PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik 5 (1977/1978)
Številka 4
Strani 195–197

Ivan Pucelj:

PRAVOKOTNI TRIKOTNIK

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/5/5-4-Pucelj.pdf

MATEMATIKA

PRAVOKOTNI TRIKOTNIK

Saj poznaš Pitagorov izrek:

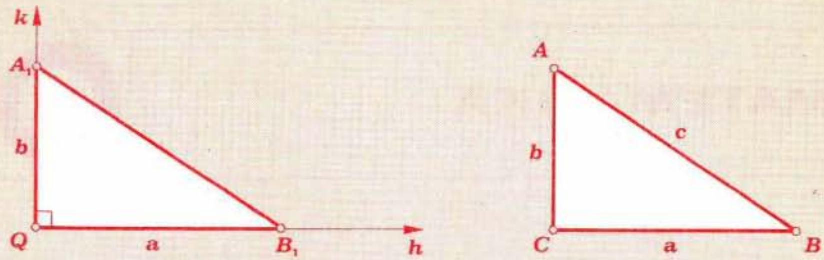
če je trikotnik pravokotni, je vsota kvadratov krajših dveh stranic enaka kvadratu najdaljše stranice.

1 *Obrat Pitagorovega izreka.* Poglejmo trikotnik s stranicami $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$. Zlahka preverimo, da velja $a^2 + b^2 = c^2$, saj je $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Nastane pa vprašanje, ali je ta trikotnik tudi pravokotni? Seveda, rečete, preskusimo to z risanjem in z merjenjem. Nerodno pri tem pa je, da izmeriti s kotomerom poljubnega kota pravzaprav natančno ne moremo. S tem vprašanjem pridemo v zadrego še bolj v primeru $a = 6887$, $b = 2184$, $c = 7225$; tudi zdaj lahko preveriš, da velja $6887^2 + 2184^2 = 7225^2$; načrtovanje tega trikotnika pa povzroča težave že zaradi velikosti stranic. No, obe zadnji nalogi sta le posebna primera tele: Ali je pravilen izrek:

(1) če je vsota kvadratov krajših dveh stranic trikotnika enaka kvadratu največje stranice, je trikotnik pravokotni.

Ta izrek drži! Poglejmo namreč premislek, ki ga potrjuje!

Recimo, da ima naš trikotnik ABC stranice a, b in c in da velja $a^2 + b^2 = c^2$. Načrtajmo poleg njega pravi kot $\sphericalangle hOk$. Prenesimo na krak h stranico $a = \overline{BC}$ in na krak k stranico $b = \overline{AC}$, začetna točka pa naj bo vedno izhodišče O, končni točki označimo A_1, B_1, torej imamo $a = \overline{OA}_1$, $b = \overline{OB}_1$. Tako smo dobili poleg trikotnika ABC še pravokotni trikotnik A_1B_1O, ki ima najdaljšo stranico A_1B_1. Zanj seveda velja Pitagorov izrek in



zato je pravilna enakost $\overline{OA}_1^2 + \overline{OB}_1^2 = \overline{A_1B}_1^2$, torej $a^2 + b^2 = \overline{A_1B}_1^2$. Toda vemo, da je $a^2 + b^2 = c^2$ in tako sklepamo, da mora veljati $\overline{A_1B_1} = c$. Vidimo, da so stranice trikotnikov ABC in OA_1B_1 paroma enake. Zdaj se še spomnimo: če se dva trikotnika ujemata v stranicah, sta si skladna. Torej sta si tudi naša dva trikotnika skladna, kar pomeni, da je potemtakem tudi ABC pravokotni trikotnik.

Izrek (1) imenujemo obratni izrek k Pitagorovemu.

V primeru A sta tedaj oba trikotnika pravokotna; zanimivi so tudi drugi trikotniki s celoštevilčnimi stranicami a, b, c, ki ustrezajo pogoju $a^2 + b^2 = c^2$. Take trojice (a,b,c) imenujemo *pitagorske trojice*.

2 *Pitagorske trojice*. Naj sta m, n celi števili, $m > n$. Naredimo trojico

(2) $a = m^2 - n^2 \qquad b = 2mn \qquad c = m^2 + n^2$

Vidno je, da velja: $(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$, kar pomeni, da je (2) pitagorska trojica. Števili m in n se imenujeta generatorja pitagorske trojice. Če števila a, b, c v (2) nimajo skupnega faktorja, imenujemo (a,b,c) primitivna pitagorska trojica. Na podlagi (2) lahko oblikujemo poljubno mnogo takih trojic; nekaj jih kaže tabela

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
7	6	13	84	85
11	6	85	132	157

Pitagorske trojice imajo premnoge zanimive lastnosti; poglejmo nekatere:

V primitivni pitagorski trojici je eno izmed števil deljivo s 3.

To vidimo tako: Pri deljenju celega števila s 3 so mogoči ostanki 0, 1, 2. Nadalje velja, če ima pri deljenju s 3 število ostanke 0, 1, 2, ima kvadrat tega števila ostanke 0, 1, 1. Zdaj pa opazujemo tabelo za pitagorske trojice glede na ostanke pri deljenju s številom tri.

Če je m deljiv s 3 ali pa če je n deljiv s 3, je b deljiv s 3. Če pa m in n nista deljiva s 3, je $m^2 - n^2 = a$ deljiv s 3. V primitivnih trojicah (a,b,c) c nikoli ni deljiv s 3.

Poskusi dokazati, da je trojica (a,b,c) primitivna natanko tedaj, ko je m tuj proti n in nista oba liha.

Ivan Pucelj