Gaussova eliminacija

Katarina Šipec

Gaussov postopek oziroma Gaussova eliminacija je postopek za reševanje sistemov linearnih enačb.

Kako bi rešili spodnji sistem?

$$2x + 4y = 10$$
$$x - y = 2$$

V šoli nas učijo preprostega in logičnega postopka; najprej prvo spremenljivko iz prve enačbe izrazimo z drugo (npr. $x = 5-2y$), jo vstavimo v drugo enačbo ($(5-2y)-y = 2$), rešimo dobljeno enačbo ($y = 1$) in rešitev vstavimo v prvo enačbo ($x = 5-2y = 5-2 = 3$). Tako je v našem primeru dobljena rešitev $x = 3$, $y = 1$. Ta postopek vedno deluje, a je precej zamuden. Lahko bi ga uporabili tudi za sistem osmih linearnih enačb z osmimi neznankami ali (v splošnem) za sistem m enačb z n neznankami. A koliko časa bi nam to vzelo? Obstaja preprostejši in hitrejši način.

Drugi način je, da eno enačbo (npr. drugo) pomnožimo s takšnim številom, da je koeficient pred eno neznanko enak v obeh enačbah (npr. s številom 2, da dobimo 2 pred x). Tako dobimo nov sistem

$$2x + 4y = 10$$
$$2x - 2y = 4$$

in dobljeni enačbi odštejemo. S tem se znebimo spremenljivke x in ostane nam le ena enačba in ena neznanka ($6y = 6$), kar pa je precej lažje rešiti. Ta postopek se že približa ideji Gaussove eliminacije, le da bomo to počeli na bolj sistematičen in preglednejši način.

Matrike kot sistemi linearnih enačb

Geometrijski pomen sistema linearnih enačb

Ob besedni zvezi *linearna enačba* dobimo asociacijo na premico. Res je v ravnini množica rešitev linearne enačbe $ax + by = c$ premica. Ko rešujemo sistem linearnih enačb z dvema neznankama (torej v ravnini), iščemo točke v preseku premic, ki jih predstavljajo naše enačbe. Koliko je lahko takih točk?

Denimo, da imamo dve premici v ravnini. Lahko sta vzporedni (sistem nima rešitve; slika 1), lahko se sekata v eni točki (rešitev sistema je ena sama; slika 2) ali pa sovpadata (enačbi predstavljata isto premico; slika 3). V zadnjem primeru je množica rešitev cela premica.

V tridimenzionalnem prostoru linearna enačba predstavlja ravnino. Sistem dveh linearnih enačb s tremi spremenljivkami torej predstavlja presek dveh ravnin. Ta je podobno kot v zgornjem primeru lahko prazen, lahko je premica ali pa ravnina (enačbi predstavljata isto ravnino). Če imamo sistem treh enačb s tremi neznankami, nas zanima presek treh ravnin, ki je lahko prazen, točka, premica ali ravnina.

Nas bodo zanimali sistemi s poljubnim številom enačb in poljubnim številom neznank. Reševali bomo torej sisteme m enačb z n neznankami. Ker si n-dimenzionalne prostore težje predstavljamo kot ravnino ali prostor, bomo sisteme predstavili v drugačni obliki.

Matrika sistema

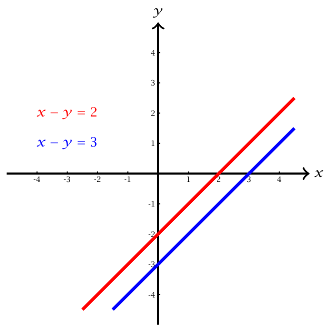
Najprej se spomnimo, da je linearna enačba enačba z več neznankami, pri čemer so potence vsake neznanke enake 1 ali 0 (če neznanka v enačbi ne nastopa). Vsaka linearna enačba n neznank je oblike

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d,$$

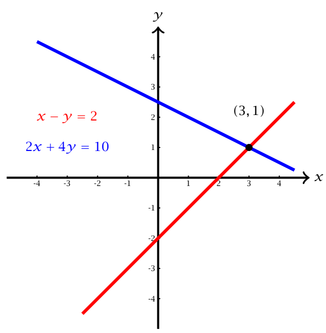
kjer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ predstavljajo n različnih spremenljivk, $a_1, a_2 \ldots, a_n$ pa koeficiente pred njimi. Za $n \leq 4$ bomo spremenljivke pisali kot x, y, z in w.

Sistem m linearnih enačb z n neznankami bomo predstavili z matriko. *Matrika* je le matematično ime za tabelo, v katero vpisujemo števila, da so podatki bolje urejeni. Če ima matrika m vrstic in n stolpcev, pravimo, da je velikosti $m \times n$.

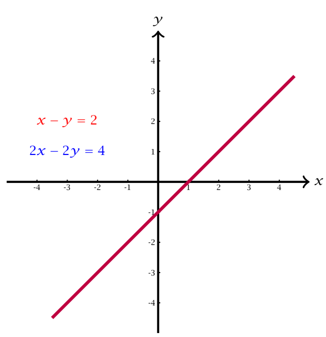
V našem primeru je matrika le drugačen, bolj kompakten zapis sistema linearnih enačb, ki ga tudi lažje shranimo v računalnik. V matriko velikosti



SLIKA 1.



SLIKA 2.



SLIKA 3.

$m \times (n+1)$ zapišemo koeficiente pred neznankami. Vsaka vrstica naj predstavlja eno enačbo iz sistema, pri tem pa moramo biti pozorni, da je vrstni red spremenljivk v vseh enačbah enak. Če v i-ti ($i \leq m$) enačbi spremenljivka x_j ($j \leq n$) ne nastopa, vzamemo $a_{ij} = 0$.

Tako sistem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= d_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= d_m \end{aligned}$$

predstavlja matrika

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & d_m \end{array}\right].$$

Enačaje predstavlja črtkana črta, ki nas dodatno spomni, da gre za sistem enačb.

Primer. Zgornji sistem $2x + 4y = 10$ in $x - y = 2$ predstavlja matrika

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Rekli bomo, da sta si matriki A in B *podobni*, če sta rešitvi sistemov, ki jih predstavljata, enaki. To bomo označevali z vijugico, kot npr. $A \sim B$.

Množico rešitev bomo zapisali kot urejen par, trojico oz. v splošnem n-terico, kjer j-to mesto predstavlja vrednost x_j. Rešitev $x = 3$ in $y = 1$ bi tako zapisali kot $(3, 1)$.

Gaussova eliminacija

Končno se lahko posvetimo reševanju sistema. Z Gaussovo eliminacijo bomo sistem le poenostavili do hitro rešljivega sistema. Prvih nekaj, recimo j, spremenljivk bomo izrazili z zadnjimi. Tako bomo dobili rešitev oblike

$$(f_1(x_{j+1}, \ldots, x_n), f_2(x_{j+1}, \ldots, x_n), \ldots, \\ f_j(x_{j+1}, \ldots, x_n), x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots x_n),$$

torej n-terice, ki imajo morda nekaj prostih spremenljivk, namesto katerih lahko vstavimo poljubno realno število (to so naše zadnje spremenljivke x_{j+1} do x_n), pa še vedno dobimo rešitev. V zgornjem primeru funkcije f_k zgolj ponazarjajo, da so prve spremenljivke izražene s kasnejšimi.

Če razmislimo, kako bi izgledala matrika takega sistema, ugotovimo, da ima naslednjo strukturo:

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad 0}}^{j} \\ j\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. & \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & \blacklozenge & \cdots & & \blacklozenge \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \blacklozenge & \cdots & & \blacklozenge \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Na mestih $\blacklozenge$ so poljubna realna števila, na mestu $\star$ pa 0 ali 1. V vsaki enačbi nad vodoravno črto nastopa nekaj izmed zadnjih $n-j$ spremenljivk in natanko ena izmed prvih j spremenljivk. Prva enačba nam npr. predstavlja enačbo

$$x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_j + a_{j+1}x_{j+1} + \ldots + a_n x_n = d,$$

torej

$$x_1 + a_{j+1}x_{j+1} + \ldots + a_n x_n = d,$$

v kateri ni spremenljivk $x_2, x_3, \ldots, x_j$.

V matriki imamo pod črto ničelne vrstice (razen morda prve). Število teh nam pove, koliko enačb (seveda ne poljubnih) je v sistemu odveč, torej koliko bi jih lahko izbrisali, pa bi rešitev še ostala ista. Npr., če enačbi predstavljata isto premico, lahko eno brez zadržkov odmislimo.

Naš j izračunamo takole:

$$j = \text{število enačb}(m) - \text{število ničelnih vrstic v želeni matriki.}$$

Pri izračunu j kot ničelno vrstico upoštevamo tudi vrstico z $\star$, četudi je $\star = 1$.

Zvezdica nam pove, ali je sistem rešljiv ali ne. Če je na mestu $\star$ enica, ta vrstica predstavlja enačbo $0 = 1$, kar pa seveda ne drži, in sistem ni rešljiv. Če je $\star = 0$, tudi ta vrstica predstavlja enačbo $0 = 0$, pri čemer ni nič spornega, tako nam je prvih j spremenljivk uspelo izraziti z zadnjimi $n-j$ spremenljivkami.

Tako bi izgledale želene matrike za nerešljiv sistem (A), sistem z natanko eno rešitvijo (B) in sistem z rešitvijo z eno prosto spremenljivko (C):

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$
$$C = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Kako dobimo takšno matriko? Katere so dovoljene poteze, torej katere so poteze, ki ne spremenijo rešitve sistema? Seveda lahko vsako enačbo pomnožimo z neničelnim številom in rešitev ostane ista, ali pa enačbi med seboj zamenjamo. Kaj pa še lahko storimo? Pri Gaussovi eliminaciji uporabljamo tri poteze, ki jih označimo z $V1$, $V2$ in $V3$:

V1– menjava vrstic.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 10 \end{array}\right].$$

V matriki lahko med seboj zamenjamo poljubni vrstici. S tem pravzaprav zamenjamo dve enačbi, vrstni red enačb v sistemu pa ni pomemben.

V2– množenje vrstice z neničelnim številom.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Če enačbo pomnožimo z neničelnim številom, se množica rešitev ne spremeni. V primeru smo drugo vrstico množili z $\frac{1}{2}$, torej delili z 2. Z manjšimi števili je pač lažje računati.

V3– prištevanje večkratnika ene vrstice k drugi vrstici.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 1 + (-\frac{2}{2}) & -1 + (-\frac{4}{2}) & 2 + (-\frac{10}{2}) \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right].$$

Če neka n-terica reši prvo in drugo enačbo, bo rešila tudi njuno vsoto. Pred tem pa po točki V2 →

lahko eno izmed vrstic tudi pomnožimo s kakšnim številom. V primeru smo drugi vrstici prišteli $(-\frac{1}{2})$-kratnik prve. Tako smo se v zadnji vrstici znebili prve spremenljivke in si že nekoliko poenostavili sistem.

Opomba. Dovoljena je tudi menjava stolpcev ($S1$), a moramo biti pri tem pozorni na spremenjen vrstni red spremenljivk v enačbah, kajti menjava stolpcev ustreza preimenovanju spremenljivk.

Najprej en krajši primer.

Primer. Rešitev sistema $2x + 4y = 10$ in $x - y = 2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Zaporedje korakov je: $V2$ (prvo vrstico delimo z 2), $V3$ (od druge vrstice odštejemo prvo), $V2$ na drugi vrstici in $V3$ (prvi vrstici prištejemo (-2)-kratnik druge).

Dobimo nov sistem, ki ga preberemo iz zadnje matrike in se glasi $x = 3$ in $y = 1$. Naša rešitev je torej $(x, y) = (3, 1)$.

Splošni Gaussov postopek bomo razložili na sistemu štirih enačb s štirimi neznankami, s tega primera pa bralec lahko sklepa na reševanje splošnega sistema enačb.

Gaussov postopek na sistemu štirih enačb s štirimi neznankami

Imamo sistem:

$$\begin{aligned} 3y + 3z + 21w &= 36, \\ x + y - z - 2w &= -2, \\ -z - 5w &= -8, \\ x + y + 3w &= 6. \end{aligned}$$

Sistemu priredimo matriko

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 21 & 36 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

V prvem delu bomo ustvarili *zgornje trikotno* matriko, torej matriko, ki ima pod diagonalo same ničle (naša matrika bo imela na diagonali enice).

Poiščemo poljubno neničelno število $*$ v prvem stolpcu (ta vedno obstaja, saj spremenljivka x nastopa v vsaj eni enačbi). V našem primeru naj bo to druga vrstica. Z menjavo vrstic ($V1$) premaknemo to vrstico na prvo mesto in celotno vrstico delimo z $*$ ($V2$), da v levem zgornjem kotu dobimo enico (v našem primeru delimo z 1).

Z uporabo $V3$ vsaki od spodnjih vstic prištejemo ustrezen večkratnik prve vrstice, da dobimo v levem stolpcu pod enico same ničle. V naši matriki je potrebno prišteti (-1)-kratnik prve vrstice le zadnji.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 21 & 36 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 21 & 36 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 21 & 36 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right].$$

Postopek nadaljujemo na manjših *podmatrikah*.

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 21 & 36 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Na ta način dobimo zgornje trikotno matriko. V našem primeru so v zadnji vrstici same ničle (torej tudi $\star$ iz zgoraj omenjene zelene matrike), zato je sistem rešljiv. Imamo štiri vrstice, od teh je ena ničelna. Na tem koraku že vidimo j naše želene matrike. Ta je enak $j = 4 - 1 = 3$.

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{1\quad 1\quad -1}}^{j=3} \\ j=3\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. & \left[\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

V drugem delu bomo začeli spodaj desno in uničevali števila nad diagonalo.

Z $V3$ spremenimo j-ti stolpec v stolpec, v katerem je na j-tem mestu enica, nad njo pa same ničle tako, da vsaki od zgornjih $j-1$ vrstic prištejemo ustrezen večkratnik j-te vrstice. V našem primeru prvi vrstici prištejemo tretjo vrstico, drugi pa (-1)-kratnik tretje vrstice.

To ponovimo in od zgornjih $j-2$ vrstic odštejemo ustrezne večkratnike $(j-1)$-e vrstice. V našem primeru prvi vrstici odštejemo drugo. Postopek nadaljujemo, dokler gre.

$$\left[\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Prišli smo do želene oblike matrike, ki predstavlja sistem:

$$\begin{aligned} x + w &= 2 \\ y + 2w &= 4 \\ z + 5w &= 8 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev našega sistema je torej

$$(x, y, z, w) = (2 - w, 4 - 2w, 8 - 5w, w),$$

kjer je w poljubno realno število. Naredimo še preizkus z vstavljanjem rešitve v sistem.

$$\begin{aligned} &3 \cdot (4 - 2w) + 3 \cdot (8 - 5w) + 21w = \\ &\qquad 12 - 6w + 24 - 15w + 21w = 36 \\ &(2 - w) + (4 - 2w) - (8 - 5w) - 2w = \\ &\qquad 2 - w + 4 - 2w - 8 + 5w - 2w = -2 \\ &-(8 - 5w) - 5w = -8 + 5w - 5w = -8 \\ &(2 - w) + (4 - 2w) + 3w = \\ &\qquad 2 - w + 4 - 2w + 3w = 6. \end{aligned}$$

Oglejmo si primer nerešljivega sistema:

$$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ y + 2z &= 4 \\ -2x + y &= 3. \end{aligned}$$

Sistemu priredimo matriko in jo preoblikujemo z Gaussovim postopkom:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cc|c:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Na mestu $\star$ je enica, torej sistem ni rešljiv.

Omenimo še, da nam število prostih spremenljivk v rešitvi pove *dimenzijo* preseka. Če proste spremenljivke ni, je rešitev ena sama točka, torej 0-dimenzionalen prostor. Če imamo eno prosto spremenljivko, je v preseku premica, če sta dve, pa ravnina.

Na primeru sistema štirih enačb s štirimi neznankami smo se naučili postopka, ki ga brez težav lahko uporabimo na poljubnih sistemih. Nadobuden bralec je vabljen, da ga poskusi implementirati v splošnem.

× × ×