28.

SLOVENSKO DRŽAVNO PRVENSTVO V GRADBENI MEHANIKI

LJUBLJANA, 17. MAJ 2023

Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za gradbeništvo in geodezijo*

28. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

**Goran Turk, Dejan Zupan, Anita Ogrin,
Peter Češarek, Robert Pečenko, Rado Flajs in Igor Planinc**

Ljubljana, 17. maj 2023

Avtorji: TURK, Goran; ZUPAN, Dejan; OGRIN, Anita; ČEŠAREK, Peter; PEČENKO, Robert; FLAJS, Rado; PLANINC, Igor
28. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki

Založnik: Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
zanjo dekanja prof. dr. Violeta Bokan Bosiljkov

Oblikovanje naslovnice: SAJE, Veronika

Elektronska izdaja: www.km.fgg.uni-lj.si/tekma/tekmaGMH2023.pdf

Obseg: 29 strani

Cena: knjiga je brezplačna

Ljubljana, 2024

Katal ožni zapis o publikaciji (CIP) so pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani.

COBISS.SI-ID 207267075
ISBN 978-961-6884-88-4 (PDF)

28. slovensko državno prvenstvo v gradbeni mehaniki Ljubljana 2023

Letos smo na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo organizirali že 28. državno prvenstvo v gradbeni mehaniki. Prvenstvo je pripravil organizacijski odbor v sestavi:

Goran Turk,
Peter Češarek,
Rado Flajs,
Robert Pečenko,
Anita Ogrin,
Igor Planinc,
Dejan Zupan (vsi UL FGG),
Nevenka Cesar (Srednja gradbena in lesarska šola, Novo mesto),
Erika Broz Žižek (Šolski center Krško-Sevnica, Gimnazija Krško),
Maja Lorger (Srednja gradbena šola in gimnazija,Maribor),
Uroš Avsec (Srednja elektro šola in tehniška gimnazija, Novo mesto),
Majda Pregl (Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola, Ljubljana),
Marlenka Žolnir Petrič (Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja, Celje).

Na tekmovanje smo povabili dijakinje in dijake tretjih in četrtih letnikov srednjih tehniških šol in tehniških gimnazij. Odbor je pripravil naloge za predtekmovanje in sklepno tekmovanje ter pregledal in ocenil izdelke tekmovalk in tekmovalcev.

Na predtekmovanje se je prijavilo 93 dijakinj in dijakov. Predtekmovalne naloge so na srednjih šolah reševali 18. aprila 2023. Trideset najuspešnejših dijakinj in dijakov na predtekmovanju se je uvrstilo na sklepno tekmovanje, ki je potekalo 17. maja 2023 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani.

Na sklepno tekmovanje so se uvrstile naslednje dijakinje in dijaki:

Ime in priimek	Letnik	Šola	Mentor
Nejc Ranzinger	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Tilen Vodovnik	3	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Jan Bricelj	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Anja Smrekar	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Jernej Topolovec	3	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Matej Burnik	3	SGGOŠ Ljubljana	Jure Zupančič
Kristijan Šetina	3	SGGOŠ Ljubljana	Jure Zupančič
Maks Umek	3	SGGOŠ Ljubljana	Jure Zupančič
Lea Strelec	3	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Lory Kmetič	3	ŠCKS SŠ Krško	Erika Broz Žižek
Neja Florjančič	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Sara Jakše	3	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Jan Podpadec	3	SGLVŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Patrik Šuštarič	3	SGLVŠ Novo mesto	Nevenka Cesar
Luka Šadl	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Patrik Majhen	4	SGŠG Maribor	Maja Lorger
Žiga Košir	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Lan Mastnak	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Evelin Pivić	4	SŠGVO Celje	Marlenka Žolnir Petrič
Hana Dizdarevič	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Blaž Modrijan	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Timor Štrumelj	4	SGGOŠ Ljubljana	Majda Pregl
Matevž Žnidaršič	4	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Žak Likar	4	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Martin Lutman	4	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Aleš Miljuš	4	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Jure Ponikvar	4	SGGOŠ Ljubljana	Biljana Postolova
Vid Grah	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Rok Tomažin	4	SEŠTG Novo mesto	Uroš Avsec
Patrik Potrebuješ	4	SGLVŠ Novo mesto	Nevenka Cesar

KRATICE ŠOL:

SEŠTG Novo mesto	Srednja elektro šola in tehniška gimnazija Novo mesto
SGGOŠ Ljubljana	Srednja gradbena, geodetska in okoljevarstvena šola Ljubljana
SGLVŠ Novo Mesto	Srednja gradbena, lesarska in vzgojiteljska šola Novo mesto
SŠGVO Celje	Srednja šola za gradbeništvo in varovanje okolja Celje
ŠCKS SŠ Krško	Šolski center Krško-Sevnica, Srednja šola Krško
SGŠG Maribor	Srednja gradbena šola in gimnazija Maribor
GZŠ Nova Gorica	Gimnazija in zdravstvena šola Nova Gorica

Sklepno tekmovanje se je začelo 17. maja 2023 ob 11.00 v prostorih Fakultete za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani. Po 120 minutah reševanja nalog so si tekmovalke in tekmovalci ogledali Laboratorij Oddelka za okoljsko gradbeništvo na Hajdrihovi 28 v Ljubljani. Predstavitev različnih poskusov so pripravili Gorazd Novak, Klaudija Lebar in Gašper Rak.

Medtem je komisija za ocenjevanje v sestavi Peter Češarek, Anita Ogrin, Gregor Udovč in Goran Turk, (vsi Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo) pregledala in ocenila naloge s sklepnega tekmovanja.

Po skupnem kosilu so bili popoldne v svečani dvorani Fakultete za gradbeništvo in geodezijo objavljeni rezultati. Priznanja in nagrade je dijakinjam in dijakom podelila dekanja UL FGG prof. dr. Violeta Bokan Bosiljkov.

Najuspešnejši na sklepnem tekmovanju so bili:

ime in priimek	**šola**	**nagrada**	**točke**
3. letnik			
Patrik Šuštarič	SGLVŠ Novo Mesto	1. mesto	65
Anja Smrekar	SGGOŠ Ljubljana	2. mesto	40
Neja Florjančič	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	40
Lory Kmetič	ŠCKS SŠ Krško	3. mesto	35
4. letnik			
Evelin Pivič	SŠGVO Celje	1. mesto	75
Luka Šadl	SGŠG Maribor	2. mesto	65
Rok Tomažin	SEŠTG Novo mesto	2. mesto	65
Vid Grah	SEŠTG Novo mesto	3. mesto	60

V naslednjih dveh preglednicah prikazujemo nekatere podatke o tem, kako so dijakinje in dijaki reševali predtekmovalne naloge in naloge na sklepnem tekmovanju. Najvišja možna ocena za posamezno nalogo je 25 točk.

predtekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.28	9.44	9.31	3.33	26.37
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	20	90

predtekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.94	14.06	7.97	7.03	35.12
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	25	25	90

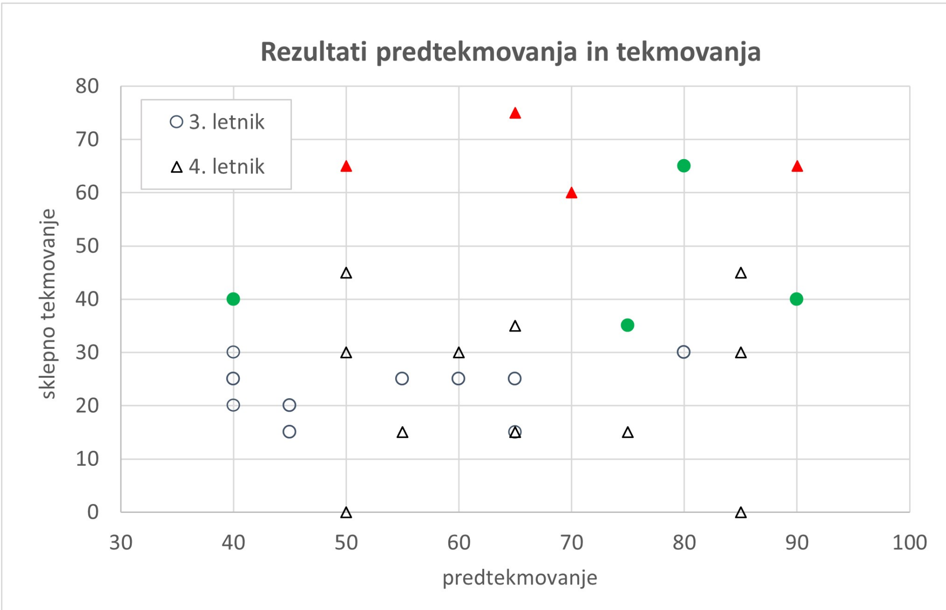
sklepno tekmovanje za 3. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	15.71	7.14	6.07	0.36	29.29
najnižja ocena	0	0	0	0	15
najvišja ocena	25	25	25	5	65

sklepno tekmovanje za 4. letnike [%]					
	1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga	skupaj
povprečje	9.29	14.29	5.71	10.71	35.00
najnižja ocena	0	0	0	0	0
najvišja ocena	25	25	15	25	75

Glede na povprečne ocene posameznih nalog na predtekmovanju lahko sklepamo, da je bila za tretje letnike najtežja 4. naloga. Dijakinjam in dijakom četrtih letnikov pa sta bili težji 3. in 4. naloga.

Na sklepnem tekmovanju so bile povprečne ocene v tretjih letnikih nekoliko višje kot na predtekmovanju, pri četrtih letnikih pa je bila povprečna ocena na sklepnem tekmovanju skoraj enaka povprečju na predtekmovanju. Dijaki tretjih letnikov so bolje reševali 1. nalogo, težji sta bili 2. in 3. naloga, pri četrti pa so bili rezultati izrazito nizki, saj je bilo povprečje komaj nad nič, najvišja ocena pa 5 točk (od 25). Pri četrtih letnikih je bila glede na povprečne rezultate nalog najlažja 2. naloga, prva in četrta sta bili nekoliko težji, največ težav so imeli dijaki s tretjo nalogo.

Zgovoren je graf rezultatov s predtekmovanja in sklepnega tekmovanja. Vidimo lahko, da boljši rezultat na predtekmovanju pogosto pomeni tudi boljši rezultat na sklepnem tekmovanju, a lahko pride tudi do izjem in izrazitega izboljšanja uvrstitve s predtekmovanja. Na sliki so z rdečo označeni rezultati tistih, ki so dobili nagrado na sklepnem tekmovanju. Nagrajenci na sklepnem tekmovanju so bili večinoma med boljšimi tudi na predtekmovanju.



Oglejmo si še, koliko tekmovalk in tekmovalcev je povsem pravilno rešilo posamezne naloge.

Na predtekmovanju tretjih letnikov je prvo nalogo povsem pravilno rešilo 16 dijakov, tretjo pa 12. Druga in četrta sta bili zahtevnejši. Drugo sta pravilno rešila le dva dijaka, četrte pa nihče. Tudi pri četrtih letnikih sta dve nalogi izstopali kot lažji, saj je drugo povsem pravilno rešilo 16 dijakov, prvo pa 12. Tretjo in četrto so pravilno rešili 4 oziroma 3 dijaki.

Na sklepnem tekmovanju je le malo dijakov povsem pravilno rešilo posamezno nalogo. Najboljši rezultati so bili pri četrti nalogi za 4. letnike, ki jo je pravilno rešilo 5 dijakov. Pri vseh ostalih nalogah je le kak dijak pravilno rešil nalogo, dveh nalog s sklepnega tekmovanja pa ni pravilno rešil noben dijak.

Število tekmovalk in tekmovalcev, ki so pravilno rešili posamezne naloge			
predtekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
16	2	12	0
predtekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
12	16	4	3

sklepno tekmovanje za 3. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
2	2	1	0
sklepno tekmovanje za 4. letnike			
1. naloga	2. naloga	3. naloga	4. naloga
1	1	0	5

Na sklepno tekmovanje se je uvrstilo 6 dijakinj in 24 dijakov, kar pomeni, da je bila zastopanost deklet 20%. Zanimivo pa je, da so bile med nagrajenimi kar 3 dijakinje, kar pomeni, da se je tu delež dijakinj skoraj podvojil (37.5 %).

Tekmovanje financira:
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo,
Univerza v Ljubljani, v okviru aktivnosti za izvedbo ukrepa Promocija študija za različne skupine s poudarkom na enaki zastopanosti spolov - STE(A)M.

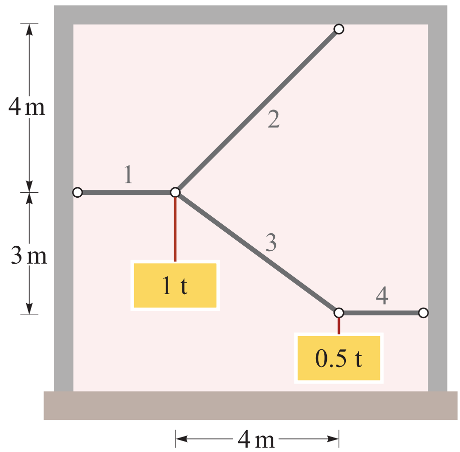
Informacije o tekmovanju lahko najdete tudi na spletni strani:
`http://km.fgg.uni-lj.si/tekma/`.

Naloge s predtekmovanja za 3. letnike

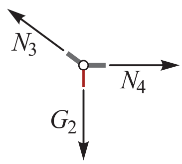
1. naloga

V muzejski dvorani sta obešena razstavna predmeta, z masama ene tone in pol tone, kot je prikazano na sliki.

Kolikšne so sile v vrveh, ki zagotavljajo, da razstavna predmeta ne padeta na tla.



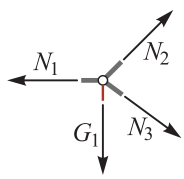
Rešitev: Obravnavajmo najprej desni predmet z maso pol tone: $G_2 = 5\,\mathrm{kN}$. Izrežemo del okoli predmeta in na mestih prereza predpostavimo sile, kot je prikazano na sliki. Zapišemo ravnotežni enačbi v navpični in vodoravni smeri:



$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad -G_2 + N_3\,\frac{3}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad N_3 = G_2\,\frac{5}{3} = 8.33\,\mathrm{kN},$$

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -N_3\,\frac{4}{5} + N_4 = 0 \quad \rightarrow \quad N_4 = N_3\,\frac{4}{5} A_Y = 6.67\,\mathrm{kN}.$$

Podobno naredimo še za razstavni predmet na levi z maso ene tone: $G_1 = 10\,\mathrm{kN}$. Izrežemo del okoli predmeta in na mestih prereza predpostavimo sile, kot je prikazano na sliki. Zapišemo ravnotežni enačbi v navpični in vodoravni smeri:



$$\sum Y = 0 \quad \rightarrow \quad N_2\,\frac{\sqrt{2}}{2} - N_3\,\frac{3}{5} - G_1 = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 = 21.21\,\mathrm{kN},$$

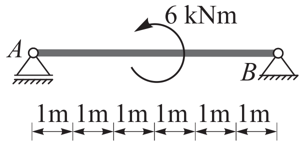
$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1 + N_2\frac{\sqrt{2}}{2} + N_3\frac{4}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = 21.67\,\mathrm{kN}.$$

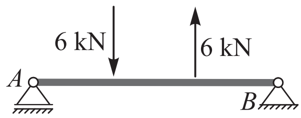
Vidimo, da so vse sile v vrveh natezne, kar je bilo tudi pričakovano. Če bi bila katerakoli sila v vrvi tlačna, razstavnih predmetov ne bi mogli obesiti na tak način, oziroma bi morali vrvi nadomestiti s palicami, ki so lahko obremenjene tudi s tlačnimi silami.

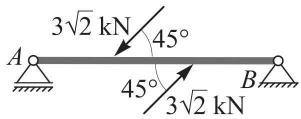
2. naloga

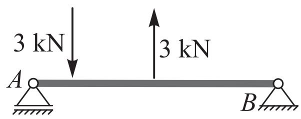
Prostoležeči nosilec na sliki je na sredini obtežen z momentom $M = 6\,\mathrm{kNm}$. S katero dvojico sil na spodnjih slikah lahko nadomestite dani moment, da bodo reakcije prostoležečega nosilca enake?

Določite reakcije podpor in notranje sile pri obtežbi z momentom in obtežbi z dvojico sil za vse primere, ko moment lahko nadomestite z dvojico sil. Primerjajte dobljene rezultate. Kaj ste ugotovili?

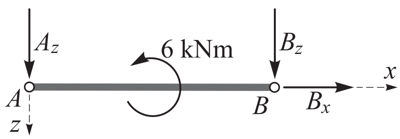








Rešitev: Izračunajmo reakcije ter določimo notranje sile za prvi referenčni primer. Na sliki prikazujemo predpostavljene reakcije A_z, B_z in B_x.



Zapišimo ravnotežne pogoje za prostoležeči nosilec:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = 0,$$
$$\sum M_y^A = 0 \quad \rightarrow \quad -B_z \cdot 6 + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = 1\,\mathrm{kN},$$
$$\sum M_y^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_z \cdot 6 + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = -1\,\mathrm{kN}.$$

Podobno naredimo še za druge tri obtežne primere. Obtežni primer 2:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = 0,$$
$$\sum M_y^A = 0 \quad \rightarrow \quad -B_z \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = 2\,\mathrm{kN},$$
$$\sum M_y^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_z \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = -2\,\mathrm{kN}.$$

Ta obtežni primer povroči dvakrat tolikšne reakcije kot referenčni.

Obtežni primer 3:

$$
\begin{aligned}
\sum X = 0 \quad &\rightarrow \quad B_x + 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad B_x = 0\,\mathrm{kN}, \\
\sum M_y^A = 0 \quad &\rightarrow \quad -B_z \cdot 6 + 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 - 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 0 \\
&\rightarrow \quad B_z = 1\,\mathrm{kN}, \\
\sum M_y^B = 0 \quad &\rightarrow \quad A_z \cdot 6 + 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 - 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 0 \\
&\rightarrow \quad A_z = -1\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

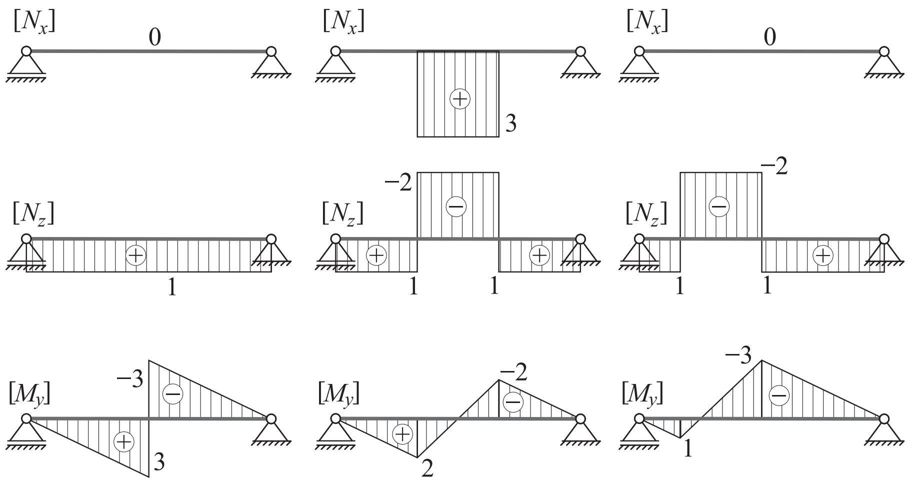
Obtežni primer 4:

$$
\begin{aligned}
\sum X = 0 \quad &\rightarrow \quad B_x = 0, \\
\sum M_y^A = 0 \quad &\rightarrow \quad -B_z \cdot 6 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0 \quad \rightarrow \quad B_z = 1\,\mathrm{kN}, \\
\sum M_y^B = 0 \quad &\rightarrow \quad A_z \cdot 6 + 3 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = -1\,\mathrm{kN}.
\end{aligned}
$$

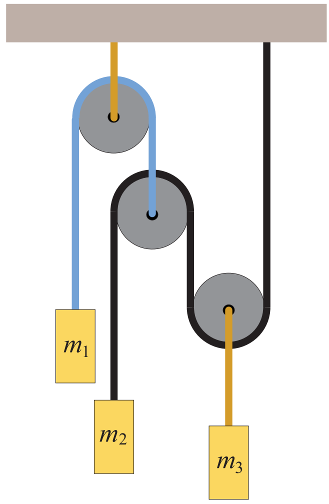
Vidimo, da sta reakciji A_z in B_z pri 3. in 4. obtežnem primeru enaki kot pri referenčnemu.

V nadaljevanju so prikazani diagrami notranjih sil za tri obtežne primere, pri katerih so reakcije v podporah enake. Opazimo lahko, da so diagrami notranjih sil različni, čeprav so bile reakcije v podporah enake.

1. obtežni primer 3. obtežni primer 4. obtežni primer



3. naloga



Na sliki je prikazano preprosto škripčevje, ki miruje. Če vemo, da je masa leve uteži enaka $m_1 = 100\,\mathrm{kg}$, kolikšni sta masi m_2 in m_3?

Trenje v škripcih lahko zanemarimo.

Rešitev: Teža leve uteži je

$$F_1 = m_1\, g = 1\,\mathrm{kN},$$

kolikor je tudi sila v (modri) vrvici N_{v1}, ki to utež zadržuje v mirovanju. Če zapišemo ravnotežne pogoje za sile v navpični smeri za srednji škripec, ugotovimo, da je sila v črni vrvici pol manjša

$$N_{v2} = \frac{N_{v1}}{2} = 0.5\,\mathrm{kN}.$$

Tolikšna mora biti tudi teža druge uteži $F_2 = 0.5\,\mathrm{kN}$. Iz ravnotežnega pogoja za navpične sile za desni škripec pa ugotovimo, da je teža tretje uteži enaka dvakratni sili v (črni) vrvici:

$$F_3 = 2\,N_{v2} = 1\,\mathrm{kN}.$$

Zaključimo, da sta masi drugih dveh uteži $m_2 = 50\,\mathrm{kg}$ in $m_3 = 100\,\mathrm{kg}$.

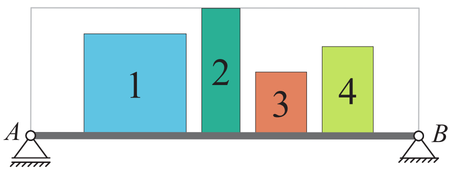
4. naloga

V delavnici morate na polico v omari pospraviti štiri kvadraste zaboje z orodjem tako, da bo upogibni moment na sredini razpona police čim manjši. Polico lahko obravnavamo kot prostoležeči nosilec. Svetla višina nad polico je 50 cm, njena svetla dolžina pa je 150 cm. Globina zabojev je enaka globini police.

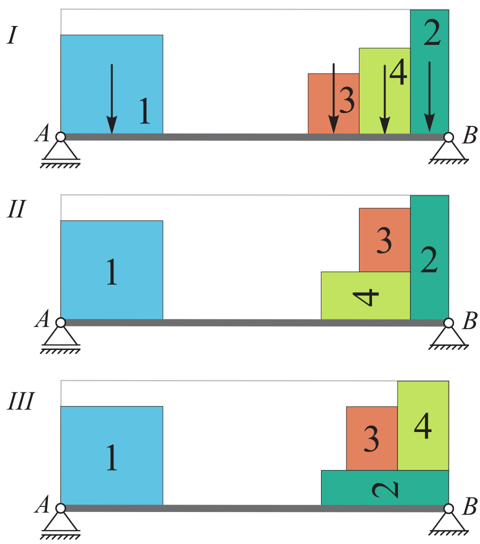
Zaboj	Širina [cm]	Višina [cm]	Teža [N]
1	40	40	150
2	15	50	70
3	20	25	20
4	20	35	40

Preostali dve dimenziji in teža zabojev so podani v preglednici. Zaboji so lahko na polico položeni pokončno ali ležeče, lahko jih postavimo enega na drugega, ne pa tudi enega za drugim v smeri globine police. Določite najugodnejšo postavitev zabojev in narišite skico postavitve. Kolikšen je upogibni moment na sredini police ob najugodnejši postavitvi zabojev. Nasvet: Zaboje lahko v računu nadomestite s točkovnimi silami.

Rešitev: Narišimo polico in štiri zaboje s poljubno postavitvijo.



Če želimo, da bo upogibni moment na sredini čim manjši, moramo težje zaboje postaviti v bližino podpor. Na ta način predpostavimo tri postavitve, ki bi lahko bile take, da bi na sredini nosilca nastopili najmanjši upogibni momenti.



Pri določitvi reakcije v podpori A in upogibnega momenta na sredini nosilca lahko učinek zaboja nadomestimo s točkovno silo. Pri razporeditvi zabojev I izračunamo reakcijo A_z in upogibni moment M_y z enačbama

$$
\begin{aligned}
\sum M_y^B = 0 \quad &\rightarrow \quad A_z \cdot 150 + F_1 \cdot 130 + F_2 \cdot 7.5 + F_4 \cdot 25 + F_3 \cdot 45 = 0 \\
&\rightarrow \quad A_z = -146.2\,\mathrm{N}. \\
\sum M_y^T = 0 \quad &\rightarrow \quad M_y + A_z \cdot 75 + F_1 \cdot 55 = 0 \quad \rightarrow \\
&\rightarrow \quad M_y = 2712.5\,\mathrm{Ncm}.
\end{aligned}
$$

Pri razporeditvi zabojev II izračunamo A_z in M_y z enačbama

$$
\begin{aligned}
\sum M_y^B = 0 \quad &\rightarrow \quad A_z \cdot 150 + F_1 \cdot 130 + F_2 \cdot 7.5 + F_4 \cdot 32.5 + F_3 \cdot 25 = 0 \\
&\rightarrow \quad A_z = -145.5\,\mathrm{N}. \\
\sum M_y^T = 0 \quad &\rightarrow \quad M_y + A_z \cdot 75 + F_1 \cdot 55 = 0 \quad \rightarrow \\
&\rightarrow \quad M_y = 2662.5\,\mathrm{Ncm}.
\end{aligned}
$$

Pri razporeditvi zabojev III pa izračunamo A_z in M_y z enačbama

$$
\begin{aligned}
\sum M_y^B = 0 \quad &\rightarrow \quad A_z \cdot 150 + F_1 \cdot 130 + F_2 \cdot 25 + F_4 \cdot 10 + F_3 \cdot 30 = 0 \\
&\rightarrow \quad A_z = -148.3\,\mathrm{N}. \\
\sum M_y^T = 0 \quad &\rightarrow \quad M_y + A_z \cdot 75 + F_1 \cdot 55 = 0 \quad \rightarrow \\
&\rightarrow \quad M_y = 2975.0\,\mathrm{Ncm}.
\end{aligned}
$$

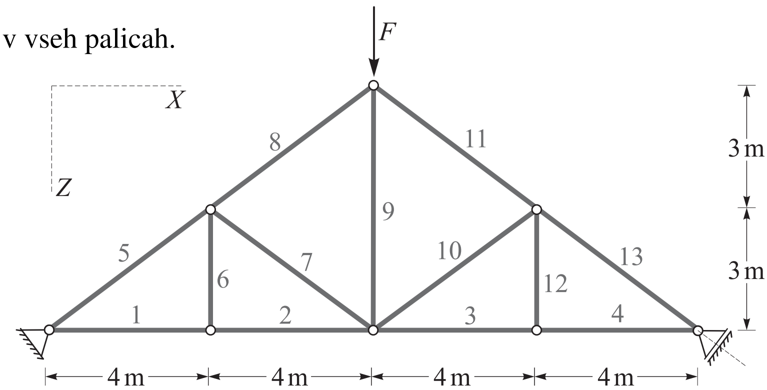
Vidimo, da je optimalna razporeditev zabojev z oznako II, saj je pri tej razporeditvi zabojev upogibni moment na sredini nosilca najmanjši in znaša $M_y = 2662.5\,\mathrm{Ncm}$.

Naloge s predtekmovanja za 4. letnike

1. naloga

Paličje na sliki je obteženo s silo $F = 100\,\mathrm{kN}$.

Določite osne sile v vseh palicah.



Rešitev: Najprej poiščimo vse palice, v katerih je osna sila enaka nič.

V vozlišču palic 1, 2 in 6 je palica 6 edina, ki ni v vodoravni ravnini, zato je sila $N_6 = 0$. Na enak način ugotovimo, da je $N_{12} = 0$. Sedaj lahko v mislih iz paličja odstranimo palici 6 in 12. Takoj ugotovimo, da v vozlišču, kjer se stikajo palice 5, 7, 8 (in 6), palici 5 in 7 delujeta v isti smeri, palica 7 pa ne. Zato je sila $N_7 = 0$. Podobno je na desni strani paličja. Ugotovimo, da je sila $N_{10} = 0$.

V vozlišču na sredini razpona paličja se stikajo palice 2, 7, 9, 10, in 3. Ugotovili smo že, da sta $N_7 = N_{10} = 0$, tako ostane v navpični smeri le še palica 9, zato je sila v tej palici enaka nič, $N_9 = 0$.

V desni podpori se stikata palici 4 in 13. Reakcija v tej podpori je v smeri palice 13, palica 4 pa ni na isti smernici, zato je sila v palici 4 enaka nič, $N_4 = 0$. Ob ugotovitvi, da so sile $N_4 = N_6 = N_7 = N_9 = N_{10} = N_{12} = 0$, iz ravnotežnih pogojev v vodoravni smeri za spodnja tri prosta vozlišča ugotovimo, da so tudi sile v palicah 1, 2 in 3 enake nič, $N_1 = N_2 = N_3 = 0$.

Sedaj zapišemo ravnotežna pogoja za zgornje vozlišče, kjer se stikajo palice 8, 9 in 11. Ker vemo, da je osna sila N_9 enaka nič, te osne sile v enačbah ne pišemo.

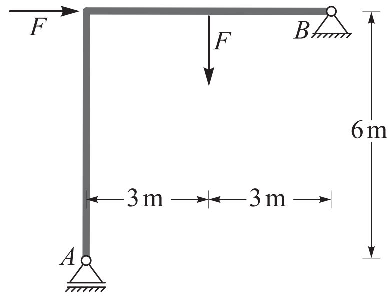
$$\sum X = 0 \quad \to \quad -N_8\frac{4}{5} + N_{11}\frac{4}{5} = 0 \quad \to \quad N_8 = N_{11},$$

$$\sum Z = 0 \quad \to \quad N_8\frac{3}{5} + N_{11}\frac{3}{5} + F = 0 \quad \to \quad N_8 = N_{11} = -83.3\,\mathrm{kN}.$$

Iz ravnotežnih pogojev za vozlišče, ker se stikajo palice 5, 6, 7 in 8 in ob upoštevanju, da sta $N_6 = N_7 = 0$, ugotovimo, da je $N_5 = N_8 = -83.3\,\mathrm{kN}$. Na podoben način določimo tudi $N_{13} = N_{11} = -83.3\,\mathrm{kN}$.

2. naloga

S kolikšnima silama F moramo obtežiti ravninski okvir, da bo po absolutni vrednosti največji upogibni moment dosegel največjo dovoljeno vrednost $M_p = 100\,\mathrm{kNm}$?



Rešitev: Ker je reakcija v podpori A navpična, upogibnih momentov v stebru ni. Upogibni moment je od nič različen le v nosilcu in je največji na mestu delovanja navpične sile. Zato je naš prvi cilj, da izračunamo ta upogibni moment. Še prej določimo reakcije v podporah, te so:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad B_X + F = 0 \quad \rightarrow \quad B_X = -F,$$

$$\sum M_y^B = 0 \quad \rightarrow \quad F \cdot 3 + A_Z \cdot 6 = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = -\frac{F}{2},$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z + B_Z + F = 0 \quad \rightarrow \quad B_Z = -\frac{F}{2}.$$

Moment na sredini nosilca je:

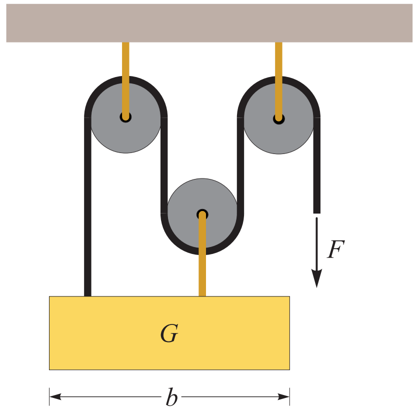
$$\sum_{\text{desni del}} M_y^T = 0 \quad \rightarrow \quad M_y + B_Z \cdot 3 = 0 \quad \rightarrow \quad M_y = \frac{3F}{2}.$$

Sedaj izračunamo še silo F, ki ustreza največjemu dovoljenemu momentu M_p:

$$M_y = \frac{3F}{2} = M_p = 100\,\mathrm{kNm} \quad \rightarrow \quad F = \frac{2M_p}{3} = 66.7\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

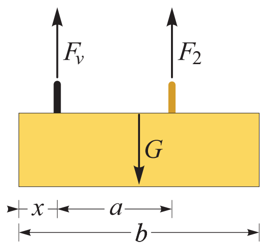
Na sliki je prikazano preprosto škripčevje. S silo $F = 500\,\mathrm{N}$ vlečemo ne enem koncu vrvi in z enakomerno hitrostjo dvigujemo klado s težo G. Kolikšna je teža G? Klada je dolga $b = 80\,\mathrm{cm}$. Koliko od levega roba klade moramo pritrditi vrv, da se klada med dvigovanjem ne bo zavrtela. Premer škripcev je 20 cm, debelina vrvi je zanemarljiva.



Trenje v škripcih lahko zanemarimo.

Rešitev: Sila v vrvi je enaka sili $F_v = F$. Iz ravnotežnih enačb za srednji škripec ugotovimo, da je sila, s katero drugi škripec drži klado, enaka $F_2 = 2\,F = 1000\,\mathrm{N}$.

Klado izrežemo iz sistema in v obeh vrveh predpostavimo osni sili. Iz ravnotežnih pogojev v navpični smeri lahko ugotivmo, da je $G = 3\,F = 1500\,\mathrm{N}$. Razdalja med prijemališči sil na kladi je enaka trikratnemu premeru škripca $a = 3\,r_s = 30\,\mathrm{cm}$. Razdaljo x, s katero označimo lego prijemališča leve sile, določimo iz momentnega ravnotežnega pogoja za levi rob klade:



$$\sum M_y^T = 0 \qquad \rightarrow \quad F_v\,x + F_2\,(a + x) - G\,\frac{b}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

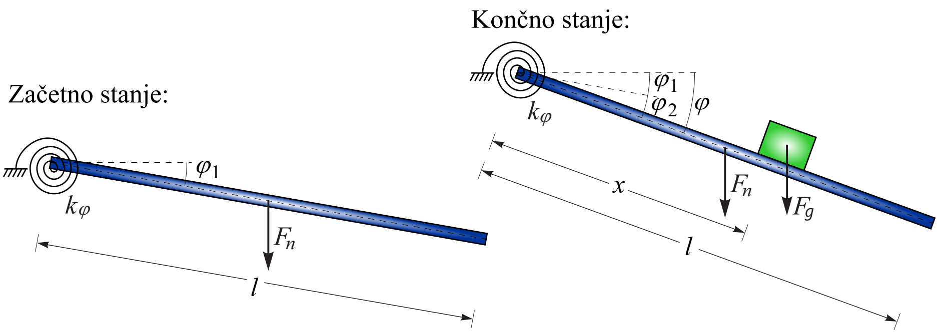
$$\rightarrow \quad x = \frac{G\,b/2 - F_2\,a}{F_v + F_2} \quad \rightarrow$$

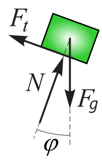
$$\rightarrow \quad x = \frac{1500 \cdot 40 - 1000 \cdot 30}{500 + 1000} = 20\,\mathrm{cm}.$$

4. naloga

Nosilec dolžine $l = 1.5\,\mathrm{m}$ in mase $70\,\mathrm{kg}$ je na levi strani vpet na polžasto vzmet togosti $k_\varphi = 2800\,\mathrm{Nm/rad}$, kot prikazuje spodnja slika. Nosilec se najprej zaradi vpliva lastne teže zavrti za kot φ_1. Na tako zavrteni nosilec položimo klado z maso $30\,\mathrm{kg}$. Določite, do katere razdalje x lahko položimo klado, da le-ta ne bo zdrsnila z nosilca. Upoštevajte, da je koeficient lepenja med klado in nosilcem enak $k_l = 0.35$.

Račun si lahko poenostavite s predpostavko, da je ročica sile teže nosilca enaka $l/2$ v začetnem in končnem stanju.





Rešitev: Določimo največji kot $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, pri katerem klada še ne zdrsne po nosilcu. Napišemo ravnotežne pogoje v smeri nosilca in v smeri, pravokotno na nosilec. Vse sile, ki delujejo na klado, so prikazane na sliki.

$$\sum N = 0 \quad \rightarrow \quad N - F_g \cos\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad F_g = \frac{N}{\cos\varphi},$$

$$\sum T = 0 \quad \rightarrow \quad F_t - F_g \sin\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad F_t = N\,k_l = F_g\,\sin\varphi, \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad k_l = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi = \arctan k_l = 19.29^\circ.$$

Sili teže nosilca in klade sta:

$$F_n = m_n\,g = 700\,\mathrm{N}, \qquad F_g = m_k\,g = 300\,\mathrm{N}.$$

Razdaljo x določimo iz momentnega ravnotežnega pogoja za končno stanje:

$$\sum M_y^A = 0 \quad \rightarrow \quad F_n\,\frac{l}{2} + F_g\,x\,\cos\varphi - k_\varphi\,\varphi = 0$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{1}{F_g\,\cos\varphi}\left(k_\varphi\,\varphi - F_n\,\frac{l}{2}\right) = 1.54\,\mathrm{m}.$$

Ugotovimo, da je razdalja x večja od dolžine nosilca, kar pomeni, da lahko breme postavimo čisto na konec nosilca, pa to še ne zdrsne z nosilca.

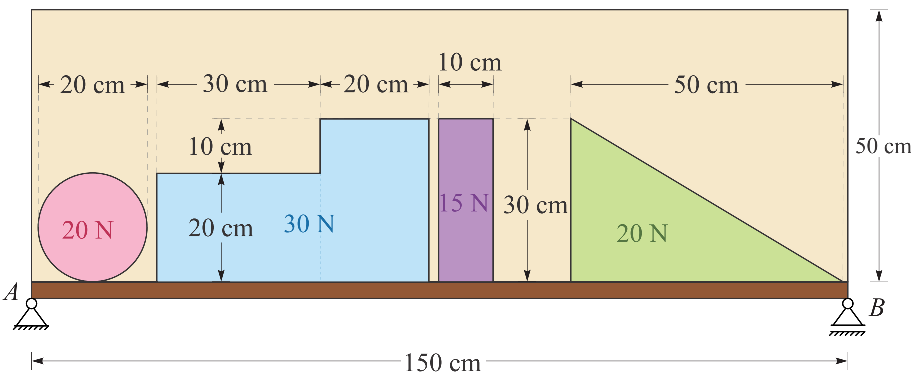
Naloge s sklepnega tekmovanja za 3. letnike

1. naloga

Na polico v omari razporedite štiri predmete tako, da bo upogibni moment na sredini razpona police najmanjši. Svetla višina nad polico je $50\,\mathrm{cm}$, njena svetla dolžina pa je $150\,\mathrm{cm}$. Globina predmetov je enaka globini police. Preostale dimenzije in teža predmetov so podane na sliki. Predmete lahko poljubno zavrtite in postavite enega na drugega. Pri tem upoštevajte, da mora biti podprta celotna spodnja stranica zgornjega predmeta. Na valjasti predmet ne morete položiti ničesar.

Določite najugodnejšo postavitev zabojev in pripadajoč upogibni moment na sredini razpona.

Predmeti so iz homogenega materiala. Vpliv predmetov lahko nadomestite s točkovnimi silami. Polico modelirajte kot prostoležeči nosilec.



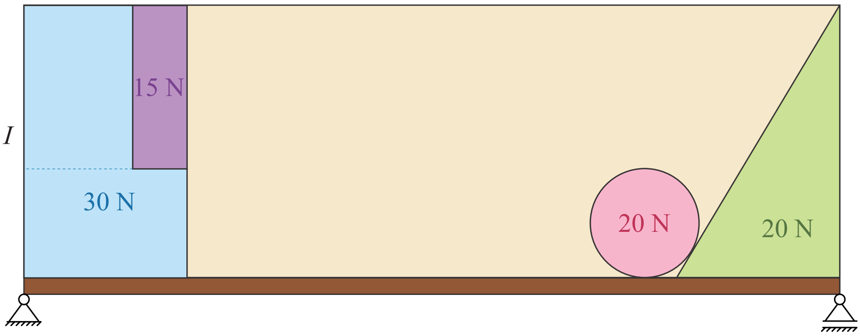
Rešitev: Če želimo, da bo upogibni moment na sredini čim manjši, moramo težje zaboje premakniti v bližino podpor. Na spodnjih slikah prikazujemo tri postavitve predmetov, ki jih v nadaljevanju analiziramo.

Vpliv modrega predmeta bomo nadomestili z dvema silama po $15\,\mathrm{kN}$, ki delujeta v težišču vsakega dela predmeta. Vpliv zelenega predmeta bomo nadomestili z eno silo, ki deluje v težišču trikotnika, vpliv preostalih dveh predmetov pa tudi s silama, ki delujeta v težišču predmeta.

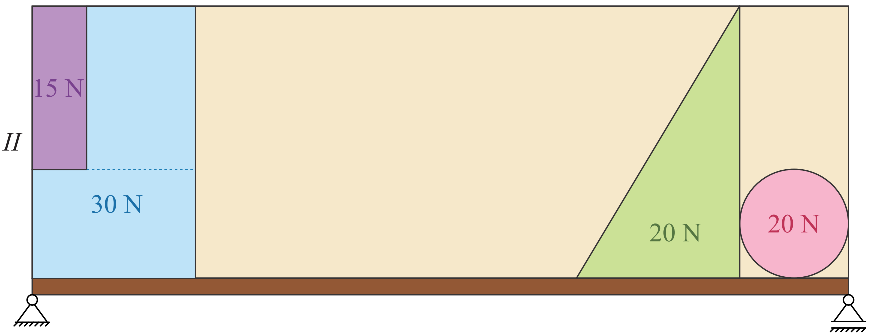
Pri določitvi reakcije A_z v podpori A in upogibnega momenta na sredini nosilca M_y lahko učinek predmeta nadomestimo s točkovno silo. Pri razporeditvi predmetov I izračunamo reakcijo A_z in upogibni moment M_y z enačbama

$$\begin{aligned}
\sum M_y^B = 0 \quad &\rightarrow \quad A_z \cdot 150 + 15 \cdot 140 + 15 \cdot 135 + 15 \cdot 125 + \\
&\quad\;\; +20 \cdot 36 + 20 \cdot 10 = 0 \\
&\rightarrow \quad A_z = -46.13\,\mathrm{N}. \\
\sum M_y^T = 0 \quad &\rightarrow \quad M_y + A_z \cdot 75 + 15 \cdot 65 + 15 \cdot 60 + 15 \cdot 50 = 0 \\
&\rightarrow \quad M_y = 835\,\mathrm{Ncm}.
\end{aligned}$$

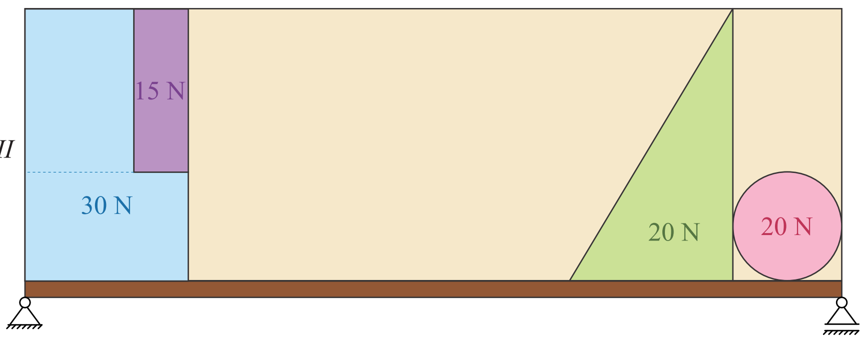
I



II



III



Pri razporeditvi zabojev II izračunamo A_z in M_y z enačbama

$$\begin{aligned}
\sum M_y^B = 0 \quad &\rightarrow \quad A_z \cdot 150 + 15 \cdot 145 + 15 \cdot 135 + 15 \cdot 130 + \\
&\qquad +20 \cdot 30 + 20 \cdot 10 = 0 \\
&\rightarrow \quad A_z = -46.33\,\mathrm{N}. \\
\sum M_y^T = 0 \quad &\rightarrow \quad M_y + A_z \cdot 75 + 15 \cdot 70 + 15 \cdot 60 + 15 \cdot 55 = 0 \\
&\rightarrow \quad M_y = 700\,\mathrm{Ncm}.
\end{aligned}$$

Pri razporeditvi zabojev III pa izračunamo A_z in M_y za enačbama

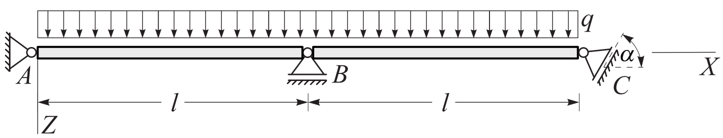
$$\begin{aligned}
\sum M_y^B = 0 \quad &\rightarrow \quad A_z \cdot 150 + 15 \cdot 140 + 15 \cdot 135 + 15 \cdot 125 + \\
&\qquad +20 \cdot 30 + 20 \cdot 10 = 0 \\
&\rightarrow \quad A_z = -45.33\,\mathrm{N}. \\
\sum M_y^T = 0 \quad &\rightarrow \quad M_y + A_z \cdot 75 + 15 \cdot 65 + 15 \cdot 60 + 15 \cdot 50 = 0 \\
&\rightarrow \quad M_y = 775\,\mathrm{Ncm}.
\end{aligned}$$

Vidimo, da je najugodnejša razporeditev predmetov z oznako II. Pri tej razporeditvi je upogibni moment na sredini nosilca najmanjši in je $M_y = 700\,\mathrm{Ncm}$.

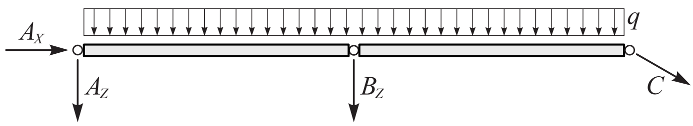
2. naloga

Določite notranje sile (osne sile, prečne sile in upogibne momente) v nosilcu preko dveh polj s poševno podporo. Notranje sile prikažite v obliki diagramov.

Podatki: $l = 4\,\mathrm{m}$, $\alpha = 60°$, $q = 12\,\mathrm{kN/m}$.



Rešitev: Odstranimo podpore in njihov vpliv nadomestimo z reakcijami, kot je prikazano na spodnji sliki. Nato iz neodvisnih ravnotežnih pogojev izračunamo neznane reakcije.



$$\sum_{AB} M_y^B = 0 \quad \rightarrow \quad A_z\, l + \frac{q\, l^2}{2} = 0,$$

$$\rightarrow \quad A_z = -\frac{q\, l}{2} = -24\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{ABC} M_y^C = 0 \quad \rightarrow \quad A_z\, 2l + B_Z\, l + 2q\, l^2 = 0,$$

$$\rightarrow \quad A_z = -q\, l = -48\,\mathrm{kN},$$

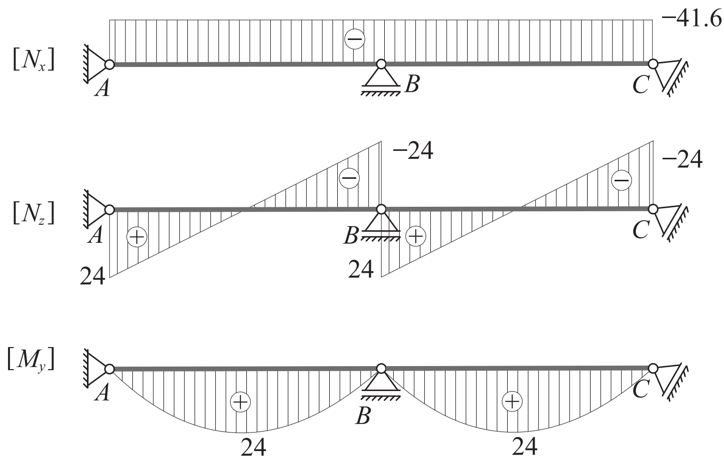
$$\sum_{BC} M_y^C = 0 \quad \rightarrow \quad -C\, \cos\alpha\, l - \frac{q\, l^2}{2} = 0,$$

$$\rightarrow \quad C = -q\, l = -48\,\mathrm{kN},$$

$$\sum_{ABC} x = 0 \quad \rightarrow \quad A_x + C\sin\alpha = 0,$$

$$\rightarrow \quad A_x = -C\sin\alpha = 41.6\,\mathrm{kN}.$$

Z upoštevanjem reakcij lahko določimo notranje sile v nosilcu. Diagrame prikazujemo na spodnji sliki.

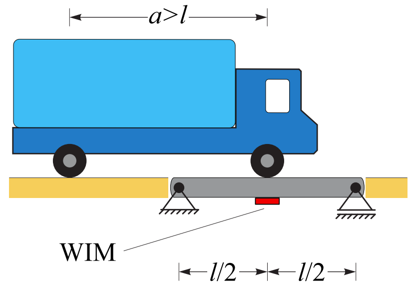


3. naloga

S sistemom za tehtanje vozil med vožnjo WIM (Weigh In Motion), tehtamo vozila (tovornjake) na kratkem jeklenem mostu dolžine l. Sistem WIM izmeri vzdolžno deformacijo ε na spodnjem robu mostnega nosilca, ko se katera od osi tovornjaka nahaja tik nad sistemom.

Pri prehodu nekega tovornjaka z medosno razdaljo a je sistem izmeril deformacijo ε_1 pri prehodu sprednje osi in ε_2 pri prehodu zadnje osi.

Določite težo tehtanega tovornjaka.



Podatki: $E = 20000\ \mathrm{kN/cm^2}$,
$W = 8000\ \mathrm{cm^3}$, $l = 200$ cm, $a = 350$ cm,
$\varepsilon_1 = 2.5 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 3.75 \cdot 10^{-5}$.

V pomoč podajamo zvezo med izmerjeno deformacijo in upogibnim momentom v prečnem prerezu, kjer je nameščen sistem WIM:

$$\frac{M}{W} = E\,\varepsilon,$$

kjer je W odpornostni moment spodnjega roba nosilca, E pa elastični modul jekla.

Rešitev: Upogibni moment na sredini nosilca zaradi prečne točkovne sile na tem mestu je enak:

$$M = \frac{F\,l}{4} = W\,E\,\varepsilon \quad \rightarrow \quad F = \frac{4\,W\,E\,\varepsilon}{l}.$$

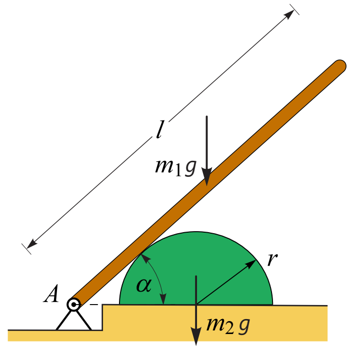
Z uporabo zadnje enačbe lahko določimo sili teže pri prehodu tovornjaka s sprednjo oziroma zadnjo osjo:

$$F_1 = \frac{4\,W\,E\,\varepsilon_1}{l} = 80\,\mathrm{kN}, \quad F_2 = \frac{4\,W\,E\,\varepsilon_2}{l} = 120\,\mathrm{kN}.$$

Teža tovornjaka je enaka $F = F_1 + F_2 = 200\,\mathrm{kN}$, masa tovornjaka pa je enaka 20 ton.

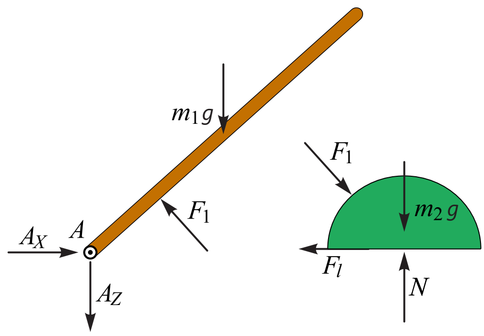
4. naloga

Lestev dolžine l in mase m_1 je nepomično vrtljivo podprta v podpori A. Lestev oklepa kot α z vodoravno osjo. Dodatno je lestev podprta s togim telesom mase m_2, polkrožnega prereza s polmerom r. Trenje med lestvijo in togim telesom zanemarimo, koeficient lepljenja med togim telesom in togo podlago je k_l. Določite koeficient lepljenja k_l, pri katerem polkrožno togo telo zdrsne.



Podatki: $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 25\,\mathrm{kg}$,
$r = 15\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 45°$, $l = 150\,\mathrm{cm}$.

Rešitev: Obe obravnavani telesi obravnavamo ločeno in vsako telo obtežimo s silami, ki nanju delujejo. Te sile so: teža lestve $m_1\,g = 100\,\mathrm{N}$, teža polkrožnega telesa $m_2\,g = 250\,\mathrm{N}$, normalna sila podlage na polkrožno telo N, sila lepenja F_l, kontaktna sila med lestvijo in polkrožnim telesom F_1 ter reakciji A_X in A_Z v podpori A.



Najprej zapišemo momentni ravnotežni pogoj za lestev, tako izračunamo kontaktno silo F_1

$$\sum M_y^A = 0 \qquad \to \qquad m_1\,g\,\frac{l}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - F_1\,r = 0 \qquad \to \qquad F_1 = 353.6\,\mathrm{N}.$$

V nadaljevanju zapišemo ravnotežna pogoja za polkrožno telo. Ko upoštevamo, da je sila lepenja v trenutku tik pred zdrsom enaka $F_l = k_l\,N$, dobimo

$$\sum Z = 0 \qquad \to \qquad m_2\,g + F_1\,\frac{\sqrt{2}}{2} - N = 0 \qquad \to \qquad N = 500\,\mathrm{N},$$

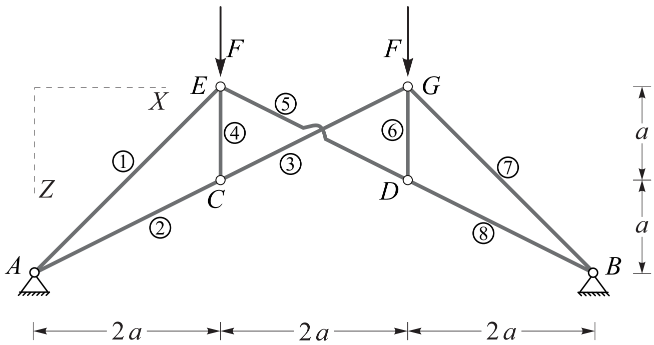
$$\sum X = 0 \qquad \to \qquad F_1\,\frac{\sqrt{2}}{2} - F_l = F_1\,\frac{\sqrt{2}}{2} - N\,k_l = 0 \qquad \to \qquad k_l = 0.5.$$

Naloge s sklepnega tekmovanja za 4. letnike

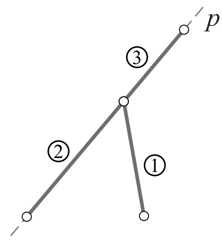
1. naloga

Paličje na sliki je obteženo z navpičnima silama velikosti F. Palici CG in DE sta mimobežni. Določite osne sile v palicah in reakcije v podporah A in B.

Podatki: $a = 2\,\mathrm{m}$, $F = 10\,\mathrm{kN}$.



Namig: Uporabi pravili 1 in 2.



- **Pravilo 1**: Če se v **neobteženem** vozlišču stikajo tri palice, od tega dve kolinearni (ležita na isti premici p), je osna sila v nekolinearni palici enaka nič, osni sili v kolinearnih palicah pa sta enaki. Na sliki desno je osna sila v palici 1 enaka nič, osni sili v palicah 2 in 3 pa sta enaki.

- **Pravilo 2**: Ko ugotovimo, da je sila v palici enaka nič, jo lahko v mislih odstranimo iz paličja in nadaljujemo račun v drugih vozliščih.

Rešitev: Z upoštevanjem prvega pravila ugotovimo, da sta sili N_4 in N_6 enaki nič ter $N_2 = N_3$ in $N_5 = N_8$. Zaradi simetrije paličja in obtežbe velja še, da je $N_1 = N_7$, $N_2 = N_8$ in $N_3 = N_5$.

Osni sili N_1 in N_5 izračunamo iz ravnotežnih pogojev za vozlišče E:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad -N_1\frac{1}{\sqrt{2}} + N_5\frac{2}{\sqrt{5}} = 0,$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad N_1\frac{1}{\sqrt{2}} + N_5\frac{1}{\sqrt{5}} + F = 0.$$

Osni sili sta: $N_1 = -9.43\,\mathrm{kN}$ in $N_5 = -7.45\,\mathrm{kN}$. Posledično lahko zapišemo še osne sile v vseh drugih palicah:

$$N_1 = N_7 = -9.43\,\mathrm{kN} \quad \text{in} \quad N_2 = N_3 = N_5 = N_8 = -7.45\,\mathrm{kN}.$$

Iz ravnotežnih pogojev v podpori A izračunamo reakciji v tej podpori:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X + N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + N_2 \frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = 13.33\,\text{kN},$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z - N_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - N_5 \frac{1}{\sqrt{5}} = 0. \quad \rightarrow \quad A_Z = -10.00\,\text{kN}.$$

Iz ravnotežja sil v podpori B ali z upoštevanjem simetrije paličja in obtežbe ugotovimo, da sta: $B_X = -A_X = -13.33\,\text{kN}$ in $B_Z = A_Z = -10.00\,\text{kN}$.

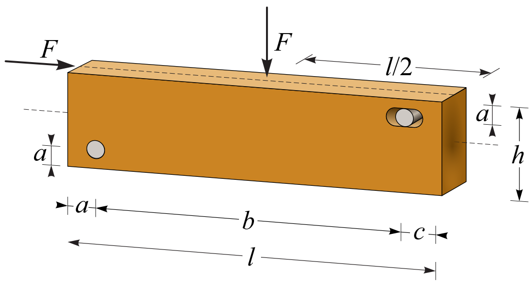
2. naloga

Lesen nosilec na sliki je z mozniki vključen v konstrukcijo. Moznik na levi strani se tesno prilega luknji, moznik na desni pa se tesno prilega odprtini le v navpični smeri, v vodoravni smeri pa ne.

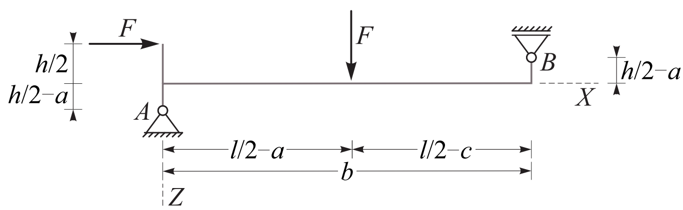
Narišite ustrezen linijski model nosilca, s katerim boste lahko izračunali notranje sile v nosilcu zaradi delovanja sil F. Predpostavite lahko, da moznika mirujeta.

Izračunajte reakcije na mestu delovanja moznikov.

Podatki: $l = 2\,\text{m}$, $h = 0.4\,\text{m}$, $a = 0.1\,\text{m}$, $b = 1.75\,\text{m}$, $c = 0.15\,\text{m}$, $F = 10\,\text{kN}$.



Rešitev: Zaradi načina vgradnje moznikov predpostavimo, da je podpora ob mozniku na levi nepomična, podpora ob mozniku na desni strani pa drsna. Tako podpori kot vodoravna sila F ne ležita v osi nosilca, zato linijski model nosilca ob predpostavki, da je tog, narišemo tako, kot kaže spodnja slika.



Reakcije v podporah A in B izračunamo iz ravnotežnih pogojev:

$$\sum X = 0 \quad \rightarrow \quad A_X + F = 0 \quad \rightarrow \quad A_X = -10.00\,\mathrm{kN},$$

$$\sum M_Y^A = 0 \quad \rightarrow \quad -B_Z\,b - F\left(\frac{l}{2} - a\right) - F(h-a) = 0 \quad \rightarrow$$

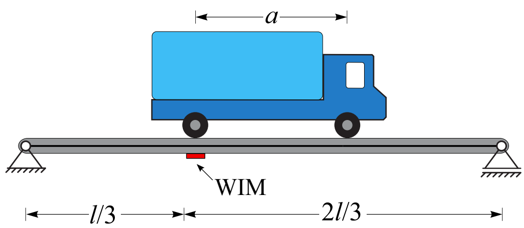
$$\rightarrow \quad B_Z = -6.86\,\mathrm{kN},$$

$$\sum Z = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z + B_Z + F = 0 \quad \rightarrow \quad A_Z = -3.14\,\mathrm{kN}.$$

3. naloga

S sistemom za tehtanje vozil med vožnjo WIM (Weigh In Motion), tehtamo vozila (tovornjake) na betonskem mostu dolžine l. Sistem WIM izmeri vzdolžno deformacijo ε na spodnjem robu mostnega nosilca, ko se katera od osi tovornjaka nahaja tik nad sistemom. Sistem prepozna tudi koliko osi ima tovornjak in kolikšne so medosne razdalje.

Pri prehodu nekega vozila je sistem prepoznal, da ima vozilo dve osi, razdalja med osema pa je a. Izmeril je tudi deformacijo ε_1 pri prehodu sprednje osi vozila in ε_2 pri prehodu zadnje osi.



Določite težo tehtanega tovornjaka.

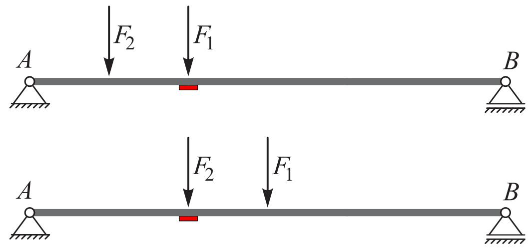
Podatki: $E = 3000\ \mathrm{kN/cm^2}$, $W = 3.8\ \mathrm{m^3}$, $l = 21$ m, $a = 3.5$ m,
$\varepsilon_1 = 7.5 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = 9.5 \cdot 10^{-6}$.

V pomoč podajamo zvezo med izmerjeno deformacijo in momentom v prečnem prerezu, kjer je nameščen sistem WIM:

$$\frac{M}{W} = E\,\varepsilon,$$

W odpornostni moment spodnjega roba nosilca, E pa elastični modul betona.

Rešitev: Najprej moramo določiti upogibni moment zaradi sil F_1 in F_2 na mestu, kjer je nameščen sistem WIM. Pri prvi legi vozila izračunamo reakcijo B_Z, iskani upogibni moment pri tej legi vozila pa je $M_1 = -B_Z\, 2\,l/3$. Pri drugi legi vozila pa izračunamo reakcijo A_Z, upogibni moment pa je enak $M_2 = -A_Z\, l/3$.



Pri prvi legi vozila na mostu izračunamo reakcijo B_Z izračunamo iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na točko A in v nadaljevanju še upogibni moment M_1:

$$\sum M_y^A = 0 \quad \to \quad -F_1\,\frac{l}{3} - F_2\,\frac{l}{6} - B_Z\,l = 0 \quad \to$$
$$\to \quad B_Z = -\left(\frac{F_1}{3} + \frac{F_2}{6}\right),$$
$$M_1 = -B_Z\,\frac{2\,l}{3} = \frac{2l}{3}\left(\frac{F_1}{3} + \frac{F_2}{6}\right) = \frac{l}{9}(2\,F_1 + F_2).$$

Pri drugi legi vozila reakcijo A_Z izračunamo iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na točko B in v nadaljevanju še upogibni moment M_2:

$$\sum M_y^B = 0 \quad \to \quad F_1\,\frac{l}{2} + F_2\,\frac{2\,l}{3} + A_Z\,l = 0 \quad \to$$
$$\to \quad A_Z = -\left(\frac{F_1}{2} + \frac{2\,F_2}{3}\right),$$
$$M_2 = -A_Z\,\frac{l}{3} = \frac{l}{3}\left(\frac{F_1}{2} + \frac{2\,F_2}{3}\right) = \frac{l}{18}(3\,F_1 + 4\,F_2).$$

Ker velja

$$\frac{M}{W} = E\,\varepsilon \quad \to \quad M_1 = W\,E\,\varepsilon_1 \quad \text{in} \quad M_2 = W\,E\,\varepsilon_2,$$

lahko zapišemo sistem dveh linearnih enačb:

$$2\,F_1 + F_2 = \frac{9\,W\,E\,\varepsilon_1}{l},$$
$$3\,F_1 + 4\,F_2 = \frac{18\,W\,E\,\varepsilon_2}{l},$$

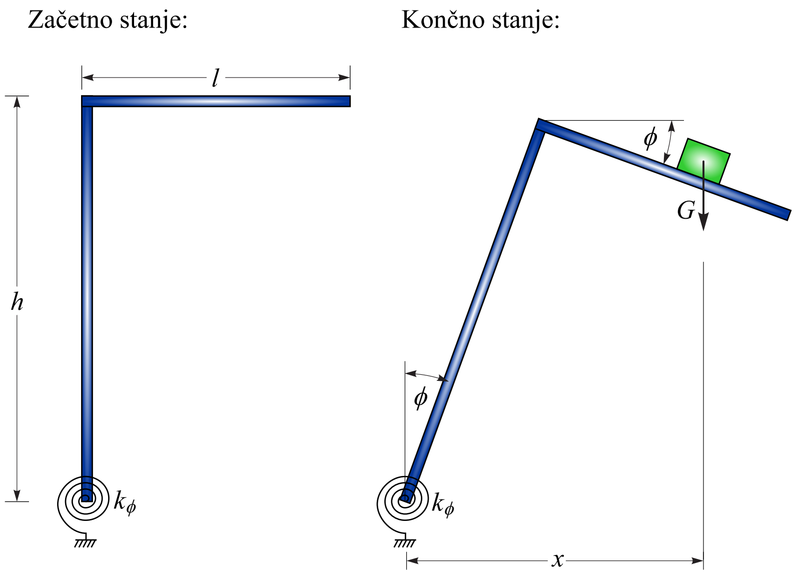
katrega rešitvi sta sili $F_1 = 107.5\,\mathrm{kN}$ in $F_2 = 151.5\,\mathrm{kN}$. Teža tovornjaka je vsota teh dveh sil in je

$$G = F_1 + F_2 = 259\,\mathrm{kN}.$$

4. naloga

Togi okvir v obliki črke L je sestavljen iz stebra dolžine $h = 3\,\mathrm{m}$ ter nosilca dolžine $l = 2\,\mathrm{m}$. S polžasto vzmetjo togosti $k_\phi = 3000\,\mathrm{Nm/rad}$ je okvir vpet v podlago. Na nosilec tega okvirja položimo klado z maso $m = 80\,\mathrm{kg}$, kakor je prikazano na spodnji sliki. Celoten okvir se zaradi obtežbe s klado zavrti za kot ϕ.

Določite, do katere največje razdalje x lahko položimo klado, da le-ta ne bo zdrsnila z nosilca. Upoštevajte, da je koeficient lepenja med klado in nosilcem $k_l = 0.30$. Račun si poenostavite s tem, da zanemarite vpliv lastne teže okvirja.



Rešitev: Iz ravnotežnih pogojev za klado, ki jo ločimo od nosilca, lahko določimo mejni kot, ko klada še ne zdrsne z nosilca:

$$\sum F_n = 0 \quad \rightarrow \quad G\,\cos\phi - N = 0 \quad \rightarrow \quad N = G\,\cos\phi,$$
$$\sum F_t = 0 \quad \rightarrow \quad G\,\sin\phi - F_l = 0 \quad \rightarrow \quad F_l = G\,\sin\phi,$$

$$F_l = k_l\,N \quad \rightarrow \quad G\,\cos\phi\,k_l - G\,\sin\phi = 0 \quad \rightarrow \quad \tan\phi = k_l \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \phi = \arctan k_l = 16.7^\circ = 0.291\,\mathrm{rad}.$$

Ko poznamo kot ϕ iz momentnega ravnotežnega pogoja glede na podporo določimo še razdaljo x. Če upoštevamo, da je teža klade $G = m\,g = 800\,\mathrm{N}$, dobimo:

$$\sum M^0 = 0 \quad \rightarrow \quad k_\phi\,\phi - G\,x = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{k_\phi\,\phi}{G} = \frac{3000 \cdot 0.291}{800} = 1.09\,\mathrm{m}.$$