



Nič pomeni nič – nečesa*

Nothing means nothing – of something

Σ Povzetek

Velik vpliv na učenje posameznikov ima poučevanje, ki ga izvaja učitelj. Če želimo izboljšati poučevanje in tudi učenje v šoli, morajo biti učitelji seznanjeni s kritičnimi lastnostmi posameznega koncepta, ki jih mora učenec zaznati in prepoznati, če ga želi razumeti. Ni namreč dovolj, da učitelj kritične lastnosti učencem zgolj poimenuje. Za učenje je veliko večjega pomena, da so odkrite v okviru dejavnosti, ki jih za učence zasnujejo učitelji. Namen tega preglednega članka je predstaviti razvoj koncepta števila nič v preteklosti, opozoriti na najpogostejša napačna razumevanja, ki se kot posledica različnih konceptov, napačnih predstav ... pojavljajo pri razumevanju koncepta števila nič po celotni vertikalni osnovnošolskega izobraževanja, in tako opozoriti na kritične lastnosti, ki lahko učiteljem olajšajo načrtovanje dejavnosti v procesu poučevanja.

Ključne besede: število nič, zahtevni matematični koncepti, razumevanje, poučevanje, učenje.

Anja Janežič

Osnovna šola Martina
Krpana Ljubljana

Σ Abstract

Teaching performed by the teacher has a great influence on the learning of individuals. If we want to improve teaching and in consequence also learning in school, teachers must be acquainted with the critical properties of an individual concept, which the pupil must detect and recognize if he wants to understand

it. It is namely not enough that the teacher names the critical properties to the pupils. It is much more important for learning that they are discovered in the framework of activities, which are designed for pupils by teachers. The aim of the following synoptic article is to present the development of the concept of the number zero in the past to warn against frequent misunderstandings which are the consequence of different concepts, wrong notions.....and appear in the understanding of the concept of the number zero along the whole vertical of primary education. In this way I am trying to expose the critical proprieties, which can be of a great help to teachers in planning of activities in the teaching process.

Keywords: number zero, demanding mathematical concepts, understanding, teaching, learning.

α Uvod

V prvem poglavju svoje knjige Svet števil je Guedj (1996, str. 13) zapisal: »Človeštvo je za prehod od množine do števila potrebovalo dolgo dobo. Koncept števila, ki se nam zdi nekaj samoumevnega, je rezultat dolgotrajnega razvoja abstraktnega mišljenja.« Po njegovih besedah je pogoj za nastanek števila abstraktno gledanje na predmete, pri katerih upoštevamo zgolj obstoj, zanemarimo pa njihove lastnosti in posebnosti.

Nekaj podobnega kot velja za nastanek števila, velja tudi za število nič. Za prehod od prvih števil do števila nič je človeštvo potrebovalo kar nekaj časa, saj je bilo, kot pravita Berlinghoff in Gouvêa (2008), treba o številah razmišljati »kot o idejah, ki obstajajo tudi tedaj, ko ne preštevamo ničesar« (Berlinghoff in Gouvêa, 2008, str. 83). Šele tedaj, pravita, »obravnavanje ničle kot števila postane povsem smiselno« (prav tam).

β Začetki števila nič

Zgodovinarji so začetke ničle postavili v Mezopotamijo leta 1600 pred Kr. Babilonci so v tem času že poznali sistem mestne vrednosti. Prazno mesto, s katerim so pokazali, da je eno mesto izpuščeno, so najprej označevali s presledkom, ker pa so bili presledki zaradi hitrosti pisanja različno veliki, so jih pozneje nadomestili s piko.

Z odkrivanjem ničle so nadaljevali Hinduji. Še pred letom 600 pred Kr. so poznali mestni desetiški sestav, kot ga imamo še danes. Za označitev praznega mesta so uporabili majhen krogec.

Omenjeni sestav so se v 9. stoletju naučili uporabljati Arabci in pod njihovim vplivom se je v naslednjih dveh ali treh stoletjih postopoma razširil tudi v Evropo. Simboli za posamezne številke so se sicer nekoliko spremenili, načela pa so ostala ista. (Arabci so krogec uporabljali za označitev števila pet, za označitev praznega mesta so uporabljali piko.) Indijsko besedo za odsotnost količi-

ne, sunja, so Arabci prevedli z besedo sifr, Evropejci pa z latinsko zephirum, skupaj z le napol polatinjeno besedo cifra. Ti dve besedi sta se razvili v angleški besedi zero in cipher (ničla in številka). Še danes uporabljamo simbol števila nič (krog ali oval) za oznako tega, da katera potenca števila deset ni uporabljena.

Hindujci so poleg tega, da so označili neko odsotnost količine, do 9. stoletja ugotovili še nekaj, in sicer, da je odsotnost količine tudi količina sama – nič so začeli obravnavati kot število (Berlinghoff in Gouvêa, 2008).

Tedaj se je začel razcvet aritmetike in algebre, o čemer priča tudi tale zapis: »Ničla se je do konca 18. stoletja iz pripomočka za označevanje praznega mesta razvila v pravo algebrsko orodje. Na poti do matematične dovršenosti, pa je bil v zvezi s številom nič storjen še en pomemben korak. Ko so matematiki v 19. stoletju posplošili strukturo sistema števil in v sodobno algebro uvedli kolobarje in obsege, je število nič postalo zgled posebnega elementa teh struktur. Dejstvo, da se število ne spremeni, ko mu prištejemo 0, in da množenje števila z nič zopet privede do števila nič, je postalo definicija »aditivne enote«, posebnega elementa teh abstraktnih struktur.« (Berlinghoff in Gouvêa, 2008, str. 85)

γ Nekaj prednosti uvedbe števila nič za razvoj aritmetike

Ljudstva v preteklosti (Egipčani, Kitajci, Grki, Maji, Idijci, Azteki, Etiopci, Hebrejci in Rimljani) so poznala več različnih številskih sistemov. Zgodovinarji znanosti so jih razvrstili v tri skupine; aditivne (seštevalne), mešane (seštevalne in množilne) ter pozicijske ali mestne.

Aditivni številski sistemi za izražanje števil uporabljajo operacijo seštevanja. Število se zapiše z nizanjem simbolov, vsota simbolov pa pomeni zapisano število.

Mešani številski sistemi za izražanje števil uporabljajo dve operaciji: seštevanje in množenje. Seštevanje tudi tu deluje kot štetje vrednosti zaporednih enot. Množenje pa deluje po sistemu: dvesto = dve · sto je predstavljenost z dve, ki mu sledi sto. Nizanje števk ima pomen množenja (Guedj, 1996).

Omenjena številka sistema sta povsem koristna za zapis števil (število 345 (CCCXXXV) lahko v rimskem aditivnem številskem sistemu zapišemo brez težav), a imata nekaj pomanjkljivosti:

- a) Za vedno večja števila si je treba izmišljati vedno nova imena.
- b) Možnosti za predstavljanje števil, ki jih je sicer neskončno, so omejene.
- c) Težko primerjamo velikost števila glede na količino uporabljenih znakov; kot primer naj navedem števili 888 (DCCCLXXXVIII), kjer za zapis potrebujemo 12 znakov, in število 1001 (MI), kjer za zapis potrebujemo dva znaka. Za manjše število v omenjenem aditivnem številskem sistemu lahko tako porabimo več znakov kot za večje.
- č) Zmnožiti števili 57 (LVII) in 38 (XXXVIII) je praktično nemogoče, še bolj pa razumeti, kako smo prišli do zmnožka 2166 (MMCLXVI).

Ravno zaradi omenjenih pomanjkljivosti je bila potreba po iznajdbi drugačnega številskega sistema – sistema mestne vrednosti

tako velika. Sistem mestne vrednosti pa se je v popolnosti lahko razvil šele, ko je ničla postala število, saj so tako imeli s pomočjo 10 simbolov neomejeno število možnosti za predstavljanje števil.

Težava z iskanjem vedno novega znaka in imena zanj je bila rešena, saj vsaka števka (vključno z ničlo) lahko zasede vsako mesto. Ista števka v zapisu, odvisno od mesta na katerem stoji, predstavlja različno število, ima torej različno ime. V številu 56845 je ime prve števke 5 petdeset tisoč, zadnje pa 5 enic. Mesto v zapisu števila ima določeno ime in šteje samo po sebi. Čeprav je število ena manjše od števila devet, je enica v številu 1001 vredna veliko več kot katera koli devetica v številu 999.

Prav tako so z iznajdbo števila nič in posledično sistema mestne vrednosti olajšali vsakdanje primerjanje števil med sabo. Kolčina uporabljenih števk za zapis nekega števila je v mestnem sistemu v premem sorazmerju z velikostjo števila (število 999 je manjše od števila 1001, ker prvega sestavlja jo tri števke, drugega pa štiri) prav tako pa so operacije med števili možne in jih lahko razložimo.

8 Število nič v različnih oblikah in kontekstih

Kar nekaj raziskovalcev; Hughes (1986), Clemson in Clemson (1994), Worthington in Carruthers (2008), matematiko pojmuje kot (tuj) jezik, ki se ga morajo otroci naučiti. Značilnost jezika je v tem, da lahko iste besede pomenijo različno, odvisno od konteksta, v katerem so uporabljene.

Število nič lahko v vsakdanjem življenju izrazimo v dveh oblikah – govorjeni ali za-

pisani obliki. Znotraj posamezne oblike lahko opazujemo enako besedo ali simbol, ki v različnih govornih kontekstih pomeni nekaj drugega. Kontekst je lahko matematične ali družbene narave, število nič je lahko kardinalno ali ordinalno. Lahko ima numerične vrednosti (število fižolčkov v posodi), lahko pa le opisne (številka registrske tablice).

V nadaljevanju bo predstavljenih nekaj različnih besednih oblik, nato pa še nekaj različnih simbolnih oblik.

Beseda nič ima v slovenskem jeziku še nekaj sopomenk: ničla, nula, ničeln, ničlen, nulti, ničti ...

Beseda nič v stavku: »tri plus nič je tri« ima matematični kontekst in pomeni nekaj povsem drugega kot beseda »nič« v reku: »O tem se povsod šušlja, čisto brez nič ne bo.« (družbeni kontekst)

Prav tako se razlikuje sporočilo stavka: »Pozabil si napisati ničlo«, ki je lahko tako v matematičnem kontekstu (ničla kot simbol) kot v družbenem (ničla kot del telefonske številke) od tega: »V primerjavi z njim je prava ničla.« (družbeni kontekst)

Različno lahko uporabljamo tudi besedo nula. Stavek »Njihova poštna številka je ena, tri, šest, nula« (družbeni kontekst) ima precej drugačen pomen od »Sedem minus sedem je nula« (matematični kontekst) ali »Ena nula zate« (kardinalna numerična vrednost - množica zadetkov na gol).

Čeprav je uporaba besednega izražanja ideje o ničli na videz zapletena, pa je simbolna oz. vizualna lahko še bolj. Simbol ničle (0) lahko opazujemo skoraj na vsakem koraku, saj je drugi znak za javno stranišče 00, ob polnoči naša digitalna ura kaže 00:00 ali 24:00, nogometna tekma Slovenija : Anglija se lahko konča 1 : 0, voda zmrzne pri 0 °C, telefonska številka vsebuje področno kodo

031 ali 02, štoparica pred začetkom merjenja časa kaže 0: 00, pri predmetu zgodovina se pogovarjamo o dilemi, ali leto 0 obstaja ali ne, pri kemiji imajo kemijski elementi oksidacijsko število 0, zdravnik nam lahko pove, da smo zaradi odsotnosti določenih antigenov univerzalni krvodajalci s krvno skupino 0, pri slovenskem jeziku lahko srečamo zapis črke O, ki je zelo podobna številu 0, število 0 je lahko sestavni del naše registrske številke na avtomobilu, lahko je oznaka za pritličje v veleblagovnici, termometer lahko kaže 0 °C ...

Glede na zapisano, mora otrok prepoznati, v katerem kontekstu govorimo, kar pa po mnenju Gardnerja (1997, v Worthington in Carruthers, 2008) lahko spodbudimo le z zgodnjim seznanjanjem otroka z različnimi vrstami znotraj simbolnega sistema.

ε Razumevanje števila nič

Avtorici Wheeler in Feghali (1983, str. 147) v svojem članku navajata, da lahko »razumevanje števila nič pri otrokih vsebuje napačne predstave, ki pa imajo na razumevanje velik vpliv«. Kot eno od takih predstav navajata dva primera: »Nič ni število« in »Nič je nič«.

Obstajajo različne teorije o tem, kdaj je posameznik sposoben razumeti idejo števila nič. Piaget pravi, da koncept števila nič ni v celoti razvit, dokler ne dosežemo formalne operativne stopnje, nekje do 11. leta starosti (Wheeler in Fegali, 1983, po Inhelder in Piaget, 1969). To je stopnja, ko miselne operacije niso več omejene s konkretnimi primeri, torej takrat, ko posameznik lahko abstraktno in hipotetično razmišlja v kontekstu jezikovnega in logičnega sistema (Marjanovič Umek, 2004).

S trditvijo Piageta, ki pravi, da je za učenje posamezne ravni znanja najprej potreben telesni razvoj, se ne strinja veliko razvojnih psihologov, ki mu očitajo celo, da s svojimi sklepi podcenjuje sposobnosti majhnih otrok (Hughes, 1986, po Gelman in Gallistel, 1978; Donaldson, 1978). Novejša spoznanja o kognitivnem razvoju otrok so bolj naklonjena ruskemu razvojnemu psihologu Levu Semjonoviču Vigotskemu, čigar ideja je bila, da »učenje predhodi in usmerja razvoj, ključni mehanizem, ki pojasnjuje odnos med učenjem in razvojem pa je območje bližnjega razvoja. Otrokovsko mišljenje usmerja odrasli oz. kompetentnejši sovrstnik, s tem pa aktivira kognitivne strukture, ki so že razvite, a ne do mere, da bi jih otrok lahko uporabil samostojno« (Svetina, 2005, str. 104).

Omeniti velja še enega psihologa, to je Bruner (1966, v Clemson in Clemson, 1994), ki je s svojim delom veliko prispeval h kognitivni in pedagoški psihologiji. Določil je tri vrste reprezentacij; enaktivno, ikonično in simbolno. Enaktivno pomeni učenje skozi akcijo, medtem ko je ikonična reprezentacija odvisna od uporabe slik, ki pomagajo odkrivati vzorce ali poti. Simbolična reprezentacija pomeni uporabo simbolov, skozi katere lahko raziskujemo in manipuliramo hipoteze. Brunerjev model ima jasno povezavo z Piagetovimi stopnjami razvoja, a se razlikuje v bistveni stvari – njegov model ni tako jasno povezan z leti posameznika. Pravi, da opisane modele učenja kot odziv na novo učenje uporabljamo vsi, nekateri na višji stopnji kot drugi, vendar pa nakazuje na to, da se mlajši otroci bolj nagibajo k enaktivnemu mišljenju.

Razumevanje števila nič je v preteklosti raziskovalo več avtorjev. Prvi med njimi je Hughes (1986), ki je del poskusa predstavitve

količine, namenil tudi poskusu ponazarjanja števila nič. Otroke (predšolske in otroke prvega razreda) je prosil, naj na listu pokažejo, da na mizi ni nobene kocke.

Ugotovil je, da skoraj vsi otroci, ki so za predstavitev količine uporabljali konveionalne simbole, tudi za predstavitev ničle uporabijo simbol 0, da bi predstavili odsotnost kock. Otroci, ki so pri predstavitvi količine uporabljali ikonično ali piktografično predstavitev, so odgovarjali na različne načine. Nekaj jih je uporabilo simbol 0, ali pa so izumili svoj lastni simbol, kot je pika ali pomišljaj. Drugi so risali prazno mizo ali škatlo, tretji so list papirja pustili prazen, tako da se je raziskovalec težko odločil, ali so to naredili namerno, ali je bila to le posledica tega, da niso znali odgovoriti. Nekaj odgovorov je bilo nerazumljivih.

Čeprav so dobili veliko zanimivih odgovorov od otrok, pa je raziskovalec opazil, da se je veliko otrok na zastavljeni problem predstavitve ničle odzvalo s prepadenim pogledom, ker niso razumeli, kaj želi od njih. Zavedel se je, da je otrokom treba dati razlog za risanje oznak na papir.

Da bi to dosegel, je razvil igro s konzervami. Potreboval je štiri identične prazne konzerve, ki so vsebovale različno število kock, navadno 1, 2, 3 in 0 kock. Otrok si je najprej ogledal določeno število kock v posamezni konzervi, nato pa je raziskovalec konzerve zaprl in jih med sabo pomešal. Nato je otroka prosil, naj poišče konzervo, ki vsebuje npr. 2 kocki. Tu je moral vsak otrok ugibati. Po nekaj poskusih je raziskovalec dejavnost prekinil z idejo, ki bi lahko pomagala. Predlagal je, naj na papir zapišejo nekaj, kar jim bo pomagalo pri vedenju, koliko kock je v posamezni konzervi. Ko je označil posamezno konzervo, je raziskovalec konzerve ponovno

pomešal med sabo in ponovno vprašal po konzervi, ki ima določeno vsebino. Tako je preveril, ali so jim oznake kakor koli pomagale pri igranju igre.

Rezultati so pokazali, da je dve tretjini predšolskih otrok in vsak otrok v prvem razredu sposobnih pokazati pravo konzervo, glede na svojo oznako. Oznake so bile podobno, kot v prvem poskusu: nerazumljive, piktografične, ikonične in simbolne. Vseeno, pa sta bili prisotni dve pomembni razliki:

- Prva od njih zadeva število nič, saj so v nasprotju s prepadenimi pogledi na prazno mizo otroci zdaj odsotnost predmetov v konzervi predstavili enako kot druge količine. Predšolski otroci so največkrat ničlo ponazorili kot prazen prostor, prvošolčki pa s simbolom 0.
- Druga razlika se je nanašala na število piktografičnih odgovorov, ki se je v primerjavi s prvo zelo zmanjšala. Seveda pa je bila mogoča rešitev tudi ta, da število kock nadomestijo z ustreznim številom predmetov, narisanih na pokrovu, in otroci so uporabljali tudi ta način. Čeprav je bila večina odgovorov popolna jasna vsakemu človeku, je bilo vseeno nekaj takih, kjer na prvi pogled število ni bilo jasno, zato je raziskovalec otroka povprašal, kako ve, da je notri točno določeno število. Opisuje primer razgovora z dečkom, ki pravi: »Ta črtica ima rep, to pomeni, da konzerva nima notri ničesar.«

Preveril je še, kako je s prepoznavanjem otrokovih lastnih, izmišljenih simbolov teden dni po tem, ko so si jih zamislili. Ugotovil je, da so otroci, ki so jim njihove oznake pomagale takoj po njihovem zapisu, določeno število predmetov v konzervi na podlagi svojih oznak našli tudi teden pozneje, tisti

pa, ki jim oznake že takoj niso pomenile ničesar, jih niso znali dešifrirati niti po tednu dni.

Koncept števila nič se je v kulturi pojavil dokaj pozno, predvsem zaradi potrebe po ekonomičnosti zapisa in zaradi lažjega računanja. Tudi v naši kulturi velja koncept števila nič kot težko razumljiv. Nekako kontraktorno se zdi, da »simbol, ki sicer označuje odsotnost neke količine, takrat, ko je zapisan poleg nekega drugega števila, njegovo vrednost poveča 10krat« (Hughes, 1986, str. 90).

Gre za to, da simbol ničle uporabljamo v dva namena. Prvi je ta, da označujemo odsotnost neke količine, drugi pa zato, da povemo, da kakšna potenca števila deset ni bila uporabljena (število 507 5S 0D 7E). V tem primeru ima število nič v istem številu lahko različno vlogo. Pri številu 5040 ima prva ničla od leve proti desni funkcijo stotic (0 S), zadnja pa enic (0E).

Dejstvo, da ima neka števka (v tem primeru število nič) v istem številu lahko različno funkcijo je lastnost sistema mestne vrednosti. Pri njem lahko z majhnim številom števk napišemo neomejeno število števil. Sistem, ki je izjemno domiseln in enostaven za uporabo, pa je sestavljen kompleksno, iz različnih idej in principov (Clemson in Clemson, 1994).

Težave, ki jih prinaša število nič, po mnenju Hughesa (1986) ne izhajajo iz tega, da je ničla simbol, ki ponazarja nič (količinsko), kar se kaže tudi v zgoraj opisani raziskavi. Težave v razumevanju povzročajo ničla v sistemu mestne vrednosti.

Da težava ni v ničli kot simbolu, ki ponazarja količinsko odsotnost, je razvidno tudi iz primera 6-letnega dečka Erika, ki sem ga približno 3 mesece pred vstopom v prvi

razred osnovne šole vprašala: »Kaj je nič?« Odgovoril mi je: »Nič je takrat, ko nimaš nobenega jabolka«. Prav tako ni imel težav z reševanjem računov, kot je $3 - 3 = 0$, če si je pri tem pomagal s konkretnimi primeri za ponazoritev števila 3, na primer večjimi lego kockami ali prsti. Računanje je potekalo tako, da je najprej na mizo postavil 3 lego kocke/dvignil tri prste, nato pa 3 kocke z mize vzel/pokrčil tri prste.

Podobno se kaže v primeru, ki ga navede Hughes (1986). Piše o primeru deklice, ki pri petju pesmi o šarkljih v pekarni (katerih število se vztrajno manjša, zato ker jih kupuje deček) s pomočjo krčenja prstov pride do ugotovitve, da v trgovini ne ostane nič več rozinovitih peciv.

Avtorica Catterall (2005) se je ukvarjala z predstavami otrok o številu nič, bolj konkretno o odnosu med številom nič in drugimi števili. Otrokom, starim od 5 do 11 let je dala naloge, pri katerih so po velikosti razvrščali kartončke z različnimi kombinacijami števil. Ena kombinacija je vsebovala naravna števila (1, 2, 3), število nič in ulomke, druga le decimalna števila, manjša od ena s številom nič, tretja ulomke in število nič, četrta decimalna števila in število nič, peta nekaj naravnih števil in število nič, šesta pa števila od 0 do 9.

Rezultati so pokazali, da otroci ničli kot simbolu na številski osi pogosto pripisujejo mesto zraven številke ena ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0, 1), pogosto se pojavi tudi otrokovo pojmovanje, da je nič preprosto nič, brez vrednosti, brez pomena in vpliva in je tako popolnoma vseeno, katero mesto zasede, še več, nekateri jo celo ignorirajo. Poleg tega so otroci pogosto v dilemi, ali je ničla celo število ali ne.

V zvezi s tem, ali je nič celo število ali ne, je raziskovalka z otroki opravila kratek razgovor. Ugotovila je, da cela števila pojmu-

jejo kot polna števila, ne delčke, kot jim to predstavljajo ulomki. Cela števila naj bi zapisovali pred ulomki ($4\frac{1}{2}$), a v tem primeru število nič izpade kot celo število, saj pravijo, da enostavno ne pišemo $0\frac{1}{2}$. Ko raziskovalka vpraša, zakaj je tako, ji odgovorijo: Ker je to neumno, ker lahko režemo cela števila na dele, ne moremo pa tega storiti z ničlo. Ne moreš rezati od nič, ne moreš imeti polovice od nič.

Haylock in Cockburn (2008, str. 37) pravi, da do razumevanja koncepta nekega števila prihaja na podlagi mreže povezav med »konkretnimi situacijami, simbolom, jezikom in slikami«, t. j. pri povezavi enega simbola z zelo različnimi situacijami. Nevarnost, ki obstaja, pa je, da v mreži povezav, ki tvorijo matematični koncept, preveč utrjujemo le eno povezavo, zanemarjamo pa enako ali pomembnejše povezave. Če ena povezava prevladuje v otrokovem mišljenju, je pozneje težko graditi na novih izkušnjah, ki jih včasih težko povežemo s točno določenim delom mreže povezav (Haylock in Cockburn, 2008).

Otrok se v svojem življenju najprej sreča z vsakdanjo uporabo števila nič v pomenu odsotnosti neke količine. Odrasli okrog njega se lahko pogovarjajo: »Tekma se je končala z rezultatom tri proti nič.« ali »Nimam nič več piškotov. Kupiti bom morala nove.« Tudi pri začetnem aritmetičnem računanju, npr. seštevanju in odštevanju, ko si otrok pomaga s konkretnimi predmeti ali prsti v primeru reševanja, računa: $2 + 0 =$ verjetno razmišlja takole: »Imam dve kocki oz. dva dvignjena prsta. Nato ne dodam nobene kocke/ne dvignem nobenega prsta. Ostala sta mi torej dva prsta/dve kocki. To je verjetno rezultat. Kot je razvidno iz primera, otrok tudi v mate-

matičnem svetu razmišlja o ničli kot o neki odstotnosti količine.

Beseda nič oz. simbol nič v neki meri zagotovo pomeni odsotnost količine. Pa je res le to? Pravilen odgovor bomo dobili že, če bomo pri pisnem računanju deljenja opazovali otroka oz. učenca. Pri reševanju računa $0 : 2$, se bo vsaj na začetni stopnji zagotovo znašel pred kognitivnim konfliktom. V vsakdanjem življenju se nam namreč deljenje nič bombonov na dva dela zdi brez smisla, v matematičnem problemu pa ga ima. Če na primer nič bombonov razdelimo dvema otrokoma, to lahko naredimo pravično. Vsak od otrok bo dobil nič bonbonov.

Težave otrok s številom nič po mnenju Haylock in Cockburn (2008) nastanejo zato, ker prevladuje eden od konceptov števila nič. Število nič ima namreč tako količinski kot abstraktni pomen, saj označuje ničelno množico, je število, predstavlja točko na številski osi, ki deli pozitivna in negativna števila, je simbol, označuje prazno mesto v sistemu mestne vrednosti, je nevtralen element za seštevanje in odštevanje.

Različne koncepte lahko dojamemo na različnih stopnjah kognitivnega razvoja, velikokrat se zgodi, da ravno zaradi nerazumevanja nekega pomena pride do nejasnosti oz. težav pri pouku matematike. Kljub temu pa ima ničla na mišljenje in razumevanje okrog nas velik pomen.

Catterall (2005) pravi, da do težav z razumevanjem števila nič pri otrocih pride zato, ker so otroci »neodločni glede tega, kateri koncept ničle naj v dani situaciji poudarijo in katerega ignorirajo. Njihovo razmišljanje se je premaknilo z abstraktnega premisleka o simbolu na konkretni premislek o vrednosti ničle« (Catterall, 2005, str. 69). Pravi, da »obstaja napetost med otrokovim pojmovanjem

in uporabo števila ter prazno skupino, ki jo vidijo, ko abstraktni simbol ničle pojasnjujemo v konkretnem izrazu« (prav tam).

Vseh konceptov ničle otrok ne dojame naenkrat, ampak skozi proces učenja. Potrebne so različne izkušnje, preko katerih jih otrok spoznava in postopno dojema.

§ Vpliv števila nič na matematiko kot predmet

Iznajdba števila nič ima na matematiko izjemen vpliv, saj je bilo šele z iznajdbo ničle mogoče neovirano seštevati, odštevati, množiti in deliti, med seboj lahko primerjamo velikost števil ... Prav iznajdba ničle je pripomogla k temu, da se je matematika kot disciplina tako razvila, hkrati pa postala tudi sestavni del drugih disciplin. V nadaljevanju bom predstavila, kje v učnem načrtu pri matematiki je potrebno razumevanje ideje o številu nič in kje ležijo najpogostejše težave v razumevanju.

a) Prvi razred

V prvem razredu se učenci s številom nič srečajo v obliki štetja, zapisa in branja števil od 0 do 20, to je simbolno obliko. Poleg tega se srečajo z oceno števila predmetov v množici, ki nima več kot 10 elementov, to je ničlo kot kardinalnim številom. Ločijo med glavnim in vrstilnim pomenom števila, določijo predhodnik in naslednik števila, prepoznajo in nadaljujejo oz. oblikujejo preprosto zaporedje števil in primerjajo števila po velikosti. Poleg že omenjenega spoznajo še seštevanje in odštevanje v obsegu od 0 do 10.

Težave, ki jih v prvem razredu lahko povzroči število nič, so naslednje:

- Učencem se lahko zdi nesmiselno, da označujejo odsotnost predmeta s prisotnostjo nekega števila.
- Učenci se lahko pri predhodniku ali nasledniku števila zmotijo pri zapisu, saj ima število 9 velikokrat v vrsti kot svojega naslednika zapisano število 0.
- Poleg tega lahko zaradi zmotnega mišljenja o tem, da je število nič popolnoma nič, brez vrednosti, brez pomena, delajo napake pri urejanju števil po velikosti. Caterall (2005) v svojem članku o dojemanju ničle v odnosu do drugih števil piše o razmišljanju otrok, da je zaradi zgoraj opisanih lastnosti ničle vseeno, katero mesto ničla zasede pri urejanju po velikosti, nekateri otroci ničlo celo popolnoma prezrejo.
- Pri primerjanju števil lahko naletimo na težavo nerazumevanja tega, da ima število ena, če ima na desni strani zapisano število nič, lahko desetkratno vrednost (razumevanje sistema mestne vrednosti). Tako lahko učenci številu 1 in 10 zapišejo eno poleg drugega, na podlagi predvidevanja, da ničla zraven ne spremeni ničesar.
- Pri seštevanju in odštevanju s številom nič učenci lahko razmišljajo na način, kot ga opisujeta avtorici *Anthony in Walshaw (2004), in sicer, da prištevanje vsakega števila nekemu drugemu številu pomeni povečanje, odštevanje nekega števila od drugega pa zmanjšanje tega števila. V tem primeru števila nič otroci sploh ne uvrščajo med števila, prihaja pa do napačnih izračunov.

b) Drugi razred

V drugem razredu se učenci s številom nič srečajo v obliki štetja, zapisa in branja števil do sto, z razlikovanjem desetiških enot (enic, desetic in stotic), urejanjem množice naravnih števil do 100 po velikosti, določanjem predhodnika in naslednika danega števila, oblikovanjem in zapisovanjem preprostega zaporedja števil in zapisovanjem odnosov med števili. Poleg tega se srečajo še z razumevanjem vloge števila 0 in 1 pri seštevanju in odštevanju in z razumevanjem, da je število 0 razlika dveh enakih števil.

Poleg težav, ki sem jih izpostavila že v prvem razredu, je pogosto kot problematična za otroke omenjena mestna vrednost. Težave lahko nastopijo pri branju in pisanju števil v dogovorjenih oblikah. Branje in pisanje števil pa težav ne povzroča le majhnim otrokom, ampak, kot ugotavlja Brown (1981, v Wheeler in Feghali, 1983) tudi odraslim. Nekaj manj kot polovica študentov v njegovi študiji namreč ni znala pravilno zapisati števila štiristo tisoč tri in sedemdeset. Nekaj podobnega sta ugotovila tudi Crooks in Flockton (2002, v Wheeler in Feghali, 1983) ki sta raziskovala zapis v standardnih oblikah pri novozelandskih študentih. Ugotovila sta, da le približno 11 % učencev 4. razreda in 50 % učencev 8. razreda zna pravilno zapisati število dvesto tisoč triinštirideset v simbolni obliki.

c) Tretji razred

V tretjem razredu se učenci s številom nič srečajo v obliki usvojitve produktov v obsegu $10 \cdot 10$ (poštevanka) do avtomatizma. To predznanje je nujno za množenje z nič. Poleg

tega se učijo uporabljati računske zakone pri seštevanju in množenju in spoznajo vlogo števil 0 in 1 pri množenju in deljenju.

Kot pravita Haylock in Cockburn (2008, str. 113, 114), so »težave pri množenju in deljenju z ničlo posledica lastnosti ničle v odnosu do množenja in deljenja. Pojasniti $7 \cdot 0 = 0$ in $0 \cdot 7 = 0$ ni preveč težko. Mislimo na sedem množic z nič elementi oz. nič množic s sedmimi elementi. Preprosto dovolj je, da uporabimo ponavljajoče seštevanje kot sestavni del množenja. Vendar pa morajo biti otroci seznanjeni s temi mislimi in o njih razpravljati, saj lahko sicer identiteto za seštevanje narobe uporabijo na primerih množenja. Na problem $7 \cdot 0$ lahko odgovorijo z odgovorom 7. Napačen odgovor izvira iz nepravilne domneve, da množenje z nič pomeni »ne naredi ničesar«. Pri množenju ima to lastnost »ne naredi ničesar« število 1.

Deljenje, ki vsebuje ničlo, pravita Haylock in Cockburn (2008), je nekoliko bolj zapleteno. Koliko je $0 : 5$ in koliko $5 : 0$? Račun $0 : 5$ lahko pretvorimo v situacijo: Imamo 0 bombonov, ki jih želimo pravično razdeliti petim ljudem. Vsak od njih bo dobil enako število – nič bombonov ($0 : 5 = 0$). Račun $5 : 0$ pa nima smisla pri deljenju na enake dele – ne moremo predvideti deljenja 5 predmetov med nič ljudi. Lahko pa rečemo: »Koliko množic z nič elementi je potrebnih, da dobimo 5 elementov?« Računanje lahko poteka dolgo časa, pa še vedno ne bomo niti blizu 5 elementom. Pravimo, da tega ne moremo izračunati.

Obstaja pa še poseben primer deljenja, in sicer: $0 : 0$. V tem primeru imamo nešteto rešitev, saj je rezultat 0 ali katero koli naravno število b ($0 : 0 = 0$, ker je $0 \cdot 0 = 0$, pa tudi $0 : 0 = b$, saj je $0 \cdot b = 0$). Pravimo, da izraz $0 : 0$ ni definiran.

č) Četrty razred

V četrtem razredu se učenci s številom nič srečajo v obliki pisnega odštevanja, ustnega množenja in deljenja z 10 in 100, pisnega in ustnega množenja z enomestnim številom v množici naravnih števil do 1000, pisnega množenja z dvomestnim številom v množici naravnih števil do 1000, pisnega deljenja z enomestnim številom s preizkusom, pisnega deljenja z večkratniki števila 10, uporabljanja računskih operacij pri reševanju problemov ...

Pri odštevanju lahko opazujemo težave otrok s pisnim odštevanjem, ko je račun zapisan v stolpcu, na primer $5000 - 189$. »V pokončnem formatu, ničla v enicah in desetih odštevanca, to je spodnjega števila, pomeni, da ni treba ničesar odvzeti, zaradi česar se nekateri učenci sprašujejo, kaj storiti. Ko je ničla sestavni del zmanjševanja ali zgornjega števila, pomeni, da tam ni ničesar, od koder bi lahko jemali.« (Anthony in Walshaw, 2004, po Klein, 2000). Opisani drugi situaciji sem bila priča tudi sama, in sicer pri pouku dopolnilnega pouka. Deklici težav ni toliko povzročala ničla v enicah kot pa to, da si »ne more sposojati od desetice«, ker »tam ni ničesar«.

Ničla svoje posebnosti kaže v računih pisnega množenja oblike: $24 \cdot 12$. Ker gre pri pisnem množenju za algoritem, s pomočjo katerega med seboj najprej množimo števili 24 in deset, nato 24 in 2, na koncu pa seštejemo vmesne rezultate, je zapis tak:

$$\begin{array}{r} 24 \cdot 12 \\ \hline 240 \\ + 48 \\ \hline 288 \end{array}$$

Pozneje pa zapis števila nič v prvem, delnem izračunu izpuščamo, vendar mu mesto še vedno ohranjamo.

$$\begin{array}{r} 24 \cdot 12 \\ \hline 24 \\ + 48 \\ \hline 288 \end{array}$$

Prihaja do napak, pri katerih učenci napačno podpisujejo enice, desetice in stotice, in do nerazumevanja tega, zakaj do zamika sploh prihaja.

V četrtem razredu se, če tega niso usvojili v tretjem razredu, pri učencih pojavijo težave pri računanju podobnih primerov, kot je: $4024 : 4$. V tem primeru je prva števka deljenca deljiva s 4 in potrebno je deljenje z naslednjo, z ničlo. V tem primeru veliko učencev zmotno predvideva, da je $0 : 4 = 0$ (preprosto nič, nič vredno) in zato delnega količnika ne vpiše med končnega. V rezultatu se zmotno mišljenje pokaže kot eno mesto prekratko število.

V omenjenem primeru se skriva še ena »past«. V nadaljevanju deljenja, kjer je treba dve deliti s štiri, lahko učenci zmotno predvidevajo, da rešitev v celih številih ni mogoča (ničle ne uvrščajo med cela števila), in zato ponovno izpustijo zapis ničle.

Predvidevamo lahko, da je izpust zapisa števke nič posledica uporabe algoritma, ko je prva števka v deljencu, manjša od delitelja. V primeru $234 : 3 =$ dve stotici namreč lahko razdelimo na tri enake dele le tako, da vsak del dobi vrednost nič. Ker pri tem že upoštevamo to, da število nič, zapisano na levi strani, pred naravnim številom nima vpliva na velikost števila, delni količnik nič preprosto izpuščamo oziroma ga ne zapisujemo, kar pa lahko učencem povzroča veliko težavo v razumevanju, ki je lahko tudi posledica neusvojenega koncepta mestne vrednosti. Učencem je treba pojasniti, zakaj v prvem primeru ničle ne pišemo in zakaj jo je treba pisati pozneje. Vidimo lahko, da tu razumevanje koncepta ničle zopet igra veliko vlogo,

saj v nasprotju z ničlami na levi strani, pred naravnim številom, števila, napisana na desni strani naravnega števila, vpliv na velikost števila imajo.

d) Peti razred

V petem razredu se učenci z ničlo srečujejo v kontekstu naslednjih ciljev: pisati in brati števila do milijona, razlikovati desetiške enote, urediti naravna števila do milijona, opredeliti predhodnika in naslednika števila, poznati in razlikovati liha ter soda števila, zapisati in brati števila prek milijona, števila zaokrožiti na desetice, stotice, ponazoriti grafično na številski premici vse štiri računske operacije, seštevati in odštevati v obsegu do milijona (ustno in pisno), množiti naravna števila v obsegu do milijona, deliti z dvomešnim naravnim številom, zapisati s potenco produkt enakih faktorjev in obratno, izračunati vrednost potence naravnih števil, razčleniti naravna števila na večkratnike potenc števila 10 (desetiški sestav), rešiti s premislekom in z diagramom preproste enačbe (računske enakosti) in znati napraviti preizkus.

Poleg drugih lastnosti, ki jih ima število nič in sem jih že omenila v prejšnjih razredih, je tudi ta, da je ničla sodo število. Za učence je to lahko težava, saj je težko reči, da je sodo nekaj, česar po njihovih velikokrat zmotnih interpretacijah ni. Za razumevanje ničle kot sodega števila je treba ponovno razumeti koncept števila nič pri deljenju. Soda so vsa števila deljiva z dve, kar velja tudi za ničlo. Vpeljava ničle kot sodega števila pa je možna tudi po analogiji, pri kateri se osredotočimo na enice števil, ki so soda, npr. 10, 12, 14, 36, 58, 370. Vidimo lahko, da se pri sodih številih v enicah pojavljajo vedno enaka števila: 0, 2, 4, 6 in 8.

Število nič ima posebnosti tudi v potencah. Katero koli število, različno od nič, namreč ima potenco nič, je enako natančno 1. Prvič, otroci zaradi podobnosti zapisa potenco 5^0 pretvorijo v račun $5 \cdot 0$, katerega rezultat je enak 0. Drugič, pri veliko otrocih opažam, da se to pravilo enostavno naučijo na pamet, ko pa jih vprašam po razlagi, tega ne znajo pojasniti. Uvajanje tega pravila bi po mojem mnenju moralo potekati na primeru, deljenju dveh potenc z enakima osnovama:

$$\frac{a^4}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$$

$$\frac{a^4}{a^4} = a^0 = 1$$

Število nič ima pomembno funkcijo pri množenju desetic in deljenju desetic. Pri množenju števil 10 in 100 enostavno le preštejemo število ničel in jih zapišemo za številom ena ($10 \cdot 100 = 1000$). Pri deljenju pa števili ničel odštevamo.

Število nič ima pomembno funkcijo tudi pri reševanju preprostih enačb. Če namreč vse vrednosti prenesemo na eno stran enačbe, je druga stran enaka nič. V tem primeru se velikokrat zgodi, da otroci pozabijo na to in preprosto ne vedo, kaj na to mesto zapisati, čeprav gre za preprost račun odštevanja dveh enakih števil (zmanjševanca in odštevanca), katerega rezultat je nič.

e) Šesti razred

V šestem razredu se učenci z ničlo srečujejo v kontekstu naslednjih ciljev: informativno spoznati rimske številke, velika števila zaokroževati na desetice, stotice, urejati, primerjati naravna števila po velikosti, decimalna števila množiti in deliti s potenco števila 10, množiti dve decimalni števili, deliti dve

naravni števili (količnik je lahko decimalno število) in narediti preizkus.

Število nič svojo izrednost in posebnost v šestem razredu kaže pri decimalnih številih. Prvič, nekaterim otrokom je izredno težko po velikosti urediti števila: 0,003, 0,03, 0,3 in 0,30, saj ne moremo primerjati velikosti števila na podlagi dolžine zapisa, poleg tega je pomembno, kje se nahaja števka, večja od 0, saj po njej lahko ocenimo, za kako velike dele celote gre (desetine, stotine ...). Pri tem je pomembno, da se otroci zavedajo, da za zadnjo decimalno večjo od nič lahko stoji neomejeno število ničel, pa vendar to ne vpliva na povečanje števila za določeno potenco števila 10 kot pri celih številih. Nasprotno pa ničla pred decimalno, večjo od nič, število 10-krat pomanjša. Najpogostejše napake, ki se pojavljajo pri tem cilju, so, da učenci svoje znanje o tem, da ima daljše število, kot je, večjo vrednost, prenesejo tudi na decimalna števila. O težavi primerjanja decimalnih števil med seboj, razpravljata tudi Anthony in Walshaw (2004).

Pri množenju decimalnih števil ima ničla posebnost v tem, da je število decimalnih mest v rezultatu enako seštevku decimalnih mest obeh faktorjev. Nevarnost, ki obstaja, je, da otrok prezre ničle in kot rezultat upošteva le naravna števila.

f) Sedmi razred

V sedmem razredu se otroci z ničlo srečujejo v kontekstu naslednjih ciljev: ulomek zapisati kot k in ulomek zapisati z decimalnim številko in jo zaokrožiti na zahtevano število decimalnih mest.

$$\frac{k \cdot a}{a}, (a \neq 0)$$

Tu se ponovi in nekoliko poglobi znanje o deljenju števil, predvsem pa vedenje o tem, da deljenje z ničlo poteka v neskončnost in zato rezultata ne moremo definirati.

g) Osmi razred

V osmem razredu se otroci z ničlo srečujejo v kontekstu naslednjih ciljev: racionalnemu številu poiskati nasprotno vrednost, ugotoviti, kateri množici števil pripada dano število, racionalnemu številu določiti absolutno vrednost, poznati in uporabljati znak za absolutno vrednost.

Težave, povezane z ničlo, v tem razredu so lahko te, da ne vedo, kaj je to absolutna vrednost – oddaljenost nekega števila od številskega izhodišča (0) na številski premici. Ta vrednost je vedno pozitivna, medtem ko ničla ni ne pozitivna ne negativna.

h) Deveti razred

V devetem razredu se otroci z ničlo srečujejo v kontekstu naslednjih ciljev: izračunati produkt vsote in razlike dveh danih členov ter kvadrat dvočlenika, izračunati kvadrat dvočlenika in razliko kvadratov, določiti ničlo na grafu linearne funkcije, izračunati ničlo funkcije.

Tu se najpogosteje pojavljajo napake pri tem, da učenci zamešajo, katera vrednost mora biti enaka nič (x ali y), da ima graf funkcije ničlo. Prav tako se pojavljajo težave pri reševanju enačb, katerih rešitev je enaka nič.

η Sklep

Veliko avtorjev: Wheeler in Feghali (1983), Hughes (1986), Clemson in Clemson (1994), Anthony in Walshaw (2004) ter Cat-

teral (2005) pridejo do skupnih ugotovitev, in sicer, da je predstava o ničli kot prazni, ničvredni in nepomembni zelo odmevna, predvsem kar zadeva razumevanje koncepta števila nič.

Da bi otrokom pomagali in preventivno delovali pred težavami v razumevanju, je po mnenju Clemson in Clemson (1994) treba otroke seznaniti z različnimi izkušnjami, treba jim je dati možnost, da uporabljajo konkretne predmete pri delu s števili. Da bi razumeli globlji pomen števila nič, jim moramo pomagati razumeti princip sistema mestne vrednosti, za katerega so v zgodovini porabili veliko razmisleka in idej, da so ga razvili, mi pa pričakujemo, da ga bodo otroci usvojili

takoj. To lahko naredimo tako, da jim omogočimo uporabo simbolov na zanje nov način. S tem se strinjata Anthony in Walshaw (2004), ki pravita, da morajo pravila otroci doumeti na podlagi lastnih dejavnosti.

Šele z nakopičenim bogastvom izkušenj in spodbudami k induktivnemu mišljenju, ki jim pomaga pri povezavi, bodo otroci zgradili svoje matematične koncepte in nekega dne, navdušeno, kot otrok, o katerem pišeta *Anthony in Walshaw (2005, str. 38, po Wheeler in Feghali, 1983), avtor izjave v naslovu članka, sprevideli, da nič lahko označuje več stvari, ne le odsotnost količine, kar pa je zagotovo prva otrokova izkušnja z omenjenim številom.

8 Viri in literatura

1. Anthony, J. G. in Walshaw, A. M. (2004). Zero, a none number. *Teaching children mathematics*, 11 (1), (38–42).
2. Berlinghoff, P. W. in Gouvea, Q. F. (2008). *Matematika skozi stoletja*. Ljubljana: Modrijan.
3. Catterall, R. (2005). Exploring children's conceptions of zero in relationship to other numbers. V J. Fragner in B. Hudson, B. (ed.), *Researching the teaching and learning of mathematics II* (str. 55–75). Linz: Pädagogische Akademie des Bundes in Oberösterreich.
4. Clemson, D. in Clemson W. (1994). *Mathematics in the early years: Teaching and learning in the first three years of school*. London: Routledge.
5. Guedj, D. (1996). *Svet števil*. Ljubljana: DZS.
6. Haylock, D. in Cockburn, A. (2008). *Understanding mathematics for young children: a guide to foundation stage and lower primary teachers*. Los Angeles (idr.): SAGE.
7. Hughes, M. (1986). *Children and number. Difficulties in learning mathematics*. Oxford: Basil Blackwell.
8. Marjanovič - Umek, L. in Zupančič. M. (ur.). (2004).

Razvojna psihologija. Ljubljana: Znanstveno-raziskovalni inštitut Filozofske fakultete.

9. Svetina, M. (2005). Izkusveno mišljenje kot prehod med predoperacionalnim in konkretnologičnim mišljenjem pri otrocih. *Pedagoška obzorja* 14 (1), (101–118).
10. Wheeler, M. in Feghali, I. (1983). Much ado about nothing: Preservice Elementary School Teacher's Concept of Zero. *Journal for Research in Mathematics Education* 14 (3), (147–155).
11. Worthington, M. in Carruthers, E. (2008). *Children's mathematics: making marks, making meaning*. London: P. Chapman; Thousands Oaks, New Delhi: SAGE.