eckpunkte G, H, J, K, L, M zu bestimmen. Zu diesem Ende macht man GH = AB, beschreibt aus G und H mit den Halbmessern AC und BC Bogen, durch deren Durchschnitt man den Punkt J erhält; dann beschreibt man aus G und J mit den Halbmessern AD und CD Bogen, welche sich in K schneiden, u. s. w.

b) Durch die Coordinaten der Eckpunkte.

Zieht man in einer Ebene von einem bestimmten Punkte A (Fig. 110) einen Strahl AX, und von irgend einem Punkte M zu diesem Strahl eine Normale MP, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück AP des Strahls die Abscisse, die Normale MP selbst aber die Ordinate, und beide zusammen die Coordinaten jenes Punktes M. Der Strahl AX heißt die Abscissenlinie, der Punkt A der Anfangspunkt.

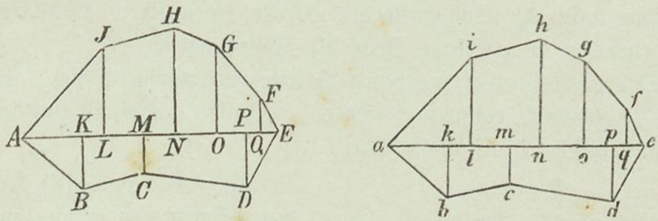
Fig. 110.



Wenn der Anfangspunkt A und die Richtung der Abscissenlinie AX gegeben sind, so ist die Lage eines jeden Punktes M vollkommen bestimmt, wenn dessen Coordinaten AP und MP bekannt sind; denn man braucht nur von A aus an der Abscissenlinie ein Stück abzuschneiden, welches der Abscisse AP gleich ist, dann im Punkte P eine Normale zu errichten, und die Ordinate PM darauf aufzutragen; der Endpunkt ist der gesuchte Punkt M.

Um mittels der Coordinaten ein Gebilde ABCDE... (Fig. 111) zu übertragen, nehme man in demselben irgend eine Gerade AE als

Fig. 111.



Abscissenlinie und A als Anfangspunkt derselben an, und ziehe von allen Eckpunkten Normale zu der Abscissenlinie. Sodann ziehe man die neue Abscissenlinie ac, trage auf ihr in der Ordnung alle Abscissen von a bis k, l, m, n, ... auf, errichte in diesen Punkten Normale und trage auf ihnen die entsprechenden Ordinaten von k bis b, von l bis i, von m bis c, ... auf; dadurch ist dann die Lage aller Eckpunkte des mit ABCDE... congruenten Vieleckes bestimmt.

2. Ein Vieleck zu construieren, das zu einem gegebenen Vielecke in Beziehung auf eine gegebene Symmetrale symmetrisch ist. (§. 132.)

§. **136**. 1. Um ein regelmäßiges a) Dreieck, b) Viereck, c) Sechseck einen Kreis zu beschreiben. (§. 129.)

2. In ein regelmäßiges a) Dreieck, b) Viereck, c) Sechseck einen Kreis zu beschreiben. (§. 129.)

3. Einem gegebenen Kreise a) ein gleichseitiges Dreieck, b) ein regelmäßiges Sechseck ein- und umzuschreiben. (§. 130.)

4. Einem gegebenen Kreise a) ein Quadrat, b) ein regelmäßiges Achteck ein- und umzuschreiben.

5. Einem gegebenen Kreise mit Hilfe des Transporteurs ein regelmäßiges a) Fünfeck, b) Zehneck ein- und umzuschreiben.

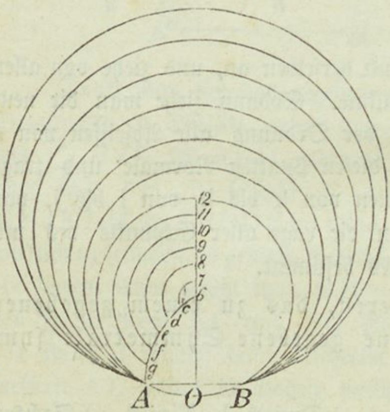
6. In einen Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck beschrieben; man beschreibe in denselben ein solches von doppelt so viel Seiten.

§. **137**. 1. Über einer gegebenen Strecke ein regelmäßiges Vieleck zu construieren.

a) Bei der Lösung dieser Aufgabe kommt es nur darauf an, die Größe des Kreises zu finden, welchem das verlangte Vieleck eingeschrieben erscheint. Zu diesem Ende berechne man zuerst die Größe eines Vieleckswinkels, ziehe eine Strecke, welche der gegebenen Seite gleich ist, und trage in jedem Endpunkte den halben Vieleckswinkel auf. Aus dem Schnittpunkte der beiden neuen Schenkel beschreibe man nun durch die Endpunkte der Strecke einen Kreis und trage in demselben die gegebene Seite als Sehne herum.

b) Sollen über einer gegebenen Strecke regelmäßige Sechs-, Sieben-, ... Zwölfecke construiert werden, so läßt sich dieses auf folgende mechanische Weise ausführen:

Fig. 112.



Ist AB (Fig. 112) die gegebene Strecke, so errichte man im Halbierungspunkte O eine Senkrechte, beschreibe aus B mit dem Halbmesser AB den Bogen A6 und theile denselben zuerst in 2, und jede Hälfte noch in 3 gleiche Theile; sodann ziehe man aus dem Punkte 6 als Mittelpunkt die Kreisbogen c 7, d 8, e 9 u. s. w. In dem Kreise, dessen Mittelpunkt 6 und dessen Halbmesser A6 ist, läßt sich nun AB 6mal herumtragen; in dem Kreise, dessen Mittelpunkt 7 und dessen Halbmesser A7 ist, kann AB 7mal aufgetragen werden; u. s. w.

2. Zeichne eine Strecke von 2 cm Länge und construiere über derselben ein regelmäßiges a) Fünfeck, b) Sechseck, c) Achteck, d) Zehneck, e) Zwölfeck.