VPRAŠANJA IN ODGOVORI

Pred kratkim (Obzornik mat. fiz. **58** (2011) 5) smo zastavili nalogo o padajoči palici. Palica najprej stoji na ošiljenem koncu navpično na ravni podlagi. Palica je v labilni legi in že najmanjša motnja povzroči, da se prevrne. Pravzaprav ni mogoče, da bi palica obstala pokonci, tudi če bi stala popolnoma navpično, kar lahko razložimo s Heisenbergovim načelom nedoločenosti.

Med padanjem palice njen ošiljeni konec, ki je v stiku s tlemi, najprej miruje, nato pa začne po njih drseti. Giblje se bodisi v smeri padanja bodisi v nasprotni smeri. Smer je odvisna od koeficienta lepenja. Med padanjem se smer drsenja lahko tudi spremeni, če je koeficient trenja odvisen od hitrosti.

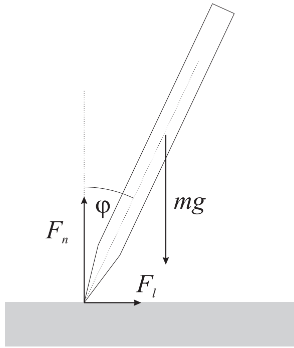
Slika 1. Sestavljena slika padajoče palice. Slika je zlepljena iz posnetkov, narejenih v enakih časovnih razmikih z enako hitrostjo zaklopa. Hitreje, ko se palica giblje, bolj je njena slika zabrisana.

Vprašanje naloge je bilo, ali palica med padanjem zdrsne naprej ali nazaj? Ali pri tem kdaj odskoči oziroma ali je konec palice ves čas padanja v stiku s tlemi?

Na palico delujeta dve zunanji sili: teža mg in sila podlage. Silo podlage razstavimo na navpično komponento z velikostjo F_n in podlagi vzporedno silo lepenja F_v. Vodoravna komponenta sile podlage je posledica lepenja, dokler konec palice miruje, in trenja, ko se konec giblje. Odklon palice iz navpične smeri označimo s kotom φ, dolžino z l, maso z m in gravitacijski pospešek z g. Energijski izrek poveže spremembo potencialne energije težišča in spremembo kinetične energije palice:

$$\frac{1}{2}mgl(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\omega^2,$$

pri čemer smo privzeli, da palica v začetku miruje v navpični legi, in smo upoštevali vztrajnostni moment vrtenja palice okoli osi v stiku s podlago $ml^2/3$.



Slika 2

Kotni pospešek α, s katerim se palica vrti okoli osi v stiku palice s podlago, je posledica navora teže:

$$M = J\alpha$$

in je enak:

$$\alpha = \frac{3g\sin\varphi}{2l}\,.$$

Dokler palica na stiku s podlago miruje, pospešek njenega težišča razdelimo na radialno in tangencialno komponento, za kateri velja:

$$a_r = \frac{\omega^2 l}{2} = \frac{3g(1-\cos\varphi)}{2}\,,$$

$$a_t = \frac{\alpha l}{2} = \frac{3g\sin\varphi}{4}\,;$$

ω je kotna hitrost, s katero se palica vrti.

Navpično komponento sile podlage izrazimo iz drugega Newtonovega zakona:

$$F_n - mg = -ma_r\cos\varphi - ma_t\sin\varphi \Rightarrow F_n = \frac{1}{4}mg(1-3\cos\varphi)^2\,.$$

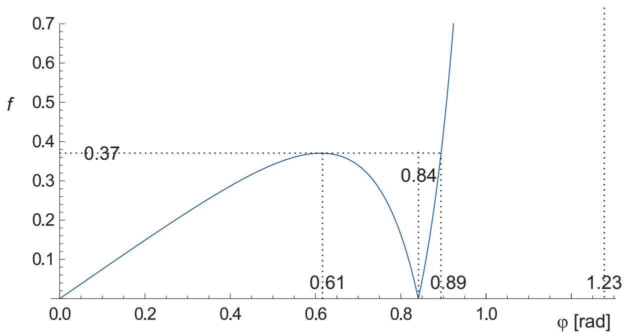
Sila lepenja pospešuje težišče v vodoravni smeri:

$$F_l = ma_v = m(a_t\cos\varphi - a_r\sin\varphi) = \frac{3mg}{4}\sin\varphi(3\cos\varphi - 2)\,.$$

Palica ne drsi, dokler je sila lepenja manjša od produkta koeficienta lepenja k_l in pravokotne komponente sile podlage: $F_l < k_l F_n$ oziroma:

$$k_l > \left|\frac{3\sin\varphi(3\cos\varphi-2)}{(1-3\cos\varphi)^2}\right| = f\,.$$

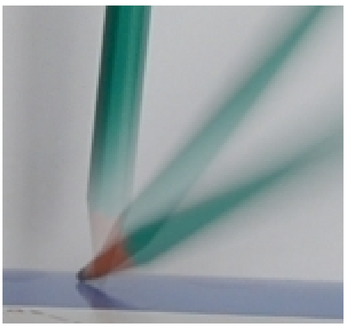
Graf razmerja z desne strani neenačbe v odvisnosti od kota φ je prikazan na sliki 3.



Slika 3. Odvisnost velikosti kvocienta vodoravne in navpične komponente sile podlage od nagiba palice. Palica začne drseti takrat, ko njen nagib preseže vrednost, pri kateri je kvocient enak koeficientu lepenja med palico in podlago. Pri kotu 0,84 rad spremeni vodoravna komponenta sile podlage smer. Če je koeficient lepenja večji od 0,37, palica zdrsne v smeri padanja pri kotu, ki je večji od 0,89 rad. Kvocient ima pol pri kotu 1,23 rad, ki pa nima pomena, saj palica že pred tem začne drseti in gibanje opišemo drugače.

Ko postane razmerje večje od koeficienta lepenja (ki je snovna lastnost podlage in palice), začne palica drseti. Če je koeficient lepenja manjši od 0,37, palica zdrsne v nasprotno smer padanja pri kotu, ki je manjši od 35°. Če je koeficient lepenja večji, palica ne drsi vsaj do kota 48°. Pri tem kotu sila lepenja spremeni svojo smer. Tedaj začne palica drseti v smeri padanja.

Pokažimo še, da palica ostane na tleh, kadar drsi v smeri padanja. Sprememba potencialne energije palice $mgl(1 - \cos\varphi)/2$ opravi delo sile trenja



Slika 4. Palica zdrsne v nasprotno smer padanja, če je koeficient lepenja med palico in podlago manjši od 0,37.

in poveča kinetično energijo palice:

$$\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)mgl = A_t + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega^2 + \frac{1}{2}m[l^2(\omega/2)^2 + v_r^2 + lv_r\omega\cos\varphi]\,.$$

Kinetično energijo palice smo zapisali kot vsoto rotacijske kinetične energije pri vrtenju okoli osi skozi težišče in translacijske kinetične energije težišča. Z v_r je označena hitrost konca palice, ki je v stiku s podlago. Delo trenja in člena, v katerih nastopa v_r, so pozitivni. Ko jih izpustimo, sledi neenačba:

$$\omega^2 < \frac{3g}{l}(1-\cos\varphi)\,.$$

Pospešeno vrtenje palice okoli težišča je posledica navora sile podlage:

$$F_n\frac{l}{2}\sin\varphi + k_tF_n\frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{1}{12}ml^2\alpha\,.$$

Gibanje težišča v navpični smeri opišemo z drugim Newtonovim zakonom:

$$mg - F_n = m\alpha\frac{l}{2}\sin\varphi + m\omega^2\frac{l}{2}\cos\varphi\,.$$

Sila trenja na gibanje v navpični smeri ne vpliva. Iz zadnjih dveh enačb izrazimo pravokotno silo podlage:

$$F_n = \frac{mg\left(1-\frac{l}{2g}\omega^2\cos\varphi\right)}{3\sin^2\varphi + 3k_t\sin\varphi\cos\varphi + 1}\,.$$

Če v števcu ω^2 zamenjamo z desno stranjo neenačbe, sledi

$$F_n > \frac{mg(1-\frac{3}{2}\cos\varphi(1-\cos\varphi))}{3\sin^2\varphi + 3k_t\sin\varphi\cos\varphi + 1}\,.$$

Imenovalec zadnjega izraza je zagotovo pozitiven, za števec pa z dopolnitvijo do popolnega kvadrata:

$$1-\frac{3}{2}\cos\varphi + \frac{3}{2}\cos^2\varphi = \frac{3}{2}\left[(\cos\varphi - 1/2)^2 + \frac{5}{12}\right]$$

tudi pokažemo, da je vedno pozitiven.

Tako smo dokazali, da je navpična sila podlage vedno pozitivna in palica ne izgubi stika s podlago. Zgornja izpeljava seveda ne velja, če upoštevamo zračni upor ter palica ni toga in ozka. Dokaz za drsenje v nasprotno smer padanja teče podobno. Poskusite ga izpeljati sami!

Aleš Mohorič