Also available at http://amc-journal.eu
ISSN 1855-3966 (printed edn.), ISSN 1855-3974 (electronic edn.)
Ars Mathematica Contemporanea Volume 4, Issue 2, Year 2011, Pages 329-349

Decomposition of skew-morphisms of cyclic groups

István Kovács, Roman Nedela

Abstract

A skew-morphism of a group H is a permutation σ of its elements fixing the identity such that for every $x, y \in H$ there exists an integer k such that $\sigma(xy)=\sigma(x)\sigma^k(y)$. It follows that group automorphisms are particular skew-morphisms. Skew-morphisms appear naturally in investigations of maps on surfaces with high degree of symmetry, namely, they are closely related to regular Cayley maps and to regular embeddings of the complete bipartite graphs. The aim of this paper is to investigate skewmorphisms of cyclic groups in the context of the associated Schur rings. We prove the following decomposition theorem about skew-morphisms of cyclic groups Z_n: if $n = n_1n_2$ such that $(n_1, n_2) = 1$, and $(n_1, \varphi(n_2)) = (\varphi(n_1), n_2) = 1$ (φ denotes Euler's function) then all skew-morphisms σ of Z_n are obtained as $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$, where σ_i are skew-morphisms of Z_{n_i}, $i = 1, 2$. As a consequence we obtain the following result: All skew-morphisms of Z_n are automorphisms of Z_n if and only if $n = 4$ or $(n, \varphi(n)) = 1$.

Math Sci Net: 05E18 (05C25)

Dekompozicija poševnih morfizmov cikličnih grup

Povzetek

Poševni morfizem grupe H je taka permutacija σ elementov grupe, ki fiksira enoto, da za vsak par $x, y \in H$ obstaja celo število k, tako da je $\sigma(xy)=\sigma(x)\sigma^k(y)$. Od tod sledi, da so avtomorfizmi grupe posebni primeri poševnih morfizmov. Poševni morfizmi se naravno pojavijo pri študiju zemljevidov na ploskvah z visoko stopnjo simetrije, natančneje povedano, poševni morfizmi so tesno povezani z regularnimi Cayleyjevimi zemljevidi in z regularnimi vložitvami polnih dvodelnih grafov. Namen tega članka je raziskati poševne morfizme cikličnih grup v kontekstu prirejenih Schurovih kolobarjev. Dokažemo naslednji dekompozicijski izrek o poševnih morfizmih cikličnih grup Z_n: če je $n = n_1n_2$, pri čemer je je $(n_1, n_2) = 1$ in $(n_1, \varphi(n_2)) = (\varphi(n_1), n_2) = 1$ (φ označuje Eulerjevo funkcijo), potem lahko vse poševne morfizme σ grupe Z_n zapišemo kot $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$, kjer so σ_i poševni morfizmi grup $Z_{n\,i}$, $i = 1, 2$. Posledica tega izreka je naslednji rezultat: Vsi poševni morfizmi grupe Z_n so avtomorfizmi Z_n če in samo če je $n = 4$ ali $(n, \varphi(n)) = 1$.