PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 1
Strani 17–21, 48

Janez Žerovnik:

# PROBLEM BARVANJA TOČK GRAFA

Ključne besede: matematika, računalništvo, teorija grafov, barvanje grafa, časovna zahtevnost, algoritem.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/966-Zerovnik.pdf

© 1989 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

## PROBLEM BARVANJA TOČK GRAFA

Nekateri problemi v matematiki imajo lepo lastnost: zelo enostavno jih je zastaviti (za razumevanje problema ni potrebno veliko znanja), toda rešitev je vse prej kot enostavna.

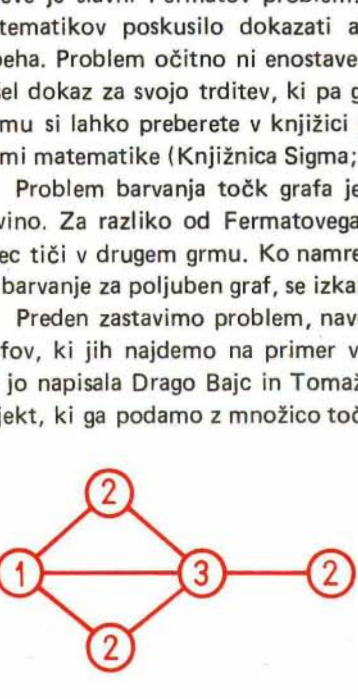
Verjetno ste že slišali za Fermatov problem. Poglejmo celoštevilsko enačbo

$$x^n + y^n = z^n$$

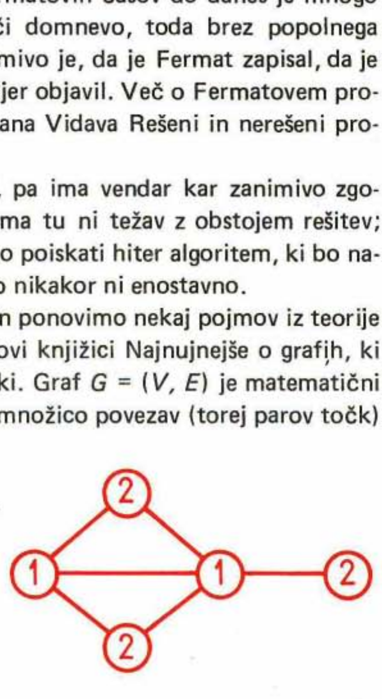
Pri izbranem $n$ iščemo cela števila $x$, $y$ in $z$, ki ustrezajo enačbi. Pri $n = 2$ lahko hitro najdemo iskana števila. To so ravno pitagorejske trojice, na primer $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$! Kaj pa lahko rečemo za $n$-je, ki so večji od 2? Znameniti francoski matematik Fermat (1601—1665) je domneval, da obstajajo cele netrivialne rešitve samo pri $n = 2$, pri $n > 2$ pa po njegovi domnevi ni nobene netrivialne rešitve. (Trivialne rešitve so tiste, pri katerih je ena od spremenljivk enaka nič, take pa seveda obstajajo pri vsakem $n$.) Poiskati dokaz ali protidokaz te domneve je slavni Fermatov problem. Od Fermatovih časov do danes je mnogo matematikov poskusilo dokazati ali ovreči domnevo, toda brez popolnega uspeha. Problem očitno ni enostaven! Zanimivo je, da je Fermat zapisal, da je našel dokaz za svojo trditev, ki pa ga ni nikjer objavil. Več o Fermatovem problemu si lahko preberete v knjižici prof. Ivana Vidava Rešeni in nerešeni problemi matematike (Knjižnica Sigma; 1).

Problem barvanja točk grafa je mlajši, pa ima vendar kar zanimivo zgodovino. Za razliko od Fermatovega problema tu ni težav z obstojem rešitev; zajec tiči v drugem grmu. Ko namreč želimo poiskati hiter algoritem, ki bo našel barvanje za poljuben graf, se izkaže, da to nikakor ni enostavno.

Preden zastavimo problem, navedimo in ponovimo nekaj pojmov iz teorije grafov, ki jih najdemo na primer v presekovi knjižici Najnujnejše o grafih, ki sta jo napisala Drago Bajc in Tomaž Pisanski. Graf $G = (V, E)$ je matematični objekt, ki ga podamo z množico točk $V$ in množico povezav (torej parov točk)



Slika 1



Slika 2

$E$. Točki sta sosednji, če med njima poteka povezava. Barvanje grafa je preslikava, ki vsaki točki grafa priredi neko barvo. Za imena barv običajno zaradi enostavnosti vzamemo kar naravna števila. Dobro barvanje je tako, ki sosednje točke pobarva z različnimi barvami. Na primer barvanje na sliki 1 je dobro barvanje, barvanje na sliki 2 pa ne.

Graf je $k$–pobarvljiv, če obstaja dobro barvanje s $k$ ali manj barvami. Graf iz prejšnjega primera (slika 1 in 2) ni 2-pobarvljiv, je pa 3-pobarvljiv in seveda 4–, 5–, ... –pobarvljiv, torej $k$–pobarvljiv za vse $k \geqslant 3$. Minimalno število barv, potrebnih za dobro barvanje, imenujemo kromatično število grafa in ga označimo z $\chi(G)$. Graf iz prejšnjega primera ima torej kromatično število 3.

Zdaj pa naloga: Imamo graf $G = (V, E)$ in naravno število $k$. Ali je graf $G$ $k$–pobarvljiv? To je odločitveni problem barvanja točk grafa.

Problem ni nerešen, tako kot Fermatov, je pa "težak" na drug način, ki ga bomo poskusili pojasniti v nadaljevanju. V kratki zgodovini teorije zahtevnosti računskih postopkov se je izoblikovala tudi domneva, da obstajajo problemi, za katere obstajajo učinkoviti postopki in taki, za katere učinkovitih postopkov ni mogoče konstruirati. Zvesti bralci Preseka se bodo verjetno spomnili članka Sandija Klavžarja o časovni kompleksnosti algoritmov v 2. številki letnika 86/87. Natančna definicija učinkovitih postopkov presega okvir tega sestavka, tukaj povejmo le, kaj bi za problem barvanja točk grafa pomenilo, da je algoritem učinkovit. Ko določimo število $k$ in imamo dan graf $G$, lahko definiramo obsežnost problema barvanja točk grafa: to naj bo kar število točk grafa, torej $n$ = moč($V$). Hitrost algoritma lahko merimo s številom potrebnih korakov. Lahko privzamemo, da smo algoritem zapisali v enem od programskih jezikov (na primer v pascalu, FORTRANu ali BASICu). Korak algoritma je izvedba enega enostavnega ukaza. Na primer vrstica

```
x := y + z * 3
```

je en (pascalski) korak, del programa

```
for i:= 1 to n do
    for j := 1 to n do begin
        x [ i ] := y [ i ];
        z [ i ] := 2 * y [ i ]
    end;
```

pa je $2 * n^2$ korakov. Pogosto nas zanima samo velkostni red, konstantni faktor takrat ni pomemben. Del programa v prejšnjem primeru ima število korakov, ki je kvadratna funkcija $n$–ja, to pa zapišemo krajše $O(n^2)$ in preberemo veliki o od $n$ kvadrat. Po definiciji je funkcija $g(n)$ reda $O(f(n))$, če obstaja konstanta $C > 0$, tako da je $g(n) \leqslant Cf(n)$ za vse dovolj velike $n$. Pri tem fraza "trditev velja za vse dovolj velike $n$" pomeni, da obstaja naravno število $n'$, da je za vsak $n \geqslant n'$ trditev veljavna.

Pravimo, da je algoritem polinomski, če je njegovo število korakov enako $O(p(n))$ za neki polinom $p$. Polinomski postopki so v teoriji časovne zahtevnosti ravno učinkoviti postopki.

Problem je polinomski, če zanj obstaja polinomski algoritem. Za problem barvanja točk grafa na primer ne poznamo nobenega polinomskega algoritma. Prav tako doslej ni nihče dokazal, da takega algoritma ni mogoče konstruirati. Vsi doslej znani postopki za reševanje problema barvanja točk grafa imajo vsaj eksponentni red potrebnega števila korakov. (Število korakov je na primer $10 * 2^n$ ali $10^n$, torej ne obstaja polinom $p(n)$, da bi bilo število korakov reda $O(p(n))$ ).

Poglejmo si primerjavo rasti neke polinomske in neke eksponentne funkcije. Recimo, da imamo polinomski algoritem s časovno zahtevnostjo $10000n^2$ in eksponentni algoritem s časovno zahtevnostjo $2^n$. Predpostavimo, da osnovna operacija traja eno milisekundo in preračunajmo potrebne čase za nekaj različnih $n$–jev (tabela 1).

Tabela 1

| $n$ | $10000\,n^2$ | $2^n$ |
|---|---|---|
| 10 | $10^6 \cong$ 16 min | $2^{10} \cong$ 1 s |
| 20 | $4.10^6 \cong$ 1 h 6 min | $2^{20} \cong$ 17 min |
| 30 | $9.10^6 \cong$ 2h 30 min | $2^{30} \cong$ 12 d |
| 40 | $1{,}6.10^7 \cong$ 4 h 26 min | $2^{40} \cong$ 36 let |
| 50 | $2{,}5.10^7 \cong$ 7 h | $2^{50} \cong$ 45000 let |
| 100 | $10^8 \cong$ 1 d 3 h | |
| 1000 | $10^{10} \cong$ 115 dni | |

Vidimo, da eksponentna funkcija zelo hitro prehiti polinomsko. Ker število korakov tako hitro narašča, so postopki z eksponentno časovno zahtevnostjo praktično neuporabni že pri malo večjih $n$. Toda, računalniki so vedno vsak dan hitrejši, porečete. Na žalost to ne pomaga kaj prida. Če na primer računalnike pohitrimo za faktor 1000, se to bore malo pozna, ko želimo ugnati problem pri velikih $n$–jih z eksponentnim algoritmom. Poglejmo, kako bi se spremenila tabela 1, če bi imeli 1000 krat hitrejši računalnik. V tabeli 2 je osnovna enota mikrosekunda.

| $n$ | $10000\,n^2$ | $2^n$ |
|---|---|---|
| 10 | $10^6 \cong 1$ s | $2^{10} \cong 1$ ms |
| 20 | $4.10^6 \cong 4$ s | $2^{20} \cong 2$ s |
| 30 | $9.10^6 \cong\ 9$ s | $2^{30} \cong 17$ min |
| 40 | $1{,}6.10^7 \cong 16$ s | $2^{40} \cong 12$ d |
| 50 | $2{,}5.10^7 \cong 25$ s | $2^{50} \cong 36$ let |
| 100 | $10^8 \cong 100$ s | |
| 1000 | $10^{10} \cong 2$ h 46 min | |

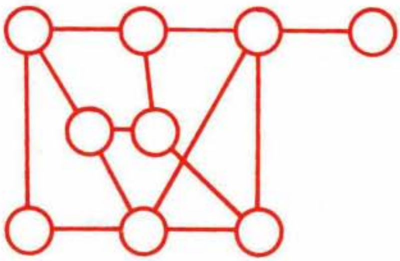
Tabela 2

Danes poznamo veliko praktičnih problemov, ki so prav tako "težki" kot problem barvanja točk grafa. Vprašanje, ali resnično ni mogoče najti polinomskega algoritma za te probleme, je eno od najbolj znanih odprtih vprašanj teoretičnega računalništva.

Za tiste, ki jih zanima zgodovina matematike, pa za konec še povejmo, kako je problem barvanja točk grafa povezan s slavnim problemom štirih barv. Problem štirih barv je bil skoraj sto let velika uganka, ob kateri se je razvijala teorija grafov. Problem si je prvi zastavil leta 1852 londonski študent Francis Guthrie, ko je barval zemljevid angleških grofij. Domneval je, da je mogoče vsak zemljevid pobarvati s štirimi barvami, seveda tako, da ozemlja, ki mejijo, niso pobarvana z enako barvo. Pri tem ozemlja, ki se dotikajo samo v končno mnogo točkah, ne štejemo za sosednja. Problem običajno zastavimo v nekoliko drugačni obliki. Namesto ozemelj barvamo točke (lahko si mislimo, da so to glavna mesta), povezani pa sta točki, ki sta v sosednjih državah. Problem se potem glasi: ali je mogoče točke vsakega planarnega grafa pobarvati s štirimi barvami (tako da pobarvamo poljubni povezani točki z različnima barvama)? Planaren je graf, ki ga lahko narišemo v ravnini tako, da se noben par povezav ne seka. Francisov brat Frederic je problem predstavil profesorju Augustu de Morganu. Širše znan je problem postal leta 1878, ko je Arthur Cayley na srečanju Londonske matematične družbe (London Math. Society) vprašal, ali je problem že rešen. Prvi se je reševanja problema resno lotil A.B. Kempe, ki je leta 1879 objavil dokaz, da štiri barve zadoščajo. Deset let kasneje je P.J. Heawood odkril napako v Kempejevem dokazu, ki pa so jo mnogi imeli bolj za tehnično pomanjkljivost kot pa za resno napako. Ko pa so leta minevala in nikomur ni uspelo popraviti dokaza, je postalo jasno, da problem ni od muh. Leta 1976 sta Kenneth Appel in Wolfgang Haken objavila, da sta dokazala izrek o štirih barvah. Ideja dokaza je v bistvu enaka Kempejevei, le število posebnih primerov, ki jih je bilo potrebno pregledati, je precej večje (okoli 1500 namesto 5!). Obsežnost je tudi glavna pomanjkljivost dokaza, saj je za pregled (okoli 600 strani dolgega) dokaza potrebno ogromno časa, tudi če za nekatera rutinska opravila uporabimo računalnik, kot sta to storila avtorja dokaza.

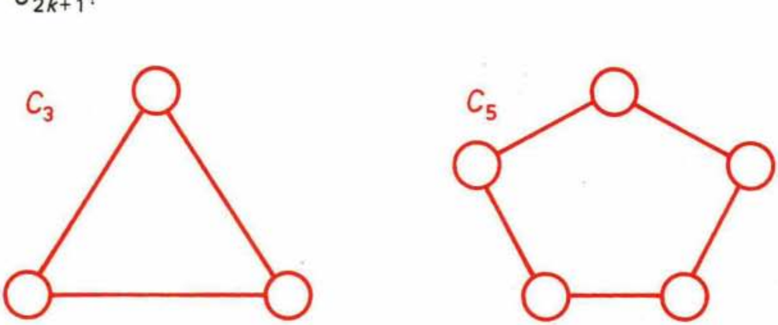
Za konec pa še nekaj nalog:

1. Poišči optimalno barvanje za graf na sliki 3!



Slika 3

2. Premisli, koliko barv potrebuješ za optimalno barvanje cikla lihe dolžine $C_{2k+1}$!



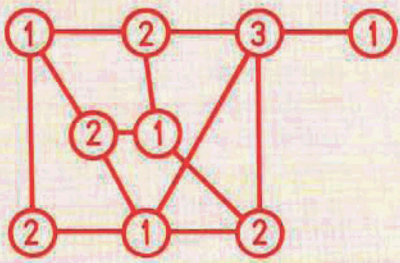

Slika 4

3. Dokaži izrek: 2–pobarvljivi grafi so natanko tisti grafi, ki ne vsebujejo (kot podgraf) nobenega lihega cikla. (To so ravno dvodelni grafi.)

*Janez Žerovnik*

## PROBLEM BARVANJA TOČK GRAFA – Rešitev s str. 17

1. Potrebujemo 3 barve. Ena od rešitev je na sliki 5:




2. 3 barve
3. $H$ je podgraf grafa $G$, če ga dobimo iz $G$ tako, da odstranimo nekaj točk in povezav. Skupaj s točko grafa moramo seveda izbrisati tudi vse povezave, ki imajo to točko za krajišče. Očitno dobro barvanje grafa $G$, zoženo na podgraf $H$, določa dobro barvanje grafa $H$. Zato število barv, potrebnih za dobro barvanje grafa $G$, gotovo zadošča za dobro barvanje grafa $H$. Torej $\chi(G) \geqslant \chi(H)$.

   Zdaj pa dokažimo izrek:

   a. Recimo, da je graf 2–pobarljiv in vsebuje kot podgraf kak lihi cikel $H$. Potem bi bil tudi $H$ kot podgraf $G$ 2–pobarljiv. To pa je v nasprotju s premislekom v nalogi 2.

   b. Naj bo zdaj $G$ graf, ki vsebuje kakšen lihi cikel $H$. Iz naloge 2 vemo, da je $\chi(H) = 3$. Ker je $H$ podgraf grafa $G$, pa mora biti $\chi(G) \geqslant \chi(H) = 3$.

*Janez Žerovnik*