PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **13** (1985/1986)
Številka 2
Strani 70–74

Jože Grasselli:

EGIPČANSKI ALGORITEM

Ključne besede: matematika, teorija števil, egipčanski ulomki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/13/13-2-Grasselli.pdf

EGIPČANSKI ALGORITEM

Pozitivne ulomke, ki so manjši od 1, zapisujemo danes največkrat v obliki $\frac{a}{b}$. Pri tem sta a, b tuji naravni števili in $a < b$. Zgled: $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{22}{39}$. Ta zapis je plod dolgega razvoja. Nadomestil je razne drugačne oznake, ki so se uporabljale skozi zgodovino. Ustavimo se na kratko ob zapisu iz starega Egipta.

Najdeni viri izpričujejo, da so imeli stari Egipčani že pred štiri tisoč leti posebne znake za osnovne ulomke $\frac{1}{b}$ in še za ulomka $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$. Za drugačne ulomke posebnih znakov niso poznali. Pri zapisovanju teh drugih ulomkov so si pomagali z znaki za osnovne ulomke in včasih še z znakoma za $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$. Ulomek $\frac{3}{8}$ so npr. naznačili tako, da so znak za $\frac{1}{8}$ zapisali trikrat zapovrstjo. Domneva se, da so do tega zapisa prišli takole. Vemo, da je

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \tag{1}$$

Simbola za seštevanje pri starih Egipčanih še ni bilo. Seštevanje so nakazali tako, da so znake za števila, ki jih je treba sešteti, pisali drugega ob drugem. Glede na (1) so zato $\frac{3}{8}$ zapisali s trikrat postavljenim znakom za osnovni ulomek $\frac{1}{8}$.

Ker je $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$, se namesto (1) dobi

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \tag{2}$$

Res so ulomek $\frac{3}{8}$ zapisovali tudi tako, da so postavili znaka za osnovna ulomka $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{8}$ drugega za drugim. Namesto treh sta bila zdaj potrebna le dva znaka.

Pri zapisu ulomka $\frac{8}{9}$ je bilo treba osemkrat zapored postaviti znak za $\frac{1}{9}$. To je precej nerodno. Ker je

$$\frac{8}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \tag{3}$$

so zadoščali tudi že znaki za $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{18}$ zapisani po vrsti. Namesto osmih so tu le trije znaki.

Podobni zapisi kot za $\frac{3}{8}$ in $\frac{8}{9}$ so se ohranili iz starega Egipta še za nekatere druge pozitivne ulomke. Pri vsakem teh zapisov gre kakor v (2) in (3) za izrazitev ulomka z vsoto različnih osnovnih ulomkov in kdaj še ulomkov $\frac{2}{3}$ oziroma $\frac{3}{4}$.

Ulomek $\frac{3}{8}$ je v (2) izražen s samimi osnovnimi ulomki, torej brez uporabe ulomkov $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$. Take izrazitve, ko ulomka $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$ ne nastopata, so znane iz starega Egipta še za nekatere druge ulomke. Tako vidimo, da so znali stari Egipčani vsaj nekatere ulomke izražati le z vsoto različnih osnovnih ulomkov. Ko to opažamo, se vsiljuje vprašanje, ki nas bo v nadaljnjem zanimalo. *Ali se da vsak od 1 manjši pozitivni ulomek izraziti kot vsota samih različnih osnovnih ulomkov?*

Odgovor na zastavljeno vprašanje daje *egipčanski algoritem*. Pridevnik egipčanski ne pomeni, da so algoritem odkrili Egipčani; nakazuje le povezanost algoritma z egipčanskim zapisovanjem ulomkov.

Egipčanski algoritem sloni na tejle lastnosti naravnih števil: *Če sta u in v tuji naravni števili, $1 < u < v$, obstajata taki naravni števili k, r, da je*

$$1 < k, \qquad 1 \leqslant r < u \tag{4}$$

in velja

$$v = ku - r \tag{5}$$

oziroma

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{k} + \frac{r}{kv} \tag{6}$$

O resničnosti te trditve se hitro prepričamo. Vzemimo vse pozitivne večkratnike števila u

$$u, 2u, 3u, 4u, 5u, \ldots \tag{7}$$

Pokažimo, da med njimi ni števila v. Če bi bil v zajet v zaporedju (7), bi veljalo $v = tu$ pri naravnem številu t. Torej bi u delil v in največji skupni delitelj števil u, v bi bil $u > 1$. To ne gre, saj sta u, v tuji števili. Večkratniki v zaporedju (7) naraščajo in presežejo vsako še tako veliko vrednost. Zato so vsi večkratniki od nekega dalje večji od v. Naj bo ku prvi večkratnik, ki je nad v. Ker noben večkratnik ni enak v, je

$$(k-1)u < v < ku \tag{8}$$

Naravno število k, do katerega smo tako prišli, gotovo ni 1. Za $k = 1$ bi namreč iz (8) izhajalo $0 < v < u$. To ne more biti, saj smo vzeli, da je $u < v$. Torej je $1 < k$ in prva zahteva v (4) je izpolnjena. Po (8) je razlika $r = ku - v$ naravno število, manjše od u; torej je $1 \leqslant r < u$ in $v = ku - r$. Izpolnjena je druga zahteva iz (4) in zahteva (5). Delimo $ku = v + r$ s kv, pa dobimo (6). Trditev je dognana.

Iz (4) in (5) vidimo, da je k kvocient, $-r$ pa negativni ostanek pri delitvi v z u.

Poglejmo na zgledu, kako enakost (6) omogoča izraziti ulomek z vsoto različnih osnovnih ulomkov. Pri ulomku $\frac{7}{51}$ je $u = 7$, $v = 51$. Delitev 51 s 7 daje kvocient $k = 8$ in negativni ostanek $-r = -5$. Enakost (5) je

$$51 = 8.7 - 5$$

Od tod pridemo po delitvi z 8.51 in preureditvi na enakost

$$\frac{7}{51} = \frac{1}{8} + \frac{5}{8.51} \tag{9}$$

Prvi sumand na desni je osnovni ulomek. Drugi sumand lahko pišemo $\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{51}$. Izrazitev z osnovnimi ulomki za $\frac{7}{51}$ bomo dobili, če $\frac{5}{51}$ tako izrazimo. Preoblikujmo $\frac{5}{51}$ po (6). Ker je

$$51 = 11.5 - 4$$

po delitvi z 11.51 najdemo

$$\frac{5}{51} = \frac{1}{11} + \frac{4}{11.51} \tag{10}$$

Na koncu se je pojavil ulomek $\frac{4}{51}$. Zdaj je treba ta ulomek preoblikovati po (6). Ko delimo 51 s 4, dobi kvocient 13 in ostanek -1. Torej je

$$51 = 13.4 - 1$$

in dalje

$$\frac{4}{51} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13.51} \tag{11}$$

Ulomek $\frac{4}{51}$ je tu že zapisan z vsoto dveh različnih osnovnih ulomkov. Ko vnesemo (11) v (10), dobimo

$$\frac{5}{51} = \frac{1}{11} + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{13.51}\right) = \frac{1}{11} + \frac{1}{11.13} + \frac{1}{11.13.51} \tag{12}$$

in imamo ulomek $\frac{5}{51}$ izražen z vsoto različnih osnovnih ulomkov. Ko upoštevamo (12) v (9), pride

$$\frac{7}{51} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{11.13} + \frac{1}{11.13.51}\right)$$

in od tod

$$\frac{7}{51} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8.11} + \frac{1}{8.11.13} + \frac{1}{8.11.13.51} \tag{13}$$

V (13) imamo ulomek $\frac{7}{51}$ izražen z vsoto samih različnih osnovnih ulomkov.

Opomba: V gornjem postopku bi lahko krajše izrazili ulomek $\frac{5}{8.51}$ takole:

$$\frac{5}{8.51} = \frac{1}{51}.\frac{5}{8} = \frac{1}{51}(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}) = \frac{1}{2.51} + \frac{1}{8.51}$$

Vendar pa ima prvotni postopek to prednost, da ga lahko posplošimo tudi na druge ulomke.

Ravnanje, ki smo ga uporabili, je egipčanski algoritem. Podobno kot na zgornjem zgledu poteka egipčanski algoritem za poljuben ulomek $\frac{u}{v}$, $1 < u < v$.

V prvem koraku iz (6) dobimo

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{k} + \frac{r}{kv} \tag{14}$$

kjer je $1 < k$, $1 \leqslant r < u$. Če je $r = 1$, je

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{k} + \frac{1}{kv} \tag{15}$$

Na desni je vsota različnih osnovnih ulomkov. Ker je $1 < k$, $1 < v$, je namreč $\frac{1}{k} > \frac{1}{kv}$. Pri $r = 1$ torej že prvi korak privede na želeno izrazitev.

Če je $r \neq 1$, moramo storiti drugi korak. V njem obravnavamo $\frac{r}{v}$ kot prej $\frac{u}{v}$. Ker je $1 < r < u$, iz (6) dobimo

$$\frac{r}{v} = \frac{1}{k_1} + \frac{r_1}{k_1 v} \tag{16}$$

Tu sta k_1, r_1 zaradi (4) naravni števili, za kateri je $1 < k_1$, $1 \leqslant r_1 < r$. Če je $r_1 = 1$, iz (14) in (15) izhaja

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{k} + \frac{1}{kk_1} + \frac{1}{kk_1 v} \tag{17}$$

Zaradi $1 < k$, $1 < k_1$, $1 < v$ so na desni sami različni osnovni ulomki. Drugi korak je dal iskano izrazitev.

Če je $r_1 \neq 1$, je potreben tretji korak. V njem spravimo na obliko (6) ulomek $\frac{r_1}{v}$.

Ko tako korak ponavljamo, dobimo ulomke

$$\frac{u}{v}, \frac{r}{v}, \frac{r_1}{v}, \ldots \tag{18}$$

ki imajo isti imenovalec v, števci pa se jim zaradi (4) manjšajo po naravnih številih $u > r > r_1 > \ldots$. Ker je vseh ulomkov, ki imajo imenovalec v, za števec pa naravno število med 1 in u, ravno u, je v (18) kvečjemu u ulomkov. Torej se naše ravnanje najpozneje po u korakih ustavi. Zadnji ulomek, ki v (18) nastopa, je $\frac{1}{v}$. Za vsak ulomek $\frac{r'}{v}$, pri katerem je $1 < r' < u$, se da namreč korak (6) ponoviti; za ulomek $\frac{1}{v}$ pa to ne gre več, če naj velja (4). V zgornjem zgledu smo za ulomke (18) dobili $\frac{7}{51}, \frac{5}{51}, \frac{4}{51}, \frac{1}{51}$.

Razen egipčanskega algoritma poznamo še druge načine, ki pripeljejo do izrazitve ulomka z vsoto različnih osnovnih ulomkov. Po enem teh načinov se dobi

$$\frac{7}{51} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8.15} + \frac{1}{15.22} + \frac{1}{22.51} \tag{19}$$

Izrazitvi (13) in (19) sta različni. Zato izražanje ulomkov z osnovnimi ulomki ni enolično. Dodajmo še, da je tudi vsak ulomek, ki je večji od 1, mogoče predočiti z vsoto samih različnih osnovnih ulomkov. Kot zgled navedimo

$$\frac{7}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

Kako v tem primeru izrazitev dosežemo, sedaj ne bomo opisovali. V Preseku pa se bo kmalu pojavil članek, ki bo spregovoril tudi o tem.

VAJE

1. Po egipčanskem algoritmu prevedi na vsoto različnih osnovnih ulomkov ulomke: $\frac{5}{7}, \frac{22}{39}, \frac{31}{100}, \frac{3}{1000}, \frac{18}{19}$.
2. Poskusi izraziti z vsoto različnih osnovnih ulomkov: $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$.
3. Če je v liho naravno število, večje od 2, obstaja tako naravno število k, da je

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{k} + \frac{1}{kv}$$

4. Naj bosta u, v tuji naravni števili, $1 < u < v$. Naravno število k, za katero velja

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{k} + \frac{1}{kv}$$

obstaja natančno takrat, kadar u deli $v + 1$.

Jože Grasselli