PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **31** (2003/2004)
Številka 1
Strani 20–21

Aleksandar Jurišič:

TROJIŠKI SESTAV

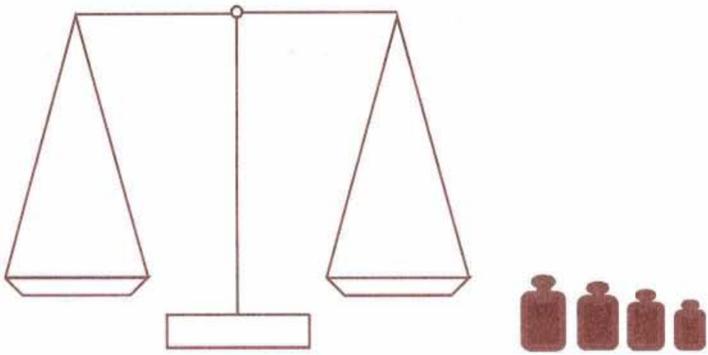
Ključne besede: matematika, številski sestavi.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/31/1538-Jurisic.pdf

TROJIŠKI SESTAV

Zaradi računalnikov je pomen binarnih sestavov očiten. Človek bi pomislil, da mora biti nekoliko težje najti primer, ki bi nas 'prisilil' razmišljati v trojiškem sestavu. Pa temu sploh ni tako. Oglejmo si naslednjo nalogo iz Rutarjeve knjige *Svet matematike, Priročnik in vaje iz matematike za 5. razred osnovne šole* (poglavje Računske operacije v množici naravnih števil, str. 65, nal. 11), ki je označena z utežjo:

Koliko kg naj tehta vsaka od štirih uteži, da bi lahko na narisani tehtnici natehtali vse celoštevilske količine od enega do 40 kg?



V rešitvah lahko najdemo samo odgovor, ne pa tudi njegove razlage. Skupaj poiščimo pot do njega.

Z $x \geq y \geq z \geq t$ označimo iskane uteži. Potem mora množica števil

$$U = \{ax + by + cz + dt \mid a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\}\} \tag{1}$$

vsebovati vsa števila od 1 do 40 (-1 pomeni, da smo utež postavili na nasprotno stran, nič pa, da uteži sploh ne uporabimo). Očitno je množica U, če jo predstavimo na realni osi, simetrična glede na izhodišče, saj iz $ax + by + cz + dt \in U$ sledi $-ax - by - cz - dt \in U$. Zato so v množici U tudi števila od -1 do -40 ter seveda 0. Skupaj je torej v množici U vsaj $81 = 3^4$ števil. Več pa jih ne more biti, saj imamo za vsako izmed števil a, b, c in d le tri možnosti. Torej je

(1) $U = \{-40, -39, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., 39, 40\}$.

Zaključimo:

(2) Vsako število iz množice U lahko zapišemo na en sam način v obliki $ax + by + cz + dt$.

Od tod sledi, da so uteži x, y, z in t različna naravna števila, vsota vseh uteži nam da seveda največjo vrednost $40 = x + y + z + t$, drugo največjo vrednost dobimo le tako, da ne uporabimo najlažje uteži: $39 = x + y + z$. Od tod dobimo $t = 1$ ter $38 = x + y + z - 1$.

Število z ne more biti enako 2, saj bi 38 lahko dobili tudi z $x + y + t$, kar je v nasprotju z lastnostjo (2). Torej je $z \geq 3$ in mora biti $37 = x + y + 1$. Zaključimo $z = 3$, $36 = x + y$, $35 = x + y - 1$, $34 = x + y - 3 + 1$, $33 = x + y - 3$, $32 = x + y - 3 - 1$. Na podoben način se prepričamo, da mora zaradi lastnosti (2) veljati $y \geq 9$ in $31 = x + 3 + 1$. Torej je $x = 27$ in $y = 9$.

Prepričati se moramo le še, da za četverico $(x, y, z, t) = (27, 9, 3, 1)$ res velja (1) oziroma, kar je isto, da lahko zapišemo vsa števila od 0 do $80 = 2222_3$ v naslednji obliki:

$$a \cdot 27 + b \cdot 9 + c \cdot 3 + d \cdot 1 = \overline{abcd}_3 \qquad \text{za } a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}\,.$$

To pa res ni težko, saj nas že v 5. razredu učijo šteti tudi v trojiškem sestavu:

0 0	1 1	2 2	3 10_3	4 11_3	5 12_3	6 20_3	7 21_3	8 22_3
9 100_3	10 101_3	11 102_3	12 110_3	13 111_3	14 112_3	15 120_3	16 121_3	17 122_3
18 200_3	19 201_3	20 202_3	21 210_3	22 211_3	23 212_3	24 220_3	25 221_3	26 222_3
27 1000_3	28 1001_3	29 1002_3	30 1010_3	31 1011_3	32 1012_3	33 1020_3	34 1021_3	35 1022_3
36 1100_3	37 1101_3	38 1102_3	39 1110_3	40 1111_3	41 1112_3	42 1120_3	43 1121_3	44 1122_3
45 1200_3	46 1201_3	47 1202_3	48 1210_3	49 1211_3	50 1212_3	51 1220_3	52 1221_3	53 1222_3
54 2000_3	55 2001_3	56 2002_3	57 2010_3	58 2011_3	59 2012_3	60 2020_3	61 2021_3	62 2022_3
63 2100_3	64 2101_3	65 2102_3	66 2110_3	67 2111_3	68 2112_3	69 2120_3	70 2121_3	71 2122_3
72 2200_3	73 2201_3	74 2202_3	75 2210_3	76 2211_3	77 2212_3	78 2220_3	79 2221_3	80 2222_3

Trditev, da lahko vsako naravno število zapišemo na natanko en način v sistemu z osnovo $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$ (glej M. Vencelj, *Mala šola številskih sestavov*, Presek **30** (2002–03), str. 213–217), smo na naši poti dokazali le delno, a je očitno, da sedaj do splošne rešitve ni več daleč.

Aleksandar Jurišić