Bl. Matek

Geometrija za nižje gimnazije

Drugi del

Cena v platno vezani knjigi K 2·20

V Ljubljani.
Ig. pl. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

Matek, Geometrija II.

Geometrija

za

nižje gimnazije.

Spisal

Bl. Matek,

c. kr. gimnazijski profesor v Mariboru.

Drugi del.

97 slik.

Kot učna knjiga pripuščena po vis. ukazu c. kr. ministerstva za bogočastje in pouk z dne 18. oktobra 1896, štev. 25 273.

Cena mehko vezani knjigi 1 K 80 h, trdo vezani 2 K 20 h.

V Ljubljani.

Natisnila in založila Ig. pl. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

1896.

Vsebina.

Ploščina.

§ 1. Primerjanje likov z ozirom na njih ploščino.

Obseg. Ploščina. Ploščinko jednak = flächengleich. Osnovni resnici o ploščinsko jednakih likih.

Vsak lik mejé črte. Vsota vseh mejnih črt se imenuje obseg; ravna ploskev, katero oklepajo mejne črte, zove se ploščina. Ako imata dva lika jednako ploščino, imenujemo ju ploščinsko jednaka.

Dva lika sta ploščinsko jednaka:

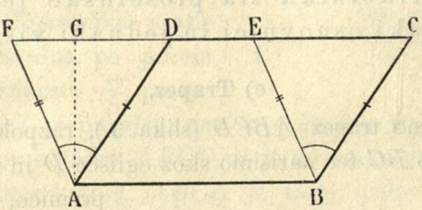
1. ako sta skladna,
2. ako ju sestavljajo ploščinsko jednaki deli.

a) Paralelogram.

Ploščinsko jednaki paralelogrami.

Načrtajmo dva paralelograma z isto osnovnico in isto višino! V sliki 1. imata paralelograma *ABCD* in *ABEF* isto osnovnico *AB* in isto višino *AG*. Paralelogram *ABCD* sestav-

Slika 1.



ljata trapez *ABED* in trikotnik *BCE*; paralelogram *ABEF* sestavlja isti trapez *ABED* in trikotnik *ADF*. Trikotnika *BCE* in *ADF* sta skladna (II.)*, zato ploščinsko jednaka. Paralelograma *ABCD* in *ABEF* sta torej sestavljena iz ploščinsko jednakih delov in zato ploščinsko jednaka. Kar velja o paralelogramih *ABCD* in *ABEF*, velja tudi o vsakem drugem paralelogramu (torej tudi o pravokotniku), katerega osnovnica je jednaka *AB* in katerega višina je jednaka *AG*.

* (II.) pomeni drugi izrek o skladnosti.

Dva paralelograma sta ploščinsko jednaka, ako imata jednaki osnovnici in jednaki višini.

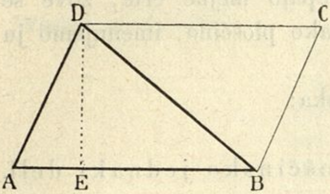
Vsak poševnokotni paralelogram je ploščinsko jednak pravokotniku z jednako osnovnico in jednako višino.

b) Trikotnik.

Trikotnik in paralelogram.

Načrtajmo trikotnik in paralelogram z isto osnovnico in isto višino! V sliki 2. imata trikotnik ABD in paralelogram $ABCD$ isto osnovnico AB in isto višino DE. Diagonala BD deli paralelogram $ABCD$ na dva skladna trikotnika (I.). Trikotnik ABD je torej polovica paralelograma $ABCD$.

Slika 2.



Vsak trikotnik je polovica paralelograma, ki ima isto osnovnico in isto višino kakor trikotnik.

Ker so paralelogrami z jednakimi osnovnicami in jednakimi višinami ploščinsko jednaki, morajo tudi trikotniki (polovice paralelogramov) z jednakimi osnovnicami in jednakimi višinami biti ploščinsko jednaki.

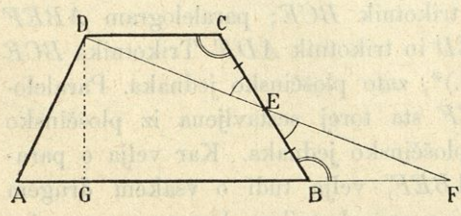
Ploščinsko jednaki trikotniki.

Dva trikotnika sta ploščinsko jednaka, ako imata jednaki osnovnici in jednaki višini.

c) Trapez.

Načrtajmo trapez $ABCD$ (slika 3.), razpolóvimo njegovo nevzporednico BC ter narišimo skoz oglišče D in razpolovišče E premico, ki seče podaljšano trapezovo vzporednico AB v točki F! Trikotnik AFD, ki smo ga stvorili na ta način, hočemo primerjati trapezu $ABCD$. Trapez $ABCD$ sestavljata trapezoid $ABED$ in trikotnik ECD; trikotnik AFD sestavlja isti trapezoid $ABED$ in trikotnik EBF. Trikotnika ECD in EBF sta skladna (I.)

Slika 3.



in zato ploščinsko jednaka. Iz skladnosti navedenih trikotnikov izvajamo, da je trapezova vzporednica CD jednaka daljici BF. Trapez $ABCD$ in trikotnik AFD sta ploščinsko jednaka, ker ju sestavljajo ploščinsko jednaki deli; oba imata isto višino DG, in trikotnikova osnovnica AF je jednaka vsoti trapezovih vzporednic AB in CD.

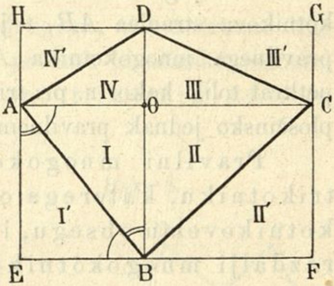
Trapez in ploščinsko jednak trikotnik.

Vsak trapez je ploščinsko jednak trikotniku, ki ima isto višino, in katerega osnovnica je jednaka vsoti trapezovih vzporednic.

d) Četverokotnik s pravokotno stoječima diagonalama.

Načrtajmo dve pravokotno stoječi daljici AC in BD (slika 4.) ter jima spójimo krajišča z daljicami! Tako stvorimo četverokotnik $ABCD$, katerega diagonali stojite pravokotno druga na drugi. Ako narišemo skoz četverokotnikova oglišča A, B, C in D vzporednice z diagonalama, dobimo pravokotnik $EFGH$, katerega stranice so jednake diagonaloma četverokotnika $ABCD$. V sliki 4. imamo štiri dvojice skladnih trikotnikov, in sicer I in I′, II in II′, III in III′, IV in IV′. Trikotnika vsake dvojice sta skladna po prvem izreku o skladnosti. V pravokotniku $EFGH$ se nahajajo vse štiri dvojice omenjenih trikotnikov, v četverokotniku $ABCD$ pa je od vsake dvojice le jeden trikotnik; četverokotnik $ABCD$ je torej polovica pravokotnika $EFGH$.

Slika 4.



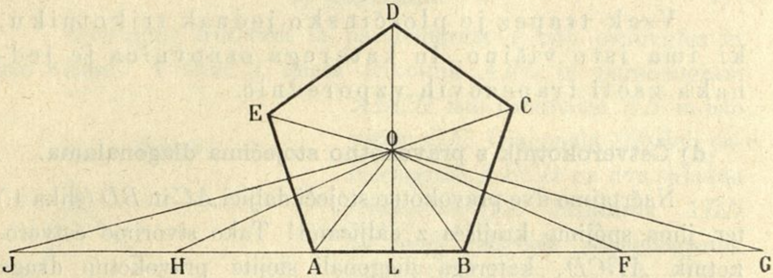
Četverokotnik s pravokotno stoječima diagonalama in pravokotnik.

Četverokotnik s pravokotno stoječima diagonalama je polovica pravokotnika, ki ima diagonali tega četverokotnika za stranice.

e) Pravilni mnogokotnik.

Ako spojimo središče O pravilnega mnogokotnika $ABCDE$ (slika 5.) z vsemi oglišči, razpade mnogokotnik na pet skladnih trikotnikov. Ploščina mnogokotnika $ABCDE$ je torej petkrat tolika kakor n. pr. ploščina trikotnika AOB. Če načrtamo na podaljšani mnogokotnikovi stranici AB ostale mnogokotnikove stranice in jim spojimo krajišča s središčem O, dobimo trikotnike JOH, HOA, AOB, BOF in FOG, ki imajo isto višino OL in jednake osnovnice $JH = HA = AB = BF = FG$ in so

Slika 5.



Pravilni mnogokotnik in trikotnik.

zato ploščinsko jednaki. Vsi ti trikotniki skupaj tvorijo trikotnik JOG, katerega osnovnica JG je petkrat tolika kakor mnogokotnikova stranica AB, t. j. osnovnica JG je jednaka obsegu pravilnega mnogokotnika $ABCDE$. Trikotnik JOG je torej petkrat tolik kakor n. pr. trikotnik AOB, ali: trikotnik JOG je ploščinsko jednak pravilnemu mnogokotniku $ABCDE$.

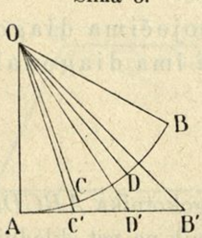
Pravilni mnogokotnik je ploščinsko jednak trikotniku, katerega osnovnica je jednaka mnogokotnikovemu obsegu, in katerega višina je jednaka razdalji mnogokotnikovega središča od stranice.

f) Krogov izsek.

Krogov izsek in trikotnik.

Ako razdelimo lok krogovega izseka OAB (slika 6.) na toliko jednakih delov, da si smemo te majhne loke misliti kakor daljice, in ako spojimo dobljena razdelišča s središčem O, razpade izsek OAB na toliko trikotnikov, na kolikor delov smo razdelili lok. Višina vsakega teh trikotnikov je jednaka polumeru OA. Če načrtamo skoz točko A tangento na izsek, na tej tangenti pa narišemo daljice, ki so jednake osnovnicam izsek sestavljajočih trikotnikov, ter spojimo dobljena razdelišča s središčem O, stvorimo trikotnike AOC', $C'OD'$ in $D'OB'$, ki so ploščinsko jednaki trikotnikom AOC, COD in DOB; kajti

Slika 6.



navedeni trikotniki imajo jednake osnovnice in jednake višine. Krogov izsek OAB je torej ploščinsko jednak trikotniku AOB', katerega osnovnica je jednaka dolžini loka AB, in katerega višina je jednaka polumeru OA.

Krogov izsek je ploščinsko jednak trikotniku, kateremu je lokova dolžina osnovnica, polumer pa višina.

g) Krog.

Ako ravnamo s krožno ploskvijo ravno tako, kakor smo poprej ravnali s krogovim izsekom, stvorimo ploščinsko jednak trikotnik, katerega osnovnica je jednaka krogovemu obodu, in katerega višina je jednaka polumeru. Krog in trikotnik.

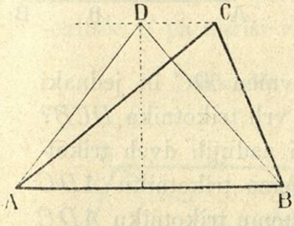
Krožnina je torej ploščinsko jednaka trikotniku, kateremu je obod osnovnica, polumer pa višina.

§ 2. Pretvarjanje premočrtnih likov.

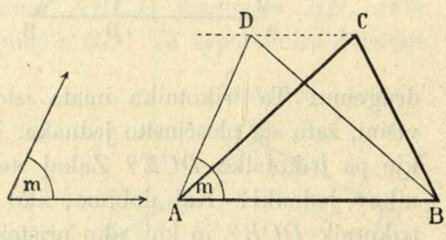
Določen lik pretvorimo v drugega, ako načrtamo lik, ki ustreza določenim pogojem in je prvemu ploščinsko jednak. Pretvoriti, pretvarjati = verwandeln.

1. Pretvori raznostranični trikotnik ABC v jednakokrakega (slika 7.)!

Slika 7.



Slika 8.



Načrtaj osnovnici AB somernico ter nariši skoz vrh C vzporednico z AB! Točka D, v kateri se sečete somernica in vzporednica, je vrh iskanega jednakokrakega trikotnika. Trikotnika ABC in ABD imata isto osnovnico in jednaki višini in sta zato ploščinsko jednaka. Zakaj ste višini jednaki?

2. Pretvori določeni trikotnik ABC v drugega, v katerem se nahaja določeni kot m (slika 8.)!

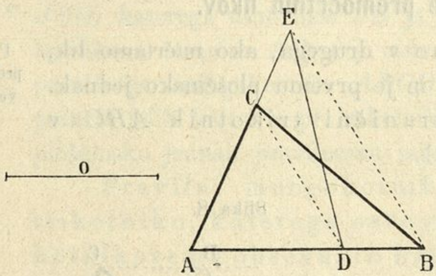
Načrtaj na stranico AB v točki A kot m, skoz vrh C pa nariši vzporednico z AB! Tako stvoriš presečišče D, ki je iskanemu trikotniku vrh. Zakaj sta trikotnika ABC in ABD ploščinsko jednaka?

Ako je kot m pravi kot, pretvoriš določeni trikotnik ABC v pravokotnega.

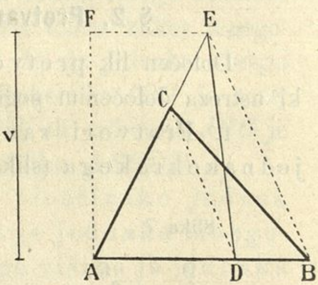
3. Pretvori določeni trikotnik ABC v drugega, v katerem se nahaja določena osnovnica o (slika 9.)!

Prenesi določeno osnovnico o na stranico AB od točke A do točke D, spoji D z vrhom C ter nariši skoz oglišče B vzporednico z DC! Tam, kjer vzporednica BE seče podaljšano stranico AC, je vrh iskanega trikotnika ADE. — Trikotnika ABC in ADE sestavljajo ploščinsko jednaki deli. Kateri deli sestavljajo trikotnik ABC? kateri pa trikotnik ADE? Katera ploskev je obema trikotnikoma skupna? V čem sta omenjena trikotnika različna? Primerjaj trikotnika DCB in DCE drugega

Slika 9.



Slika 10.



drugemu! Ta trikotnika imata isto osnovnico DC in jednaki višini, zato sta ploščinsko jednaka. Kje je vrh trikotnika DCB? kje pa trikotnika DCE? Zakaj ste višini zadnjih dveh trikotnikov jednaki? Kaj dobimo, ako prištejemo trikotniku ADC trikotnik DCB? in kaj, ako prištejemo istemu trikotniku ADC trikotnik DCE?

Ako je osnovnica o daljša ko AB, je načrtovanje navedenemu popolnoma slično; točka D leži potem na podaljšani osnovnici AB, točka E pa na stranici AC.

4. Pretvori določeni trikotnik ABC v drugega, v katerem se nahaja določena višina v (slika 10.)!

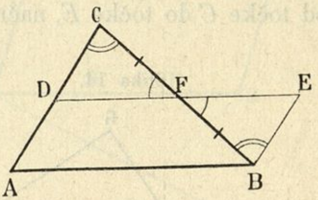
Postavi v točki A pravokotnico na stranico AB ter jo napravi jednako določeni višini v! Tako dobiš točko F. Skoz F nariši vzporednico z AB! Ta vzporednica seče podaljšano stranico AC

v točki E, ki je iskanemu trikotniku vrh. Če spojiš točki E in B ter načrtaš skoz oglišče C vzporednico z BE, najdeš v stranici AB tretje oglišče iskanega trikotnika ADE. — Trikotnika ABC in ADE sestavljajo ploščinsko jednaki deli. Kateri?

Ako je višina v manjša ko višina določenega trikotnika ABC, je načrtovanje navedenemu popolnoma slično; točka E leži potem na stranici AC in točka D na podaljšani osnovnici AB.

5. Pretvori določeni trikotnik ABC v paralelogram, ki ima s trikotnikom isto osnovnico (slika 11.)!

Slika 11.

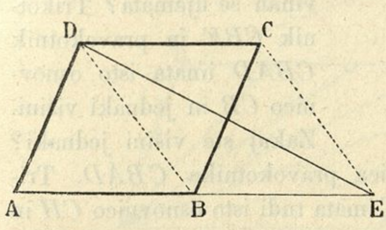


Razpolovi trikotnikovo stranico AC v točki D, nariši skoz D vzporednico z AB in skoz oglišče B vzporednico z AC! — Trikotnik ABC in paralelogram $ABED$ sta sestavljena iz ploščinsko jednakih delov. Iz katerih? Katera ploskev je obema likoma skupna? V čem se lika razlikujeta? Trikotnika BFE in FCD sta skladna (I.).

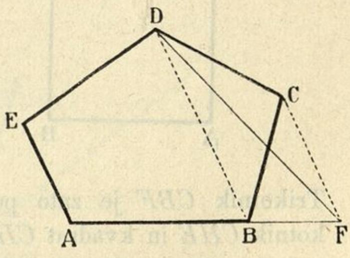
6. Pretvori določeni paralelogram $ABCD$ v trikotnik, ki ima s paralelogramom isto višino (slika 12.)!

Načrtaj v paralelogramu $ABCD$ diagonalo BD, skoz oglišče C pa nariši vzporednico z BD! Ta vzporednica določuje

Slika 12.



Slika 13.



v podaljšani paralelogramovi osnovnici AB iskanemu trikotniku AED tretje oglišče. — Paralelogram $ABCD$ in trikotnik AED sta sestavljena iz ploščinsko jednakih delov. Iz katerih?

7. Pretvori določeni mnogokotnik $ABCDE$ v drugega, ki ima jedno stranico manj (slika 13.)!

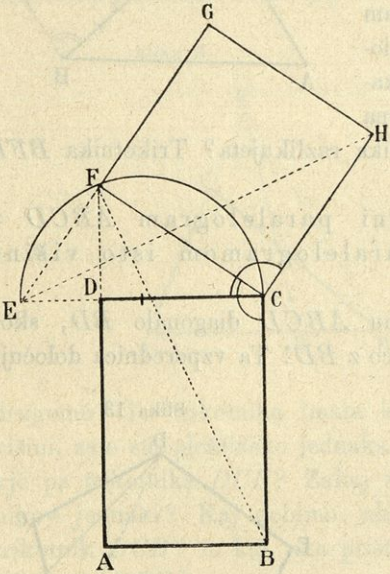
Načrtaj v določenem mnogokotniku diagonalo BD, skoz oglišče C pa nariši vzporednico z BD! Ta vzporednica določuje v podaljšani stranici AB iskanemu mnogokotniku $AFDE$ oglišče F. — Mnogokotnika $ABCDE$ in $AFDE$ sestavljajo ploščinsko jednaki deli. Kateri?

Ako ponavljamo navedeno načrtovanje, pretvorimo vsak mnogokotnik v trikotnik.

8. Pretvori določeni pravokotnik $ABCD$ v kvadrat (slika 14.)!

Prenesi večjo pravokotnikovo stranico CB na krajšo CD od točke C do točke E, načrtaj nad CE polukrog, podaljšaj AD, da preseče polukrog v točki F, ter spoji točki F in C! Daljica CF je stranica iskanega kvadrata. Ako načrtaš nad CF kvadrat $CFGH$, mora stranica FG ležati na podaljšani daljici EF; kajti kot EFC je kot v polukrogu in zato pravi kot. Če spojiš točki H in E in istotako točki B in F, stvoriš trikotnika CBF in CEH, ki sta skladna (II.) in zato ploščinsko jednaka. V katerih sestavinah se ujemata? Trikotnik CBF in pravokotnik $CBAD$ imata isto osnovnico CB in jednaki višini. Zakaj ste višini jednaki?

Slika 14.



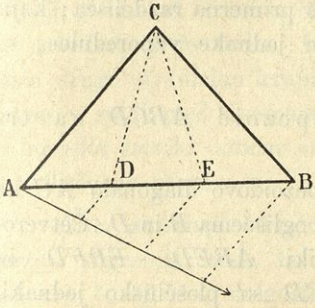
Trikotnik CBF je zato polovica pravokotnika $CBAD$. Trikotnik CHE in kvadrat $CHGF$ imata tudi isto osnovnico CH in jednaki višini; trikotnik CHE je zato polovica kvadrata $CHGF$. Če pa je po navedenem polovica določenega pravokotnika jednaka polovici iskanega kvadrata, morate tudi celoti teh dveh likov biti jednaki, t. j. pravokotnik $ABCD$ je ploščinsko jednak kvadratu $CFGH$.

§ 3. Deljenje premo- in krivočrtnih likov.

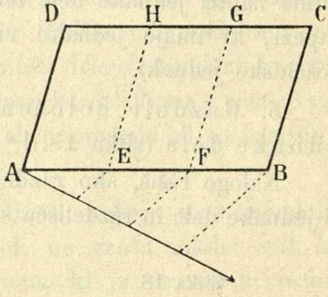
1. Razdeli določeni trikotnik ABC na tri jednake dele (slika 15.)!

Nalogo rešiš, ako razdeliš osnovnico AB na tri jednake dele in spojiš razdelišča z vrhom C. Trikotniki ADC, DEC in EBC imajo isto višino in jednake osnovnice, zato so ploščinsko jednaki.

Slika 15.



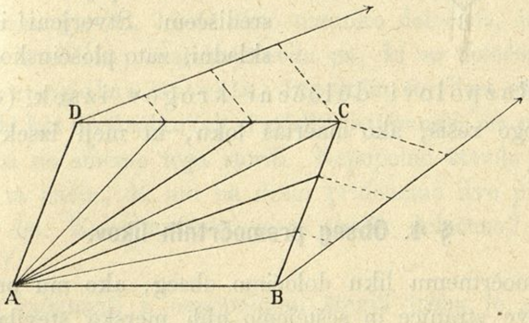
Slika 16.



2. Razdeli določeni paralelogram $ABCD$ s pomočjo vzporednic na tri jednake dele (slika 16.)!

Nalogo rešiš, ako razdeliš osnovnico AB na tri jednake dele in skoz razdelišča narišeš vzporednice z AD. Paralelogrami $AEHD$, $EFGH$ in $FBCG$ imajo jednake osnovnice in jednake višine, zato so ploščinsko jednaki.

Slika 17.



3. Razdeli določeni paralelogram $ABCD$ iz oglišča A na šest jednakih delov (slika 17.)!

Ako narišeš v paralelogramu $ABCD$ diagonalo AC, razdeliš ga na dva ploščinsko jednaka trikotnika. Da nalogo rešiš, treba ti je še vsakega izmed stvorjenih trikotnikov razdeliti na tri jednake dele.

Če bi hotel paralelogram $ABCD$ (slika 17.) razdeliti iz oglišča A na tri jednake dele, rešiš nalogo, ako razdeliš določeni paralelogram na šest jednakih delov in potem zbereš dva taka dela v jednega. Primerjaj sliko 17.!

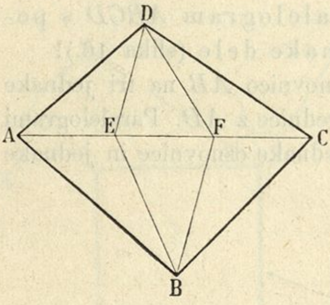
4. Razdeli določeni trapez na tri jednake dele!

Nalogo rešiš, ako razdeliš vsako izmed trapezovih vzporednic na tri jednake dele ter spojiš primerna razdelišča; kajti trapezi, ki imajo jednake višine in jednake vzporednice, so ploščinsko jednaki.

5. Razdeli določeni trapezoid $ABCD$ na tri jednake dele (slika 18.)!

Nalogo rešiš, ako razdeliš trapezoidovo diagonalo AC na tri jednake dele in razdelišča spojiš z ogliščema B in D. Četverokotniki $ABED$, $EBFD$ in $FBCD$ so ploščinsko jednaki, ker jih sestavljajo ploščinsko jednaki trikotniki.

Slika 18.



6. Razdeli določeno krožnino na pet jednakih delov!

Nalogo rešiš, ako razdeliš krogov obod na pet jednakih delov ter spojiš razdelišča s središčem. Stvorjeni izseki so skladni, zato ploščinsko jednaki.

7. Razpolovi določeni krogov izsek (odsek)!

Nalogo rešiš, ako načrtaš loku, ki meji izsek (odsek), somernico.

§ 4. Obseg premočrtnih likov.

Premočrtnemu liku določimo obseg, ako mu premerimo vse njegove stranice in seštejemo njih merska števila. Če pa je lik jednakostraničen, izračunamo mu obseg, ako pomnožimo mersko število jedne stranice s številom stranic, v znakih $O = ns$. V tem obrazci zaznamuje O obseg, s stranico in n število stranic.

Natanko in približno merjenje daljic.

Pri merjenji stranic pripeti se prav pogostokrat, da se stranice ne dadó čisto natanko izmeriti. N. pr. Ako položimo merilo na določeno stranico tako, da se jedno krajišče te stranice stika z začetno črto na merilu, utegne se drugo straničino krajišče stikati z nekim razdeliščem na merilu, ali pa leži med dvema sosednima razdeliščema. V prvem slučaji moreš stranico izmeriti popolnoma natanko; kajti treba ti je le določiti, do katerega (kolikega) razdelišča sega dotična stranica. V drugem slučaji pa moreš stranico izmeriti le približno; kajti določiti in povedati ti je treba, kateremu (kolikemu) razdelišču leži bliže drugo straničino krajišče. Če leži drugo straničino krajišče ravno v sredi med dvema sosednima razdeliščema, smeš vzeti za mersko število dotične stranice ali poprejšnje ali pa naslednje razdelišče na merilu.

Pogrešek pri približnem merjenji daljic.

Ako izmerimo stranice približno, nahaja se v merskem številu pogrešek; toda ta pogrešek ne znaša nikdar več ko polovico (0·5) tiste dolgostne jednote, ki je na merilu zaznamovana kot najmanjša. Če je n. pr. merilo razdeljeno na milimetre, določiti moreš mersko število približno na milimetre. Pogrešek, ki ga napraviš, znaša manj ali ravno pol (0·5) milimetra, t. j. najdeno mersko število je za manj ali ravno za pol milimetra premajhno ali preveliko. Če je pa merilo razdeljeno na centimetre, določiti moreš mersko število približno na centimetre; pogrešek znaša v tem slučaji manj ali ravno pol (0·5) centimetra i. t. d.

Popolno število = die vollständige Zahl. Nepopolno število = die unvollständige Zahl.

Merska števila, ki so čisto natanko določena, imenujemo popolna števila, merska števila pa, ki so določena le približno, nepopolna števila. Popolnim številom smemo pripisati ničle kot decimalke (ali si misliti pripisane); pri nepopolnih številih pa ne smemo tega storiti. Nepopolno število zaznamujemo na ta način, da mu na desni pridenemo dve piki, n. pr. 8·54 . . *dm*. Kako natanko je to število določeno? Kolik je pogrešek?

Računanje z nepopolnimi števili.

Pri računanji z nepopolnimi števili treba je gledati na to, da se opusti vse nepotrebno računanje, in da se znesek določi ali tako natanko, kakor je sploh mogoče, ali pa tako natanko, kakor je nalogi primerno. Kako se dá to doseči, bomo spoznali iz nalog tega in naslednjih odstavkov.

Naloge.

1. **Izračunaj obseg četverokotnika, katerega stranice merijo:** *a)* 7·85 . . *dm*, 6·43 . . *dm*, 5·92 . . *dm* in 8·17 . . *dm*; *b)* 18·579 *m*, 16·84 . . *m*, 15·748 . . *m* in 14·9 *m*!

a)		*b)*	
7·85 . . *dm*		18·57|9	*m*
6·43 . . »		16·84| . .	»
5·92 . . »		15·74|8 . .	»
8·17 . . »		14·9 | —	»
28·4 . . *dm*		66·1 . . *m*	

Seštevanje nepopolnih števil.

Pri nalogi *a)* so vse stranice približno določene na milimetre. Če seštevaš milimetre (to so zadnje decimalke), dobiš vsoto 17; v tej vsoti znaša pogrešek 4krat pol milimetra ali nekoliko manj. Iz tega spoznaš, da ne moreš vsote približno izračunati na milimetre, temveč le na centimetre. Ker je vsota 17 milimetrov bliže 20 ko 10 milimetrom, treba bo centimetrom (t. j. naslednjim decimalkam) 2 prišteti. To število (ki se naslednjim decimalkam prišteje) imenuje se **popravek**. Kar se tiče popravka, treba si je zapomniti, da se jemlje 1 za popravek, ako leži vsota iz zadnjih decimalk med 5 in 15; od 15 do 25 jemlje se 2 za popravek; od 25 do 35 je popravek 3 i. t. d. V konečni vsoti 28·4 . . *dm* znaša pogrešek manj ko pol centimetra; obseg je torej določen približno na centimetre.

Popravek = die Correctur.

Pri nalogi *b)* ste dve stranici določeni popolnoma natanko, ostali dve pa le približno, in sicer jedna na centimetre, druga pa na milimetre. Vsota se dá izračunati približno na decimetre; kajti na milimetre se ne dá izračunati zato, ker ne poznamo v jednem sumandu milimetrov, in na centimetre tudi ne, ker bi utegnil pogrešek znašati več ko pol centimetra. Prej ko se v tem slučaji zvrši seštevanje, treba je okrajšati prvi in tretji sumand na toliko decimalk, kolikor jih ima drugi sumand. Zadnji sumand je popolno število in sme zato tudi imeti manj ko dve decimalki; kajti tukaj smemo decimalke, ki jih manjka, nadomestiti z ničlami. Od odbitih decimalk 9 in 8 (t. j. od njih vsote) vzeti se mora popravek, da pogrešek ne postane prevelik. Potem se zvrši seštevanje kakor pri nalogi *a)*. Primerjaj obe nalogi!

2. **Izračunaj obseg** *a)* **pravilnega šesterokotnika s stranico** 7·28 . . *dm*, *b)* **pravilnega oseminštirideseterokotnika s stranico** 3·79 . . *dm*!

a)	*b)*
7·28 . . *dm* × 6	3·7|9 . . *dm* × 48
43·7 . . *dm*	1516
	303
	182 . . *dm*

Kako se pomnoži nepopolno število.

Pri nalogi *a)* je stranica določena približno na milimetre. Če pomnožiš milimetre (t. j. zadnjo decimalko) s 6, dobiš produkt 48; v tem produktu bi utegnil pogrešek znašati 6krat pol milimetra, t. j. 3 *mm*. Obsega torej ni moči določiti približno na milimetre, temveč le na centimetre. Zato vzameš od produkta, ki ga dobiš pri množenji zadnje decimalke, popravek ter ga prišteješ produktu, ki ga dobiš pri množenji naslednje decimalke.

Pri nalogi *b)* utegnil bi pogrešek znašati 48 krat pol milimetra, t. j. 24 *mm*. Ker pa je 24 *mm* že več ko 2 *cm*, zato ni moči obsega izračunati približno na centimetre, temveč le na decimetre. Množitev zvršiš v tem slučaji tako-le. Prvi delski produkt izračunaš, ako pomnožiš multiplikand s 4, ne oziraje se na decimalno točko. Pri tem delskem produktu ne vzameš nobednega popravka; pogrešek, ki se nahaja v njem, bode se konečno pri seštevanji delskih produktov popravil. Drugi delski produkt mora se pri navadnem množenji pomakniti za jedno mesto proti desni. Da ne bo treba v našem slučaji tega storiti, okrajša se multiplikand za jedno številko, t. j. odbije se mu pred množitvijo zadnja decimalka. Od odbite številke vzame se popravek kakor pri nalogi *a)*, in ta se prišteje produktu, ki ga najdeš, če pomnožiš okrajšani multiplikand z 8. Potem seštevaš oba delska produkta in vzameš pri seštevanji zadnjih številk, ki se nahajajo v delskih produktih, popravek. Sedaj je treba še določiti mestno vrednost konečnemu produktu, in to se zgodi tako-le. Prvi delski produkt si dobil, da si pomnožil multiplikand z deseticami (t. j. z 10). Pri množitvi z 10 se decimalna točka pomakne za jedno mesto proti desni. Zadnja multiplikandova številka dobi potem vrednost desetin, in to vrednost imate zadnji številki obeh delskih produktov; zadnja številka konečnega produkta ima torej vrednost celot.

3. Kolo parnega stroja preteče v vsaki minuti 528·7.. *m*; koliko *a)* v 864 minutah, *b)* v 2093 minutah?

a) 0·52⌊8⌊7.. *km* × 864	*b)* 0·5⌊2⌊8⌊7.. *km* × 2093
42296	10574
3172	475
211	16
456·8 . . *km*	1107 . . *km*

Pri nalogi *a)* utegnil bi pogrešek znašati 864 krat pol decimetra, t. j. nekoliko čez 400 *dm* ali 40 *m*. Produkt se dá torej približno določiti na stotice metra. Da ložje zaznamujemo stotice metra, pretvorimo multiplikand na *km*. Delske produkte izračunamo zaporedoma tako-le. Prvi delski produkt najdemo, ako pomnožimo multiplikand z 8, ne oziraje se na decimalno točko in tudi ne na popravek. Drugi delski produkt najdemo, ako odbijemo multiplikandu zadnjo številko, potem pomnožimo okrajšani multiplikand s 6 in temu produktu prištejemo popravek, ki ga izračunamo od odbite številke. Tretji delski produkt najdemo, ako odbijemo multiplikandu zopet jedno številko in potem računamo kakor pri drugem delskem produktu. Ker se pri izračunanji drugega in vsakega naslednjega delskega produkta multiplikand okrajša za jedno številko, ni treba delskih produktov pomikati proti desni, temveč pišejo se drugi pod drugega kakor sumandi pri seštevanji. Mestna vrednost konečnega produkta se določi navadno s pomočjo prvega delskega produkta. Pri prvem delskem produktu se množi multiplikand s stoticami (t. j. s 100). Ker se v tem slučaji decimalna točka premakne za dve mesti proti desni, ostanete v multiplikandu še dve decimalki, in toliko decimalk se nahaja v vsakem delskem produktu. Konečni produkt ima jedno decimalko manj.

Pri nalogi *b)* utegnil bi pogrešek znašati nekoliko čez 1000 *dm* ali 100 *m*. Produkt se dá določiti približno na *km*. Delske produkte izračunaš zaporedoma ravno tako kakor pri nalogi *a)*. Za multiplikatorjevo ničlo moraš odbiti v multiplikandu tudi številko; kajti ničla dá tudi svoj delski produkt, samo da se ta produkt ne zapiše, ker je $= 0$. Mestno vrednost določiš končnemu produktu kakor pri nalogi *a)*.

Navadna in okrajšana množitev.

Množitev, ki se zvršuje na ta način, kakor se je zgodilo pri navedenih nalogah, imenuje se okrajšana množitev. Glavni razloček med navadno in okrajšano množitvijo je ta, da se pri navadni množitvi celi multiplikand množi z vsako multiplikatorjevo številko in se delski produkti zaporedoma pomaknejo vsak za jedno mesto proti desni, pri okrajšani množitvi pa se pri izračunanji drugega in vsakega naslednjega delskega produkta multiplikand okrajša za jedno številko in se delski produkti zapišejo drugi pod drugega tako, da stojé njih zadnje številke druga pod drugo. Na okrajšani način se mora množiti, kadar je multiplikand nepopolno število.

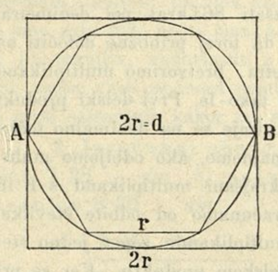
§ 5. Merjenje krogovega oboda z dolgostno mero.

Krog, včrtani pravilni šesterokotnik in očrtani kvadrat.

Krog je po svoji velikosti popolnoma določen, če poznamo njegov premer. Iz premera se mora torej dati dolgost krožnice izračunati. Kako se to zvrši, spoznali bomo iz naslednjega.

Načrtajmo krog z določenim premerom $AB = 2r = d$ ter včrtajmo mu pravilni šesterokotnik in očrtajmo kvadrat (slika 19.)! Obseg pravilnega šesterokotnika leži znotraj kroga in je manjši od krožnice; kvadratov obseg pa leži zunaj kroga in je večji od krožnice. Ker je šesterokotnikov obseg jednak trikratnemu premeru in kvadratov obseg jednak štirikratnemu premeru, mora torej krožnica biti **večja ko trikratni premer, pa manjša ko štirikratni premer.**

Slika 19.



Krog je pravilni mnogokotnik.

Da bomo natančneje spoznali, kolikokrat je krožnica večja od premera, včrtajmo in očrtajmo določenemu krogu najprej pravilni šesterokotnik, potem pravilni dvanajsterokotnik, potem pravilni štiriindvajseterokotnik i. t. d. Če na ta način podvajamo število stranic včrtanega in očrtanega mnogokotnika, uvidimo takoj iz slike, da se obsegi včrtanih mnogokotnikov vedno večajo in bližajo krožnici, obsegi očrtanih mnogokotnikov pa se vedno manjšajo in tudi bližajo krožnici.

Ko postane število stranic včrtanega (oziroma očrtanega) mnogokotnika jako veliko, so posamezne stranice tako majhne, da jih ni več ločiti od pripadajočih lokov. Krog smemo torej smatrati za pravilni mnogokotnik z neskončno majhnimi, pa brezštevilno mnogimi stranicami. — Kar smo uvideli iz slike, to potrdi račun. Ako izračunamo zaporedoma obsege vseh navedenih mnogokotnikov, začenši pri pravilnem šesterokotniku, ter primerjamo zneske med seboj, prepričamo se, da se obsegi včrtanih mnogokotnikov večajo, obsegi očrtanih pa manjšajo. Ko postane število mnogokotnikovih stranic jako veliko, ujemata se obsega včrtanega in očrtanega mnogokotnika do šeste decimalke, in iz tega se dá določiti, da je krožnica približno 3·14159..krat večja od premera. Število 3·14159.. imenujemo Ludolfovo število ter ga zaznamujemo z grško črko π. Ludolfovo število se ne dá popolnoma natanko določiti, temveč le približno; ono pomeni razmerje med krogovim obodom in premerom, t.j. kolikokrat je obod večji od premera.

Ludolfovo število = die Ludolphische Zahl.

Ako načrtamo različne kroge ter izmerimo njih premere in s pomočjo niti tudi njih obode, najdemo v vsakem slučaji, da je obod približno $3\frac{1}{7}$krat večji od premera, kar se ujema s poprej navedenim.

Krožnico ali krogov obod izračunaš torej, ako pomnožiš premer z Ludolfovim številom, v znakih

Kako se izračuna krogov obod.

$$O = d\pi, \text{ ali } O = 2r\pi.$$

Iz navedenega smemo dalje sklepati, da je premer toliki del krogovega oboda, kakor kaže Ludolfovo število, in polumer je polovica tega kvocijenta.

Krogov premer izračunaš, ako deliš obod z Ludolfovim številom, v znakih

Kako se izračunata premer in polumer iz krogovega oboda.

$$2r = O : \pi.$$

Krogov polumer izračunaš, ako deliš obod z dvojnim Ludolfovim številom, v znakih

$$r = O : 2\pi.$$

Naloge.

1. Kolika je krožnica, če znaša premer *a)* 23·5 *cm*, *b)* 1·478.. *m*?

a) $2r = 23{\cdot}5\ cm$
$O = ?$
$O = 73{\cdot}827..\ cm$
$= 73{\cdot}8..\ cm$

3·141|5|9.. × 23·5
628318
94248
15708
73·827..

ali

3·1|4|1|59.. × 23·5
6283
942
157
73·8..

b) $2r = 1{\cdot}478..\ m$
$O = ?$
$O = 4{\cdot}64..\ m$

|1·|4|7|8.. × 3·14159..
4434
148
59
1
1
4·64..

Množenje nepopolnih števil in sicer tako natanko, kakor je mogoče, in pa tako, kakor je nalogi primerno.

Pri nalogi *a)* je jeden izmed faktorjev nepopolno število. Nepopolno število moraš vzeti za multiplikand; kajti če bi obratno napravil, bil bi pogrešek v vseh številkah zadnjega delskega produkta. Ko si določil multiplikand, zvršiš množitev na okrajšani način kakor pri nalogah poprejšnjega odstavka. Konečni produkt utegneš ali tako natanko izračunati kakor mogoče, ali pa tako, kakor je nalogi primerno. V prvem slučaji se ne sme multiplikand pri izračunanji prvega delskega produkta okrajšati.* V drugem slučaji pa se multiplikand takoj okrajša na toliko decimalk, kolikor se jih potrebuje. Pri naši nalogi n. pr. izračunamo krožnico dovolj natanko, če ji določimo približno milimetre. V konečnem produktu bo torej treba jedne decimalke, v delskih produktih pa dveh. Če bi pa pomnožili neokrajšani multiplikand s prvo multiplikatorjevo številko, dobili bi v prvem delskem produktu štiri decimalke, torej dve več, ko jih je treba. Multiplikand smeš zato okrajšati za dve številki. Od odbitih številk moraš vzeti popravek pri izračunanji prvega delskega produkta.

Pri nalogi *b)* sta oba faktorja nepopolni števili. V takih slučajih se določi produkt navadno tako natanko, kakor je mogoče. Za multiplikand se izbere tisti faktor, ki ima manj veljavnih številk; kajti če bi napravil obratno, nahajal bi se pogrešek v vseh številkah zadnjega delskega produkta. Množitev zvršiš na okrajšani način. Ko odbiješ multiplikandu zadnjo številko, vzameš od nje popravek in ga zapišeš kakor delski produkt.

V računih *a)* in *b)* izpustili smo ime iz različnih in po sebi umevnih razlogov. Zato smo na levi strani vsakega računa napravili pregleden načrt, v katerem smo prav kratko zaznamovali pogojni in vprašalni stavek in znesek računa.

---

* Produkt določiš tako natanko, kakor je mogoče, če ga rabiš še za kak drug račun (posebno za množenje), ali če se ne dá nalogi primerno določiti.

2. Krožnica meri *a)* 52·68 *dm*, *b)* 17·845.. *m*; kolik je premer prvega kroga, kolik polumer drugega?

a) $O = 52{\cdot}68\ dm$

$2r = ?$

$2r = 16{\cdot}7686..\ dm$

$= 16{\cdot}77..\ dm$

$52{\cdot}68_{00} : 3{\cdot}1|4|1|5|9.. = 16{\cdot}7686..$
212641
24146
2155
270
19
0

ali $52{\cdot}68 : 3{\cdot}1|4|1|59.. = 16{\cdot}77..$
2126
241
21
(—1)

b) $O = 17{\cdot}845..\ m$

$r = ?$

$r = 2{\cdot}840..\ m$

$17{\cdot}845.. : 6{\cdot}2|8|3|2.. = 2{\cdot}840..$
5279
253
2

Deljenje nepopolnih števil, in sicer tako natanko, kakor je mogoče, in pa tako, kakor je nalogi primerno.

Pri nalogi *a)* je divizor nepopolno število. Kvocijent se določi v takih slučajih ali tako natanko kakor mogoče,* ali pa tako, kakor je nalogi primerno. Na prvi način izračunaš kvocijent tako-le. Da se ni treba med računanjem ozirati na decimalno točko, določiš najprej mestno vrednost prve kvocijentove številke. V ta namen poiščeš oni dividendov del, v katerem se nahajajo divizorjeve celote, in mestna vrednost tega dividendovega dela je tudi mestna vrednost prve kvocijentove številke. Pri naši nalogi se 3 nahaja v 5; ker ima 5 mestno vrednost desetic, pomeni torej prva kvocijentova številka desetice. Potem prirediš divizorju prvi delski dividend; pri navedeni nalogi je treba v ta namen dividendu pripisati dve ničli (ali si misliti pripisani); včasih se mora dividendu kaka številka odbiti in od odbite številke vzeti takoj popravek. Ko si iz prvega delskega dividenda določil prvo kvocijentovo številko, pomnožiš divizor s to številko ter odšteješ produkt od prvega delskega dividenda. Ostanek, ki ga najdeš, je drugi delski dividend. Da je moči delitev nadaljevati, okrajšaš divizor za jedno številko. Ko si iz drugega delskega dividenda določil drugo kvocijentovo številko, pomnožiš okrajšani divizor s to številko, prišteješ produktu popravek iz odbite številke ter odšteješ ta popravljeni produkt od drugega delskega dividenda. Ostanek, ki ga najdeš, je tretji delski dividend. Naslednje kvocijentove številke izračunaš ravno tako, kakor si izračunal drugo. Delitev se konča, ko se divizor ne dá več okrajšati. Pri zadnji kvocijentovi številki treba je gledati, da jo določiš približno; to pa spoznaš iz zadnjega ostanka. Ako je ta ostanek manjši ko polovica zadnjega divizorja, določil si zadnjo kvocijentovo številko približno.

Ako hočeš pri nalogi *a)* kvocijent izračunati tako natanko, kakor je nalogi primerno, treba ti je ravnati tako-le. Krogov premer je določen dovolj natanko, če poznamo približno milimetre. Ker pomeni prva kvocijentova številka desetice, imel bo kvocijent štiri veljavne številke, in najmanj toliko jih

* Kvocijent določiš tako natanko, kakor je mogoče, če ga rabiš še za kak drug račun (posebno za množenje), ali če se ne dá nalogi primerno določiti.

mora imeti divizor. Pri naši nalogi pa ima divizor šest veljavnih števílk, torej dve več, ko jih je treba. Divizor smeš zato okrajšati za dve številki. Temu okrajšanemu divizorju je treba potem prirediti prvi delski dividend. Kvocijentove številke izračunaš zaporedoma ravno tako kakor poprej.

Pri nalogi *b)* sta dividend in divizor nepopolni števili. Kvocijent se v takih slučajih določi navadno tako natanko, kakor je mogoče. Prva kvocijentova številka ima mestno vrednost jednic; kajti 6 se nahaja v 17, in 17 ima mestno vrednost jednic. Potem prirediš dividend in divizor drugega drugemu tako,* da imata ali oba jednako veliko številk, ali pa divizor jedno manj ko dividend. V divizorju je treba jedne številke manj ko v dividendu, kadar se prva divizorjeva številka ne nahaja v prvi dividendovi kakor n. pr. pri naši nalogi. Ko si dividend in divizor priredil drugega drugemu, izračunaš kvocijent ravno tako kakor pri poprejšnji nalogi.

Navadno in okrajšano deljenje.

Vsako deljenje, ki se zvršuje tako kakor pri navedenih nalogah *a)* in *b)*, imenuje se okrajšano deljenje. Glavni razloček med navadnim in okrajšanim deljenjem je ta, da ostane divizor pri navadnem deljenji neizpremenjen, in da se ostankom pripisujejo zaporedoma dividendove številke ali ničle; pri okrajšanem deljenji pa se divizor pri izračunanji vsake kvocijentove številke okrajša za jedno številko, in nastali ostanki so zaporedoma drugi za drugim delski dividendi.

§ 6. Merjenje loka z dolgostno mero.

Loke merimo z ločno in dolgostno mero. Kako se dá iz merskega števila jedne mere izračunati mersko število druge mere?

Dolgost ločnih jednot.

Ločna stopinja je 360 ti del krogovega oboda; dolgost ločne stopinje je torej:

$$1 \text{ ločna stopinja} = \frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}.$$

Ločna minuta je 60 ti del ločne stopinje, in ločna sekunda 60 ti del ločne minute, v znakih

$$1 \text{ ločna minuta} = \frac{r\pi}{10800},$$

$$1 \text{ ločna sekunda} = \frac{r\pi}{648000}.$$

Ako postane mersko število loka v ločni meri 2-, 3-, 4 krat večje, mora tudi mersko število loka v dolgostni meri postati 2-, 3-, 4 krat večje, in obratno, t. j.:

Razmerje med dvema lokoma v dolgostni in ločni meri.

R a z m e r j e m e d d v e m a l o k o m a j e d n a k i h p o l u m e r o v i m a v d o l g o s t n i i n l o č n i m e r i i s t o v r e d n o s t, v znakih

$$l : l_1 = \alpha : \alpha_1.$$

---

* Dividend in divizor se tukaj ne smeta ob jednem okrajšati, temveč okrajšati se mora le tisto število, ki ima preveč številk.

V tem obrazci pomeni l dolgost jednega loka in l_1 dolgost drugega loka; α in α_1 ste merski števili istih dveh lokov v ločni meri.

Ker je lok mera pripadajočega obsrediščnega kota, smemo zgoraj navedeno sorazmerje izraziti tudi tako-le:

Dva loka jednakih polumerov sta si kakor pripadajoča obsrediščna kota.

Ako primerjamo dolgost loka polukrogovi dolgosti, dobimo sorazmerje

$$l : r\pi = \alpha : 180,$$

t. j.

Razmerje med lokom in polukrogom ima v dolgostni in ločni meri isto vrednost, ali: lok in polukrog sta si kakor pripadajoča obsrediščna kota. Razmerje med lokom in polukrogom v dolgostni in ločni meri.

S pomočjo tega sorazmerja izračunaš:

1. dolgost loka, če poznaš polumer in mersko število loka v ločni meri (ali pripadajoči obsrediščni kot);
2. krogov polumer, če poznaš lok v dolgostni in ločni meri;
3. mersko število loka v ločni meri (ali pripadajoči obsrediščni kot), če poznaš lokovo in polukrogovo dolgost.

Števili α in 180 v zadnjem obrazci pomenite ločne stopinje. Če se v α nahajajo stopinje, minute in sekunde, treba je α in 180 tako pretvoriti, da imate obe števili isto ime.

Naloge.

1. Polumer kroga meri 2160 *cm*; kako dolga je ločna minuta?

$r = 2160\ cm$
$1' = \ ?$
$1' = 0{\cdot}62832..\ cm$

$$1 \text{ ločna minuta} = \frac{r\pi}{10800} = \frac{2160\pi}{10800} = \frac{21{\cdot}6\,\pi}{108}$$

```
3·141|5|9.. × 21·6        67·858.. : 1|0|8 = 0·62832..
628318                     305
 31416                      898
 18849                       34
67·858..                      2
                              0
```

Da odpadejo ničle v imenovalci nakazanega zneska, treba je števec in imenovalec deliti (ali okrajšati) s 100. Množitev zvršiš na okrajšani način tako natanko, kakor je mogoče. Pri delitvi je divizor popolno število. Če hočeš kvocijent določiti tako natanko, kakor je mogoče, začneš deliti na okrajšani način še le potem, ko si že vzel vse dividendove številke v poštev.

2. Kako dolg je lok $22^0\,30'$, če meri njegov polumer $8 \cdot 5\,cm$?

$$\begin{aligned} r &= 8\cdot 5\ cm \\ \alpha &= 22^0\,30' = 1350' \\ l &= \ ? \\ \hline l &= 3\cdot 3..\ cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l : r\pi &= \alpha : 180 \\ l : 8\cdot 5\pi &= 135\not{0} : 1080\not{0}\not{0} \\ l : 8\cdot 5\pi &= 1 : 8 \\ l &= \frac{8\cdot 5\pi}{8} = 26\cdot 7.. : 8 = 3\cdot 3.. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 3\cdot 1\lfloor 4 | 159.. \times 8\cdot 5 \\ \hline 2513 \\ \ \ 157 \\ \hline 26\cdot 7.. \end{array}$$

3. Lok $36^0\,25'\,40''$ znaša $12 \cdot 6..\,cm$; kolik je njegov polumer?

$$\begin{aligned} l &= 12\cdot 6..\ cm \\ \alpha &= 36^0\,25'\,40'' = 131140'' \\ r &= \ ? \\ \hline r &= 20..\ cm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l : r\pi &= \alpha : 180 \\ 12\cdot 6.. : r\pi &= 13114\not{0} : 64800\not{0} \\ 12\cdot 6.. : r\pi &= 6557 : 32400 \\ r\pi &= \frac{12\cdot 6.. \times 32400}{6557} \\ r\pi &= 12\cdot 6.. \times 4\cdot 941.. \\ r\pi &= 62.. \\ r &= 62.. : 3\cdot 1|4159.. = 20.. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 32400 : 6\lfloor 5\lfloor 5\lfloor 7 = 4\cdot 941.. \\ \ \ 6172 \\ \ \ \ \ 271 \\ \ \ \ \ \ \ 9 \\ \ \ \ \ \ \ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \lfloor 1\lfloor 2\cdot\lfloor 6.. \times 4\cdot 941.. \\ \hline 504 \\ 113 \\ \ \ \ 5 \\ \hline 62.. \end{array}$$

V nakazanem znesku za $r\pi$ je treba najprej delitev zvršiti. Produkt se deli, ako deliš jeden faktor. V našem slučaji se deli popolno število. Ker postane dobljeni kvocijent v daljnem računu faktor, treba ga je tako natanko določiti, da ima jedno veljavno števiko več ko prvi faktor (t. j. $12 \cdot 6..$).

4. Kolik je obsrediščni kot, če meri pripadajoči lok $12 \cdot 8\,cm$ in polumer $6 \cdot 5\,cm$?

$$\begin{aligned} l &= 12\cdot 8\ cm \\ r &= 6\cdot 5\ cm \\ \alpha &= \ ? \\ \hline \alpha &= 112\cdot 83..^0 \\ &= 112^0\,50' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l : r\pi &= \alpha : 180 \\ 12\cdot 8 : 6\cdot 5\pi &= \alpha : 180 \\ 12\cdot 8 : 1\cdot 3\pi &= \alpha : 36 \\ \alpha &= \frac{12\cdot 8 \times 36}{1\cdot 3\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 12\cdot 8 \times 36 \\ \hline 384 \\ \ \ 768 \\ \hline 460\cdot 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha = 460\cdot 8_0 : 4\cdot\lfloor 0\lfloor 8\lfloor 4\lfloor 1.. = 112\cdot 83.. \\ \ \ \ \ \ \ 5239 \\ \ \ \ \ \ \ 1155 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 338 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 12 \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3\cdot 1415\lfloor 9.. \times 1\cdot 3 \\ \hline 314159 \\ \ \ 94248 \\ \hline 4\cdot 0841.. \end{array}$$

§ 7. Kako določujemo likom ploščino.

Ako hočemo določiti liku velikost (t. j. njega ploščino), izberemo neki znani kvadrat za jednoto ploskovne mere ter preiskujemo, kolikokrat se nahaja ta znani kvadrat v dotičnem liku. Število, ki to pove, zove se likovo mersko število.

Jednota ploskovne mere = die Flächeneinheit. Mersko število = die Maßzahl.

Jednote ploskovne mere so nam taki kvadrati, katerih stranice so jednake dolgostnim jednotam (n. pr. 1 *m*, ali 1 *dm*, 1 *cm*, 1 *mm*); pravimo jim kvadratni meter (m^2), kvadratni decimeter (dm^2), kvadratni centimeter (cm^2) in kvadratni milimeter (mm^2).

Kakšne so jednote ploskovne mere.

Ploskve torej merimo s kvadrati, in sicer tako, da določimo, koliko kvadratnih metrov, kvadratnih decimetrov i. t. d. se nahaja v dotični ploskvi. Ako bi hoteli n. pr. mizino ploskev izmeriti, položili bi kvadratni decimeter ná-njo tolikokrat, kolikorkrat je mogoče; če bi ostanek bil manjši od kvadratnega decimetra, položili bi nanj kvadratni centimeter, kolikorkrat bi bilo mogoče; poslednji ostanek bi izmerili ravno tako s kvadratnim milimetrom. Na ta način bi zvedeli, koliko kvadratnih decimetrov, kvadratnih centimetrov in kvadratnih milimetrov meri mizina ploskev. Toda tako neposredno merjenje ploskev bi bilo premudno in dostikrat celo nemogoče; zato določujemo likom ploščino posredno, in sicer tako, da jo izračunamo iz merskih števil daljic, od katerih je odvisna.

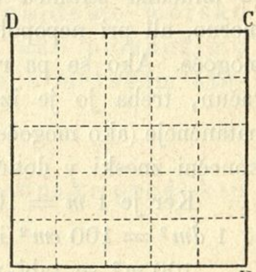
Kako določamo likom ploščino neposredno, kako posredno.

Kakor se dadô daljice ali popolnoma natanko ali le približno izmeriti, ravno tako tudi ploskve.

a) **Kvadrat.** Načrtajmo kvadrat $ABCD$, katerega stranica meri 5 *dm* (slika 20.)! Če razdelimo višino AD tega kvadrata na pet jednakih delov in narišemo skoz razdelišča vzporednice z osnovnico AB, stvorimo pet jednakih prog, ki so po 1 *dm* široke in po 5 *dm* dolge. Ako potem razdelimo kvadratovo osnovnico AB na pet jednakih delov in načrtamo skoz razdelišča vzporednice z višino AD, razrežemo vsako progo na pet kvadratov, ki so posamič jednaki ploskovni jednoti dm^2. V kvadratu $ABCD$ se nahaja torej 5krat

Kvadratova ploščina.

Slika 20.



po 5 $dm^2 = 25\ dm^2$. — Če bi merila stranica našega kvadrata s dolgostnih jednot, dobili bi s jednakih prog in iz vsake proge s kvadratov, ki bi bili posamič jednaki ploskovni jednoti. Kvadrat $ABCD$ bi torej meril $s \,.\, s = s^2$ ploskovnih jednot.

Iz navedenega se vidi, da najdemo mersko število kvadratove ploščine, ako pomnožimo mersko število njegove stranice samo s seboj.

Število množiti samo s seboj se pravi, število povišati na drugo potenco (ali na kvadrat) ali kvadrovati. Poprejšnje pravilo izrazimo zato krajše tako-le:

Kvadratova ploščina je jednaka drugi potenci njegove stranice, v znakih

$$p = s^2.$$

V tem obrazci pomeni p mersko število ploščine in s mersko število stranice.

Obratno najdemo mersko število kvadratove stranice, ako poiščemo merskemu številu njegove ploščine kvadratni (ali drugi) koren, v znakih

$$s = \sqrt{p}.$$

Kako se poviša določeno število na drugo potenco ali na kvadrat, in kako se poišče določenemu številu kvadratni koren, to uči aritmetika. Če je mersko število kvadratove stranice nepopolno število, zvrši se kvadrovanje vsigdar s pomočjo okrajšane množitve.

Včasih ni moči iz merskega števila kvadratove ploščine določiti popolnoma natanko njegove stranice. V takih slučajih se izračuna stranica ali tako natanko, kakor je nalogi primerno, ali pri nepopolnih številih tudi tako natanko, kakor je mogoče. Ako se pa rabi izračunana stranica še za kak drug račun, treba jo je izračunati za jedno ali za dve decimalki natančneje (ako mogoče), ko je nalogi primerno, da ne postanejo konečni zneski v dotičnih računih prenepopolni.

Kako so odvisne ploskovne jednote druga od druge.

Ker je 1 $m = 10\ dm$, je torej 1 $m^2 = 100\ dm^2$. Istotako je 1 $dm^2 = 100\ cm^2$ in 1 $cm^2 = 100\ mm^2$.

100 m^2 se rabi pri merjenji polj kot ploskovna jednota in se imenuje **ar** *(a)*. Ar je kvadrat, katerega stranica meri 10 *m*.

100 *a* se imenuje hektar *(ha)*. Hektar je kvadrat, katerega stranica meri 100 *m*.

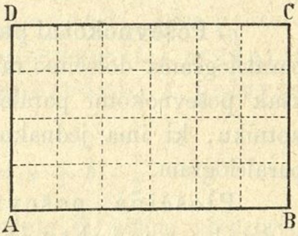
Kvadrat, katerega stranica meri 1 $km = 1000\ m$, imenuje se kvadratni kilometer (km^2).

Kvadrat, katerega stranica meri 1 $\mu m = 10\ km$, imenuje se kvadratni miriameter (μm^2).

$$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10.000\ cm^2 = 1,000.000\ mm^2.$$
$$1\ a = 100\ m^2.$$
$$1\ ha = 100\ a = 10.000\ m^2.$$
$$1\ km^2 = 100\ ha = 10.000\ a = 1,000.000\ m^2.$$
$$1\ \mu m^2 = 100\ km^2 = 10.000\ ha = 1,000.000\ a.$$

b) **Pravokotnik.** Načrtajmo pravokotnik *ABCD*, katerega osnovnica meri 6 *dm*, višina pa 4 *dm* (slika 21.)! Ako razdelimo višino *AD* na štiri jednake dele in narišemo skoz razdelišča vzporednice z osnovnico *AB*, razpade pravokotnik na štiri proge, ki so po 1 *dm* široke in po 6 *dm* dolge. Če razdelimo potem osnovnico *AB* na šest jednakih delov in načrtamo skoz razdelišča vzporednice z višino *AD*, razrežemo vsako progo na šest kvadratov, ki so posamič jednaki ploskovni jednoti dm^2. V pravokotniku *ABCD* se nahaja torej 4krat po 6 $dm^2 = 24\ dm^2$. — Če bi merila osnovnica našega pravokotnika o in višina v dolgostnih jednot, dobili bi v prog in iz vsake proge o kvadratov, ki bi bili posamič jednaki ploskovni jednoti. Pravokotnik *ABCD* bi torej meril $o \cdot v$ ploskovnih jednot. Pravokotnikova ploščina.

Slika 21.



Iz navedenega se vidi, da najdemo mersko število pravokotnikove ploščine, ako pomnožimo mersko število njegove osnovnice z merskim številom višine.

To pravilo izrazimo krajše tako-le:

Pravokotnikova ploščina je jednaka produktu iz osnovnice in višine, v znakih

$$p = ov.$$

Pri računanji se morate osnovnica (dolžina) in višina (širina) meriti z isto dolgostno jednoto; od te je potem odvisno tudi ime ploskovne jednote.

Ploskovne jednote, ki se nahajajo v pravokotniku *ABCD*, so razdeljene na toliko horizontalnih (vertikalnih) vrst, kolikor znaša mersko število višine (osnovnice); v vsaki horizontalni (vertikalni) vrsti se nahaja toliko ploskovnih jednot, kolikor znaša mersko število osnovnice (višine). Kolikokrat se nahajajo torej ploskovne jednote jedne horizontalne vrste v vseh ploskovnih jednotah? kolikokrat ploskovne jednote jedne vertikalne vrste v vseh ploskovnih jednotah?

P r a v o k o t n i k o v o v i š i n o n a j d e m o, a k o r a z d e l i m o p l o š č i n o z o s n o v n i c o, v znakih

$$v = p : o.$$

P r a v o k o t n i k o v o o s n o v n i c o n a j d e m o, a k o r a z d e l i m o p l o š č i n o z v i š i n o v znakih

$$o = p : v.$$

Ploščina poševnokotnega paralelograma.

c) **Poševnokotni paralelogram.** Ploščino poševnokotnega paralelograma določimo ravno tako kakor pravokotnikovo; kajti vsak poševnokotni paralelogram je ploščinsko jednak pravokotniku, ki ima jednako osnovnico in jednako višino kakor paralelogram.

P l o š č i n a p o š e v n o k o t n e g a p a r a l e l o g r a m a j e j e d n a k a p r o d u k t u i z o s n o v n i c e i n v i š i n e.

V i š i n o p o š e v n o k o t n e g a p a r a l e l o g r a m a n a j d e m o, a k o r a z d e l i m o p l o š č i n o z o s n o v n i c o.

O s n o v n i c o p o š e v n o k o t n e g a p a r a l e l o g r a m a n a j d e m o, a k o r a z d e l i m o p l o š č i n o z v i š i n o.

Trikotnikova ploščina.

d) **Trikotnik.** Vsak trikotnik je polovica paralelograma, ki ima jednako osnovnico in jednako višino kakor trikotnik.

T r i k o t n i k o v a p l o š č i n a j e t o r e j j e d n a k a p o l o v i c i p r o d u k t a i z o s n o v n i c e i n v i š i n e, v znakih

$$p = \frac{ov}{2}.$$

T r i k o t n i k o v o p l o š č i n o n a j d e m o t u d i, a k o p o m n o ž i m o p o l o v i c o o s n o v n i c e z v i š i n o, a l i o s n o v n i c o s p o l o v i c o v i š i n e, v znakih

$$p = \frac{o}{2} \cdot v, \text{ ali } p = o \cdot \frac{v}{2}.$$

Produkt iz osnovnice in višine predstavlja dvojno trikotnikovo ploščino. Iz tega izvajamo:

Trikotnikovo višino najdemo, ako razdelimo dvojno ploščino z osnovnico, v znakih

$$v = 2p : o.$$

Trikotnikovo osnovnico najdemo, ako razdelimo dvojno ploščino z višino, v znakih

$$o = 2p : v.$$

e) **Trapez.** Vsak trapez je po svoji ploščini jednak trikotniku, ki ima jednako višino in katerega osnovnica je jednaka vsoti trapezovih vzporednic. Trapezova ploščina.

Trapezova ploščina je torej jednaka polovici produkta iz vsote obeh vzporednic in višine, v znakih

$$p = \frac{(a + b)\, v}{2}.$$

V tem obrazci pomenita a in b trapezovi vzporednici.

Trapezovo ploščino najdemo tudi, ako pomnožimo polovico vsote obeh vzporednic (t. j. srednico) z višino, ali vsoto obeh vzporednic s polovico višine, v znakih

$$p = \frac{a + b}{2} \cdot v, \text{ ali } p = (a + b) \cdot \frac{v}{2}.$$

Produkt iz vsote obeh vzporednic in višine predstavlja dvojno trapezovo ploščino. Iz tega izvajamo:

Trapezovo višino najdemo, ako razdelimo dvojno ploščino z vsoto obeh vzporednic, v znakih

$$v = 2p : (a + b).$$

Vsoto trapezovih vzporednic najdemo, ako razdelimo dvojno ploščino z višino, v znakih

$$a + b = 2p : v.$$

f) **Četverokotnik s pravokotno stoječima diagonalama.** Četverokotnik, v katerem stojite diagonali pravokotno druga na drugi, je polovica pravokotnika, kateremu ste diagonali tega četverokotnika stranici. Ploščina četverokotnika s pravokotno stoječima diagonalama.

Ploščina četverokotnika s pravokotno stoječima diagonalama je torej jednaka polovici produkta iz obeh diagonal, v znakih

$$p = \frac{d d_1}{2}.$$

V tem obrazci pomenita d in d_1 diagonali.

Po navedenem pravilu izračunamo n. pr. ploščino deltoidovo, rombovo in kvadratovo. Ker ste v kvadratu diagonali jednaki, dobimo pravilo:

Kvadratova ploščina je jednaka polovici druge potence njegove diagonale, v znakih

$$p = \frac{d^2}{2}.$$

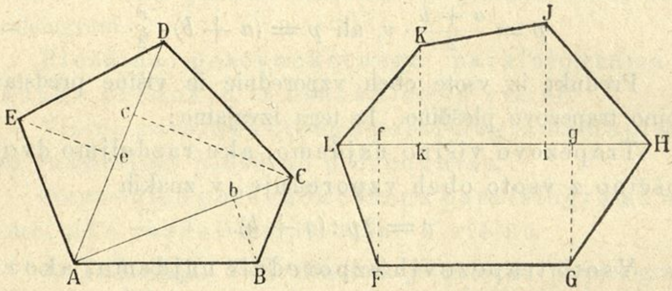
Ploščina pravilnega mnogokotnika.

g) **Pravilni mnogokotnik.** Vsak pravilni mnogokotnik je po svoji ploščini jednak trikotniku, kateremu je mnogokotnikov obseg osnovnica, polumer včrtanega kroga pa višina. Ploščina pravilnega mnogokotnika je torej jednaka polovici produkta iz obsega in polumera včrtanega kroga, v znakih

$$p = \frac{ns \, . \, r}{2}.$$

V tem obrazci pomeni s stranico, r polumer včrtanega kroga, n pa število mnogokotnikovih stranic.

Slika 22.



Ploščina nepravilnega mnogokotnika.

h) **Nepravilni mnogokotnik.** Ako narišemo v mnogokotniku $ABCDE$ (slika 22.) iz oglišča A vse mogoče diagonale, razpade mnogokotnik na trikotnike. Če izračunamo nastalim trikotnikom ABC, ACD in ADE ploščine ter jih seštejemo, določimo ploščino nepravilnega mnogokotnika $ABCDE$.

Ako načrtamo v mnogokotniku $FGHJKL$ (slika 22.) n. pr. diagonalo LH, in iz oglišč F, G, J in K narišemo pravokotnice na LH, razpade mnogokotnik na štiri trikotnike in dva trapeza. Če določimo trikotnikom FfL, GgH, JiH, KkL in trapezoma $FGgf$, $JKki$ ploščine ter jih seštejemo, najdemo ploščino nepravilnega mnogokotnika $FGHJKL$.

i) **Krog.** Krožnina je ploščinsko jednaka trikotniku, ki mu je obod osnovnica, polumer pa višina. Krogova ploščina.

Krogova ploščina je torej jednaka polovici produkta iz oboda in polumera, v znakih

$$p = \frac{Or}{2}.$$

Ker pa je $O = 2r\pi$, dobimo

$$p = \frac{2r\pi \, . \, r}{2} = r^2\pi,$$

t. j. krogovo ploščino tudi določimo, ako pomnožimo polumerov kvadrat z Ludolfovim številom.

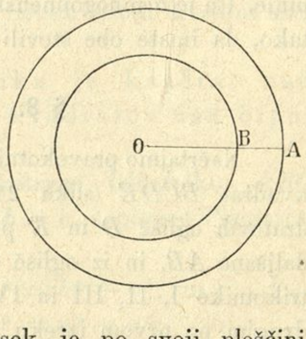
Ako razdelimo krogovo ploščino z Ludolfovim številom, najdemo polumerov kvadrat; če poiščemo potem temu kvocijentu kvadratni koren, določimo polumer.

Polumer torej določimo, ako razdelimo ploščino z Ludolfovim številom in temu kvocijentu poiščemo kvadratni koren, v znakih

$$r = \sqrt{\frac{p}{\pi}}.$$

k) **Kolobar.** Ako odvzamemo od ploščine kroga narisanega s polumerom $OA = R$ (slika 23.) ploščino kroga načrtanega s polumerom $OB = r$, ostane kolobarjeva ploščina; to je v znakih Kolobarjeva ploščina.

Slika 23.



$$p = R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\,\pi.$$

Kolobarjevo ploščino najdemo torej, ako odštejemo od ploščine večjega kroga ploščino manjšega, ali: ako pomnožimo razliko kvadratov obeh polumerov z Ludolfovim številom.

l) **Krogov izsek.** Krogov izsek je po svoji ploščini jednak trikotniku, kateremu je lokova dolžina osnovnica, polumer pa višina. Ploščina krogovega izseka.

Ploščina krogovega izseka je torej jednaka polovici produkta iz loka in polumera, v znakih

$$p = \frac{lr}{2}.$$

Krogovi izseki, ki pripadajo jednakim obsrediščnim kotom v istem krogu, so skladni. Zato postane izsek 2-, 3-, 4krat večji, če postane pripadajoči obsrediščni kot 2-, 3-, 4krat večji, t. j. razmerje med dvema izsekoma istega kroga je jednako razmerju pripadajočih obsrediščnih kotov, ali: dva izseka sta si kakor pripadajoča obsrediščna kota, v znakih

$$p : p_1 = \alpha : \alpha_1.$$

V tem obrazci pomenita p in p_1 ploščini dveh izsekov, katerima pripadata obsrediščna kota α in α_1.

Ako primerjamo krogov izsek in krožnino, najdemo sorazmerje

$$p : r^2\pi = \alpha : 360,$$

t. j. ploščina krogovega izseka in krožnina ste si kakor pripadajoča obsrediščna kota.

S pomočjo tega sorazmerja lahko izračunaš:

1. ploščino krogovega izseka, če poznaš polumer in pripadajoči obsrediščni kot;
2. krogov polumer, če poznaš izsekovo ploščino in pripadajoči obsrediščni kot;
3. pripadajoči obsrediščni kot, če poznaš izsekovo ploščino in polumer.

Števili α in 360 v zadnjem obrazci pomenite kotne stopinje. Če je α mnogoimensko število, treba je α in 360 pretvoriti tako, da imate obe števili isto ime.

§ 8. Pitagorov izrek.

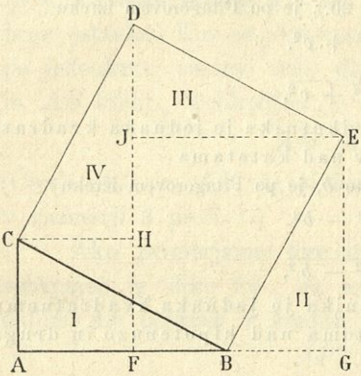
V kakšni zvezi so kvadrati nad stranicami pravokotnega trikotnika.

Načrtajmo pravokotni trikotnik ABC in nad hipotenuzo BC kvadrat $BCDE$ (slika 24.)! Ako narišemo potem iz kvadratovih oglišč D in E pravokotnici na AB, oziroma na podaljšano AB, in iz oglišč C in E pravokotnici na DF, dobimo trikotnike I, II, III in IV, ki so zaporedoma skladni drugi z drugim po prvem izreku o skladnosti. V katerih sestavinah se ujemajo? Iz skladnih trikotnikov I, II in III izvajamo, da so stranice AB, EG in EJ jednake; četverokotnik $FGEJ$ je torej kvadrat, katerega stranica je jednaka kateti AB pravokotnega trikotnika ABC. Iz skladnih trikotnikov I in IV izvajamo, da je $CA = CH$; četverokotnik $ACHF$ je torej kvadrat, katerega stranica je jednaka kateti AC pravokotnega trikotnika ABC.

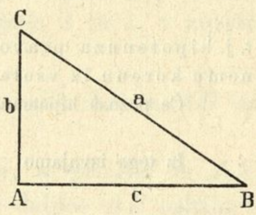
Ako prištejemo peterokotniku *BCHJE* trikotnika III in IV, dobimo kvadrat *BCDE* nad hipotenuzo pravokotnega trikotnika *ABC*; če pa prištejemo istemu peterokotniku *BCHJE* trikotnika I in II, dobimo vsoto kvadratov *ACHF* in *FGEJ*, katerih stranice so jednake katetama pravokotnega trikotnika *ABC*.

V pravokotnem trikotniku je torej kvadrat nad hipotenuzo jednak vsoti kvadratov nad katetama.

Slika 24.



Slika 25.



Navedena lastnost pravokotnega trikotnika se imenuje **Pitagorov izrek.**

Ako odštejemo od kvadrata nad hipotenuzo kvadrat nad jedno kateto, mora po navedenem izreku ostati kvadrat nad drugo kateto, t. j.:

V pravokotnem trikotniku je kvadrat nad vsako kateto jednak razliki kvadratov nad hipotenuzo in drugo kateto.

Ako zaznamujemo v pravokotnem trikotniku *ABC* (slika 25.) hipotenuzo z a in kateti z b in c, zapišemo Pitagorov izrek v znakih tako-le:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2, \text{ ali } a^2 = b^2 + c^2; \text{ in}$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2, \text{ ali } b^2 = a^2 - c^2;$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2, \text{ ali } c^2 = a^2 - b^2.$$

Naloge.

1. Načrtaj kvadrat, ki je jednak vsoti dveh določenih kvadratov s stranicama b in c!

Nalogo razrešiš, ako načrtaš pravokotni trikotnik, v katerem ste določeni daljici b in c kateti. Hipotenuza tega pravokotnega trikotnika je stranica kvadrata, kojega iščeš.

Ako ponavljaš to razrešitev, določiš kvadrat, ki je jednak vsoti treh, štirih, . . . določenih kvadratov. Če ste kateti b in c jednaki, je kvadrat nad hipotenuzo dvakrat tolik kakor kvadrat nad vsako kateto.

2. Načrtaj kvadrat, ki je jednak razliki dveh določenih kvadratov s stranicama a in b!

Nalogo razrešiš, ako načrtaš pravokotni trikotnik, v katerem je krajša daljica b jedna kateta in daljša daljica a hipotenuza. Druga kateta tega pravokotnega trikotnika je stranica kvadrata, kojega iščeš.

3. Izračunaj iz dveh določenih stranic pravokotnega trikotnika tretjo!

Ako poznaš kateti b in c (slika 25.), je po Pitagorovem izreku

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Iz tega izvajamo

$$a = \sqrt{b^2 + c^2},$$

t. j. hipotenuza pravokotnega trikotnika je jednaka kvadratnemu korenu iz vsote kvadratov nad katetama

Če poznaš hipotenuzo a in kateto b, je po Pitagorovem izreku

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Iz tega izvajamo

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

t j. kateta pravokotnega trikotnika je jednaka kvadratnemu korenu iz razlike med kvadratoma nad hipotenuzo in drugo kateto.

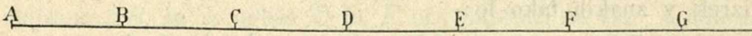
Podobnost.

§ 9. Razmerje dveh daljic.

Mera in mersko število določene daljice.

Daljica, ki se dá na kaki drugi daljici večkrat načrtati brez ostanka, imenuje se mera zadnje daljice; število, ki pove, kolikokrat se prva daljica nahaja v zadnji, zove se mersko število druge daljice.

Slika 26.



Geometrijsko razmerje med daljicama = das geometrische Verhältnis zweier Strecken.

Ako načrtamo na polutraku AU (slika 26.) več jednakih daljic drugo poleg druge, in ako primerjamo n. pr. daljici AD in AB ter preiskujemo, kolikokrat se nahaja daljica AB v AD, pravimo, da merimo daljico AD z daljico AB, ali da iščemo (geometrijsko) razmerje med daljicama AD in AB. V našem slučaji se AB nahaja v AD trikrat, v znakih

$$AD : AB = 3.$$

Izraz «$AD : AB$» se imenuje razmerje med daljicama AD in AB ter pomeni, da se AB nahaja nekolikokrat v AD; AD zovemo prednji, AB zadnji člen, število 3 pa količnik ali kvocijent razmerja. Kvocijent razmerja naznanja, kolikokrat ze zadnji člen nahaja v prednjem.

Prednji člen = das Vorderglied. Zadnji člen = das Hinterglied. Količnik = der Quotient.

Razmerje med daljicama AD in AB določimo tudi na ta-le način. Daljici AD in AB imate skupno mero, t. j. na vsaki izmed navedenih daljic se dá načrtati neka določena daljica (v našem slučaji AB, ali BC, ali CD) jeden — ali večkrat brez ostanka. Ker se skupna mera nahaja v AD trikrat, v AB pa jedenkrat, smemo reči, da je razmerje med daljicama AD in AB toliko, kolikoršno je med številoma 3 in 1, v znakih

Kako določamo razmerje med daljicami.

$$AD : AB = 3 : 1.$$

(Čitaj: AD in AB ste si kakor 3 in 1, ali: AD in AB ste v razmerji 3 proti 1.)

Ako primerjamo dve drugi daljici, n. pr. AF in AE, spoznamo iz slike 26., da se četrti del daljice AE nahaja v daljici AF petkrat, v znakih

$$AF : AD = \tfrac{5}{4}.$$

(Čitaj: razmerje med AF in AD je jednako $\frac{5}{4}$.) Kvocijent v obliki ulomka pomeni, da se toliki del zadnjega člena, kakor kaže imenovalec, nahaja tolikokrat v prednjem členu, kakor kaže števec.

Razmerje med daljicama AF in AD določimo tudi tako-le. AF in AE imate skupno mero AB; v AF se nahaja skupna mera petkrat, v AE pa štirikrat. Razmerje med daljicama AF in AE je torej toliko, kolikoršno med številoma 5 in 4, v znakih

$$AF : AD = 5 : 4.$$

V navedenih slučajih smo primerjali večjo daljico manjši. Daljice pa tudi lahko primerjamo obratno, in sicer manjšo večji, n. pr. AB in AD, AE in AF. V prvem slučaji se nahaja tretji del od AD v AB jedenkrat, ali skupna mera daljic AB in AD se nahaja v AB jedenkrat, v AD pa trikrat, v znakih

$$AB : AD = \tfrac{1}{3}, \text{ ali } AB : AD = 1 : 3.$$

V drugem slučaji se nahaja peti del od AF v AE štirikrat, ali skupna mera daljic AE in AF se nahaja v AE štirikrat in v AF petkrat, v znakih

$$AE : AF = \tfrac{4}{5}, \text{ ali } AE : AF = 4 : 5.$$

Iz navedenih primerov uvidimo torej, da določimo razmerje med dvema daljicama, ako preiskujemo, kolikokrat se jedna daljica ali določen del te daljice nahaja v drugi; ali pa, ako povemo, kolikokrat se skupna mera obeh daljic nahaja v prvi in kolikokrat v drugi daljici.

Razmerje med tremi daljicami določimo, ako povemo, kolikokrat se skupna mera vseh treh daljic nahaja v vsaki daljici. N. pr. Razmerje med daljicami AC, AD in AF (slika 26.) je toliko, kolikoršno med števili 2, 3 in 5, v znakih

$$AC : AD : AF = 2 : 3 : 5.$$

§ 10. Sorazmerne daljice.

Jednaka razmerja.

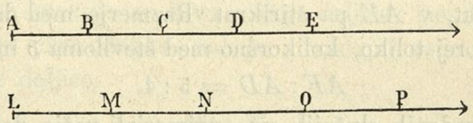
Načrtajmo dva polutraka in na vsakem več jednakih daljic! Daljice, ki se nahajajo na jednem polutraku, naj bodo različne od daljic na drugem polutraku (slika 27.). Ako primerjamo n. pr. daljici AD in AE, potem daljici LO in LP, najdemo razmerji

$$AD : AE = \tfrac{3}{4} \text{ in } LO : LP = \tfrac{3}{4},$$

Sorazmerne daljice = proportionale Strecken.

ki imate isti kvocijent. Taki dve razmerji imenujemo jednaki. O daljicah dveh jednakih razmerij pra-

Slika 27.



vimo, da so sorazmerne. V našem slučaji ste daljici AD in AE sorazmerni z daljicama LO in LP. Poišči v sliki 27. dve drugi dvojici sorazmernih daljic!

Dve jednaki razmerji smemo izjednačiti, t. j. reči in pisati smemo, da ima prvo razmerje isto vrednost kakor drugo, v znakih

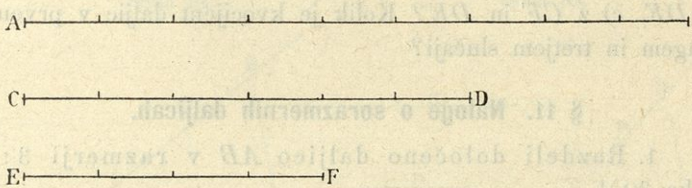
$$AD : AE = LO : LP.$$

(Čitaj: AD in AE ste si kakor LO in LP, ali: daljici AD in AE ste sorazmerni z daljicama LO in LP.)

Dve izjednačeni (geometrijski) razmerji tvorite (geometrijsko) sorazmerje. Sorazmerje sestavljajo štirje členi, ki se imenujejo zaporedoma od leve proti desni prvi, drugi, tretji in četrti člen. Prvi in četrti člen se imenujeta zunanja, drugi in tretji člen pa notranja člena. Četrti člen (posebno, če je neznan in ga je treba poiskati) se zove četrta (geometrijska) sorazmernica prvih treh členov.

Geometrijsko sorazmerje = die geometrische Proportion. Zunanji člen = das äußere Glied. Notranji člen = das innere Glied. Četrta geometrijska sorazmernica = die vierte geometrische Proportionale.

Slika 28.



Načrtajmo tri daljice AB, CD in EF, v katerih se nahaja skupna mera oziroma 9-, 6- in 4krat (slika 28.)! Ako primerjamo te daljice, najdemo razmerji

$$AB : CD = \tfrac{9}{6} = \tfrac{3}{2} \text{ in } CD : EF = \tfrac{6}{4} = \tfrac{3}{2};$$

iz teh razmerij stvorimo sorazmerje

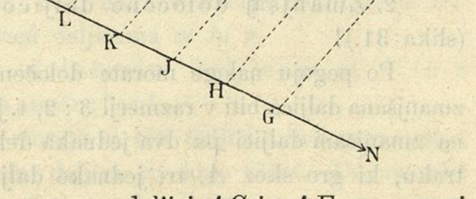
$$AB : CD = CD : EF,$$

v katerem sta notranja člena jednaka. Vsako tako sorazmerje imenujemo stalno sorazmerje. Notranji člen CD se zove srednja (geometrijska) sorazmernica, in četrti člen je tretja (geometrijska) sorazmernica prvega in notranjega člena.

Stalno sorazmerje = die stetige Proportion. Srednja geometrijska sorazmernica = die mittlere geometrische Proportionale. Tretja geometrijska sorazmernica = die dritte stetige Proportionale.

Načrtajmo iz točke A dva polutraka AM in AN in na polutraku AM več jednakih daljic, n. pr. $AB = BC = CD = DE = EF$ (slika 29.)! Ako narišemo potem skoz razdelišča B, C, D, E in F vzporednice BL, CK, DJ, EH in FG, dobimo na polutraku AN istotoliko jednakih daljic. V sliki 29. imamo sorazmerne daljice. Tako ste n. pr. daljici AC in AF sorazmerni z AK in AG; kajti razmerje prvih dveh daljic ima isto vrednost

Slika 29.



kakor razmerje zadnjih dveh. Kolik je kvocijent teh razmerij? Iz istega razloga ste tudi daljici AC in CF sorazmerni z AK in KG. Kolik je kvocijent teh razmerij? V obče smemo reči, da ste dve daljici, ležeči na jednem polutraku, sorazmerni z daljicama na drugem polutraku, če imate zadnji dve daljici z ozirom na vzporednice isto lego kakor prvi dve.

Istoležne daljice = gleichliegende, homologe oder entsprechende Strecken.

Daljice, ki imajo z ozirom na vzporednice isto lego, imenujejo se istoležne daljice.

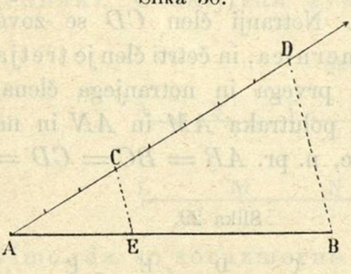
Kateri daljici ste istoležni *a)* z AD in CE, *b)* z BE in DF, *c)* z CF in DE? Kolik je kvocijent daljic v prvem, drugem in tretjem slučaji?

§ 11. Naloge o sorazmernih daljicah.

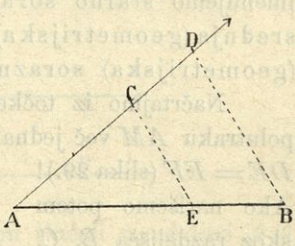
1. Razdeli določeno daljico AB v razmerji 3 : 5 (slika 30.)!

Načrtaj skoz krajišče A polutrak in na njem $3 + 5$ jednakih daljic drugo poleg druge! Ako spojiš zadnje razdelišče D s točko B in narišeš skoz tretje razdelišče C vzporednico z BD, najdeš točko E, katera deli določeno daljico AB v razmerji 3 : 5. Kajti če načrtaš skoz vsako razdelišče na polutraku vzporednico z BD, razdeliš AB na osem jednakih delov. Na AE se nahajajo trije in na EB pet jednakih delov; zato je $AE : EB = \frac{3}{5}$.

Slika 30.



Slika 31.



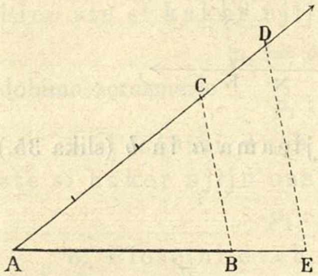
2. Zmanjšaj določeno daljico AB v razmerji 3 : 2 (slika 31.)!

Po pogoju naloge morate določena daljica AB in iskana zmanjšana daljica biti v razmerji 3 : 2, t. j. na AB morajo biti trije, na zmanjšani daljici pa dva jednaka dela. Ako načrtaš na polutraku, ki gre skoz A, tri jednake daljice in spojiš zadnje razdelišče D s točko B ter narišeš skoz drugo razdelišče C vzporednico z BD, najdeš zmanjšano daljico AE.

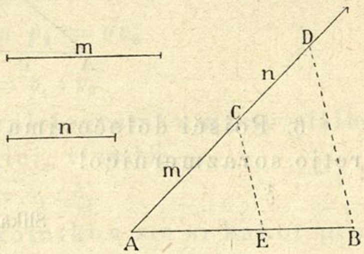
3. Povečaj določeno daljico AB v razmerji 3 : 4 (slika 32.)!

Na določeni daljici AB morajo biti trije, na iskani povečani daljici pa štiri jednaki deli. Nalogo razrešiš, ako načrtaš na polutraku, ki gre skoz A, štiri jednake daljice, spojiš tretje razdelišče C s točko B ter narišeš skoz četrto razdelišče D vzporednico z BC. Na podaljšani daljici AB najdeš točko E, katera meji povečano daljico AE.

Slika 32.



Slika 33.



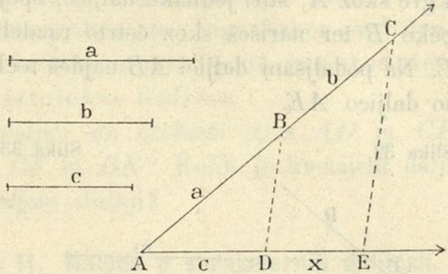
4. Razdeli določeno daljico AB v razmerji dveh določenih daljic m in n (slika 33.)!

Načrtaj skoz krajišče A polutrak, prenesi na njega določeno daljico m od točke A do točke C in določeno daljico n od točke C do točke D, spoji točko D s krajiščem B ter nariši skoz C vzporednico z BD! Da si res na ta način razdelil daljico AB v razmerji določenih daljic m in n, uvidiš tako-le. Daljici $AC = m$ in $CD = n$ imate neko skupno mero, t. j. na njih se dá neka (v našem slučaji sicer neznana) daljica večkrat načrtati brez ostanka. Ako bi to skupno mero daljic m in n res načrtal na AC in CD, kolikorkrat je mogoče, in ako bi potem narisal skoz vsa razdelišča vzporednice z BD, dobil bi na AE in EB istotoliko jednakih delov, kolikor jednakih daljic si načrtal na AC in CD. Zato mora razmerje med AE in EB biti jednako razmerju med daljicama m in n.

5. Poišči trem določenim daljicam a, b in c (slika 34.) četrto sorazmernico!

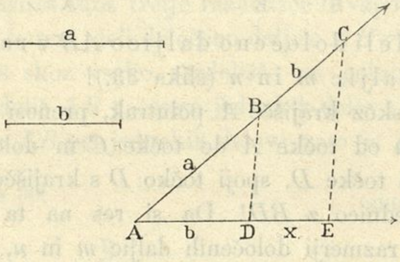
Po pogoju naloge morate si biti daljici a in b ravno tako, kakor ste si daljica c in daljica x, koje iščeš. Da razrešiš nalogo, načrtaj iz točke A dva polutraka, napravi na jednem $AB = a$, $BC = b$, na drugem polutraku pa $AD = c$, spoji točki B in D ter nariši skoz točko C vzporednico z BD! Daljica $DE = x$ je četrta sorazmernica določenim daljicam a, b in c. Primerjaj nalogo 4.!

Slika 34.



6. Poišči določenima daljicama a in b (slika 35.) tretjo sorazmernico!

Slika 35.



Po pogoju naloge morate si biti daljici a in b ravno tako, kakor ste si daljica b in daljica x, koje iščeš. Nalogo razrešiš na isti način kakor prejšnjo; daljica c prejšnje naloge je v tem slučaji jednaka b.

§ 12. Sorazmerni obsegi in sorazmerne ploščine.

1. Obsega dveh pravilnih mnogokotnikov z istim številom stranic izračunamo po obrazcih

$$O_1 = n s_1 \text{ in } O_2 = n s_2.$$

Iz teh obrazcev dobimo sorazmerje

$$O_1 : O_2 = n s_1 : n s_2,$$

ali če ga okrajšamo

$$O_1 : O_2 = s_1 : s_2,$$

t. j. obsega dveh pravilnih mnogokotnikov z istim številom stranic sta si kakor njiju stranici.

2. Oboda dveh krogov sta si kakor njiju polumera ali premera, v znakih

$$O_1 : O_2 = r_1 : r_2 = 2r_1 : 2r_2.$$

3. Ploščini dveh paralelogramov ste si kakor produkta iz njunih osnovnic in višin, v znakih

$$p_1 : p_2 = o_1 v_1 : o_2 v_2.$$

4. Ploščini dveh paralelogramov z isto osnovnico ste si kakor njiju višini; kajti iz obrazcev

$$p_1 = o v_1 \text{ in } p_2 = o v_2$$

dobimo sorazmerje

$$p_1 : p_2 = v_1 : v_2.$$

5. Ploščini dveh paralelogramov z isto višino ste si kakor njiju osnovnici, v znakih

$$p_1 : p_2 = o_1 : o_2.$$

6. Ploščini dveh trikotnikov ste si kakor produkta iz njunih osnovnic in višin, v znakih

$$p_1 : p_2 = o_1 v_1 : o_2 v_2.$$

7. Ploščini dveh trikotnikov z isto osnovnico ste si kakor njiju višini, v znakih

$$p_1 : p_2 = v_1 : v_2.$$

8. Ploščini dveh trikotnikov z isto višino ste si kakor njiju osnovnici, v znakih

$$p_1 : p_2 = o_1 : o_2.$$

9. Ploščini dveh kvadratov ste si kakor drugi potenci njunih stranic, v znakih

$$p_1 : p_2 = s_1^2 : s_2^2.$$

10. Ploščini dveh krogov ste si kakor kvadrata (drugi potenci) njunih polumerov, v znakih

$$p_1 : p_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Primerjaj izreke 3 in 6, 4 in 7, 5 in 8!

§ 13. Podobni trikotniki.

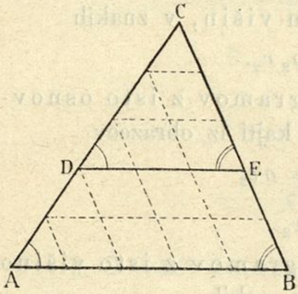
Podobni trikotniki = ähnliche Dreiecke.

Načrtajmo trikotnik ABC (slika 36.) ter razdelimo n. pr. stranico AC na pet jednakih delov! Ako narišemo potem skoz vsa razdelišča vzporednice z AB, dobimo na BC pet jednakih daljic; če pa narišemo skoz ista razdelišča vzporednice z BC, razdelimo AB na pet jednakih delov.

V kakšni zvezi so sestavine podobnih trikotnikov.

Vsaka vzporednica odreže od prvotnega trikotnika nov trikotnik, katerega sestavine so s sestavinami prvotnega trikotnika v prav tesni zvezi. Da to zvezo natančneje spoznamo, izberimo neko vzporednico, n. pr. DE, ter primerjajmo sestavine trikotnika DEC sestavinam prvotnega trikotnika ABC! Oba trikotnika se ujemata v kotih; kajti kot pri C je jima skupen, kota pri D in A, oziroma kota pri E in B, sta protikota, ležeča na vzporednicah, in zato jednaka. Ako primerjamo istoležne stranice omenjenih trikotnikov, in sicer CD in CA, CE in CB, DE in AB, najdemo razmerja

Slika 36.



$$CD : CA = \tfrac{3}{5},$$
$$CE : CB = \tfrac{3}{5},$$
$$DE : AB = \tfrac{3}{5},$$

t. j. istoležne stranice trikotnikov DEC in ABC so sorazmerne, v znakih

$$CD : CA = CE : CB = DE : AB.$$

Kar velja o trikotniku DEC, velja tudi o vsakem drugem trikotniku, katerega kaka druga vzporednica odreže od prvotnega trikotnika. — Če se veča število razdelišč na AC, bližajo se sosedna razdelišča vedno bolj drugo drugemu, in misliti si smemo, da nam predstavlja vsaka točka v stranici AC neko razdelišče. Tudi za ta skrajni slučaj velja naše poprejšnje umovanje in sklepanje. Zato smemo trditi:

Ako načrtamo v določenem trikotniku skoz katerokoli točko v jedni stranici vzporednico s kako drugo stranico, stvorimo nov trikotnik, ki se ujema s prvotnim v kotih; istoležne stranice prvotnega in novega trikotnika so sorazmerne.

Ako si mislimo, da se v trikotniku ABC (slika 36.) stranica AB pomiče vzporedno navzgor, ohranijo med tem pomikanjem notranji trikotnikovi koti svoje prvotne velikosti, stranice pa se manjšajo vedno bolj in bolj. Velikost prvotnega trikotnika se torej izpreminja med navedenim pomikanjem, oblika pa ostane ista. Ko pride premikajoča se stranica AB v lego DE, zmanjšajo se stranice prvotnega trikotnika v razmerji 5 : 3. Trikotnik DEC ni torej nič drugega kakor zmanjšani trikotnik ABC (toda ne v razmerji 5 : 3). Obratno si lahko mislimo trikotnik ABC kakor povečani trikotnik DEC.

Dva trikotnika, ki imata lastnosti, katere smo spoznali na trikotnikih ABC in DEC, imenujeta se podobna.

Dva podobna trikotnika imata isto obliko.

Dva podobna trikotnika se ujemata v kotih, in njiju istoležne stranice so sorazmerne.

Ako načrtamo v določenem trikotniku vzporednico s katerokoli stranico, stvorimo nov trikotnik, ki je podoben prvotnemu.

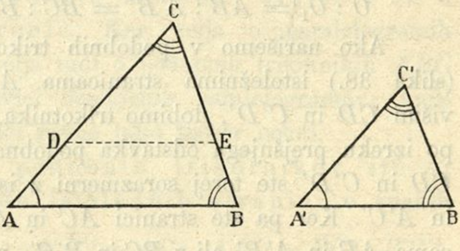
V podobnih trikotnikih ležijo istoležne stranice jednakim kotom nasproti. N. pr. Istoležni stranici DC in AC ležite jednakima kotoma pri E in pri B nasproti.

§ 14. Izrek o podobnosti dveh trikotnikov.

Kedaj smemo sklepati na podobnost dveh trikotnikov.

Načrtajmo dva trikotnika ABC in $A'B'C'$, ki se ujemata v kotih! V sliki 37. je $\sphericalangle A = A'$, $\sphericalangle B = B'$ in $\sphericalangle C = C'$. Ako prenesemo stranico $A'C'$ na AC od točke C do točke D, in ako narišemo skoz D vzporednico z AB, stvorimo nov trikotnik DEC, ki je skladen s trikotnikom $A'B'C'$ (I.). V katerih sestavinah se ujemata trikotnika DEC in $A'B'C'$? Ker smemo torej trikotnik $A'B'C'$ zamenjati s trikotnikom DEC, in ker sta trikotnika DEC in ABC podobna drugi drugemu po poprejšnjem odstavku, morata tudi trikotnika ABC in $A'B'C'$ biti podobna.

Slika 37.



Dva trikotnika sta podobna drugi drugemu, če se ujemata v vseh kotih.

§ 15. Razmerje med obsegoma in istoležnima višinama dveh podobnih trikotnikov.

Načrtajmo dva podobna trikotnika ABC in $A'B'C'$ (slika 38.)! Ako zaznamujemo vrednost razmerja dveh istoležnih stranic z občnim številom m, potem je

$$AB : A'B' = m, \quad BC : B'C' = m, \quad CA : C'A' = m,$$

ali

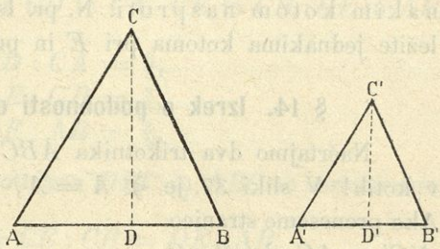
$$AB = m \,.\, A'B'$$
$$BC = m \,.\, B'C'$$
$$CA = m \,.\, C'A'.$$

Če seštejemo zadnje izraze, dobimo

$$AB + BC + CA = m \,.\, (A'B' + B'C' + C'A'),$$

t. j. obseg trikotnika ABC je $m$krat tolik, kolikoršen je obseg trikotnika $A'B'C'$. Razmerje med obsegoma trikotnikov ABC in $A'B'C'$ je torej $= m$, ali jednako razmerju dveh istoležnih stranic.

Slika 38.



Kako sta si obsega dveh podobnih trikotnikov.

O b s e g a d v e h p o d o b n i h t r i k o t n i k o v s t a s i k a k o r p o d v e i s t o l e ž n i s t r a n i c i, v znakih

$$O : O_1 = AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'.$$

Ako narišemo v podobnih trikotnikih ABC in $A'B'C'$ (slika 38.) istoležnima stranicama AB in $A'B'$ pripadajoči višini CD in $C'D'$, dobimo trikotnika ACD in $A'C'D'$, ki sta po izreku prejšnjega odstavka podobna drugi drugemu. Višini CD in $C'D'$ ste torej sorazmerni z istoležnima stranicama AC in $A'C'$. Ker pa ste stranici AC in $A'C'$ sorazmerni s stranicama AB in $A'B'$ ali z BC in $B'C'$, morate višini CD in $C'D'$ biti tudi sorazmerni s temi stranicami.

Kako ste si istoležni višini dveh podobnih trikotnikov.

Višine, ki pripadajo i s t o l e ž n i m s t r a n i c a m, imenujemo i s t o l e ž n e v i š i n e.

V p o d o b n i h t r i k o t n i k i h s t e d v e i s t o l e ž n i v i š i n i s o r a z m e r n i z i s t o l e ž n i m i s t r a n i c a m i, v znakih

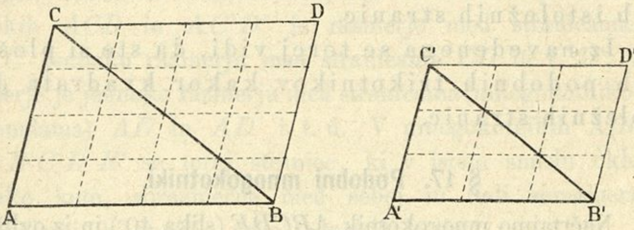
$$CD : C'D' = AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'.$$

§ 16. Razmerje med ploščinama dveh podobnih trikotnikov.

Kako ste si ploščini dveh podobnih trikotnikov.

Načrtajmo dva podobna trikotnika ABC in $A'B'C'$ (slika 39.), v katerih je razmerje po dveh istoležnih stranic n. pr. $= \frac{4}{3}$! Ako narišemo skoz oglišči B in C, oziroma skoz istoležni oglišči B' in C', vzporednice z nasprotnimi stranicami, stvorimo paralelograma $ABDC$ in $A'B'D'C'$, ki imata s trikotnikoma ABC in $A'B'C'$ isti osnovnici in isti višini. Če razdelimo potem vsako izmed stranic AB in AC na štiri, vsako izmed istoležnih stranic $A'B'$ in $A'C'$ pa na tri jednake dele, in če načrtamo skoz ta razdelišča vzporednice z AC in AB, oziroma z $A'C'$ in $A'B'$, razdelimo paralelograma $ABDC$ in $A'B'D'C'$ na manjše, med seboj skladne paralelograme. Ker

Slika 39.



je paralelogram $ABDC$ sestavljen iz $4 \times 4 = 16$, in paralelogram $A'B'D'C'$ iz $3 \times 3 = 9$ ploščinsko jednakih paralelogramov, sta si paralelograma $ABDC$ in $A'B'D'C'$ kakor $16 : 9$, t. j. kakor kvadrata merskih števil 4 in 3 dveh istoležnih stranic. Kar velja o paralelogramih $ABDC$ in $A'B'D'C'$, velja tudi o podobnih trikotnikih ABC in $A'B'C'$, ki sta polovici omenjenih paralelogramov; kajti jasno je, da ste si polovici ravno tako kakor celoti.

Ploščini dveh podobnih trikotnikov ste si kakor kvadrata dveh istoležnih stranic, v znakih

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2.$$

O resnici ravno navedenega izreka se prepričamo tudi lahko na drug način. Iz § 12. vemo, da ste si ploščini dveh trikotnikov kakor produkta iz njunih osnovnic in višin. Katero vrednost ima razmerje med produktoma iz osnovnic in višin v podobnih trikotnikih, treba je še določiti. V podobnih trikotnikih ABC in $A'B'C'$ (slika 38.) ste istoležni stranici AB

in $A'B'$ sorazmerni z istoležnima višinama CD in $C'D'$. Če zaznamujemo vrednost razmerja dveh istoležnih stranic z občnim številom m, je

$$AB : A'B' = m,$$
$$CD : C'D' = m.$$

Ako ta izraza pomnožimo (kakor se ulomek množi z ulomkom), dobimo

$$AB \,.\, CD : A'B' \,.\, C'D' = m^2;$$

če pa pomnožimo razmerje dveh istoležnih stranic, n. pr.

$$AB : A'B' = m$$

s samim seboj, dobimo

$$\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = m^2,$$

t. j. *razmerje med produktoma iz osnovnic in višin ima isto vrednost kakor razmerje med kvadratoma dveh istoležnih stranic.*

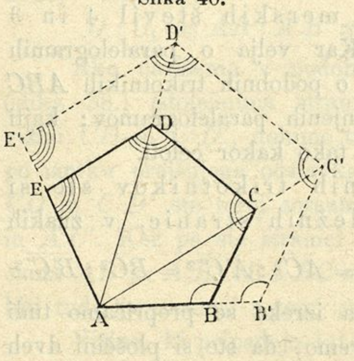
Iz navedenega se torej vidi, da ste si ploščini dveh podobnih trikotnikov kakor kvadrata dveh istoležnih stranic.

§ 17. Podobni mnogokotniki.

Kedaj imenujemo dva mnogokotnika podobna.

Načrtajmo mnogokotnik $ABCDE$ (slika 40.) in iz oglišča A obe mogoči diagonali! Ako narišemo skoz katerokoli točko B', ki leži v podaljšani stranici AB, vzporednico z mnogokotnikovo stranico BC, najdemo v podaljšani diagonali AC točko C'; če narišemo skoz C' vzporednico z mnogokotnikovo stranico CD, najdemo v podaljšani diagonali AD točko D'; in če narišemo skoz D' vzporednico z mnogokotnikovo stranico DE, najdemo v podaljšani stranici AE točko E'. V kakšni zvezi so sestavine mnogokotnika $AB'C'D'E'$, ki smo ga na ta način stvorili, s sestavinami prvotnega mnogokotnika $ABCDE$, to hočemo v naslednjem preiskovati.

Slika 40.



Mnogokotnika $ABCDE$ in $AB'C'D'E'$ imata kot pri A skupen; koti pri B in B', oziroma pri C in C', ali pri D

in D', ali pri E in E' imajo vzporedne krake v istem smislu in so zato jednaki. Mnogokotnika $ABCDE$ in $AB'C'D'E'$ se torej ujemata v vseh kotih.

Ako primerjamo trikotnika ABC in $AB'C'$, oziroma trikotnika ACD in $AC'D'$, ali trikotnika ADE in $AD'E'$, spoznamo takoj iz slike, da so navedeni trikotniki po dva in dva podobni drugi drugemu, ker se ujemajo v vseh kotih. Mnogokotnika $ABCDE$ in $AB'C'D'E'$ sta torej v istem smislu sestavljena iz podobnih trikotnikov.

Ker so v podobnih trikotnikih istoležne stranice sorazmerne, je v trikotnikih ABC in $AB'C'$ razmerje med stranicama AB in AB' jednako razmerju med stranicama BC in $B'C'$, in to razmerje je jednako razmerju med stranicama (mnogokotnikovima diagonalama) AC in AC'. V podobnih trikotnikih ACD in $AC'D'$ je razmerje med stranicama AC in AC' jednako razmerju med stranicama CD in $C'D'$, in to razmerje je jednako razmerju med stranicama (mnogokotnikovima diagonalama) AD in AD' i. t. d. V mnogokotnikih $ABCDE$ in $AB'C'D'E'$ so torej stranice, ki v istem smislu oklepajo jednake kote, sorazmerne med seboj in tudi sorazmerne z diagonalami, ki spajajo vrhe jednakih kotov.

Dva mnogokotnika, ki imata lastnosti, katere smo spoznali na mnogokotnikih $ABCDE$ in $AB'C'D'E'$, imenujeta se **podobna**. Stranice, ki v istem smislu oklepajo jednake kote podobnih mnogokotnikov, imenujemo **istoležne**. Tudi **diagonale so istoležne**, če spajajo oglišča, v katerih se stikajo istoležne stranice.

Dva podobna mnogokotnika sta v istem smislu sestavljena iz podobnih trikotnikov.

Dva podobna mnogokotnika se ujemata v vseh kotih.

V podobnih mnogokotnikih so istoležne stranice in diagonale med seboj sorazmerne.

Iz navedenih lastnostij podobnih mnogokotnikov smemo izvajati ta-le izreka:

1. **Dva mnogokotnika sta podobna, če sta v istem smislu sestavljena iz podobnih trikotnikov.**

2. **Dva mnogokotnika sta podobna, če se ujemata v vseh kotih, in če so stranice, ki oklepajo jednake kote, zaporedoma sorazmerne.**

Dva pravilna mnogokotnika z istim številom stranic sta vselej podobna. Zakaj?

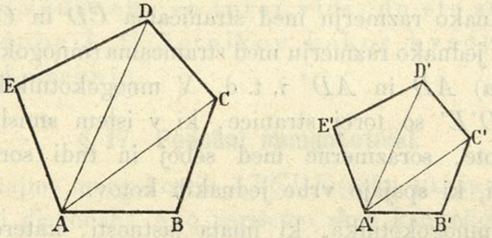
Ali sta dva kroga vsigdar podobna?

§ 18. Razmerje med obsegoma in ploščinama dveh podobnih mnogokotnikov.

Kako sta si obsega, kako ploščini dveh podobnih mnogokotnikov.

Načrtajmo dva podobna mnogokotnika $ABCDE$ in $A'B'C'D'E'$ (slika 41.), v katerih so AB in $A'B'$, BC in $B'C'$ i. t. d. istoležne stranice! Če zaznamujemo vrednost razmerja dveh istoležnih stranic z občnim številom m, je

Slika 41.



$$AB : A'B' = m, \text{ in } AB = m \,.\, A'B'$$
$$BC : B'C' = m \quad » \quad BC = m \,.\, B'C'$$
$$CD : C'D' = m \quad » \quad CD = m \,.\, C'D'$$
$$DE : D'E' = m \quad » \quad DE = m \,.\, D'E'$$
$$EA : E'A' = m \quad » \quad EA = m \,.\, E'A'.$$

Ako seštejemo zadnje izraze, dobimo

$$AB + BC + CD + DE + EA =$$
$$m \,.\, (A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'),$$

t. j. obseg mnogokotnika $ABCDE$ je $m$krat tolik, kolikoršen je obseg mnogokotnika $A'B'C\,D'E'$. Razmerje med obsegoma mnogokotnikov $ABCDE$ in $A'B'C'D'E'$ je torej $= m$, ali jednako razmerju med dvema istoležnima stranicama.

Obsega dveh podobnih mnogokotnikov sta si kakor po dve istoležni stranici, v znakih

$$O : O_1 = AB : A'B' = BC : B'C' = \text{i. t. d.}$$

Podobni mnogokotniki so v istem smislu sestavljeni iz podobnih trikotnikov. Ker so ploščine podobnih trikotnikov sorazmerne s kvadrati istoležnih stranic, in ker je vrednost zadnjega razmerja v našem slučaji $= m^2$ (primerjaj § 16.), je

$$ABC : A'B'C' = m^2, \text{ in } ABC = m^2 . A'B'C'$$
$$ACD : A'C'D' = m^2 \quad » \quad ACD = m^2 . A'C'D'$$
$$ADE : A'D'E' = m^2 \quad » \quad ADE = m^2 . A'D'E'.$$

Ako seštejemo zadnje izraze, dobimo

$$ABC + ACD + ADE = m^2 . (A'B'C' + A'C'D' + A'D'E'),$$

t. j. ploščina mnogokotnika $ABCDE$ je m^2krat tolika, kolikoršna je ploščina mnogokotnika $A'B'C'D'E'$. Razmerje med ploščinama mnogokotnikov $ABCDE$ in $A'B'C'D'E'$ je torej $= m^2$, ali jednako razmerju med kvadratoma dveh istoležnih stranic.

Ploščini dveh podobnih mnogokotnikov ste si kakor kvadrata dveh istoležnih stranic, v znakih

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2 = \text{i. t. d.}$$

Daljic, ki jih izmerimo v naravi, ne načrtavamo na papir v njih pravi velikosti, temveč v zmanjšanem merilu. N. pr. Daljice, ki so v naravi po 1 *km* dolge, predočujemo v sliki z 1 *cm*. Kako si je treba potem misliti daljico v sliki z ozirom na daljico v naravi? kako daljico v naravi z ozirom na daljico v sliki? Kolikokrat je v našem primeru daljica v sliki manjša od daljice v naravi? kolikokrat daljica v naravi večja od daljice v sliki? Razmerje med daljico v sliki in daljico v naravi je torej $= 1 : 100.000$. To razmerje se imenuje merilo, po katerem je slika (zemljevid) napravljena.

V kakšni zvezi so liki v slikah z liki v naravi.

Merilo = der Maßstab

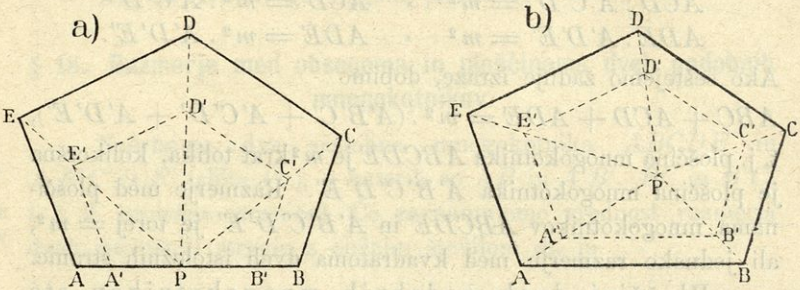
Ker daljice mejé like, so liki na papirji zmanjšani z ozirom na like v naravi, in sicer tako, da so podobni drugi drugim. Lastnosti, katere smo spoznali na podobnih trikotnikih in mnogokotnikih, veljajo zato tudi tukaj.

§ 19. Raznovrstne naloge.

1. Načrtaj določenemu mnogokotniku $ABCDE$ podoben mnogokotnik, in sicer tako, da razdeliš določeni mnogokotnik na trikotnike iz točke P, ki leži *a)* v stranici AB, *b)* znotraj določenega mnogokotnika, in da bo razmerje po dveh istoležnih stranic $= 3 : 2$ (slika 42.)!

Ako spojiš točko P z vsemi oglišči določenega mnogokotnika ter zmanjšaš jedno izmed daljic, n. pr. PB ali PC, v razmerji 3 : 2, najdeš oglišče B' ali oglišče C' mnogokotnika $A'B'C'D'E'$, ki ga iščeš; ostala oglišča najdeš z vzporednicami.

Slika 42.



Primerjaj sliko! Mnogokotnika $ABCDE$ in $A'B'C'D'E'$ sta v istem smislu sestavljena iz podobnih trikotnikov in zato podobna drugi drugemu.

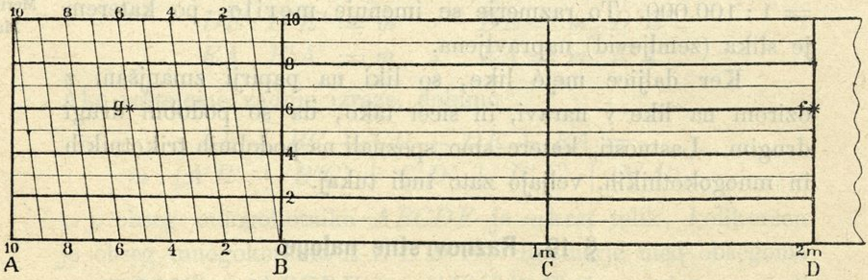
Ako bi naj bilo določeno razmerje po dveh istoležnih stranic 2 : 3, treba bi bilo daljico PB ali PC povečati v razmerji 2 : 3.

Poprečno merilo = der Transversal-Maßstab.

2. Načrtaj desetinsko poprečno merilo!

Ako bi na zmanjšanem merilu AD (slika 43.) hoteli dolgostno jednoto $AB = BC = CD = 1\ m$ razdeliti na decimetre

Slika 43.



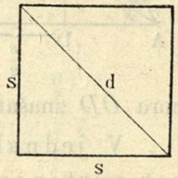
in centimetre, postali bi zadnji razdelki tako majhni, da bi jih ne bilo mogoče razločevati natanko. Da se izognemo tej nepriliki, treba je urediti merilo nekoliko drugače, uporabljajoč lastnosti podobnih trikotnikov. V to svrho postavimo v točki B

pravokotnico na AD, na tej pravokotnici načrtajmo deset jednakih daljic ter narišimo skoz vsako razdelišče vzporednico z AD! Potem razdelimo AB na deset jednakih delov (na decimetre) ter načrtajmo skoz razdelišča vzporedne prečnice, kakor jih kaže slika 43.! Prečnica, ki spaja točki 0 in 1, odreže od prve horizontalne vzporednice nad AB daljico 1 *cm*, od druge horizontalne vzporednice nad AB daljico 2 *cm*, ... in od zadnje (zgornje) horizontalne vzporednice nad AB daljico 10 *cm* = 1 *dm*. Ravno tako odreže tudi vsaka druga prečnica od vsake naslednje horizontalne vzporednice nad AB daljico, ki je 1 *cm* daljša ko na prejšnji vzporednici. Daljica, ki sega od f do g, meri torej 2 *m* 5 *dm* 6 *cm*.

Števila, ki stoje spodaj na prečnicah, zaznamujejo decimetre, števila na horizontalnih vzporednicah pa centimetre.

Vsako zmanjšano merilo, ki je urejeno tako kakor v sliki 43., imenuje se desetinsko poprečno merilo.

Slika 44.



3. Izračunaj kvadratu diagonalo, če je njega stranica = s (slika 44.)!

Po Pitagorovem izreku je diagonala

$$d = \sqrt{s^2 + s^2} = \sqrt{2s^2} = s\sqrt{2}.*$$

Kvadratovo diagonalo najdeš torej, ako pomnožiš njega stranico z $\sqrt{2}$ (drugim korenom iz 2).

4. Stranica jednakostraničnega trikotnika je $= s$; izračunaj *a)* višino, *b)* ploščino, *c)* polumer včrtanega in očrtanega kroga (slika 45.)!

a) Po Pitagorovem izreku je višina

$$v = \sqrt{s^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{s^2}{4}} = \sqrt{\frac{3s^2}{4}} = \frac{s}{2}\sqrt{3}.*$$

Višino jednakostraničnega trikotnika najdeš torej, ako pomnožiš polovico njegove stranice z $\sqrt{3}$.

b) Trikotnikovo ploščino izračunamo po obrazci:

$$p = \frac{o}{2} \cdot v;$$

* Primerjaj pravila o potencah in korenih v aritmetiki! $\sqrt{2} = 1 \cdot 41421..$; $\sqrt{3} = 1 \cdot 73205..$

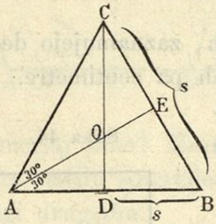
če nadomestimo v našem slučaji vrednosti za o in v, dobimo

$$p = \frac{s}{2} \cdot \frac{s}{2} \sqrt{3} = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{s^2}{4} \sqrt{3}.$$

Ploščino jednakostraničnega trikotnika najdeš torej, ako pomnožiš kvadrat iz polovice njegove stranice z $\sqrt{3}$, ali: ako pomnožiš četrtino kvadrata iz njegove stranice z $\sqrt{3}$.

c) Višine jednakostraničnega trikotnika so ob jednem somernice njegovih stranic in njegovih kotov; njih presečišče je središče očrtanega in včrtanega kroga. V sliki 45. je $OD = OE$ polumer včrtanega, $OC = OA$ pa polumer očrtanega kroga. V pravokotnem trikotniku AOD meri jeden kot 30^0; kateta OD, ki leži temu kotu nasproti, je jednaka polovici hipotenuze OA. Polumer očrtanega kroga je torej 2krat tolik ko polumer včrtanega kroga. Če je pa OD polovica od OC, mora OD znašati jedno tretjino in OC dve tretjini višine CD.

Slika 45.



V jednakostraničnem trikotniku znaša polumer včrtanega kroga $\frac{1}{3}$, polumer očrtanega kroga pa $\frac{2}{3}$ trikotnikove višine, v znakih

$$r = \frac{1}{3} v = \frac{1}{3} \cdot \frac{s}{2} \sqrt{3} = \frac{s}{6} \sqrt{3},$$

$$R = \frac{2}{3} v = \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2} \sqrt{3} = \frac{s}{3} \sqrt{3}.$$

5. Stranica pravilnega šesterokotnika je $= s$; izračunaj *a)* ploščino, *b)* polumer včrtanega in očrtanega kroga!

a) Ako spojimo središče pravilnega šesterokotnika z oglišči, razpade šesterokotnik na šest skladnih jednakostraničnih trikotnikov. Ploščina šesterokotnikova je torej jednaka šestkratni ploščini jednega teh trikotnikov, v znakih

$$p = 6 \cdot \frac{s^2}{4} \sqrt{3} = \frac{3s^2}{2} \sqrt{3}.$$

b) Polumer včrtanega kroga je jednak višini jednega izmed jednakostraničnih trikotnikov, ki sestavljajo pravilni šesterokotnik; polumer očrtanega kroga pa je jednak šesterokotnikovi stranici, v znakih

$$r = \frac{s}{2}\sqrt{3},\ R = s.$$

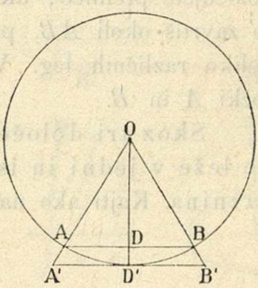
6. **Krogu s polumerom r je pravilni šesterokotnik včrtan in očrtan; izračunaj stranico vsakega teh mnogokotnikov** (slika 46.)!

a) Stranica včrtanega pravilnega šesterokotnika (sekstantova tetiva) je jednaka polumeru, v znakih

$$s = r.$$

b) Ako načrtamo iz krogovega središča O (slika 46.) pravokotnico na stranico AB včrtanega pravilnega šesterokotnika ter jo podaljšamo do krožnice, najdemo točko D', v kateri se stranica $A'B'$ očrtanega pravilnega šesterokotnika dotika določenega kroga. Trikotnika $A'B'O$ in ABO sta podobna drugi drugemu; istoležni osnovnici $A'B'$ in AB ste torej sorazmerni z istoležnima višinama OD' in OD, v znakih

Slika 46.



$$A'B' : AB = OD' : OD.$$

Ker je v našem slučaji $AB = r$, $OD' = r$ in OD (višina jednakostraničnega trikotnika s stranico r) $= \frac{r}{2}\sqrt{3}$, dá se iz navedenega sorazmerja izračunati stranica $A'B' = S$ očrtanega pravilnega šesterokotnika. Račun je ta-le:

$$S : r = r : \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

$$S : r = 2r : r\sqrt{3}$$

$$S : r = 2 : \sqrt{3}$$

$$S = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Stereometrija.

§ 20. Premica in ravnina v obče.

Osnovne resnice o premici in ravnini.

Skoz določeno točko A v prostoru moreš načrtati brez števila premic. Skoz dve določeni točki A in B v prostoru moreš načrtati le jedno premico. Dve premici, ki imate dve skupni točki, pokrivate druga drugo.

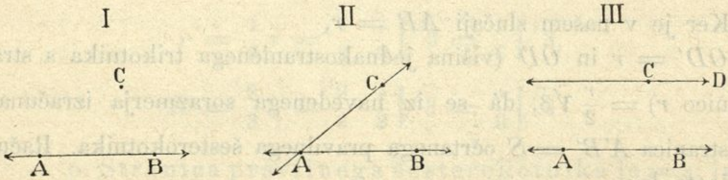
Vsaka ploskev, v kateri moreš premice risati na vse strani, imenuje se ravna ploskev ali ravnina. Vsaka premica, ki ima z ravnino dve točki skupni, leži popolnoma v tej ravnini.

Kako določimo ravnini lego popolnoma.

Skoz določeno točko A v prostoru moreš položiti brez števila ravnin. Skoz dve določeni točki A in B v prostoru moreš položiti tudi brez števila ravnin. Kajti točki A in B določujete premico; ako položiš skoz premico AB ravnino ter jo zavrtiš okoli AB, pride ravnina zaporedoma v neizrečeno veliko različnih leg. V vsaki izmed teh ravnin se nahajate točki A in B.

Skoz tri določene točke A, B in C v prostoru, ki ne leže v jedni in isti premici, dá se položiti le jedna ravnina. Kajti ako načrtaš skoz točki A in B premico, skoz

Slika 47.



to premico položiš ravnino ter jo zavrtiš okoli AB, nahaja se med vsemi mogočimi legami te ravnine le jedna taka ravnina, v kateri ležé vse tri določene točke A, B in C.

Tri točke A, B, C v prostoru, ki ne leže v jedni in isti premici, določujejo tudi te-le stvore:

a) premico AB in točko C zunaj te premice (slika 47. I.);

b) dve sekajoči se premici AB in AC (slika 47. II.);

c) dve vzporedni premici AB in CD (slika 47. III.); kajti vzporednih premic si ne moremo drugače misliti, ko v jedni ravnini ležeče.

Iz navedenega torej spoznamo, da določujejo ravnini lego popolnoma:

1. tri točke, ki ne ležé v jedni in isti premici;
2. premica in točka zunaj te premice;
3. dve sekajoči se premici;
4. dve vzporedni premici.

Ravnina nastane:

Kako nastane ravnina.

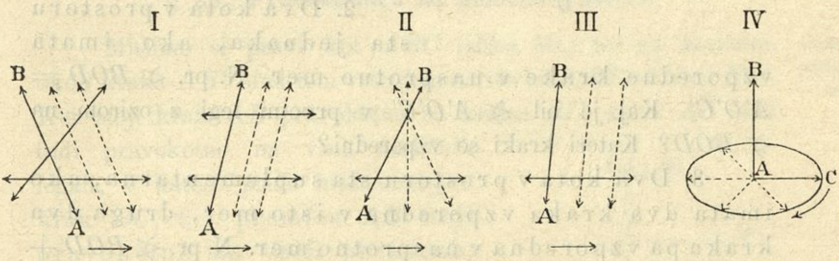
a) ako se pomika premica AB po dveh drugih sekajočih se premicah, ali pa po dveh vzporednih premicah (slika 48. I.);

b) ako se vrti premica AB okoli jedne svojih točk in ob jednem drči po neki drugi premici (slika 48. II.);

c) ako se pomika premica AB po kaki drugi premici tako, da ostane vedno vzporedna s svojo prvotno lego (slika 48. III.);

d) ako se pravi kot vrti okoli jednega svojih krakov (slika 48. IV.).

Slika 48.



Kakšne ravnine razločujemo.

Ravnina utegne biti: 1. neomejena, 2. na pol omejena, 3. popolnoma omejena. Ako govorimo o neomejeni ravnini, imenujemo jo naravnost ravnino. Vsaka prema črta, ki jo narišemo v neomejeni ravnini, razdeli to ravnino na dva poluomejena dela, ki ju imenujemo poluravnini. Popolnoma omejeni ravnini pravimo raven lik ali ravna ploskev.

Poluravnina = die Halbebene.

§ 21. Medsebojna lega dveh premic v prostoru.

Trojna medsebojna lega dveh premic.

Dve premici v prostoru utegnete imeti druga proti drugi trojno lego:

a) premici ležite v jedni ravnini in imate jedno skupno točko; premici se sečete;

b) premici ležite v jedni ravnini ter nimate nobedne skupne točke; premici ste vzporedni;

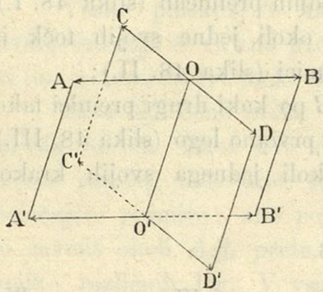
Navskrižen = windschief. Križati se = sich kreuzen.

c) premici ne ležite v jedni ravnini ter nimate nobedne skupne točke; premici ste navskrižni ali se križate.

Osnovna resnica o vzporednem premikanji sekajočih se premic.

Dve sekajoči se premici AB in CD ne morete izpremeniti svoje medsebojne lege, ako se pomičete po prostoru tako, da ostane vsaka vedno vzporedna s svojo prvotno lego, in da drči njiju presečišče O po neki premi črti OO'. Koti, katere tvorite premici, ohranijo torej v vsaki novi legi svojo prvotno velikost. Primerjaj sliko 49.!

Slika 49.



Iz navedenega izvajamo te-le lastnosti:

Lastnosti kotov z vzporednimi kraki.

1. Dva kota v prostoru sta jednaka, ako imata vzporedne krake v isto mer. N. pr. $\sphericalangle BOD = B'O'D'$. Kateri kraki so vzporedni?

2. Dva kota v prostoru sta jednaka, ako imata vzporedne krake v nasprotno mer. N. pr. $\sphericalangle BOD = A'O'C'$. Kaj je bil $\sphericalangle A'O'C'$ v prvotni legi z ozirom na $\sphericalangle BOD$? Kateri kraki so vzporedni?

3. Dva kota v prostoru sta suplementarna, ako imata dva kraka vzporedna v isto mer, druga dva kraka pa vzporedna v nasprotno mer. N. pr. $\sphericalangle BOD + D'O'A' = 180^0$. Kaj je bil $\sphericalangle D'O'A'$ v prvotni legi z ozirom na $\sphericalangle BOD$? Katera kraka sta vzporedna v isto mer, katera v nasprotno?

§ 22. Glavne medsebojne lege premice in ravnine z ozirom na določeno ravnino.

Premica, ki leži zunaj določene ravnine, ima s to ravnino ali jedno skupno točko, ali pa nima nobedne skupne točke; dveh ali več točk ne more imeti skupnih z ravnino, ker bi potem ležala popolnoma v tej ravnini.

Premica vzporedna z ravnino.

Premica in ravnina, ki nimate nobedne skupne točke, ste vzporedni druga z drugo.

Premica naklonjena proti ravnini. Podnožišče = der Fußpunkt.

Premica in ravnina, ki imate skupno točko, se sečete v tej točki. Premica je v tem slučaji naklonjena proti ravnini; skupna točka se imenuje podnožišče preme črte.

Tri točke, ki ne ležé v jedni in isti premici, določujejo ravnino popolnoma. Dve ravnini torej, ki imate tri skupne točke, katere ne ležé v jedni in isti premici, pokrivate druga drugo in tvorite le jedno ravnino.

Dve ravnini, ki nimate nobedne skupne točke, imenujete se vzporedni. Ravnina vzporedna z ravnino.

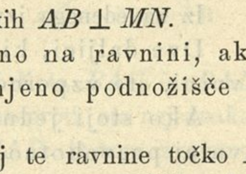
Dve ravnini, ki imate skupne točke, sečete druga drugo, ali ste naklonjeni druga proti drugi. Ravnina naklonjena proti ravnini. Skupne točke dveh ravnin tvorijo črto, ki se zove presečnica. Presečnica = die Durchschnittslinie.

Vsaka presečnica dveh ravnin je prema črta. Kajti ako bi presečnica bila kriva črta, nahajale bi se v tej črti tri točke, ki bi ne ležale v jedni in isti premici. Ker so te točke obema ravninama skupne, morali bi ravnini pokrivati druga drugo; potem bi pa ne imeli dveh različnih ravnin, temveč le jedno ravnino.

§ 23. Pravokotnice na določeni ravnini.

Mislimo si pravi kot *ABC* (slika 50.) ter ga zavrtimo okoli kraka *AB*! Med tem vrtenjem nariše krak *BC* ravnino *MN*. Premica stoji pravokotno na ravnini. Ker stoji krak *AB* pravokotno na kraku *BC*, mora *AB* stati tudi pravokotno na vseh različnih legah, v katere pride med vrtenjem krak *BC*, t. j. premica *AB* stoji pravokotno na vseh premicah, katere narišemo skoz podnožišče *B* v ravnini *MN*. V tem slučaji pravimo: premica *AB* stoji pravokotno na ravnini *MN*, v znakih $AB \perp MN$.

Slika 50.



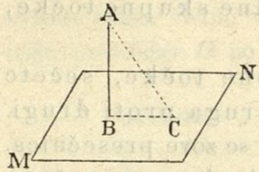
Premica torej stoji pravokotno na ravnini, ako stoji pravokotno na vseh skoz njeno podnožišče v ravnini načrtanih premicah.

Mislimo si ravnino *MN* in zunaj te ravnine točko *A* (slika 51.)! Iz točke *A* se dá načrtati na ravnino *MN* le jedna pravokotnica *AB*. Kajti ako bi n. pr. tudi daljica *AC* stala pravokotno na ravnini *MN*, morali bi daljici *AB* in *AC* stati pravokotno na daljici *BC*, ki spaja podnožišči *B* in *C*. Potem bi imel trikotnik *ABC* dva prava kota, jednega pri *B* in drugega pri *C*. Ker pa je to nemogoče, mora daljica *AC* stati poševno na ravnini *MN*. Pravokotnica iz določene točke na določeno ravnino.

Iz točke, ležeče zunaj določene ravnine, dá se na to ravnino spustiti le jedna pravokotnica.

Razdalja med točko in ravnino.

Slika 51.



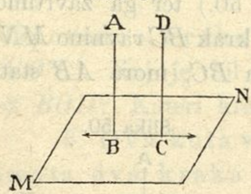
Ker je v pravokotnem trikotniku hipotenuza večja od vsake katete, mora v trikotniku ABC (slika 51.) pravokotnica AB biti krajša od poševnice AC. Kar velja o poševnici AC, velja tudi o vsaki drugi poševnici, ki jo načrtamo iz točke A na ravnino MN.

Med vsemi daljicami, katere načrtamo iz točke, ležeče zunaj določene ravnine, na to ravnino, je pravokotnica najkrajša; ona določuje razdaljo točke od ravnine.

Lastnost dveh pravokotnic na jedni in isti ravnini.

Mislimo si ravnino MN, na kateri stoji daljica AB pravokotno (slika 52.)! V tej ravnini načrtajmo skoz podnožišče B neko premico BC! Ako se daljica AB pomiče po prostoru tako, da ostane s svojo prvotno lego vedno vzporedna, in da drči njeno podnožišče B po premici BC, ne more med tem pomikanjem izpremeniti svoje lege proti ravnini MN. Ker je daljica AB stala sprva pravokotno na ravnini MN, mora tudi v vsaki novi legi stati pravokotno na ravnini MN. Ko torej AB pride v lego DC, je še vedno vzporedna s svojo prvotno lego in stoji tudi pravokotno na ravnini MN.

Slika 52.



Iz navedenega izvajamo ta-le izreka:

Dve daljici, ki stojite pravokotno na jedni in isti ravnini, ste vzporedni.

Ako stoji jedna izmed dveh vzporednic na neki ravnini pravokotno, stoji tudi druga vzporednica na isti ravnini pravokotno.

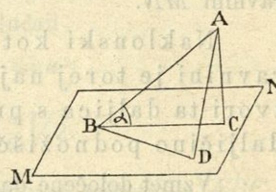
§ 24. Poševnice na določeni ravnini.

Vzmet = die Projection.

Mislimo si ravnino MN, na kateri stoji daljica AB poševno (slika 53.)! Ako spustimo iz daljičinega krajišča A pravokotnico AC na ravnino MN ter spojimo podnožišči B in C, stvorimo daljico BC, ki se imenuje (pravokotni) vzmet ali (pravokotna) projekcija daljice AB na ravnino MN. Podnožišču pravokotnice AC, t. j. točki C, pravimo (pravokotni) vzmet ali (pravokotna) projekcija točke A na ravnino MN. Kakor točka A, ima tudi vsaka druga točka, ki leži v daljici AB, svoj vzmet. Ta vzmet najdeš na isti način kakor pri točki A. Točka B in njen vzmet se stikata. Vzmeti vseh točk daljice AB ležijo drugi poleg drugega v daljici BC ter tvorijo vzmet daljice AB na ravnino MN. Pravokotni trikotnik ABC, v katerem se nahaja vzmet daljice AB, imenuje se vzmetni trikotnik.

Vzmet daljice in točke. Vzmetni trikotnik = das Projectionsdreieck.

Slika 53.

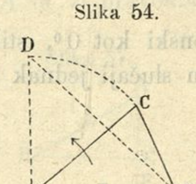


Kot $ABC = \alpha$, katerega tvori daljica AB s svojim vzmetom, zove se naklonski kot daljice AB proti ravnini MN. Katero lastnost ima naklonski kot določene daljice proti določeni ravnini, in kako je velikost daljičinega vzmeta odvisna od naklonskega kota, to hočemo preiskovati v naslednjem.

Naklonski kot = der Neigungswinkel.

Da lažje spoznamo lastnost naklonskega kota, zavrtimo v ravnini trikotnika ABC (slika 54.) stranico AC okoli krajišča A navzgor. Jasno je, da postaja med tem vrtenjem kot BAC vedno večji, in da se točka C oddaljuje vedno bolj od točke B, t. j. stranica BC, ki leži kotu BAC nasproti, veča se med vrtenjem. Ko pride stranica AC v lego AD, dobimo v sliki trikotnika ABC in ABD, ki imata stranico AB skupno, stranici AC in AD jednaki, tretji stranici pa ste nejednaki, in sicer je BD večja od BC. Kota BAC in BAD, ki ležita tema nejednakima stranicama nasproti, sta nejednaka; večji stranici BD leži nasproti večji kot BAD. Iz tega izvajamo:

Slika 54.



Ako imata dva trikotnika dve stranici jednaki, tretji stranici pa nejednaki, sta tudi tema stranicama nasprotna kota nejednaka; večji stranici leži nasproti večji kot.

Načrtajmo v ravnini MN (slika 53.) skoz podnožišče B daljico BD ter jo napravimo jednako vzmetu BC! Ako spojimo točko D s točko A, dobimo trikotnika ABC in ABD, ki imata

Lastnost naklonskega kota.

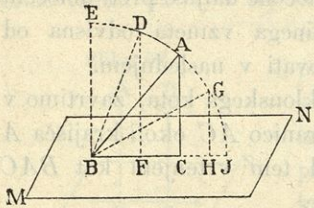
stranico AB skupno, stranici BC in BD jednaki, tretji stranici AC in AD pa ste nejednaki, in sicer je poševnica AD večja od pravokotnice AC. Po prejšnjem izreku mora kot ABD biti večji od naklonskega kota ABC. Kar velja o kotu ABD, velja tudi o vsakem drugem kotu, katerega tvori daljica AB s katerokoli daljico ali premico, ki jo narišemo skoz podnožišče B v ravnini MN.

Naklonski kot poševne daljice proti določeni ravnini je torej najmanjši med vsemi koti, katere tvori ta daljica s premicami, ki jih načrtamo skoz daljičino podnožišče v dotični ravnini.

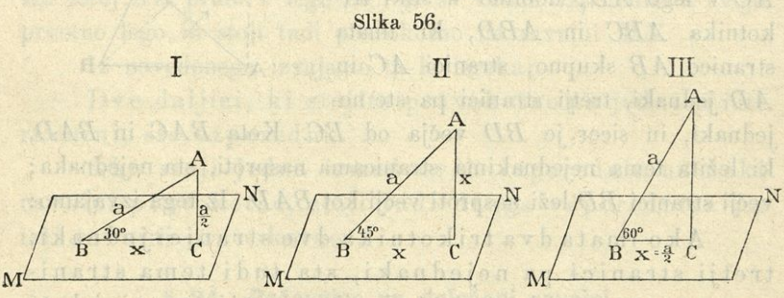
Kako je odvisen vzmet od naklonskega kota.

Vzmet določene daljice na določeno ravnino je odvisen od velikosti naklonskega kota. Ako se n. pr. daljica AB (slika 55.) vrti v ravnini, katero določujeta ta daljica in njen vzmet, okoli podnožišča B navzgor, veča se naklonski kot, vzmet pa se manjša. Ko znaša naklonski kot 90°, preide vzmet dotične daljice v točko. Če pa se daljica AB vrti navzdol proti ravnini, manjša se naklonski kot, vzmet pa se veča. Ko znaša naklonski kot 0°, stikata se daljica in njen vzmet; vzmet je v tem slučaji jednak daljici. Primerjaj sliko 55!

Slika 55.



Slika 56.



Kako izračunaš vzmet v posebnih slučajih.

Vzmet določene daljice $AB = a$ na določeno ravnino MN se dá v treh slučajih izračunati. Ako znaša naklonski kot 30°, je v vzmetnem trikotniku ABC (slika 56. I.) pravokotnica AC jednaka polovici daljice AB; kajti v pravokotnem trikotniku je kateta, ki leži kotu 30° nasproti, jednaka polovici hipotenuze. Po Pitagorovem izreku najdemo v tem slučaji vzmet

$$x = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Če meri naklonski kot 45°, je vzmetni trikotnik ABC (slika 56. II.) jednakokrak (zakaj?) in pravokotnica AC jednaka vzmetu BC. Po Pitagorovem izreku dobimo v tem slučaji

$$x^2 + x^2 = a^2, \text{ ali } 2x^2 = a^2$$

in

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Če znaša naklonski kot 60°, leži v vzmetnem trikotniku ABC (slika 56. III.) vzmet BC kotu 30° nasproti. Vzmet je v tem slučaji jednak polovici daljice AB, t. j. $x = \frac{a}{2}$.

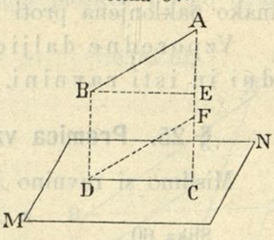
Kako izračunaš dolgost daljice iz vzmeta v posebnih slučajih.

V navedenih treh slučajih moremo obratno izračunati dolgost daljice, če poznamo njen vzmet. V to svrho je treba v jednačbah (v obrazcih), ki smo jih našli za vzmete, daljico a smatrati za neznanko in dotične jednačbe razrešiti z ozirom na to neznanko.

Vzmet in naklonski kot daljice, ležeče zunaj določene ravnine.

Daljici AB, ki leži zunaj določene ravnine MN (slika 57.), najdemo vzmet, ako spustimo iz krajišč A in B pravokotnici na ravnino in spojimo podnožišči C in D. Naklonski kot daljice AB proti ravnini MN najdemo, ako načrtamo skoz daljičino krajišče B vzporednico z vzmetom DC, ali pa če narišemo skoz točko D vzporednico z daljico AB. Kot ABE ali kot FDC določuje torej, za koliko je daljica AB naklonjena proti ravnini MN. Zakaj sta kota ABE in FDC jednaka? Kakšno medsebojno lego imajo njiju kraki?

Slika 57.



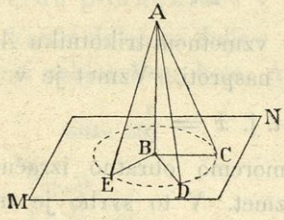
Vzmeti jednakih daljic.

Ako načrtamo iz točke A, ležeče zunaj določene ravnine MN (slika 58.), pravokotnico in tri ali več jednakih poševnic na to ravnino ter spojimo podnožišča poševnic s podnožiščem pravokotnice, dobimo trikotnike ABC, ABD, ABE, ki so skladni po tretjem izreku o skladnosti. V katerih sestavinah se ujemajo? Iz skladnosti teh trikotnikov izvajamo, da so daljice BC, BD, BE (to so vzmeti jednakih poševnic AC, AD, AE) jednake. Podnožišče pravokotnice AB smemo torej smatrati za središče kroga, ki gre skoz podnožišča poševnic AC, AD in AE.

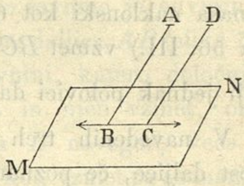
Ako spustimo iz točke, ležeče zunaj določene ravnine, pravokotnico in več jednakih poševnic na to ravnino, ležijo podnožišča poševnic na obodu kroga, ki ima podnožišče pravokotnice za središče.

Jednake poševnice, spuščene iz iste točke na jedno in isto ravnino, imajo jednake vzmete.

Slika 58.



Slika 59.



Naklonski koti vzporednih daljic.

Mislimo si ravnino MN, na kateri stoji daljica AB poševno, ter načrtajmo v tej ravnini skoz podnožišče B premico BC (slika 59.)! Ako se daljica AB pomiče tako po prostoru, da ostane vedno vzporedna s svojo prvotno lego, in da drči njeno podnožišče po premici BC, ne more med tem pomikanjem izpremeniti svoje lege proti ravnini; ona ostane jednako naklonjena proti ravnini. Iz tega izvajamo:

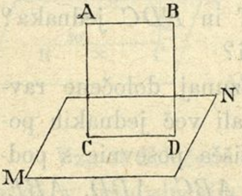
Vzporedne daljice so jednako naklonjene proti jedni in isti ravnini.

§ 25. Premica vzporedna z določeno ravnino.

Premica, ki je vzporedna z določeno ravnino, je tudi vzporedna z nekaterimi premicami v tej ravnini, in obratno.

Mislimo si ravnino MN in premico AB, ki je vzporedna z MN (slika 60.)! Ako položimo skoz premico AB ravnino, ki seče določeno ravnino MN, mora presečnica CD biti vzporedna s premico AB. Kajti če bi AB in CD imeli skupno točko, morala bi ta točka ležati v premici AB in v ravnini MN, v kateri leži presečnica CD. To bi se pa ne ujemalo več z zgoraj navedenim pogojem, da je premica AB vzporedna z ravnino MN. Kar velja o presečnici CD, velja tudi o vsaki drugi presečnici,

Slika 60.



ki jo dobimo na isti način kakor CD. Obratno smemo trditi, da je premica AB le tedaj vzporedna z ravnino MN, kadar je vzporedna s premico CD, ki se nahaja v ravnini MN in leži z AB v jedni in isti ravnini.

Ako položimo skoz premico AB, ki je vzporedna z določeno ravnino MN, kako ravnino, je presečnica obeh ravnin vzporedna s premico AB.

Premica je vzporedna z ravnino, ako je vzporedna s kako premico v tej ravnini.

§ 26. Ploskovni in naklonski kot dveh ravnin.

Ako zavrtimo poluravnino AM (slika 61.) okoli mejne črte AB tako daleč, da pride v lego AN, dobimo med prvotno in novo lego te poluravnine prostor, ki ga imenujemo ploskovni kot ali klin. Poluravnini AM in AN, ki tvorite ploskovni kot, zovete se kračji ali obstranski ploskvi, mejna črta AB pa, v kateri se sečete poluravnini, imenuje se rob ali vrhovna črta ploskovnega kota.

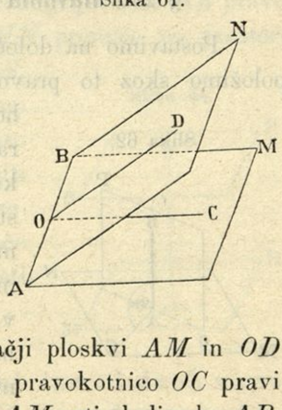
Ploskovni kot ali klin = der Flächenwinkel oder Keil. Obstranska ali kračja ploskev = die Seiten- oder Schenkelfläche. Rob ali vrhovna črta = die Kante oder Scheitellinie.

Ploskovni kot zaznamujemo s štirimi velikimi črkami tako-le: $M(AB)N$. Skrajni črki M in N zunaj oklepaja pomenite obstranski ploskvi, srednji črki znotraj oklepaja pa rob ploskovnega kota.

Kako zaznamujemo ploskovni kot.

Velikost ploskovnega kota sodimo po velikosti vrteža, katerega je treba, da pride jedna kračja ploskev v lego druge kračje ploskve. Velikost tega vrteža določamo tako-le. Ako načrtamo v poluravnini AM (slika 61.) na rob AB pravokotnico OC ter zavrtimo poluravnino AM okoli roba AB do lege AN, nariše pravokotnica OC kot COD, ki se imenuje naklonski kot poluravnin AM in AN. Ta kot določa velikost ploskovnega kota $M(AB)N$. Kraka OC in OD naklonskega kota stojita pravokotna na robu AB; OC leži v kračji ploskvi AM in OD v kračji ploskvi AN. Rob AB tvori s pravokotnico OC pravi kot AOC. Med tem ko se poluravnina AM vrti okoli roba AB, vrti se pravi kot AOC okoli kraka AO (t. j. del roba AB) in

Slika 61.



Naklonski kot = der Neigungswinkel.

drugi krak OC tega kota načrta ravnino, na kateri stoji rob AB pravokotno. To ravnino določujete pravokotnici OC in OD.

Iz navedenega izvajamo:

Kako najdemo naklonski kot dveh ravnin.

Naklonski kot dveh ravnin najdemo, ako izberemo neko točko v presečnici obeh ravnin ter postavimo na to presečnico dve pravokotnici, izmed katerih leži jedna v prvi ravnini in druga v drugi ravnini.

Naklonski kot dveh ravnin najdemo tudi, ako presečemo ploskovni kot teh ravnin s tretjo ravnino tako, da stoji rob ploskovnega kota pravokotno na tretji ravnini.

Ravnina stoji pravokotno, oziroma poševno na ravnini.

Ako je naklonski kot dveh ravnin jednak 90°, pravimo, da *stojite ravnini pravokotno druga na drugi*; če pa je naklonski kot dveh ravnin manjši od 90°, pravimo: *ravnini stojite poševno druga na drugi.* Več ko 90° ne more meriti naklonski kot.

Kakšne ploskovne kote razločujemo.

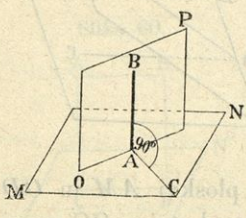
Klin ali ploskovni kot dveh poluravnin utegne biti *oster*, ali *prav*, ali *top*, če je treba manj ko četrtine, ali četrtine, ali več ko četrtine vrteža, da pride jedna poluravnina v lego druge poluravnine. *Dokler je ploskovni kot manjši od topega, določamo njegovo velikost z naklonskim kotom obeh poluravnin; ko pa postane ploskovni kot top, določamo njegovo velikost s kotom, ki je suplementaren z naklonskim kotom obeh poluravnin.*

§ 27. Ravnina stoji pravokotno na ravnini.

Kako postaviš ravnino pravokotno na ravnino.

Postavimo na določeno ravnino MN pravokotnico AB ter položimo skoz to pravokotnico ravnino OP (slika 62.)! Če hočemo spoznati medsebojno lego teh ravnin, treba je poiskati njiju naklonski kot ter ga določiti po velikosti. Ker stoji AB pravokotno na ravnini MN, mora tudi pravokotno stati na vsaki premici, ki jo načrtamo skoz podnožišče A v ravnini MN; AB stoji torej pravokotno na premici OA, v kateri se sečete ravnini MN in OP, in tudi pravokotno na premici AC, katero narišemo v ravnini MN pravokotno na presečnico OA. Kot BAC je zato pravi kot, in ker je ta kot

Slika 62.

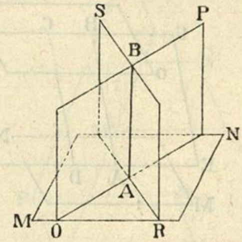


naklonski kot ravnin MN in OP, stojite te ravnini pravokotno druga na drugi.

Ako stoji premica pravokotno na določeni ravnini, in ako položimo skoz to premico kako ravnino, stoji ta ravnina pravokotno na prvi ravnini.

Ako položimo skoz premico AB, ki stoji pravokotno na določeni ravnini MN, dve ravnini OP in RS (slika 63.), postane AB presečnica teh dveh ravnin, izmed katerih stoji po prejšnjem izreku vsaka pravokotno na ravnini MN. Zato smemo reči:

Slika 63.



Ako stojite dve ravnini pravokotno na tretji ravnini, stoji presečnica prvih dveh ravnin pravokotno na tretji ravnini.

Vsaka ravnina, katero položimo skoz navpično premico, imenuje se **navpična ali vertikalna ravnina.** Vsaka ravnina, ki stoji pravokotno na navpični premici, zove se **vodoravna ali horizontalna ravnina.** V vodoravni ravnini se dadô na vse strani risati vodoravne premice. Navpična in vodoravna ravnina stojite pravokotno druga na drugi.

Navpična ravnina = die Verticalebene.

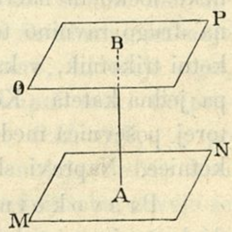
Vodoravna ravnina = die Horizontalebene.

§ 28. Ravnina vzporedna z ravnino.

Pravokotnica na vzporednih ravninah.

Mislimo si ravnino MN, na kateri stoji premica AB pravokotno (slika 64.)! Ako se ravnina MN premiče po prostoru tako, da drči točka A po premici AB, in da ostane premikajoča se ravnina vedno vzporedna s svojo prvotno lego, ne more se med takim pomikanjem izpremeniti medsebojna lega ravnine MN in premice AB. Na vsaki legi premikajoče se ravnine mora torej premica AB stati pravokotno.

Slika 64.



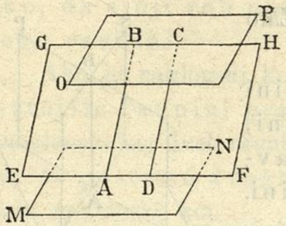
Iz navedenega izvajamo:

Ako stoji premica na jedni izmed dveh vzporednih ravnin pravokotno, stoji pravokotno tudi na drugi ravnini.

Presečnice določene ravnine z vzporednimi ravninami.

Mislimo si dve vzporedni ravnini *MN* in *OP* ter načrtajmo med njima daljico *AB* (slika 65.)! Ako položimo skoz *AB* neko ravnino *EH*, dobimo presečnici *EF* in *GH*. Kateri ravnini se sečete v premici *EF*, in kateri v premici *GH*? Presečnici *EF* in *GH* ležite oziroma v vzporednih ravninah *MN* in *OP* ter morate biti vzporedni druga z drugo; kajti če bi te presečnici imeli skupno točko, morala bi ta točka biti tudi skupna ravninama *MN* in *OP*, kar pa se ne ujema s pogojem, da ste ravnini *MN* in *OP* vzporedni. Iz tega izvajamo:

Slika 65.



A k o p r e s e č e m o d v e v z p o r e d n i r a v n i n i s t r e t j o r a v n i n o, s t e p r e s e č n i c i v z p o r e d n i.

Ako načrtamo v ravnini *EH* vzporednico z *AB* (slika 65.), dobimo paralelogram *ABCD*, v katerem ste nasprotni stranici *AB* in *DC* jednaki. Ker pa ležite vzporedni daljici *AB* in *DC* med vzporednima ravninama *MN* in *OP*, smemo reči:

Vzporednice in pravokotnice med vzporednima ravninama.

V z p o r e d n i c e m e d v z p o r e d n i m a r a v n i n a m a s o j e d n a k e.

Ako bi daljica *AB* stala na ravnini *MN* (slika 65.) pravokotno, stala bi tudi vzporednica *DC* pravokotno na ravnini *MN*. Odtod izvajamo:

P r a v o k o t n i c e m e d v z p o r e d n i m a r a v n i n a m a s o j e d n a k e.

Razdalja vzporednih ravnin.

Ako si izberemo v jedni izmed dveh vzporednih ravnin neko točko in načrtamo iz te točke poševnico in pravokotnico na drugo ravnino ter spojimo njiju podnožišči, dobimo pravokotni trikotnik, v katerem je poševnica hipotenuza, pravokotnica pa jedna kateta. Ker je hipotenuza večja od vsake katete, mora torej poševnica med vzporednima ravninama biti večja od pravokotnice. Napravi sliko!

P r a v o k o t n i c a m e d v z p o r e d n i m a r a v n i n a m a d o l o č u j e r a z d a l j o a l i r a z s t o j t e h d v e h r a v n i n.

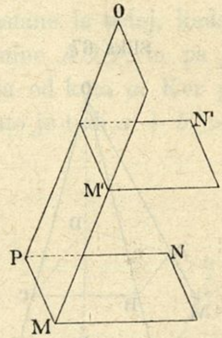
Naklonski kot določene premice proti vzporednim ravninam.

Mislimo si ravnino *MN*, na kateri stoji premica *AB* poševno! Ako se ravnina *MN* pomiče vzporedno po prostoru tako, da drči nje točka *A* po premici *AB*, ne more se med takim pomikanjem izpremeniti medsebojna lega ravnine *MN* in premice *AB*. Premica *AB* je torej proti vsaki legi premikajoče se ravnine jednako naklonjena. Napravi sliko!

Naklonski kot med premico in ravnino se ne izpremeni, ako se pomiče ravnina po prostoru tako, da ostane s svojo prvotno lego vedno vzporedna.

Vzporedne ravnine tvorijo z jedno in isto premico jednake naklonske kote.

Slika 66.



Naklonski kot določene ravnine proti vzporednim ravninam.

Mislimo si dve ravnini *MN* in *MO*, ki se sečete v premici *MP* (slika 66.)! Ako se jedna teh ravnin, n. pr. *MN*, pomiče po prostoru tako, da ostane vedno vzporedna s svojo prvotno lego, ne more se med takim pomikanjem izpremeniti medsebojna lega ravnin *MN* in *MO*. Zato ohrani tudi naklonski kot teh dveh ravnin med navedenim pomikanjem svojo prvotno velikost.

Naklonski kot dveh ravnin se ne izpremeni, ako se pomiče jedna teh ravnin po prostoru tako, da ostane vedno vzporedna s svojo prvotno lego.

Vzporedne ravnine tvorijo z vsako ravnino, ki jih seče, jednake naklonske kote.

§ 29. Telesni ogel.

Telesni ogel = die körperliche Ecke. Obstranska ploskev = die Seitenfläche. Vrh ali teme = der Scheitel. Rob = die Kante. Robovni kot = der Kantenwinkel. Ploskovni kot = der Flächenwinkel. Stranica telesnega ogla = die Seite der körperlichen Ecke.

Ako zavrtimo polutrak *OM* okoli njegovega krajišča *O* tako, da drči po obsegu nekega mnogokotnika *ABCD* (slika 67.), načrta vrteči se polutrak toliko ravnin, kolikor stranic ima dotični mnogokotnik. Prostor, ki leži med temi ravninami, imenuje se telesni ogel ali krajše ogel. Ravnine, ki mejé ogel, zovejo se obstranske ploskve; njih skupni točki *O* (presečišču) se pravi vrh ali teme; presečnice *OM*, *ON*, . . . po dveh sosednih obstranskih ploskev se imenujejo robi; koti *MON*, *NOP*, . . ., katere tvorita po dva sosedna roba, zovejo se robovni koti; klinom ali kotom, katere tvorite po dve sosedni obstranski ploskvi, je ime ploskovni koti telesnega ogla.

Da nastane ogel, mora točka *O* ležati zunaj mnogokotnika *ABCD*. Robovni koti imenujejo se včasih tudi stranice telesnega ogla. Kar se tiče mere ploskovnih kotov, primerjaj § 26.!

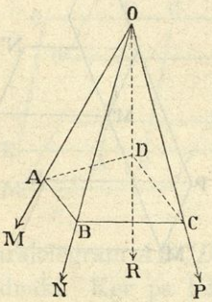
Trirobni ali tristranični ogel = die dreiseitige Ecke. Trirobnik = das Dreikant.

Telesni ogel je na jedni strani neomejen. Število njegovih robov je vselej jednako številu obstranskih ploskev. Robovnih kotov je istotoliko, kolikor je ploskovnih kotov, in teh je zopet istotoliko, kolikor je robov.

Četverorobni ali četverostranični ogel = die vierseitige Ecke. Četverorobnik = das Vierkant. Jednakostranični ogel = die gleichseitige Ecke. Jednakokotni ogel = die gleichwinklige Ecke. Pravilni ogel = die regelmäßige oder reguläre Ecke.

Po številu robov (ali obstranskih ploskev) razločujemo *trirobne* (*tristranične*) ogle ali *trirobnike*, *četverorobne* (*četverostranične*) ogle ali *četverorobnike*, *peterorobne* (*peterostranične*) ogle ali *peterorobnike* i. t. d.

Slika 67.



Ako so v telesnem oglu vsi robovni koti jednaki, imenuje se ogel *jednakostraničen*; ako so pa vsi ploskovni koti jednaki, zove se ogel *jednakokoten*. *Pravilen* se imenuje ogel, če ima jednake robovne in jednake ploskovne kote.

Skladni ogli = congruente Ecken.

Dva ogla imenujemo *skladna*, ako jih moremo vsaj v mislih tako položiti jednega v drugega, da se stikajo njiju robi. To pa je mogoče le tedaj, kadar so robovni in ploskovni koti jednega ogla v istem redu ali smislu jednaki robovnim in ploskovnim kotom drugega ogla. Če pa so robovni in ploskovni koti jednega ogla v nasprotnem redu ali smislu jednaki robovnim in ploskovnim kotom drugega ogla, ne moremo jednega ogla tako položiti v drugega, da bi se stikali njiju robi. Taka dva ogla se imenujeta *somerna* ali *simetrična* in sta si kakor desna in leva roka, ali kakor predmet in njega podoba v zrcalu.

Somerni ogli = symmetrische Ecken.

Mreža = das Netz.

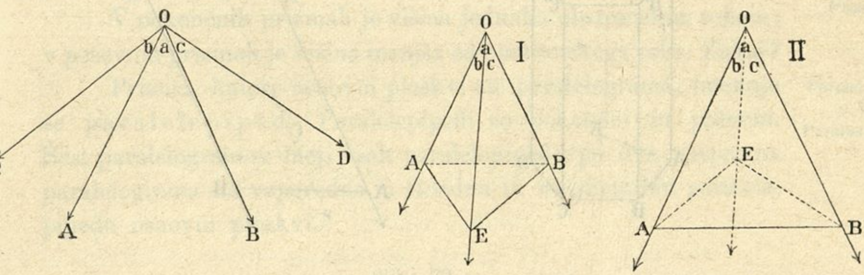
Mreža trirobnega ogla.

Ako odvijemo in razgrnemo v mislih vse obstranske ploskve telesnega ogla v jedni in isti ravnini drugo poleg druge, stvorimo sliko, v kateri ležijo robovni koti jeden poleg drugega. Ta slika se imenuje *mreža* telesnega ogla. Obratno moremo iz mreže napraviti telesni ogel, ako zavrtimo primerno ravnine dotičnih kotov okoli skupnih krakov tako, da se stikata skrajna (neskupna) kraka. N. pr. Ako hočemo iz treh določenih kotov $AOB = a$, $AOC = b$ in $BOD = c$ (slika 68.), izmed katerih je kot a največji, narediti trirobni ogel, treba je ravnini AOC in BOD na sprednjo ali na zadnjo stran ravnine AOB za toliko zavrteti drugo proti drugi okoli polutrakov OA in OB, da se polutraka OC in OD stikata v robu OE. Primerjaj stiko! Dva taka ogla, kakoršnega kaže slika I., ali kakoršnega kaže slika II., sta skladna. Ogla, ki se nahajata v sliki 68., sta somerna ali simetrična.

Lastnost robovnih kotov trirobnega ogla.

Iz mreže, ki se nahaja v sliki 68., ne dobimo trirobnega ogla, ako bi se ne stikala polutraka OC in OD, ali ako bi se to zgodilo v ravnini AOB. Trirobni ogel nastane le tedaj, kadar se polutraka OC in OD stikata zunaj ravnine AOB; to pa je le mogoče, ako je vsota kotov b in $c$večja od kota a. Ker pa je kot a največji izmed kotov a, b in c, zato je tudi $a + b > c$ in $a + c > b$. Iz navedenega izvajamo:

Slika 68.



V vsakem trirobnem oglu je vsota po dveh robovnih kotov večja od tretjega.

Lastnost robovnih kotov vsakega ogla.

Ako se večajo robovni koti določenega ogla, postaja ogel vedno bolj in bolj top. Če ležijo konečno vse obstranske ploskve v jedni in isti ravnini, izgine ogel in vsota vseh robovnih kotov znaša v tem slučaji štiri prave kote. Iz tega izvajamo:

V vsakem oglu znaša vsota vseh robovnih kotov manj ko štiri prave kote.

§ 30. Prizma v obče.

Prizma = das Prisma. Kako nastane prizma.

Mislimo si mnogokotnik $ABCDE$ (slika 69. I.), ki se pomika po prostoru do lege $A'B'C'D'E'$ tako, da drči n. pr. oglišče A po določeni daljici AA' in da ostane vsaka mnogokotnikova stranica vzporedna s svojo prvotno lego! Med takim pomikanjem načrtajo mnogokotnikova oglišča daljice AA',

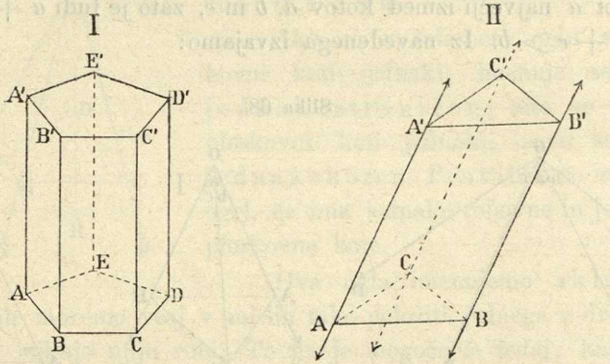
BB', . . ., ki so vzporedne in jednake, mnogokotnikove stranice narišejo paralelograme, in mnogokotnikova ploskev načrta telo, ki se imenuje *prizma*.

Prizmatični prostor = der prismatische Raum.

Prizma utegne nastati tudi na drug način. Ako drči premica po obsegu določenega mnogokotnika ABC (slika 69. II.) tako, da ostane vedno vzporedna s svojo prvotno lego, nastane na dve strani neomejen prostor, ki ga zovemo *prizmatični prostor*. Premikajočo se premico imenujemo (*premico*) *tvornico*, mnogokotnikov obseg pa, po katerem drči tvornica, zovemo (*črto*) *vodnico*. Ako presečemo prizmatični prostor z dvema vzporednima ravninama, stvorimo med tema ravninama telo, ki se zove *prizma*.

Tvornica = die erzeugende Gerade.

Slika 69.



Vodnica = die Leitlinie oder das Leitpolygon.

Osnovna ploskev = die Grundfläche. Obstranska ploskev = die Seitenfläche.

Prizmo omejujeta dva vzporedna in skladna mnogokotnika in ob straneh toliko paralelogramov, kolikor ima vsak izmed mnogokotnikov stranic. Vzporedna in skladna mnogokotnika se imenujeta *osnovni ploskvi*, paralelogrami ob straneh pa *obstranske ploskve*.

Rob = die Kante. Osnovni rob = die Grundkante. Obstranski rob = die Seitenkante.

Presečnice po dveh mejnih prizminih ploskev se zovejo *prizmini robi*. Robi so *osnovni* in *obstranski*; v osnovnih robih se sečejo obstranske ploskve z osnovnima ploskvama, v obstranskih robih pa le obstranske ploskve med seboj. *Obstranski robi so vzporedni in jednaki.* Ali se nahajajo med osnovnimi robi tudi vzporedni in jednaki?

Oglišče = der Eckpunkt. Ogel = die Ecke.

Točke, v katerih se sečejo po trije prizmini robi, imenujejo se *prizmina oglišča*. *Prizmin ogel* je prostor, katerega omejujejo po tri prizmine ploskve, ki se sečejo v jedni in isti točki. Kolikerorobni so prizmini ogli?

Pravokotnica, spuščena od jedne osnovne ploskve na drugo, se zove **prizmina višina**.

Prizmina višina.

Z ozirom na lego obstranskih robov proti osnovnima ploskvama, delimo prizme v **pokončne** in **poševne**. Primerjaj sliko 69.! V pokončnih prizmah stoje obstranski robi pravokotno na osnovnih ploskvah, v poševnih pa poševno. Prizma se imenuje **jednakorobna**, ako so vsi njeni robi jednaki. Pokončna prizma, katere osnovni ploskvi ste pravilna mnogokotnika, zove se **pravilna** prizma.

Pokončna in poševna prizma = das gerade und schiefe Prisma.
Jednakorobna prizma = das gleichkantige Prisma.
Pravilna prizma = das regelmäßige oder reguläre Prisma.

Z ozirom na število obstranskih ploskev ali obstranskih robov razločujemo **tristranične** ali **trirobne**, **četverostranične** ali **četverorobne**, . . . **mnogostranične** ali **mnogorobne** prizme.

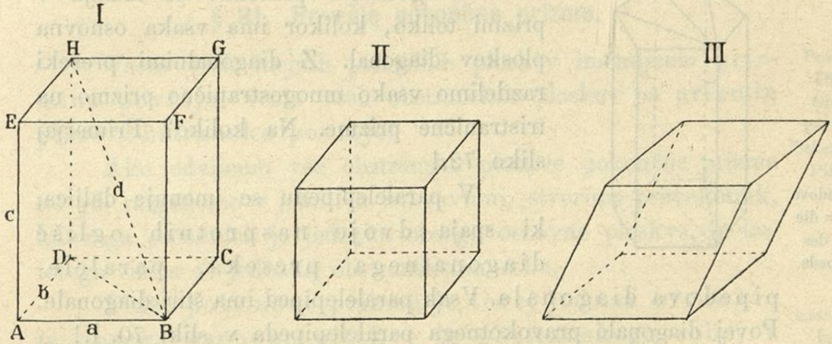
Tristranična prizma = das dreiseitige Prisma.

V pokončnih prizmah je višina jednaka obstranskim robom; v poševnih prizmah je višina manjša od obstranskega roba. Zakaj?

Prizma, katere osnovni ploskvi ste paralelograma, imenuje se **paralelepiped**. Paralelepipedi so pokončni in poševni. Šest paralelogramov meji vsak paralelepiped; po dva nasprotna paralelograma sta vzporedna in skladna in utegneta biti paralelepipedu osnovni ploskvi.

Paralelepiped = das Parallelepiped.

Slika 70.



Ako ste osnovni ploskvi pokončnega paralelepipeda pravokotnika, pravimo mu **pravokotni paralelepiped** (slika 70. I.). Šest pravokotnikov meji pravokotni paralelepiped.

Ako je pravokotni paralelepiped jednakoroben, imenuje se **kocka** ali **kub** (slika 70. II.). Šest jednakih kvadratov meji kocko.

Pravokotni paralelepiped = das rechtwinklige Parallelepiped.
Kocka = der Würfel oder Cubus.

Romboeder = das Rhomboëder.

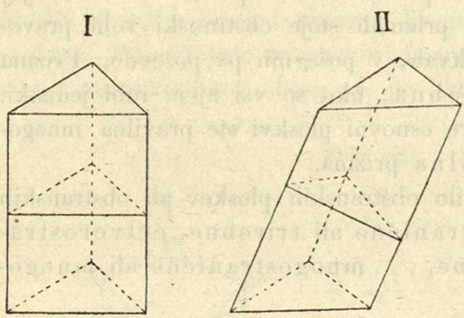
Ako je poševni paralelepiped jednakoroben, zove se romboeder (slika 70. III.). Šest rombov meji romboeder.

Vzporedni presek = der Parallelschnitt.

Poprečni presek = der Querschnitt.

Ako presečemo prizmo z ravnino, ki je vzporedna z osnovno ploskvijo, je presek mnogokotnik, ki je skladen z osnovno ploskvijo. Ta presek se imenuje vzporedni presek. Primerjaj sliko 71. I.! Lik vsakega drugega poprečnega preseka (t. j. preseka, ki zadene vse obstranske robe) je mnogokotnik, ki ima toliko stranic, kolikor jih ima osnovna ploskev. Pri poševnih prizmah je važen pravokotni ali normalni presek, t. j. tisti poprečni presek, ki stoji pravokotno na obstranskih robih. Primerjaj sliko 71. II.!

Slika 71.

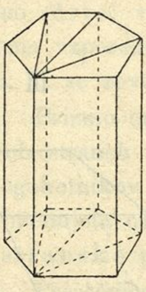


Pravokotni presek = der Normalschnitt.

Diagonalni presek = der Diagonalschnitt.

Ako položimo skoz dva nasprotna obstranska roba (t. j. dva roba, ki ne ležita v jedni in isti obstranski ploskvi) ravnino, dobimo za presek paralelogram. Ta presek se imenuje diagonalni presek. Diagonalnih presekov se nahaja v prizmi toliko, kolikor ima vsaka osnovna ploskev diagonal. Z diagonalnimi preseki razdelimo vsako mnogostranično prizmo na tristranične prizme. Na koliko? Primerjaj sliko 72.!

Slika 72.



Paralelepipedova diagonala = die Diagonale des Parallelepipeds.

V paralelepipedu se imenuje daljica, ki spaja dvoje nasprotnih oglišč diagonalnega preseka, paralelepipedova diagonala. Vsak paralelepiped ima štiri diagonale. Povej diagonale pravokotnega paralelepipeda v sliki 70. I.!

Kako izračunaš diagonalo pravokotnega paralelepipeda.

V pravokotnem trikotniku BDH (slika 70. I.) je po Pitagorovem izreku

$$d^2 = \overline{BD}^2 + c^2,$$

in iz pravokotnega trikotnika ABD izračunamo po istem izreku

$$\overline{BD}^2 = a^2 + b^2;$$

torej je

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

t. j.

Kvadrat nad diagonalo pravokotnega paralelepipeda je jednak vsoti kvadratov treh stikajočih se robov.

Diagonale pravokotnega paralelepipeda so jednake; kajti robi vsakega ogla so a, b in c.

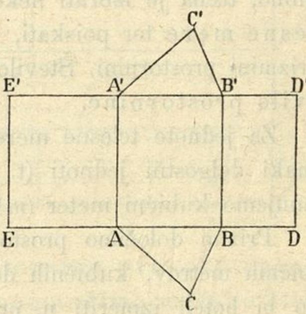
Kockina diagonala je

$$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

Kako torej izračunaš kockino diagonalo?

Ako načrtamo v ravnini vse prizmo meječe ploskve drugo poleg druge tako, da dadó izrezane in primerno zložene prizmo, dobimo prizmino mrežo. Slika 73. predočuje mrežo tristranične prizme. $BD = BC$ in $AE = AC$.

Slika 73.



Prizmina mreža = das Netz des Prisma.

§ 31. Površje pokončne prizme.

Vsoto vseh mejnih prizminih ploskev imenujemo prizmino površje, vsoto vseh obstranskih ploskev pa prizmin plašč (obstransko površje).

Površje = die Oberfläche. Obstransko površje = die Seitenoberfläche. Plašč = der Mantel.

Ako odvijemo vse obstranske ploskve pokončne prizme ter jih razgrnemo v jedni in isti ravnini, stvorimo pravokotnik, katerega osnovnica je jednaka obsegu osnovne ploskve, in katerega višina je jednaka obstranskemu robu.

Plašč pokončne prizme je torej jednak produktu iz obsega osnovne ploskve in obstranskega roba, v znakih

$$p = o \times v.$$

Kako izračunaš plašč in površje pokončne prizme.

Prizmino površje najdemo, ako prištejemo dvojni osnovni ploskvi plašč, v znakih

$$P = 2O + p.$$

Kako izračunaš kockino površje.

Kockino površje najdemo, ako pomnožimo ploščino jednega mejnega kvadrata s 6, v znakih

$$P = 6s^2.$$

Površji dveh kock ste sorazmerni s kvadratoma njunih robov. Kajti iz obrazcev

$$P_1 = 6s_1^2 \text{ in } P_2 = 6s_2^2$$

najdeš sorazmerje

$$P_1 : P_2 = s_1^2 : s_2^2.$$

§ 32. Prostornina pokončne prizme.

Prostornina = der Rauminhalt oder das Volumen.
Mersko število = die Maßzahl.
Jednota telesne mere = die Einheit des Volumens.
Kubični meter = das Cubikmeter.

Prostor, katerega oklepajo mejne prizmine ploskve, imenujemo prizmino prostornino. Ako je prizmi določiti prostornino, treba je izbrati neko znano telo (kocko) za jednoto telesne mere ter poiskati, kolikokrat se to znano telo nahaja v prizmini prostornini. Število, katero to pove, zove se mersko število prostornine.

Za jednoto telesne mere jemljemo kocko, katere robi so jednaki dolgostni jednoti (t. j. 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm*, 1 *mm*), ter jo imenujemo kubični meter (m^3), kubični decimeter (dm^3) i. t. d.

Neposredno merjenje prizmine prostornine.

Prizmi določimo prostornino s tem, da povemo, koliko kubičnih metrov, kubičnih decimetrov i. t. d. se nahaja v njej. Ako bi hoteli izmeriti n. pr. prostornino šolske sobe, položili bi v njo kubični meter tolikokrat, kolikorkrat je mogoče; ako bi dobili ostanek, ki je manjši od kubičnega metra, položili bi v njega kubični decimeter tolikokrat, kolikorkrat je mogoče; naslednji ostanek bi istotako izmerili s kubičnim centimetrom. Na ta način bi zvedeli, koliko kubičnih metrov, decimetrov in centimetrov meri šolska soba. Toda tako neposredno merjenje prizmine prostornine je premudno in dostikrat celo nemogoče; zato določamo prizmino prostornino posredno tako, da jo izračunamo iz merskih števil daljic in ploskev, od katerih je odvisna.

Prostorno jednak = inhaltsgleich.

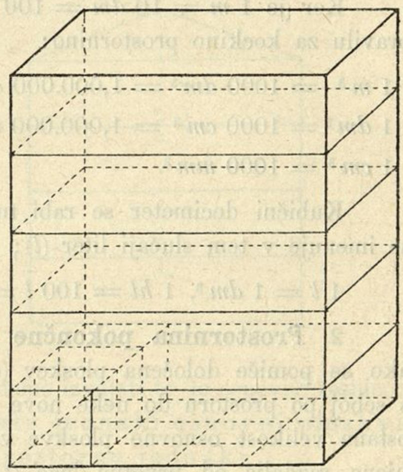
Dve prizmi, ki imate jednaki prostornini, imenujemo prostorno jednaki.

1. Prostornina pravokotnega paralelepipeda.

Kako izračunaš prostornino pravokotnega paralelepipeda.

Načrtajmo pravokotni paralelepiped (slika 74.), katerega osnovna roba merita 4 *dm* in 3 *dm*, obstranski rob pa 5 *dm*! Osnovna ploskev temu paralelepipedu je pravokotnik, katerega ploščina znaša 4 $\times$ 3 = 12 kvadratnih decimetrov. Ako položimo na osnovno ploskev 12 kubičnih decimetrov, pokrijemo jo popolnoma; v paralelepipedu dobimo plast, ki je 1 *dm* visoka. Na to prvo plast moremo položiti drugo, ravno tako veliko in visoko plast, t. j. plast, katero sestavlja 12 dm^3. Če ponavljamo tako polaganje kubičnih decimetrov v pravokotni paralelepiped, dobimo v njem toliko jednakih plastij, kolikorkrat se nahaja višina jedne plasti v paralelepipedovi višini, t. j. pet plastij. Paralelepipedova prostornina znaša torej 5 krat 12 = 60 kubičnih decimetrov.

Slika 74.



Iz navedenega umovanja smemo izvajati ta le izrek:

Mersko število za prostornino pravokotnega paralelepipeda najdemo, ako pomnožimo mersko število osnovne ploskve z merskim številom njegove višine.

Ali krajše:

Prostornina pravokotnega paralelepipeda je jednaka produktu iz osnovne ploskve in višine, v znakih

$$k = O \times v.$$

Ker izračunamo osnovno ploskev iz dveh osnovnih stikajočih se robov, in ker je višina jednaka obstranskemu robu, smemo tudi reči:

Prostornina pravokotnega paralelepipeda je jednaka produktu treh stikajočih se robov, v znakih

$$k = a \times b \times c.$$

Vsako kocko smemo smatrati za pravokotni paralelepiped. Navedeno umovanje velja torej tudi o kocki. Ker so kockini robi jednaki, dobimo za njeno prostornino obrazec

Kako izračunaš kockino prostornino.

$$k = s^3.$$

Kockina prostornina je jednaka tretji potenci njenega roba.

Prostornini dveh kock ste sorazmerni s tretjima potencama njunih robov, v znakih

$$k_1 : k_2 = s_1{}^3 : s_2{}^3.$$

Kako so odvisne jednote telesne mere druga od druge.

Ker je 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm, najdeš po pravilu za kockino prostornino:

1 m^3 = 1000 dm^3 = 1,000.000 cm^3 = 1000,000.000 mm^3,
1 dm^3 = 1000 cm^3 = 1,000.000 mm^3,
1 cm^3 = 1000 mm^3.

Kubični decimeter se rabi tudi kot mera za tekočine in se imenuje v tem slučaji liter (l); 100 l je 1 hektoliter (hl).

1 l = 1 dm^3, 1 hl = 100 l = 100 dm^3 = 0·1 m^3.

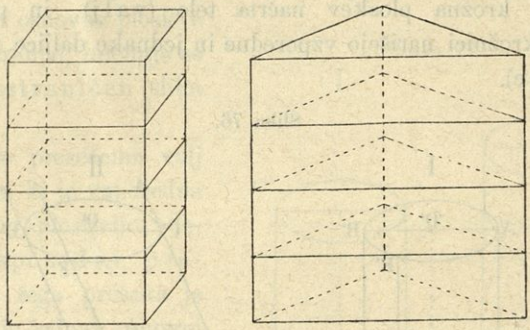
2. **Prostornina pokončne prizme.** Prizma se stvori, ako se pomiče določena ploskev (osnovna ploskev) vzporedno s seboj po prostoru do neke nove lege. Med tem pomikanjem ostane velikost osnovne ploskve vedno ista, izpreminja se le njena razdalja od prvotne lege (t. j. prizmina višina). Ravno tako, kakor se veča ta razdalja, mora se večati tudi prizmi prostornina. Kajti če postane razdalja dve-, tri-, štirikrat . . . tolika, dobimo v prizmini prostornini oziroma dve-, tri-, štirikrat . . . toliko manjših prizem, ki imajo jednake osnovne ploskve in jednake višine in se dadó vsaj v mislih druga v drugo položiti tako, da se stikajo vse njih mejne ploskve. Prizmina prostornina je torej odvisna od prizmine višine.

Od česa je odvisna prizmina prostornina.

Razume se samo po sebi, da je prizmina prostornina odvisna tudi od velikosti premikajoče se osnovne ploskve; čim večja je osnovna ploskev, tem več prostora mora zavzimati.

Mislimo si dve prizmi, ki imate jednaki osnovni ploskvi in jednaki višini (slika 75.)! Ako razdelimo višini obeh prizem na istotoliko jednakih delov, in ako napravimo skoz vsako razdelišče vzporedni presek, dobimo iz vsake prizme istotoliko manjših prizem (plastij); vse te plasti imajo jednake osnovne ploskve in jednake višine. Navedeno deljenje prizem ponavljamo lahko (vsaj v mislih) tako dolgo, dokler ne postanejo posamezne plasti neizrečeno tanke. Te plasti so podobne prizmam, ki imajo neizrečeno majhno višino; imenovati jih hočemo prvotne plasti. Ker se v prvotnih plastéh že skoro stikate spodnja in zgornja ploskev, smemo trditi, da so prvotne plasti obeh prizem prostorno jednake. Vsako izmed prizem v sliki 75. sestavlja potem istotoliko prvotnih plastij, ki so med seboj prostorno jednake.

Slika 75.



Iz navedenih pojasnil smemo izvajati to-le osnovno resnico:

Dve prizmi, ki imate jednaki osnovni ploskvi in jednaki višini, ste prostorno jednaki.

Kavalieri-jevo načelo = der Grundsatz oder das Princip von Cavalieri.

Ta osnovna resnica (Kavalieri-jevo načelo) ne velja samo o pokončnih prizmah, temveč o vseh prizmah sploh.

Kako izračunaš prostornino pokončne prizme.

Po Kavalieri-jevem načelu je vsaka prizma prostorno jednaka pravokotnemu paralelepipedu, ki ima jednako osnovno ploskev in jednako višino kakor prizma. Prizmino prostornino izračunaš torej po istem pravilu, po katerem določiš prostornino pravokotnega paralelepipeda.

Prizmina prostornina je jednaka produktu iz osnovne ploskve in višine, v znakih

$$k = O \times v.$$

Prostornini dveh prizem z jednakima osnovnima ploskvama ste si kakor njuni višini. Kajti iz obrazcev

$$k_1 = O \times v_1 \quad \text{in} \quad k_2 = O \times v_2$$

najdeš sorazmerje

$$k_1 : k_2 = v_1 : v_2.$$

Prostornini dveh prizem z jednakima višinama ste si kakor njuni osnovni ploskvi, v znakih

$$k_1 : k_2 = O_1 : O_2.$$

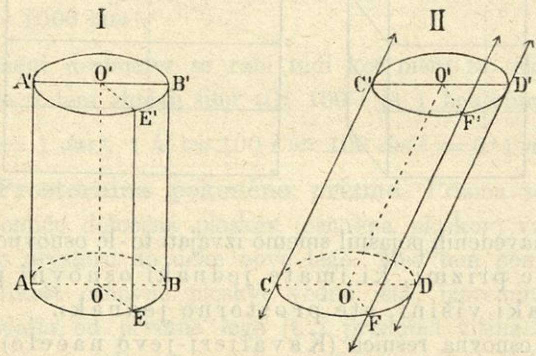
§ 33. Valj v obče.

Valj = der Cylinder.

Kako nastane valj.

Ako se krožna ploskev pomika po prostoru do neke nove lege tako, da ostane vedno vzporedna s svojo prvotno lego in da drči središče O po določeni daljici OO' (slika 76. I.), nariše krožnica krivo ploskev (valjevo ploskev ali valjev plašč), krožna ploskev načrta telo (valj), in posamezne točke v krožnici narišejo vzporedne in jednake daljice (valjeve stranice).

Slika 76.



Valjev prostor = der cylindrische Raum. Valjeva ploskev = die Cylinderfläche. Tvornica = die erzeugende Gerade. Vodnica = die Leitlinie oder der Leitkreis.

Valj nastane tudi na drug način. Ako drči premica CC' (slika 76. II.) po obodu določenega kroga tako, da ostane vedno vzporedna s svojo prvotno lego, načrta krivo ploskev (valjevo ploskev). Ta ploskev oklepa na dve nasprotni strani neomejen prostor, ki se imenuje valjev prostor. Ako presečemo valjev prostor z vzporednima ravninama, dobimo valj. Premico, ki nariše valjevo ploskev, imenujemo tvornico, krožnico pa, po kateri drči tvornica, zovemo vodnico.

Osnovni ploskvi. Plašč. Višina. Os = die Achse. Valjeva stranica = die Seitenlinie des Cylinders.

Valj je telo, katero mejé dva vzporedna in jednaka kroga in ob straneh kriva ploskev. Kroga se imenujeta osnovni ploskvi, kriva ploskev ob straneh pa se zove valjev plašč. Razdalja osnovnih ploskev (t. j. pravokotnica, spuščena od jedne osnovne ploskve na drugo) je valjeva višina. Daljici, ki spaja središči osnovnih ploskev, je ime os, in tistemu delu tvornice, ki leži med osnovnima ploskvama, pravimo valjeva stranica.

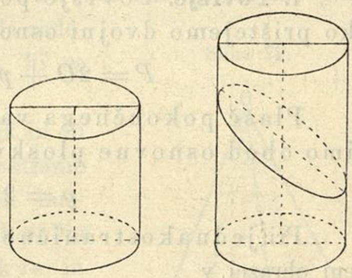
Valjeve stranice so vzporedne in jednake osi.

Pokončni in poševni valj = der gerade und schiefe Cylinder. Jednakostranični valj = der gleichseitige Cylinder.

Valj je ali pokončen ali poševen. Pokončen je valj, ako stoji njegova os pravokotno na osnovni ploskvi, sicer pa je poševen. V pokončnem valji so višina, os in stranice med seboj jednake; v poševnem valji so stranice jednake osi, višina pa je manjša od osi. Pokončen valj stvorimo, ako zavrtimo pravokotnik okoli jedne stranice. Tisti pokončni valj, v katerem je premer osnovne ploskve jednak stranici, imenuje se jednakostraničen (slika 77. I.).

Slika 77.

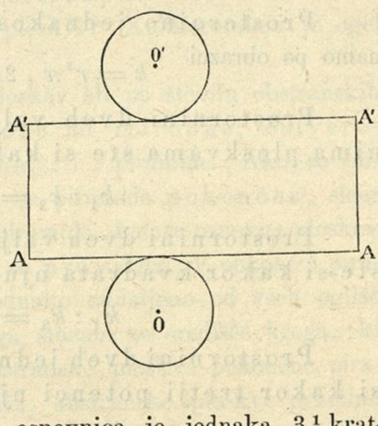
I II



Vzporedni presek. Poprečni presek. Elipsa = die Ellipse. Osji presek = der Achsenschnitt.

Ako presečemo valj z ravnino, ki je vzporedna z osnovno ploskvijo, dobimo vzporedni presek; lik tega preseka je krog, ki je jednak osnovni ploskvi. Če pa presečemo valj z ravnino, ki ni vzporedna z osnovno ploskvijo, ki pa zadeva vse valjeve stranice, dobimo za presek podolgovato krivo črto, ki se imenuje elipsa (slika 77. II.). Ako položimo ravnino skoz os, nastane osji presek. Liki osjih presekov v pokončnem valji so skladni pravokotniki; liki osjih presekov v poševnem valji so poševnokotni paralelogrami; liki osjih presekov v jednakostraničnem valji so jednaki kvadrati. Primerjaj sliki 76. in 77.!

Slika 78.



Odviti valjev plašč.

Ako prerežemo plašč pokončnega valja po neki stranici, ga odvijemo in razgrnemo v ravnino, dobimo pravokotnik, katerega osnovnica je jednaka obodu osnovne ploskve, in katerega višina je jednaka valjevi stranici.

Valjeva mreža.

Mrežo pokončnega valja sestavljata dva jednaka kroga, ki se dotikata pravokotnika, čegar osnovnica je jednaka $3\frac{1}{7}$kratnemu krogovemu premeru (slika 78.).

Sorodnost med valjem in prizmo.

Ako primerjamo pojasnila pri valji pojasnilom pri prizmi, spoznamo takoj sorodnost teh dveh teles. Valj smemo smatrati za prizmo, kateri ste osnovni ploskvi pravilna mnogokotnika z brezštevilno mnogimi stranicami.

§ 34. Površje in prostornina pokončnega valja.

Površje in prostornino pokončnega valja izračunamo po istih občnih pravilih, katera smo navedli pri prizmi.

Kako izračunaš plašč in površje pokončnega valja.

1. **Površje.** Površje pokončnega valja določimo, ako prištejemo dvojni osnovni ploskvi plašč, v znakih

$$P = 2O + p, \quad O = r^2 \pi.$$

Plašč pokončnega valja najdemo, ako pomnožimo obod osnovne ploskve s stranico, v znakih

$$p = 2r\pi \,.\, s.$$

Pri jednakostraničnem valji izpremenijo se navedeni obrazci v

$$O = r^2\pi, \quad p = 4r^2\pi, \quad P = 6r^2\pi.$$

Primerjaj osnovno ploskev, plašč in površje jednakostraničnega valja, ter povej in zapiši, kako sta si osnovna ploskev in plašč, osnovna ploskev in površje, plašč in površje! Kako sta si plašča, oziroma površji dveh jednakostraničnih valjev?

Kako izračunaš valjevo prostornino.

2. **Prostornina.** Valjeva prostornina je jednaka produktu iz osnovne ploskve in višine, v znakih

$$k = r^2\pi \,.\, v.$$

Prostornino jednakostraničnega valja izračunamo po obrazci

$$k = r^2\pi \,.\, 2r = 2r^3\pi.$$

Prostornini dveh valjev z jednakima osnovnima ploskvama ste si kakor njuni višini, v znakih

$$k_1 : k_2 = v_1 : v_2.$$

Prostornini dveh valjev z jednakima višinama ste si kakor kvadrata njunih polumerov, v znakih

$$k_1 : k_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Prostornini dveh jednakostraničnih valjev ste si kakor tretji potenci njunih polumerov, v znakih

$$k_1 : k_2 = r_1^3 : r_2^3.$$

§ 35. Piramida v obče.

Ako se vrti polutrak OA (slika 79.) okoli svojega krajišča O in ob jednem drči po obsegu določenega mnogokotnika $ABCD$, dokler ne pride v svojo prvotno lego, nariše vrteči se polutrak toliko ravnin, kolikor stranic ima mnogokotnik. Te ravnine oklepajo na jedno stran neomejen prostor, ki se zove telesni ogel ali piramidast prostor. Vrteči se polutrak imenujemo tvornico, obseg določenega mnogokotnika, po katerem drči tvornica, pa zovemo vodnico. Ako presečemo piramidast prostor z ravnino tako, da zadenemo vse robe, stvorimo telo, ki se imenuje piramida.

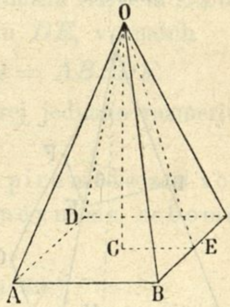
Piramida = die Pyramide.

Piramidast prostor = der pyramidale Raum.

Tvornica.

Vodnica.

Slika 79.



Piramido meji mnogokotnik in ob straneh toliko trikotnikov, kolikor stranic ima mnogokotnik. Mnogokotnik imenujemo osnovno ploskev, trikotnike ob straneh obstranske ploskve in vsoto vseh obstranskih ploskev piramidin plašč. Presečnice osnovne ploskve z obstranskimi ploskvami so osnovni robi, presečnice po dveh sosednih obstranskih ploskev pa so obstranski robi. Točka O, v kateri se stikajo vsi obstranski robi in vse obstranske ploskve, zove se vrh ali teme. Pravokotnica OG, spuščena iz vrha na osnovno ploskev, imenuje se višina. Višina vsake obstranske ploskve (n. pr. OE) se zove obstranska višina. Kolikerostranični so ogli na osnovni ploskvi? Kolikeroroben je ogel ob vrhu?

Osnovna ploskev.

Obstranske ploskve.

Plašč.

Osnovni rob.

Obstranski rob.

Vrh ali teme = die Spitze oder der Scheitel.

Višina.

Obstranska višina = die Seitenhöhe.

Po številu obstranskih ploskev ali po številu obstranskih robov razločujemo tristranične ali trirobne, četverostranične ali četverorobne, . . . piramide. Ako so obstranski robi jednaki, imenuje se piramida pokončna, sicer pa poševna. Tista pokončna piramida, katere osnovna ploskev je pravilni mnogokotnik, zove se pravilna. V pokončni piramidi je višinino podnožišče jednako oddaljeno od vseh oglišč osnovne ploskve in smatrati ga smemo za središče kroga, ki je osnovni ploskvi očrtan. Obstranske ploskve pokončne piramide so jednakokraki trikotniki, obstranske ploskve pravilne piramide pa so skladni jednakokraki trikotniki.

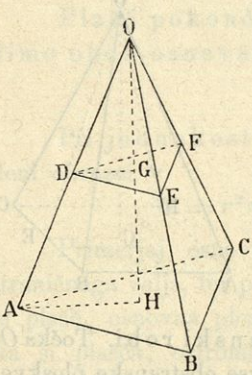
Tristranična ali trirobna piramida.

Pokončna, poševna in pravilna piramida.

Jednakorobna piramida = die gleichkantige Pyramide.

Piramida, kateri so vsi robi jednaki, imenuje se jednakorobna. Ker so obstranski robi take piramide jednaki, dá se osnovni ploskvi očrtati krog, in ker so tudi osnovni robi jednaki, mora osnovna ploskev biti pravilni mnogokotnik. Torej je vsaka jednakorobna piramida pravilna. Obstranske ploskve so skladni jednakostranični trikotniki. Ker meri vsak kot jednakostraničnega trikotnika 60^0, in ker znaša pri vsakem oglu vsota vseh robovnih kotov manj ko 360^0, morejo sestavljati ogel ob vrhu jednakorobne piramide ali trije ali štirje ali pet jednakostraničnih trikotnikov. Jednakorobne piramide so torej ali tri- ali četvero- ali peterostranične.

Slika 80.



Vzporedni presek. Lik vzporednega preseka je podoben osnovni ploskvi.

Ako presečemo piramido $OABC$. . (slika 80.) z ravnino, ki je vzporedna z osnovno ploskvijo, dobimo za presek mnogokotnik DEF. . ., ki ima istotoliko stranic kakor osnovna ploskev. Stranice mnogokotnika DEF . . . so zaporedoma vzporedne s stranicami osnovne ploskve ABC . . . Povej, katere stranice so vzporedne in zakaj! Koti mnogokotnikov DEF . . . in ABC . . . imajo torej vzporedne krake v istem smislu in so zato jednaki, in sicer je $\sphericalangle FDE = CAB$, $\sphericalangle DEF = ABC$ i. t. d. Istoležne stranice DE in AB, EF in BC omenjenih mnogokotnikov se nahajajo v podobnih trikotnikih DEO in ABO, EFO in BCO (zakaj so ti trikotniki podobni?) in so zato sorazmerne z istoležnima stranicama EO in BO, v znakih

$$DE : AB = EO : BO \text{ in } EF : BC = EO : BO.$$

Razmerje med stranicama DE in AB je torej jednako razmerju med stranicama EF in BC. Na isti način dokažemo, da ste v mnogokotnikih DEF . . . in ABC . . . tudi dve drugi sosedni dvojici istoležnih stranic sorazmerni. Mnogokotnika DEF . . . in ABC . . . sta torej podobna, ker se ujemata v vseh kotih, in ker so njiju istoležne stranice sorazmerne.

Ako presečemo piramido z ravnino, ki je vzporedna z osnovno ploskvijo, dobimo za presek mnogokotnik, ki je podoben osnovni ploskvi.

Z vsakim *vzporednim presekom* razdelimo piramido na dva dela, na *prisekano piramido* $ABCDEF$ (slika 80.), ki leži med osnovno ploskvijo in vzporedno ravnino, in na *dopolnilno piramido* $DEFO$. Osnovna ploskev dopolnilne piramide je lik vzporednega preseka. Prisekano piramido mejita dva vzporedna in podobna mnogokotnika (*osnovni ploskvi*) in ob straneh toliko trapezov, kolikor stranic ima vsaka osnovna ploskev. Višini OH in OG prvotne in dopolnilne piramide se nahajate v podobnih trikotnikih AHO in DGO (zakaj sta ta dva trikotnika podobna?) in ste zato sorazmerni z istoležnima stranicama AO in DO; te dve stranici se nahajate tudi v dveh drugih podobnih trikotnikih, namreč v trikotnikih ABO in DEO, in ste zato sorazmerni s stranicama AB in DE, v znakih

Prisekana piramida = der Pyramidenstumpf.
Dopolnilna piramida = die Ergänzungspyramide.

$$OH : OG = AO : DO \text{ in } AO : DO = AB : DE.$$

Razmerje med višinama OH in OG je torej jednako razmerju med istoležnima stranicama AB in DE.

Višini prvotne in dopolnilne piramide ste sorazmerni z dvema istoležnima osnovnima roboma teh piramid, v znakih

Kako ste si višini prvotne in dopolnilne piramide.

$$OH : OG = AB : DE \text{ (slika 80.).}$$

Ploščini dveh podobnih mnogokotnikov ste sorazmerni s kvadratoma dveh istoležnih stranic (primerjaj § 18.), v znakih

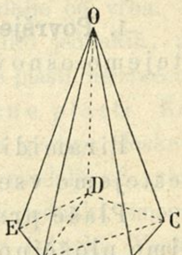
$$ABC \ldots : DEF \ldots = \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 \text{ (slika 80.).}$$

Ker pa ste istoležni stranici AB in DE po prejšnjem izreku sorazmerni z razdaljama OH in OG, v znakih

$$AB : DE = OH : OG,$$

smemo namesto razmerja $AB : DE$ postaviti razmerje $OH : OG$ in najdemo tako sorazmerje

Slika 81.



$$ABC \ldots : DEF \ldots = \overline{OH}^2 : \overline{GO}^2,$$

t. j.: *Pri vsaki piramidi sta osnovna ploskev in vzporedni presek sorazmerna s kvadratoma razdalj teh ploskev od vrha.*

Kako sta si osnovna ploskev in vzporedni presek pri piramidi.

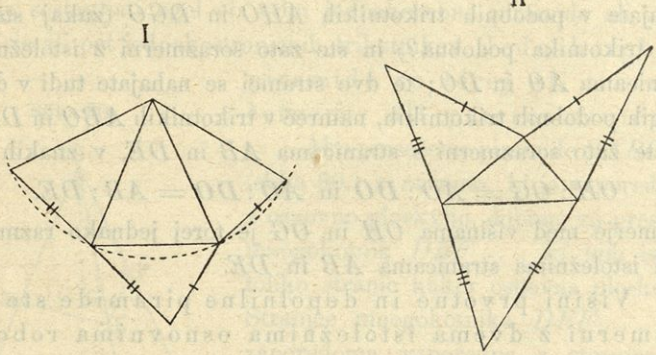
Ako položimo pri mnogostranični piramidi (slika 81.) ravnino skoz dva *nasprotna obstranska roba* (to sta dva roba, ki ne ležita v jedni in isti obstranski ploskvi), stvorimo *diagonalni*

Diagonalni presek = der Diagonalschnitt.

presek. Lik diagonalnega preseka je trikotnik. Kedaj je ta trikotnik jednakokrak, kedaj raznostraničen? Ali more lik diagonalnega preseka biti tudi jednakostraničen trikotnik? Imenuj diagonalne preseke v sliki 81.!

Z diagonalnimi preseki razdelimo vsako mnogostranično piramido na tristranične piramide. Na koliko?

Slika 82.



Piramidina mreža.

Piramidi načrtaš *mrežo*, ako narišeš vse obstranske trikotnike drugega poleg drugega tako, da je vrh vsem skupen; potem načrtaš osnovno ploskev pod kateregakoli teh trikotnikov. *Piramidino mrežo* stvoriš tudi, ako načrtaš nad stranicami osnovne ploskve obstranske trikotnike. Slika 82. I. predočuje mrežo pokončne tristranične piramide in slika 82. II. mrežo poševne tristranične piramide.

§ 36. Površje in prostornina pokončne piramide.

Kako izračunaš piramidin plašč in piramidino površje.

1. **Površje.** *Piramidi določimo površje, ako prištejemo osnovni ploskvi plašč, v znakih*

$$P = O + p.$$

Piramidin plašč najdemo, ako izračunamo in seštejemo vse obstranske ploskve.

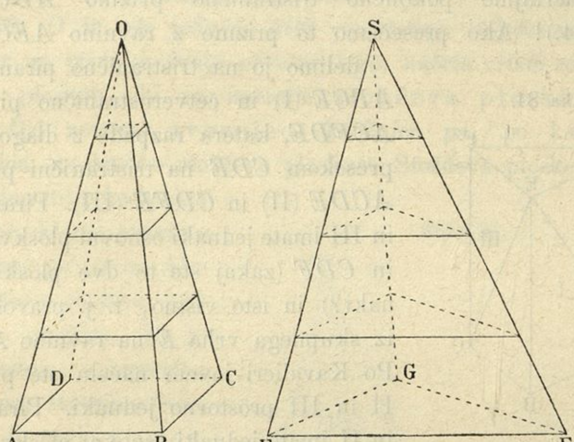
Plašč pravilne piramide najdemo, ako pomnožimo ploščino jedne obstranske ploskve s številom obstranskih ploskev.

Ploščina vsake obstranske ploskve je jednaka polovici produkta iz dotičnega osnovnega roba in dotične obstranske višine.

2. **Prostornina.** Načrtajmo dve piramidi *ABCDO* in *EFGS*, ki imate jednaki osnovni ploskvi in jednaki višini (slika 83.)! Ako si mislimo, da se jednaki osnovni ploskvi *ABCD* in *EFG* teh piramid pomikate vzporedno navzgor do vrha, manjšate se po izreku prejšnjega odstavka ravno tako kakor kvadrata njiju razdalj od vrha. Dve presečni ploskvi, ki imate jednaki razdalji od vrha, morate torej biti jednaki. Ako razdelimo višini obeh piramid na istotoliko jednakih delov ter napravimo skoz vsako razdelišče vzporedni presek, dobimo iz vsake piramide toliko plastij, na kolikor delov smo razdelili višino. Osnovne ploskve dveh plastij v piramidah *ABCDO*

Prostorno jednake piramide.

Slika 83.



in *EFGS* so jednake, ako imajo jednake razdalje od vrha. — Ako razdelimo višini obeh piramid na istotoliko jednakih, pa neizrečeno majhnih delov, postanejo posamezne plasti neizrečeno tanke. Take plasti hočemo imenovati p r v o t n e p l a s t i. Ker se v prvotnih plastéh že skoro stikate zgornja in spodnja ploskev, in ker ste dvema plastéma, ki imate jednaki razdalji od vrha, zgornji ploskvi jednaki in spodnji ploskvi tudi jednaki, smemo trditi, da ste dve taki prvotni plasti prostorno jednaki. Vsako izmed piramid *ABCDO* in *EFGS* sestavlja potem istotoliko prvotnih plastij, ki so zaporedoma po dve in dve prostorno jednake.

Iz navedenih pojasnil izvajamo:

Kavalieri-jevo načelo.

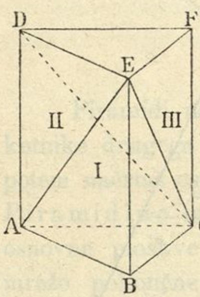
Dve piramidi ste prostorno jednaki, ako imate jednaki osnovni ploskvi in jednaki višini (Kavalieri-jevo načelo).

Kavalieri-jevo načelo velja za pokončne in poševne piramide. Po tem načelu je vsaka mnogostranična piramida prostorno jednaka tristranični, ako imate piramidi jednaki osnovni ploskvi in jednaki višini. Prostornina vsake piramide dá se torej izračunati po jednem in istem pravilu. To pravilo hočemo v naslednjem poiskati za tristranično piramido. V to svrho je treba primerjati tristranično piramido in tristranično pokončno prizmo, ki imate jednaki osnovni ploskvi in jednaki višini.

Pokončna tristranična prizma in tristranična piramida z jednakima osnovnima ploskvama in jednakima višinama.

Načrtajmo pokončno tristranično prizmo $ABCDEF$ (slika 84.)! Ako presečemo to prizmo z ravnino AEC, razdelimo jo na tristranično piramido $ABCE$ (I) in četverostranično piramido $ACFDE$, katera razpade z diagonalnim presekom CDE na tristranični piramidi $ACDE$ (II) in $CDFE$ (III). Piramidi II in III imate jednaki osnovni ploskvi ACD in CDF (zakaj ste te dve ploskvi jednaki?) in isto višino, t. j. pravokotnica iz skupnega vrha E na ravnino $ACFD$. Po Kavalieri-jevem načelu ste piramidi II in III prostorno jednaki. Piramidi I in II imate jednaki osnovni ploskvi ABE in AED (zakaj ste te dve ploskvi jednaki?) in isto višino, t. j. pravokotnica iz skupnega vrha C na ravnino $ABED$. Po Kavalieri-jevem načelu ste tudi piramidi I in II prostorno jednaki. Prostorno jednake piramide I, II, III sestavljajo torej pokončno tristranično prizmo $ABCDEF$, ki ima s piramido I isto osnovno ploskev ABC in isto višino EB.

Slika 84.



Iz navedenega izvajamo:

Tristranična piramida je tretji del pokončne prizme, ki ima s piramido jednako osnovno ploskev in jednako višino.

Kar velja o tristranični piramidi, velja po Kavalieri-jevem načelu tudi o mnogostranični piramidi.

Prostornina vsake piramide je torej jednaka tretjini produkta iz osnovne ploskve in višine, v znakih

Kako izračunaš piramidino prostornino.

$$k = \tfrac{1}{3} O \times v.$$

Prostornini dveh piramid z jednakima osnovnima ploskvama ste si kakor njuni višini, v znakih

$$k_1 : k_2 = v_1 : v_2.$$

Prostornini dveh piramid z jednakima višinama ste si kakor njuni osnovni ploskvi, v znakih

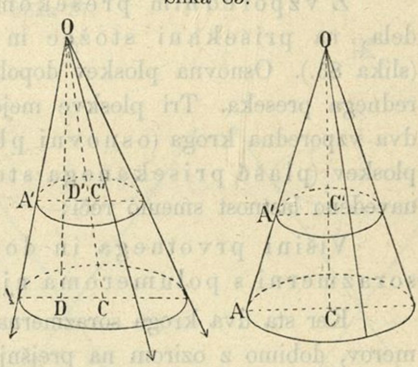
$$k_1 : k_2 = O_1 : O_2.$$

§ 37. Stožec v obče.

Ako se polutrak OA (slika 85.) vrti okoli svojega krajišča O in ob jednem drči po obsegu določenega kroga, dokler ne pride v svojo prvotno lego, načrta vrteči se polutrak krivo ploskev, ki se imenuje *stožčeva ploskev*. Polutrak OA zovemo *tvornico*, krožnico pa, po kateri drči tvornica, *vodnico* stožčeve ploskve. Stožčeva ploskev oklepa na jedno stran neomejen prostor, ki mu pravimo *stožčev prostor*. Ako presečemo stožčev prostor z ravnino, ki je vzporedna z ravnino vodnice, stvorimo telo, ki se imenuje *stožec*.

Stožec = der Kegel. Stožčeva ploskev = die Kegelfläche oder conische Fläche. Stožčev prostor = der kegelförmige oder conische Raum. Tvornica. Vodnica.

Slika 85.



Stožec mejite dve ploskvi, jedna ravna in jedna kriva. Ravna ploskev (krog) se imenuje *osnovna ploskev*, kriva pa (stožčev) *plašč*. Točka O, okoli katere se je vrtela tvornica, zove se *stožčev vrh* ali *stožčevo teme*. Daljici OC, ki spaja vrh s središčem osnovne ploskve, pravimo *os* in pravokotnici, narisani z vrha na osnovno ploskev, *višina*. Tisti del tvornice, ki leži med vrhom in obodom osnovne ploskve, je *stožčeva stranica*.

Osnovna ploskev. Plašč. Vrh ali teme. Os. Višina. Stranica.

Stožec utegne biti ali *pokončen* ali *poševen*. Pokončen je stožec, kadar stoji njegova os pravokotno na osnovni

Pokončni in poševni stožec.

Jednakostranični stožec.

ploskvi, sicer pa je poševen. Primerjaj sliko 85.! Vse stranice pokončnega stožca so jednake, in njegova os se stika z višino. Pokončni stožec nastane, ako se zavrti pravokotni trikotnik okoli jedne katete. Tisti pokončni stožec, katerega premer osnovne ploskve je jednak stranici, imenuje se *jednakostraničen*.

Vzporedni presek. Lik vzporednega preseka.

Ako presečemo stožec z ravnino, ki je vzporedna z osnovno ploskvijo, dobimo krog za presek. Kajti v podobnih trikotnikih ACO in $A'C'O$ (slika 85.) ste stranici OC in OC' sorazmerni s stranicama AC in $A'C'$, in ker daljice OC, OC' in AC ne izpremenijo svoje dolgosti med tem, ko drči tvornica OA po stožčevi vodnici, ostane tudi daljica $A'C'$ v vsaki legi jednako dolga in nariše krog s središčem C'. V poševnem stožci je razmerje med daljicama OC in OC' jednako razmerju med pravokotnicama OD in OD' (zakaj?), in zato smemo te razmerji zamenjati drugo z drugim. Iz navedenega izvajamo:

Ako presečemo stožec z ravnino, ki je vzporedna z osnovno ploskvijo, dobimo krog za presek; polumera osnovne in presečne ploskve sta sorazmerna z razdaljama teh ploskev od vrha.

Prisekani stožec = der Kegelstumpf. Dopolnilni stožec = der Ergänzungskegel.

Z vzporednim presekom razdelimo stožec na dva dela, na *prisekani stožec* in na *dopolnilni stožec* (slika 85.). Osnovna ploskev dopolnilnega stožca je lik vzporednega preseka. Tri ploskve mejé prisekani stožec, in sicer dva vzporedna kroga (*osnovni ploskvi*) in ob straneh kriva ploskev (*plašč prisekanega stožca*). Z ozirom na zgoraj navedeno lastnost smemo reči:

Kako ste si višini prvotnega in dopolnilnega stožca.

Višini prvotnega in dopolnilnega stožca ste sorazmerni s polumeroma njiju osnovnih ploskev.

Ker sta dva kroga sorazmerna s kvadratoma njunih polumerov, dobimo z ozirom na prejšnji izrek:

Kako sta si osnovna ploskev in vzporedni presek pri stožci.

Na vsakem stožci ste osnovna in vzporedna presečna ploskev sorazmerni s kvadratoma razdalj teh ploskev od vrha.

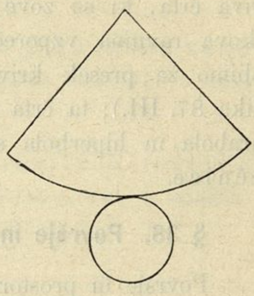
Osji presek.

Ako položimo ravnino skoz os, stvorimo *osji presek*. Lik osjega preseka je trikotnik; dve stranici tega trikotnika ste stožčevi stranici, tretja pa je premer osnovne ploskve. Osji preseki pokončnega stožca so skladni jednakokraki trikotniki; osji preseki jednakostraničnega stožca pa so skladni jednakostranični trikotniki. Višina osjega preseka je v teh slučajih ob jednem stožčeva višina in os.

Odviti plašč in mreža pokončnega stožca.

Ako prerežemo plašč pokončnega stožca po stranici, ga odvijemo in razgrnemo v ravnino, dobimo krogov izsek, katerega lok je jednak obodu osnovne ploskve, in katerega polumer je stožčeva stranica. Slika 86. predočuje mrežo pokončnega stožca.

Slika 86.



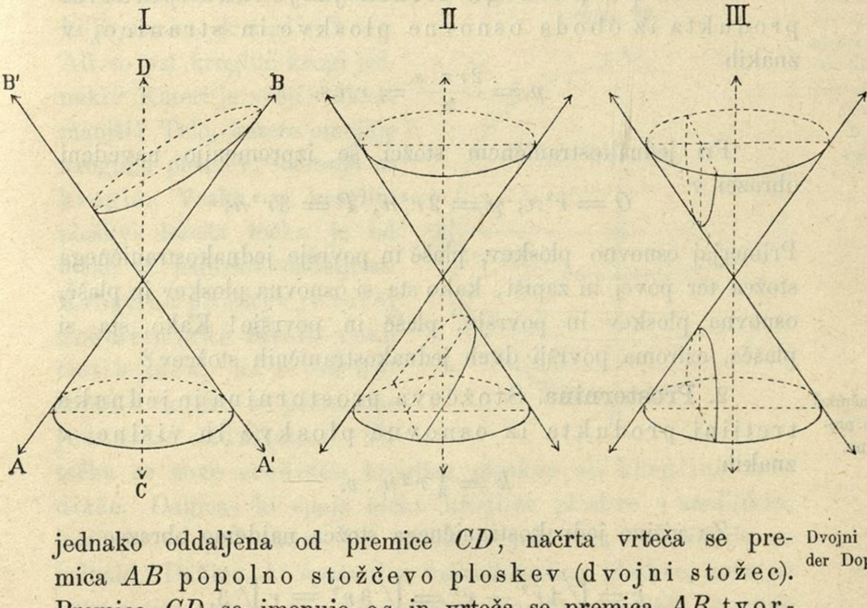
Sorodnost med stožcem in piramido.

Ako primerjamo pri stožci navedena pojasnila pojasnilom pri piramidi, spoznamo takoj sorodnost teh dveh teles. S t o ž e c s m e m o s m a t r a t i z a p i r a m i d o , k a t e r i j e o s n o v n a p l o s k e v p r a v i l n i m n o g o k o t n i k z b r e z š t e v i l n o m n o g i m i s t r a n i c a m i.

Popolna stožčeva ploskev = die vollständige Kegelfläche.

Mislimo si dve sekajoči se premici AB in CD (slika 87.)! Ako se n. pr. premica AB vrti okoli premice CD tako, da ostane vsaka posamezna točka premice AB med vrtenjem

Slika 87.



Dvojni stožec = der Doppelkegel.

jednako oddaljena od premice CD, načrta vrteča se premica AB p o p o l n o s t o ž č e v o p l o s k e v (d v o j n i s t o ž e c). Premica CD se imenuje o s in vrteča se premica AB t v o r -

Preseki dvojnega stožca. Krog. Elipsa = die Ellipse. Parabola = die Parabel. Hiperbola = die Hyperbel.

nica dvojnega stožca. Ako presečemo dvojni stožec z ravnino, ki stoji pravokotno na osi, dobimo krožnico za presek (slika 87. I.). Če presekova ravnina ne stoji pravokotno na osi, pa vendar zadene vse stranice dvojnega stožca, je presek podolgovata kriva črta, ki se imenuje elipsa (slika 87. I.). Ako je presekova ravnina vzporedna z jedno stranico, je presek kriva črta, ki se zove parabola (slika 87. II.). Če je presekova ravnina vzporedna z dvema stranicama (ali z osjo), dobimo za presek krivo črto, ki ima dva dela ali dve veji (slika 87. III.); ta črta se imenuje hiperbola. Krog, elipsa, parabola in hiperbola se zovejo s skupnim imenom stožkosečnice.

Stožkosečnica = die Kegelschnittslinie.

§ 38. Površje in prostornina pokončnega stožca.

Površje in prostornino pokončnega stožca izračunamo po istih pravilih, katera smo navedli pri piramidi.

Kako izračunaš plašč in površje pokončnega stožca.

1. **Površje.** Površje pokončnega stožca najdemo, ako prištejemo osnovni ploskvi plašč, v znakih

$$P = O + p, \quad O = r^2 \pi.$$

Plašč pokončnega stožca je jednak polovici produkta iz oboda osnovne ploskve in stranice, v znakih

$$p = \frac{2 r \pi . s}{2} = r \pi s.$$

Pri jednakostraničnem stožci se izpremenijo navedeni obrazci v

$$O = r^2 \pi, \quad p = 2 r^2 \pi, \quad P = 3 r^2 \pi.$$

Primerjaj osnovno ploskev, plašč in površje jednakostraničnega stožca ter povej in zapiši, kako sta si osnovna ploskev in plašč, osnovna ploskev in površje, plašč in površje! Kako sta si plašča, oziroma površji dveh jednakostraničnih stožcev?

Kako izračunaš stožčevo prostornino.

2. **Prostornina.** Stožčeva prostornina je jednaka tretjini produkta iz osnovne ploskve in višine, v znakih

$$k = \tfrac{1}{3} r^2 \pi . v.$$

Za višino jednakostraničnega stožca najdemo obrazec

$$v = \sqrt{4 r^2 - r^2} = \sqrt{3 r^2} = r \sqrt{3}.$$

Prostornino jednakostraničnega stožca izračunamo po obrazci

$$k = \tfrac{1}{3} r^2 \pi \,.\, r \sqrt{3} = \tfrac{1}{3} r^3 \pi \sqrt{3}.$$

Prostornini dveh stožcev z jednakima višinama ste si kakor kvadrata polumerov v osnovnih ploskvah, v znakih

$$k_1 : k_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Prostornini dveh stožcev z jednakima osnovnima ploskvama ste si kakor njuni višini, v znakih

$$k_1 : k_2 = v_1 : v_2.$$

Prostornini dveh jednakostraničnih stožcev ste si kakor tretji potenci njiju polumerov, v znakih

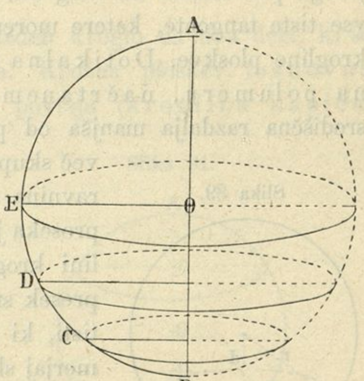
$$k_1 : k_2 = r_1^3 : r_2^3.$$

§ 39. Krogla v obče.

Načrtajmo polukrog ABE (slika 88.) ter zavrtimo ga okoli premera AB tako, da se povrne v svojo prvotno lego! Med tem vrtenjem načrta polukrog krivo ploskev, kroglino ploskev, in vsaka v polukrogu ležeča točka, kakor n. pr. C, ali D i. t. d., nariše krožnico, ki ji pravimo kroglin krog. Ali so vsi kroglini krogi jednaki? Kateri je večji? kateri manjši? Telo, katero omejuje kroglina ploskev, imenuje se krogla. Vsaka v kroglini ploskvi ležeča točka je od točke O jednako oddaljena. Kroglina ploskev je torej geometrijsko mesto vseh tistih točk, ki so od določene točke v prostoru jednako oddaljene. Ta točka se zove središče krogline ploskve ali kroglino središče. Daljica, ki spaja točko krogline ploskve s središčem, imenuje se polumer. Vsi polumeri jedne in iste krogle so jednaki. Daljica, ki spaja dve točki krogline ploskve, zove se tetiva; tista tetiva pa, ki gre skoz kroglino središče, imenuje

Krogla = die Kugel. Kroglina ploskev = die Kugelfläche. Središče krogline ploskve ali kroglino središče = der Mittelpunkt oder das Centrum der Kugelfläche oder der Kugel. Polumer. Tetiva. Premer.

Slika 88.



se premer. Premer je dvakrat tolik kakor polumer. Vsi premeri jedne in iste krogle so jednaki.

Trojna lega točke z ozirom na kroglo. Središčna razdalja = der Centralabstand.

Z ozirom na določeno kroglo utegne imeti točka trojno lego. Točka leži znotraj krogline ploskve; v tem slučaji je daljica, ki spaja dotično točko s kroglinim središčem (središčna razdalja), manjša od polumera. Točka leži v kroglini ploskvi, ako je njena središčna razdalja jednaka polumeru. Točka leži zunaj krogline ploskve, ako ji je središčna razdalja večja od polumera.

Trojna lega premice z ozirom na kroglo.

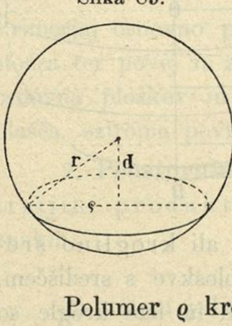
Premica utegne s kroglino ploskvijo imeti ali dve ali jedno skupno točko, ali pa nima nobedne skupne točke. V prvem slučaji je pravokotnica iz kroglinega središča na dotično premico (središčna razdalja) manjša od polumera, v drugem jednaka polumeru in v tretjem večja od polumera.

Trojna lega ravnine z ozirom na kroglo. Dotikalna ravnina = die Berührungs- oder Tangentialebene. Dotikališče = der Berührungspunkt.

Tudi ravnina utegne z ozirom na določeno kroglo imeti trojno lego. Ako je pravokotnica iz kroglinega središča na dotično ravnino (središčna razdalja) večja od polumera, nima ravnina s kroglo nobene točke skupne. Če je središčna razdalja jednaka polumeru, ima ravnina s kroglo jedno skupno točko. Taki ravnini pravimo dotikalna ravnina, skupni točki pa dotikališče. Dotikalno ravnino stvorimo, ako n. pr. zavrtimo krog, ki mu je načrtana tangenta, okoli premera stoječega pravokotno na tangenti. V dotikalni ravnini se nahajajo vse tiste tangente, katere moremo načrtati skoz določeno točko krogline ploskve. Dotikalna ravnina stoji pravokotno na polumeru, načrtanem do dotikališča. — Ako je središčna razdalja manjša od polumera, ima ravnina s kroglo več skupnih točk; v tem slučaji pravimo: ravnina seče kroglo. Lik vsakega takega preseka je krog (kroglin krog). Kroglini krogi so tem večji, čim bližje je presek središču. Največji kroglin krog je tisti, ki gre skoz kroglino središče. Primerjaj sliko 88.! Največji kroglini krogi se imenujejo tudi glavni kroglini krogi. Vsi glavni kroglini krogi jedne in iste krogle so jednaki.

Kroglin krog = der Kugelkreis. Največji ali glavni kroglin krog = der größte Kugelkreis oder der Hauptkreis.

Slika 89.

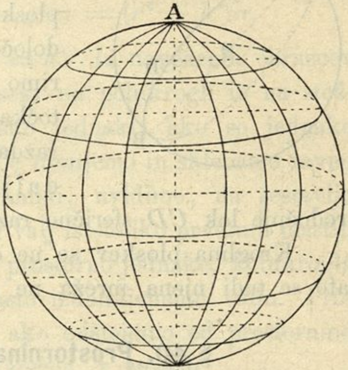


Polumer ϱ kroglinega kroga izračunaš po Pitagorovem izreku iz središčne razdalje d tega kroga in iz kroglinega polumera r (slika 89.). $\varrho^2 = r^2 - d^2$.

Ako presečemo določeno kroglo z vzporednimi ravninami, dobimo krogline kroge različnih velikostij in imenujemo jih kroge vzporednike. Primerjaj sliki 88. in 90.! Krogi vzporedniki so tem večji, čim manjša je njih središčna razdalja. Največji izmed krogov vzporednikov je ravnik, ki gre skoz kroglino središče. Premer AB, ki stoji pravokotno na krogih vzporednikih, zove se os, in osji krajišči A in B se imenujete tečaja krogov vzporednikov. Vsi krogi vzporedniki imajo jedno in isto os in ista dva tečaja.

Krogi vzporedniki = die Parallelkreise. Ravnik = der Aequator. Os = die Achse. Tečaj = der Pol.

Slika 90.



Ako položimo skoz os krogov vzporednikov več ravnin, dobimo krogline kroge, katere imenujemo poludnevnike ali meridijane. Vsi poludnevniki jedne in iste krogle so jednaki. Primerjaj sliko 90.!

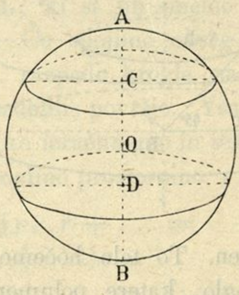
Poludnevnik = der Meridian.

Na vsaki krogli je brez števila krogov vzporednikov in poludnevnikov.

Vsak ravninski presek razdeli kroglo na dva dela, ki se imenujeta kroglina odseka. Krožna ploskev (osnovna ploskev) in del kroglinega površja (kroglina kapica) omejujeta vsak kroglin odsek. Višino krogline kapice (CA v sliki 91.) določimo, ako postavimo v središči osnovne ploskve pravokotnico na to ploskev ter jo podaljšamo do kroglinega površja. Kroglina odseka sta jednaka, kadar gre presek skoz kroglino središče; v tem slučaji pravimo odsekoma polukrogli. Ako presečemo kroglo z dvema vzporednima ravninama, razpade krogla na tri dele, na dva odseka in na kroglino plast, t. j. tisti del krogle, ki leži med vzporednima ravninama. Kroglino plast

Kroglin odsek = der Kugelabschnitt oder das Kugelsegment. Kroglina kapica = die Kugelkappe, Kugelmütze oder Calotte. Polukrogla = die Halbkugel. Kroglina plast = die Kugelschichte.

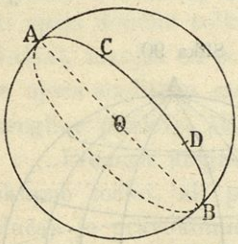
Slika 91.



Kroglin pas = die Kugelzone.

mejita dva kroga (osnovni ploskvi) in del kroglinega površja (kroglin pas). Razdalja med osnovnima ploskvama krogline plasti (t. j. CD v sliki 91.) se imenuje višina krogline plasti ali kroglinega pasa.

Slika 92.



Sferična razdalja = der sphärische Abstand.

Razdaljo dveh točk na kroglini ploskvi določimo, ako položimo skoz določeni točki glavni krog ter izmerimo ali izračunamo manjši, med točkama ležeči lok tega kroga. To razdaljo imenujemo sferično razdaljo dotičnih dveh točk. V sliki 92. predočuje lok CD sferično razdaljo točk C in D.

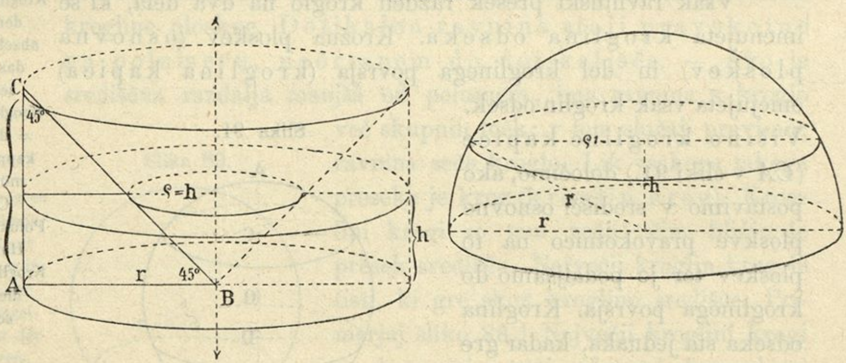
Kroglina ploskev se ne dá odviti in razgrniti v ravnino; zato se tudi njena mreža ne dá načrtati popolnoma natanko.

§ 40. Prostornina in površje krogle.

Primerjanje stožkasto izdolbljenega valja in polukrogle gledé na prostornino.

1. **Prostornina.** Načrtajmo pravokotni jednakokraki trikotnik ABC (slika 93.) ter zavrtimo ga okoli premice (osi), ki gre skoz oglišče B in je vzporedna s kateto AC! Trikotnik ABC načrta valj, ki je od zgoraj navzdol stožkasto

Slika 93.



izdolbljen. To telo hočemo primerjati gledé na prostornino s polukroglo, katere polumer je jednak kateti trikotnika ABC. Osnovni ploskvi obeh teles ste ploščinsko jednaki, ker ste kroga jednakih polumerov. Ako presečemo vsako izmed teh teles z ravnino, ki je vzporedna z osnovno ploskvijo in od nje jednako oddaljena, dobimo pri polukrogli kroglin krog in pri stožkasto izdolbljenem valji kolobar za presek. Ploščina polukroglinega preseka je

$$p_1 = \varrho_1^2\pi = (r^2 - h^2)\pi,$$

in ploščina preseka na izdolbljenem valji

$$p = r^2\pi - \varrho^2\pi = (r^2 - \varrho^2)\pi = (r^2 - h^2)\pi.$$

Primerjaj sliko 93.! Zakaj je $\varrho = h$? Iz navedenih obrazcev spoznamo, da so vzporedni preseki na polukrogli in na stožkasto izdolbljenem valji ploščinsko jednaki, ako so jednako oddaljeni od osnovnih ploskev. Če umujemo in sklepamo ravno tako, kakor smo storili pri piramidi, uvidimo, da sestavlja polukroglo in stožkasto izdolbljeni valj istotoliko prvotnih plastij, ki so zaporedoma po dve in dve prostorno jednake. Polukrogla je torej prostorno jednaka stožkasto izdolbljenemu valju. Prostornino tega valja pa najdemo, ako odštejemo od prostornine neizdolbljenega valja prostornino stožca, v znakih

$$k = r^2\pi \,.\, r - \tfrac{1}{3}r^2\pi \,.\, r = \tfrac{2}{3}r^3\pi.$$

Polukroglino prostornino izračunaš po obrazci Kako izračunaš kroglino prostornino.

$$k = \tfrac{2}{3}r^3\pi$$

in prostornino cele krogle po obrazci

$$k = \tfrac{4}{3}r^3\pi.$$

Kroglina prostornina se dá tudi še drugače določiti. Ako načrtamo v mislih na krogli neizrečeno mnogo krogov vzporednikov in poludnevnikov, razdelimo kroglino površje na jako majhne dele p_1, p_2, p_3 i. t. d., ki si jih smemo misliti kakor zelo majhne ravne ploskve. Če spojimo obseg vsake take ploskve s kroglinim središčem, razpade krogla na toliko piramid, na kolikor delov smo razdelili površje. Vsaki teh piramid je kroglin polumer višina. Ako izračunamo in seštejemo prostornine vseh piramid, najdemo kroglino prostornino, v znakih

$$k = \tfrac{1}{3}p_1 \cdot r + \tfrac{1}{3}p_2 \cdot r + \tfrac{1}{3}p_3 \cdot r + \ldots =$$
$$= \tfrac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots)r.$$

Ker je vsota

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$$

jednaka kroglinemu površju, dobimo za kroglino prostornino obrazec

$$k = \tfrac{1}{3}P \,.\, r, \qquad \text{t. j.}$$

Kroglina prostornina je jednaka tretjini produkta iz površja in polumera.

Prostornini dveh krogel ste si kakor tretji potenci njunih polumerov; kajti iz obrazcev

$$k_1 = \tfrac{4}{3} r_1^3 \pi \text{ in } k_2 = \tfrac{4}{3} r_2^3 \pi$$

dobimo sorazmerje

$$k_1 : k_2 = r_1^3 : r_2^3.$$

Kako izračunaš kroglino površje.

2. **Površje.** Iz obrazcev

$$k = \tfrac{4}{3} r^3 \pi \text{ in } k = \tfrac{1}{3} P \,.\, r,$$

ki smo jih našli za kroglino prostornino, določimo obrazec za kroglino površje, ako izjednačimo navedeni vrednosti za k, v znakih

$$\tfrac{1}{3} P \,.\, r = \tfrac{4}{3} r^3 \pi,$$

ter to jednačbo razrešimo z ozirom na neznanko P.

$$P = 4 r^2 \pi.$$

Kroglino površje je jednako štirikratni ploščini največjega kroglinega kroga.

Površji dveh krogel ste si kakor kvadrata njunih polumerov, v znakih

$$P_1 : P_2 = r_1^2 : r_2^2.$$

Občna osnovna resnica o prostornini dveh teles.

Ako pregledamo in preudarimo umovanja, po katerih smo določili prostornino prizmi, piramidi in krogli, spoznamo to-le občno osnovno resnico:

Dve telesi ste prostorno jednaki, ako ste njiju osnovni ploskvi ploščinsko jednaki, in ako so njiju vzporedni preseki v jednakih razdaljah od osnovnih ploskev ploščinsko jednaki.

Ta občna resnica se imenuje Kavalieri-jevo načelo.

§ 41. Pravilna telesa.

Pravilno telo = der regelmäßige Körper oder das reguläre Polyeder.

Telo se imenuje pravilno, ako ga mejé skladni pravilni mnogokotniki, in ako so njega ogli skladni in pravilni.

Ker znaša vsota vseh robovnih kotov pri vsakem oglu manj ko štiri prave kote, moremo iz jednakostraničnih trikotnikov stvoriti le tri pravilne ogle, in sicer tri-, četvero- in peterorobni ogel. Kolika je vsota vseh robovnih kotov pri prvem, drugem in tretjem oglu? Telesa, na katerih se nahajajo omenjeni ogli, so tetraeder, oktaeder in ikozaeder.

Tetraeder ali četverec je tristranična jednakorobna piramida, katero mejé štirje skladni jednakostranični trikotniki. Tetraeder ima šest robov in štiri trirobne ogle (slika 94. I.). Tetraedrovo površje je jednako štirikratni ploščini jednakostraničnega trikotnika, v znakih

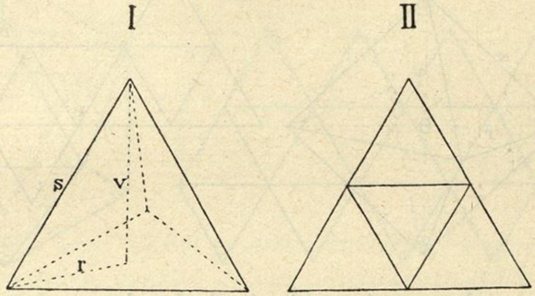
Tetraeder = das Tetraëder.

Kako izračunaš tetraedrovo površje, višino in prostornino.

$$P = s^2\sqrt{3}.$$

Ako spojimo podnožišče tetraedrove višine z jednim ogliščem osnovne ploskve, stvorimo pravokotni trikotnik, ki ima

Slika 94.



obstranski rob za hipotenuzo, tetraedrovo višino za jedno kateto in polumer kroga, ki je očrtan osnovni ploskvi, za drugo kateto. Po Pitagorovem izreku najdemo obrazec za tetraedrovo višino, v znakih

$$v^2 = s^2 - r^2,\ r = \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{s}{3}\sqrt{3}$$

$$v^2 = s^2 - \frac{3s^2}{9} = \frac{6s^2}{9}$$

$$v = \frac{s}{3}\sqrt{6}.$$

Tetraedrovo prostornino izračunaš po pravilu, ki velja o piramidini prostornini, v znakih

$$k = \frac{1}{3}\,Ov = \frac{1}{3} \cdot \frac{s^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{s}{3}\sqrt{6} = \frac{s^3}{36}\sqrt{18}$$

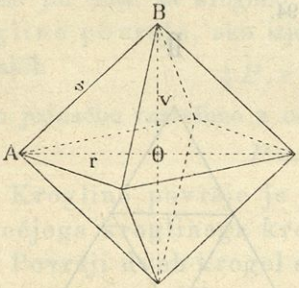
$$k = \frac{s^3}{36}\sqrt{2.9} = \frac{s^3}{12}\sqrt{2}.$$

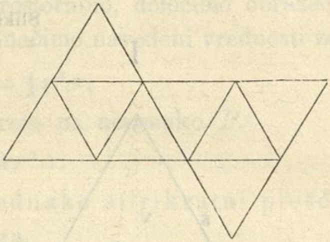
Tetraedrovo mrežo sestavljajo štirje skladni jednakostranični trikotniki (slika 94. II.).

Oktaeder = das Oktaëder.

Oktaeder ali osmerec sestavljate dve četverostranični jednakorobni piramidi, ki imate skupno osnovno ploskev (slika 95. I.). Zakaj je osnovna ploskev četverostranične jednakorobne piramide kvadrat? Osem skladnih jednakostraničnih trikotnikov omejuje oktaeder. Koliko mejnih ploskev se stika v vsakem oglu? Koliko je robov, koliko oglov?

Slika 95.





Kako izračunaš oktaedrovo površje in prostornino.

Oktaedrovo površje je jednako osmerokratni ploščini jednakostraničnega trikotnika, v znakih

$$P = 2s^2\sqrt{3}.$$

Višino $BO = v$ četverostranične jednakorobne piramide izračunaš iz pravokotnega trikotnika AOB, v katerem je kateta $AO = r$ jednaka polumeru kroga, ki je očrtan osnovni ploskvi (t. j. polovica kvadratove diagonale), v znakih

$$v^2 = s^2 - r^2,\ r = \frac{s}{2}\sqrt{2}$$

$$v^2 = s^2 - \frac{2s^2}{4} = \frac{2s^2}{4}$$

$$v = \frac{s}{2}\sqrt{2}.$$

Oktaedrovo prostornino najdeš, ako pomnožiš prostornino četverostranične jednakorobne piramide z dvema, v znakih

$$k = 2\cdot\frac{O.v}{3} = \frac{2}{3}\cdot s^2\cdot\frac{s}{2}\sqrt{2} = \frac{s^3}{3}\sqrt{2}.$$

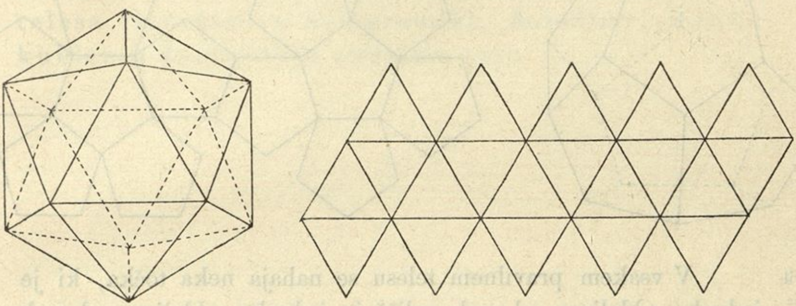
Oktaedrovo mrežo sestavlja osem skladnih jednakostraničnih trikotnikov (slika 95. II.).

Dvajset skladnih jednakostraničnih trikotnikov omejuje i k o z a e d e r ali d v a j s e t e r e c. Izmed $3 \times 20 = 60$ trikotnikovih stranic se stikate po dve v vsakem robu; ikozaeder ima torej 30 jednakih robov. Izmed 60 kotov, ki se nahajajo v 20 trikotnikih, tvori po pet kotov ikozaedrov ogel; ikozaeder ima torej 12 skladnih peterostraničnih oglov.

Ikozaeder = das Ikosaëder.

Slika 96.

I II



Ikozaedru določiš p o v r š j e, ako pomnožiš ploščino jednakostraničnega trikotnika z 20, v znakih

$$P = 5 s^2 \sqrt{3}.$$

Kako izračunaš ikozaedrovo površje.

I k o z a e d r o v a p r o s t o r n i n a se ne dá izračunati na tej stopnji.

Ikozaedrovo mrežo sestavlja 20 skladnih jednakostraničnih trikotnikov (slika 96. II.).

Iz kvadratov moreš sestaviti le trirobni ogel. Ta ogel se nahaja na telesu, ki se imenuje h e k s a e d e r, š e s t e r e c ali k o c k a. O kocki smo govorili že pri prizmah.

Heksaeder ali kocka = das Hexaëder oder der Würfel.

Vsak notranji kot pravilnega peterokotnika meri 108^0. Iz treh skladnih pravilnih peterokotnikov se dá napraviti pravilni ogel. Ta ogel se nahaja na telesu, ki se imenuje d o d e k a e d e r ali d v a n a j s t e r e c (slika 97. I.). Dvanajst skladnih pravilnih peterokotnikov omejuje dodekaeder. Koliko je robov, koliko oglov?

Dodekaeder = das Dodekaëder.

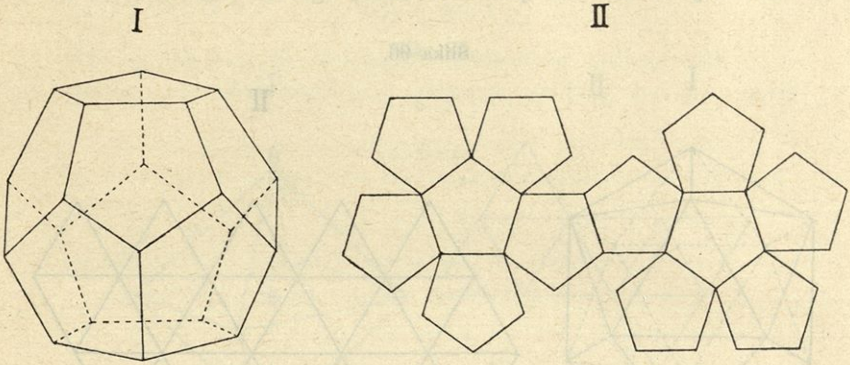
D o d e k a e d r o v o p o v r š j e in p r o s t o r n i n a se ne daste izračunati na tej stopnji.

Slika 97. II. predočuje dodekaedrovo mrežo.

Iz pravilnih šesterokotnikov in drugih pravilnih mnogokotnikov se ne dajo napraviti telesni ogli. Zakaj ne?

Pravilnih teles imamo torej samo pet.

Slika 97.



Središče pravilnega telesa = der Mittelpunkt des regelmäßigen Polyëders.

V vsakem pravilnem telesu se nahaja neka točka, ki je jednako oddaljena od vseh oglišč in jednako oddaljena od vseh mejnih ploskev. Ta točka se imenuje središče pravilnega telesa, in smatrati jo smemo za središče krogle, ki je pravilnemu telesu očrtana, oziroma včrtana. Ako spojimo v mislih središče pravilnega telesa z vsemi oglišči, razpade telo na toliko pravilnih piramid, kolikor je mejnih ploskev. Vse te piramide so prostorno jednake. Zakaj?

§ 42. Prostornina teles, ki nimajo določene geometrijske podobe.

Ako hočeš določiti prostornino posode ali kake votline, ki nima določene geometrijske podobe, treba ti je posodo ali votlino napolniti z vodo, to vodo potem preliti v znano prizmatično ali valjasto posodo ter izmeriti, kako visoko sega voda.

Prostornino trdnega telesa določiš, ako položiš telo v znano prizmatično ali valjasto posodo, vliješ toliko vode vanj, da je telo popolnoma pod vodo, ter zaznamuješ, kako visoko stoji voda. Potem vzameš dotično telo iz posode in izmeriš, za koliko se zniža gladina vode.

Namesto vode smeš rabiti tudi droben pesek.

Ako je trdno telo skoz in skoz iste gostosti, moreš prostornino telesa izračunati iz njegove teže. Teža je dvojna, absolutna in specifična. Absolutna je teža, kadar povemo, koliko tehta telo ne oziraje se na prostor, ki ga zavzima. Specifična je teža, kadar povemo, koliko tehta prostorska jednota (1 *dm*³) dotičnega telesa. Če govorimo o teži telesa sploh, mislimo vsigdar na absolutno težo; specifično težo razumevamo le tedaj, kadar poudarjamo to izrecno. Ako izračunamo, kolikokrat se teža prostorske jednote nahaja v teži telesa (izraženi v kilogramih), določimo, koliko kubičnih decimetrov zavzima telo.

Absolutna in specifična teža = das absolute und specifische Gewicht.

Vadbe in naloge.

§ 1.

Kaj je lik? Kaj likov obseg, kaj ploščina? Kedaj pravimo, da sta dva lika ploščinsko jednaka? (Pojasnilo, osnovni resnici.)

a) Paralelogram in njegove občne lastnosti: notranji koti (njih vsota, suplementarni, jednaki); stranice (vzporedne, jednake, vzporednice med vzporednicama, pravokotnice med vzporednicama); diagonali (lastnost njiju presečišča). Vrste paralelogramov: romboid (koti, stranice, medsebojna lega diagonal); romb (koti, stranice, medsebojna lega diagonal, somernici, včrtani krog); pravokotnik (koti, stranice, medsebojna lega in dolgost diagonal, somernici, očrtani krog); kvadrat (koti, stranice, medsebojna lega in dolgost diagonal, somernice, očrtani in včrtani krog, središče).

Kedaj sta dva paralelograma ploščinsko jednaka? Kedaj je poševnokotni paralelogram ploščinsko jednak pravokotniku? Kako se prepričaš o tej lastnosti?

b) Trikotnik in njegove občne lastnosti: razmere med stranicami (vsota in razlika dveh stranic z ozirom na tretjo); razmere med koti (med notranjimi, med notranjimi in vnanjimi, med vnanjimi); razmere med nasprotnimi sestavinami (jednake in nejednake stranice in njim nasprotni koti). Daljičina in kotova somernica in njiju lastnosti. Vrste trikotnikov: jednakostranični trikotnik (stranice, koti, somernice, središče); jednakokraki trikotnik (osnovnica, kraka, kota na osnovnici, kot ob vrhu, somernica); raznostranični trikotnik (stranice, osnovnica, vrh, višina, straničine in kotove somernice, očrtani in včrtani krog); ostrokotni trikotnik (koti in nasprotne stranice); pravokotni trikotnik (hipotenuza, kateti, komplementarna kota, največja stranica, kedaj je jedna izmed katet jednaka polovici hipotenuze?); topokotni trikotnik (koti in nasprotne stranice). Skladni trikotniki: v čem se ujemajo? istoležne sestavine, izreki o skladnosti.

Kedaj je trikotnik jednak polovici paralelograma? Kedaj sta dva trikotnika ploščinsko jednaka? Kako se prepričaš o teh lastnostih?

c) Trapez in njegove lastnosti: vzporedne in nevzporedne stranice, koti na vzporednicah, trapezova srednica. Jednakokraki trapez in njegove lastnosti: kraka, koti na vzporednicah, koti na krakih, nasprotni koti.

Kedaj je trapez ploščinsko jednak trikotniku? Kako se prepričaš o tej lastnosti?

d) Kako sta si četverokotnik s pravokotno stoječima diagonalama in pravokotnik, ki ima diagonali tega četverokotnika za stranice? Kako se prepričaš o tej lastnosti? Imenuj paralelograma, v katerih stojite diagonali pravokotno druga na drugi! V katerem trapezoidu stojite diagonali vselej pravokotno druga na drugi? Deltoid in njegove lastnosti: jednake stranice, jednaka kota, diagonala somernica, včrtani krog.

e) Mnogokotnik in njegove lastnosti: vsota vseh notranjih kotov, diagonale iz jednega in istega oglišča. Pravilni mnogokotnik in njegove lastnosti: stranice, koti, središče, somernice, očrtani in včrtani krog. Načrtovanje pravilnega mnogokotnika.

Kateremu trikotniku je pravilni mnogokotnik ploščinsko jednak? Kako se prepričaš o tej lastnosti?

f) in *g)* Krog, njega deli in lastnosti: krožnica (obod ali periferija), lok (kvadrant, sekstant, oktant), krožnina, središče, polumer, tetiva, premer, odsek, izsek, polukrog. Lega točke (premice) z ozirom na krog, središčna razdalja točke (premice) z ozirom na krog, dotikalnica, dotikališče, sečnica. Načrtovanje dotikalnice. Tetiva in njena središčna razdalja. Obsrediščni in naobodni koti, njih mera, kot v polukrogu. Somernica (krogova, tetivina in njej pripadajočih krogovih delov). Medsebojna lega dveh krogov: istosrediščna in raznosrediščna kroga, kolobar, središčnica, kroga sečeta drugi drugega, kroga se dotikata drugi drugega, kroga nimata nobedne skupne točke.

Čemu je krogov izsek ploščinsko jednak? Čemu krožnina? Kako se prepričaš o teh lastnostih?

Ponovi še vse vrste kotov in njih lastnosti! Sokoti, sovršni koti, protikoti, izmenični koti, prikoti, koti z vzporednimi kraki, koti s pravokotno stoječimi kraki. Merjenje kotov.

§ 2.

Naloge.

1. Pretvori določeni *a)* ostrokotni, *b)* topokotni trikotnik v pravokotnega!

2. Pretvori določeni pravokotni trikotnik v jednakokrakega!

3. Pretvori določeni topokotni trikotnik v drugega, ki ima *a)* večjo, *b)* manjšo osnovnico!

4. Pretvori določeni topokotni trikotnik v drugega, ki ima *a)* večjo, *b)* manjšo višino!

5. Pretvori določeni pravokotni trikotnik v drugega, ki ima *a)* večjo osnovnico, *b)* večjo višino, *c)* manjšo osnovnico, *d)* manjšo višino!

6. Načrtaj trikotnik s stranicami 4 *cm*, 3 *cm* in 2 *cm* ter ga pretvori:

a) v jednakokraki trikotnik, ki mu meri osnovnica 5 *cm*;

b) v pravokotni trikotnik, kateremu meri kateta 3 *cm*;

c) v trikotnik s kotom 60^0;

d) v trikotnik, ki mu meri osnovnica 35 *mm*;

e) v trikotnik, ki je 26 *mm* visok;

f) v trikotnik, ki mu meri kot 30^0, osnovnica pa 3 *cm*;

g) v trikotnik, ki mu meri kot 45^0, višina pa 25 *mm*.

(Pri nekaterih izmed navedenih nalog se nahaja dvoje pretvarjanj. N. pr. Nalogo *a)* razrešiš, ako pretvoriš določeni trikotnik v drugega z osnovnico 5 *cm*, tega pa v jednakokrakega.)

7. Pretvori določeni trikotnik v pravokotnik *a)* z jednako osnovnico, *b)* z jednako višino!

8. Pretvori določeni paralelogram v pravokotnik!

9. Pretvori določeni trapez *a)* v paralelogram z isto višino, *b)* v pravokotnik z isto višino!

(Pri obeh nalogah je osnovnica neznanega paralelograma, oziroma pravokotnika jednaka trapezovi srednici.)

10. Pretvori določeni paralelogram (pravokotnik) v drugega *a)* z večjo osnovnico, *b)* z večjo višino, *c)* z manjšo osnovnico, *d)* z manjšo višino!

11. Pretvori določeni paralelogram v kvadrat!

(Pri tej nalogi je treba določeni paralelogram pretvoriti v pravokotnik, pravokotnik pa v kvadrat.)

12. Pretvori določeni trikotnik v kvadrat! Primerjaj nalogi 7. in 11.!

13. Pretvori določeni trapezoid v kvadrat!

(Pri tej nalogi je treba trapezoid pretvoriti v trikotnik, trikotnik v pravokotnik, pravokotnik pa v kvadrat.)

14. Pretvori *a)* določeni peterokotnik, *b)* določeni pravilni šesterokotnik v kvadrat!

§ 3.

Naloge.

1. Razdeli določeni trikotnik na 4, 5 jednakih delov!

2. Razdeli določeni paralelogram na 8 jednakih delov, in sicer *a)* z vzporednicami, *b)* iz določenega oglišča!

3. Razdeli določeni paralelogram na 5, 7 jednakih delov, in sicer *a)* z vzporednicami, *b)* iz določenega oglišča!

4. Razdeli jednakokraki trapez na 3, 4 jednake dele!

5. Razdeli *a)* določeni deltoid na 5 jednakih delov, *b)* določeni trapezoid na 6 jednakih delov!

6. Razdeli določeno krožnino na 3, 8, 9, 10 jednakih delov!

7. Razdeli krogov izsek na 4, 8 jednakih delov!

8. Načrtaj paralelogram, ki je $\frac{3}{4}$ določenega paralelograma *ABCD*!

9. Pretvori $\frac{3}{5}$ določenega trikotnika *a)* v pravokotnik, *b)* v kvadrat!

§ 4.

Kako določimo premočrtnemu liku obseg? Kako izračunamo jednakostraničnemu liku obseg? Zapiši obrazec za ta slučaj ter povej pomen znakov, ki se nahajajo v obrazci!

Katero mersko število se imenuje popolno, katero nepopolno? Kako dobimo nepopolno število? Kako ga zaznamujemo? Kolik je pogrešek, ki se nahaja v nepopolnem številu? Kedaj smemo številu pripisati ničle kot decimalke ali si pripisane vsaj misliti? Opiši kratko, kako se nepopolna števila seštevajo, in sicer: *a)* če so vsi sumandi nepopolna števila z istotolikimi decimalkami, *b)* če niso vsi sumandi nepopolna števila z istotolikimi decimalkami! Opiši kratko, kako množiš nepopolno število *a)* z jednoštevilčnim, *b)* z dvoštevilčnim, *c)* s trištevilčnim številom i. t. d.! Katera množitev se imenuje okrajšana? Povej glavni razloček med navadno in okrajšano množitvijo! Kedaj se mora množitev zvršiti na okrajšani način?

Naloge.

1. V trikotniku merijo stranice:

a) 8·7 *dm*, 6·52 *dm*, 5·9 *dm*;
b) $3\frac{3}{4}$ *m*, $5\frac{2}{3}$ *m*, $4\frac{4}{5}$ *m*;
c) 14·58.. *dm*, 11·63.. *dm*, 12·75.. *dm*;
d) 9·587.. *m*, 7·48.. *m*, 10·614.. *m*;

kolik je obseg?

2. V pravokotniku je osnovnica *o* in višina *v*; izračunaj obseg, ako znaša:

a) $o = 24·81..$ *dm*, $v = 13·75..$ *dm*;
b) $o = 8·95..$ *m*, $v = 5·486..$ *m*;
c) $o = 15·3765$ *m*, $v = 7·443..$ *m*!

3. Kolik je kvadratov obseg, ako meri stranica *a)* 6·578 *m*, *b)* 3·5846.. *km*, *c)* 13·59.. *dm*?

4. V peterokotniku merijo stranice 4·536.. *m*, 3·87.. *m*, 4·92 *m*, 5·894.. *m*, in 6·125 *m*; kolik je obseg?

5. Kolik je obseg pravilnega šesterokotnika, ako znaša njegova stranica *a)* 13·56.. *dm*, *b)* 3·784.. *m*, *c)* 5·390.. *m*?

6. V pravilnem mnogokotniku je stranica *s* in število stranic *n*; kolik je obseg, ako znaša:

a) $s = 1·78..$ *dm*, $n = 24, 36$;
b) $s = 1·094..$ *m*, $n = 64, 96$;
c) $s = 0·185..$ *m*, $n = 128, 384$?

7. Ob ravni cesti stoji na vsaki strani 568 dreves; kako dolga je cesta, ako stojé drevesa po 9·78.. *m* vsaksebi?

8. Vlak preteče v jedni minuti 486·75.. *m*; koliko *a)* v 3 urah 48 minutah, *b)* v 18 urah 26 minutah?

§ 5.

Kaj določa krog po velikosti popolnoma? Ali se dá natanko ali le približno določiti, kolikokrat je krožnica večja od premera? Kako se to zgodi? Povej Ludolfovo število! Kaj pomeni to število? Ali je popolno ali nepopolno? Kako ga zaznamujemo? Kako izračunaš krožnico? Kako izračunaš iz krogovega oboda premer? kako polumer? Zapiši obrazec za krožnico, za premer, za polumer! Povej pomen znakov, ki se nahajajo v prvem obrazci!

Kako zvršiš množitev, če je jeden izmed faktorjev nepopolno število? Kateri faktor vzameš za multiplikand? in zakaj? Kako natanko moreš določiti produkt? Kedaj ga določiš tako natanko kakor mogoče? kedaj nalogi primerno? Po čem se razlikujete množitvi v teh dveh slučajih? Kako zvršiš množitev, če sta oba faktorja nepopolni števili? Kateri faktor ti je v tem slučaji multiplikand? Kako natanko določiš produkt v tem slučaji?

Kedaj in kako se delitev zvrši na okrajšani način? Povej glavni razloček med navadno in okrajšano delitvijo! Kako določiš mestno vrednost prvi kvocijentovi številki? Kako natanko moreš določiti kvocijent pri okrajšani delitvi? Kedaj ga določiš tako natanko kakor mogoče? kedaj nalogi primerno? Kako prirediš določenemu divizorju prvi delski dividend? Kako prirediš divizor in dividend drugega drugemu, če je treba določiti kvocijent nalogi primerno? Kako prirediš divizor in dividend drugega drugemu, če sta nepopolni števili? Iz česa spoznaš, da si zadnjo kvocijentovo številko določil približno?

Naloge:

1. Kolik je krogov obod, če znaša premer *a)* 1 *m*, *b)* 4·56 *dm*, *c)* 37·68.. *dm*?
2. Izračunaj krogu obod, če meri polumer *a)* 7·8 *dm*, *b)* 265·8.. *cm*!
3. Kolik je premer krogu, katerega obod znaša *a)* 18·2 *cm*, *b)* 1·543.. *m*?
4. Kolik polumer ima krog, katerega obod meri *a)* 275 *dm*, *b)* 339·2.. *cm*?
5. Kolik obod ima kazalo ure na zvoniku, če znaša njega premer 1·96 *m*?
6. Deblo ima na debelejšem konci 16 *dm* 2 *cm* v obsegu; kolik je premer?
7. Kolik je premer zemeljskega poludnevnika, ki meri 40.000 *km*?
8. Kako dolgi so obroči štirih voznih koles, če meri polumer sprednjega kolesa 0·758.. *m*, zadnjega pa 0·994.. *m*?
9. Oboda dveh istosrediščnih krogov znašata 27·9 *cm* in 22·6 *cm*; kako širok je kolobar?
10. Kako debela je cev, pri kateri meri vnanji obseg 1·57 *m* in notranji 1·413 *m*?
11. Vozno kolo se zavrti na 7500 (8675) *m* dolgi poti 2545krat (približno 2677·9krat); kolik je *a)* kolesov obseg, *b)* njegov premer?

12. Sprednje vozno kolo meri $1 \cdot 2\ m$, zadnje $1 \cdot 7\ m$ v premeru; kolikokrat se zavrti prvo večkrat nego drugo na 4 *km* dolgi poti? (Izračunaj najprej, kolikokrat se zavrti sprednje, kolikokrat zadnje kolo.)

13. Koliko zobcev gre na kolo, ki ima $1 \cdot 975\ m$ v premeru, če je zobec od zobca (sreda zobca od srede zobca) 156 *mm* oddaljen?

14. Mlinsko kolo ima 24 lopat, ki so po $3 \cdot 5\ dm$ narazen; kolik je premer kolesu?

15. Kolik polumer ima okrogla miza, okoli katere sedi osem oseb, če se računa na vsako po $7 \cdot 2\ dm$ vsega obsega?

16. Koliko dreves je moči nasaditi ob okroglem ribniku, ki ima 87 *m* v premeru, da bode drevo od drevesa po $4 \cdot 5\ m$ oddaljeno?

17. Pešcu je treba 10 minut, da obhodi okrogel ribnik, če prehodi vsako sekundo 1 *m* 2 *dm*; kolik je premer ribniku?

18. Krogla, ki ima 92 *mm* v premeru, zavrti se na nekem kegljišči 36krat; kako dolgo je kegljišče?

19. Kolikokrat se zavrti krogla, ki ima 8 *cm* v premeru, na 16 *m* dolgem kegljišči?

20. Kolo, katerega obseg meri 16 *m*, zavrti se vsako minuto 45krat; kolika je hitrost katerekoli točke na obodu, t. j. koliko metrov preteče v 1 sekundi? (Koliko pot preteče točka na obodu, če se kolo zavrti jedenkrat? koliko, če se kolo zavrti 45krat? Koliko pot preteče torej točka na obodu v 1 minuti? koliko v 1 sekundi?)

21. Kolik premer mora imeti kolo, ki se zavrti vsako minuto 72krat, da bode hitrost katerekoli točke na obodu znašala 21 *m*?

(Koliko pot preteče točka na obodu v 1 sekundi? koliko v 1 minuti? Kolikokrat se je med tem zavrtelo kolo? Koliko cele poti pride torej na jeden vrtež? In to je kolesov obseg.)

22. Kolo se zavrti v 1 minuti 20 sekundah 120krat; kolik je premer kolesu, če znaša hitrost točke na obodu $21 \cdot 98\ m$?

23. Kolikokrat se mora v 1 minuti zavrteti mlinski kamen, ki ima $1 \cdot 35\ m$ v premeru, da dobode točka na obodu hitrost $10 \cdot 5\ m$?

(Kamen se v 1 minuti tolikokrat zavrti, kolikokrat se njega obod nahaja v poti, katero preteče točka na obodu v 1 minuti.)

§ 6.

Na koliko načinov se dado meriti loki? Kako merimo loke z ločno mero? Kaj je jednota ločni meri? Kako merimo loke z dolgostno mero? Kako si moramo lok pretvoriti v mislih, da ga je moči izmeriti z dolgostno mero? Kaj je jednota dolgostni meri? Ali imajo ločne stopinje različnih krogov isto dolgost? Kedaj ima ločna stopinja večjo dolgost? kedaj manjšo? Kako izračunaš dolgost ločne stopinje? kako dolgost ločne minute in ločne sekunde? Kako sta si dva loka istega polumera? Kako se prepričaš o tej lastnosti? Zapiši to lastnost v znakih! Kako sta si lok in polukrog? Zapiši ta izrek v znakih! Kako sta si lok in krogov obod? Kaj je moči izračunati iz obrazca, ki zaznamuje razmerje med lokom in polukrogom?

Naloge:

1. Koliko meri *a)* ločna stopinja, *b)* ločna minuta, *c)* ločna sekunda na krogu, katerega polumer znaša 1 *m* (5 *cm*, 28 *cm*)?

2. Kako dolga je ločna stopinja na kotomeru, katerega polumer znaša *a)* 40 *mm*, *b)* 25 *cm*?

3. Kolik mora biti polumer kroga, na katerem je ločna sekunda 1 *mm* dolga?

4. Kako dolg je lok 30^0, 75^0, 100^0, 150^0, 210^0 na krogu, katerega polumer znaša 24 *m*?

5. Izračunaj dolgost loka *a)* $20^0 45'$, *b)* $100^0 12' 36''$, če znaša polumer 1·8 *dm*!

6. Izračunaj polumer kroga, na katerem je lok 36^0 jednak 10 *m*!

7. Sekstant meri 4 *cm*; kolik je polumer?

8. Izračunaj polumer loka, kateri meri v dolgostni meri l in v ločni meri α!

a) $l = 5{\cdot}25\ cm$, $\alpha = 45^0$ *b)* $l = 9{\cdot}43\ m$, $\alpha = 72^0 45'$ *c)* $l = 7{\cdot}3\ dm$, $\alpha = 35^0 30' 15''$.

9. Koliko stopinj znaša lok, ki je 3 *cm* dolg, če meri polumer 20 *cm*?

10. Izračunaj obsrediščni kot, ki pripada loku 75 *cm* (2·28 *dm*), če znaša polumer 8 *dm*!

11. Kako dolg je lok, ki pripada obsrediščnemu kotu $148^0 37' 45''$, če meri kotu $7^0 40''$ pripadajoči lok 46·8 *cm*?

12. Na krogovem obodu, ki meri 19·954 *m*, leži lok 5·414 *m* dolgosti; koliko znaša ta lok v ločni meri?

§ 7.

Kako določimo liku ploščino? Kako ga izmerimo neposredno, kako posredno? Kaj je mersko število lika? Kaj je jednota ploskovni meri? Povej navadne ploskovne jednote ter zapiši njih znamenja!

a) Kako določimo kvadratu ploščino? Kako izračunamo iz kvadratove ploščine stranico? Zapiši obrazec za vsako teh dveh pravil! Kaj je ar, hektar, kvadratni kilometer, kvadratni miriameter? Imenuj vse ploskovne jednote, zapiši njih znamenja ter povej, kako so odvisne druga od druge!

Naloge:

1. Izračunaj kvadratu ploščino, če mu meri stranica *a)* 27 *cm*, *b)* 6·45 *dm*, *c)* 9·807 *m*, *d)* 38·75.. *dm*!

2. Kolika je kvadratova ploščina, če znaša obseg *a)* 2·58 *m*, *b)* 43·6 *dm*, *c)* 19·356.. *m*?

3. Kvadratova ploščina znaša *a)* 36·9664 m^2, *b)* 14 *a* 49 m^2 25 dm^2 16 cm^2, *c)* 349·390864 *a*, *d)* 8·5384.. m^2, *e)* 678·52.. cm^2; kolika je stranica?

4. Kolika je *a)* vsota, *b)* razlika kvadratoma dveh daljic, ki merite 8·15 *m* in 5 *m* 3 *dm*?

5. Kolika je stranica kvadrata, ki je tolik, kolikoršna sta kvadrata s stranicama *a)* 2·58 *dm* in 9·34 *dm*, *b)* 4·576.. *m* in 6·108.. *m* skupaj?

6. Koliko velja 12 kvadratastih steklenih plošč, ako meri stranica vsake plošče 4·8 *dm* in se računa m^2 po 6 K 80 h?

b) Kako določimo pravokotniku ploščino? kako višino? kako osnovnico? Zapiši dotične obrazce!

Naloge:

1. Izračunaj pravokotniku ploščino, ako meri *a)* osnovnica 7·4 *m* in višina 3·5 *m*, *b)* osnovnica 75·4 *dm* in višina 26·82.. *dm*, *c)* osnovnica 3·125.. *m* in višina 1·59.. *m*!

2. V pravokotniku znaša *a)* ploščina 12 *a* in osnovnica 1 *km*, *b)* ploščina 424 m^2 80 dm^2 in osnovnica 35·4 *m*, *c)* ploščina 1205 m^2 in osnovnica 90·4.. *m*; kolika je višina?

3. V pravokotniku znaša *a)* ploščina 33 dm^2 in širina 2 *m*, *b)* ploščina 556·634.. m^2 in širina 13·55 *m*, *c)* ploščina 90·9534.. m^2 in širina 178·34.. *dm*; kolika je dolžina?

4. Pravokotnikov obseg meri 32·196 *m* in jedna stranica 5·1 *m*; kolika je ploščina?

5. Kvadrat ima isti obseg kakor pravokotnik, katerega stranici merite 48 (6·24) *m* in 32 (4·16) *m*; kateri lik ima večjo ploščino?

6. Pravokotnik je 1·52 *m* dolg in 0·75 *m* širok; za koliko se mu zmanjša *a)* obseg, *b)* ploščina, če mu odrežeš okoli in okoli 0·19 *m* širok rob?

7. Pravokotnik je 2·52 *m* dolg in 1·2 *m* širok; za koliko se mu mora povečati širina, če se zmanjša dolžina za 0·24 *m*, da ostane ploščina ista?

8. *A* obzida kvadratast vrt, katerega stranica meri 23 *m*; *B* pa ploščinsko jednak pravokoten vrt, katerega dolžina znaša 48 *m*; kateremu je treba več obzidja napraviti?

9. Stavbišče, ki je 52·2 *m* dolgo in 36·4 *m* široko, velja 14250·6 K; koliko velja m^2?

10. Njiva je 124 *m* dolga in 20 *m* široka; koliko pšenice je treba za setev, ako se poseje na 1 *ha* 3·1 *hl*?

11. Sprednjo stran 25 *m* dolge in 13 *m* visoke hiše je treba pobarvati z oljnato barvo; koliko bo plačati, ako se računa za kvadratni meter 1 K 70 h in je treba za vrata in okna odbiti deseti del?

12. V vežo, 14·4 *m* dolgo in 3·2 *m* široko, položijo se kamenite plošče; koliko plošč bo treba, ako je vsaka 3 *dm* dolga in 2 *dm* široka, in koliko bode veljal tlak, ako se plača za vsako ploščo z vlaganjem vred $2\frac{4}{5}$ K?

13. Streha je 34·1 *m* dolga in 5·6 *m* visoka; koliko je treba strešnih opek, ako so opeke po 24 *cm* dolge in 19 *cm* široke, in ako pokriva vsaka opeka sosedno opeko 35 *mm* počez in 42 *mm* po dolgem?

c) Kako določimo poševnokotnemu paralelogramu ploščino? kako višino? kako osnovnico? Zapiši dotične obrazce!

Naloge:

1. Osnovnica poševnokotnega paralelograma meri 151·4 *m* in višina 77·6 *m*; kolika je ploščina?

2. Romboidova ploščina znaša 6 *a* 27·9875 m^2; kolika je osnovnica, če meri višina 23·85 *m*?

3. Ploščina poševnokotnega paralelograma znaša 1 *a*, osnovnica 16 *m*; kolika je višina, ki pripada tej osnovnici? Kolika je druga osnovnica, če meri druga višina 12·8 *m*?

4. V poševnokotnem paralelogramu meri osnovnica 3·4 *m* in pripadajoča višina 1·5 *m*; kolik je obseg, če meri druga višina 3 *m*?

5. Romboid, katerega osnovnica meri 28 *cm* in višina 22 *cm*, je treba pretvoriti v ploščinsko jednak 16 *cm* visok pravokotnik; koliko meri pravokotnikova osnovnica?

6. V rombu meri jedna stranica 52 (8·24) *dm* in jeden notranjih kotov 30°; kolika je ploščina?

7. V rombu meri višina 8·4 (17·8) *dm* in jeden notranjih kotov 30°; kolika je ploščina?

d) Kako izračunaš trikotniku ploščino? kako osnovnico? kako višino? Zapiši dotične obrazce!

Naloge.

1. V trikotniku znaša:

a) osnovnica $47\frac{3}{4}$ *m*, višina $19\frac{4}{5}$ *m*;
b) » 2·345 *m*, » 1·724.. *m*;
c) » 76·84.. *dm*, » 42·96.. *dm*;

kolika je ploščina?

2. Kolika je osnovnica trikotniku, ako meri:

a) ploščina 9424 cm^2, višina 1·52 *m*;
b) » 4·3 m^2, » 1·72 *m*?

3. Kolika je višina trikotniku, ako znaša:

a) ploščina 8·58.. m^2, osnovnica 3·25.. *m*;
b) » 27·5625 m^2, » 5·25.. *m*?

4. Kolika je ploščina pravokotnega trikotnika, ako merite kateti *a)* 7·02 *m* in 5·6 *m*, *b)* 83·06 *dm* in 65·83.. *dm*?

5. V pravokotnem trikotniku znaša:

a) ploščina 0·7 *a* in jedna kateta 14 *m*;
b) » 4·08 dm^2 » » » 34 *cm*;

kolika je druga kateta?

6. Dve trikotnikovi stranici merite 344 *cm* in 183 *cm*, in višina, ki pripada prvi stranici, 167·5 *cm*; kolika je višina, ki pripada drugi stranici?

7. Dve trikotnikovi stranici, ki oklepate kot 30°, merite 48 *dm* in 36 *dm*; kolika je ploščina?

8. V trikotniku meri osnovnica 7·25 *m* in višina 4·8 *m*; kolika je stranica ploščinsko jednakega kvadrata?

9. Trikotnik je ploščinsko jednak kvadratu z obsegom 96 *m*; koliko meri trikotnikova osnovnica, ako znaša njega višina 12·8 *m*?

10. Trikotnik je ploščinsko jednak paralelogramu, katerega osnovnica meri 16 (15·2) *m* in višina 12·5 (8·4) *m*; kolika je trikotnikova osnovnica, ako znaša njega višina 20 (12) *m*?

11. Koliko velja trioglata plošča iz kovine, katere osnovnica meri 4·6 *m*, višina pa 3·2 *m*, ako tehta m^2 14 *kg* in velja 1 *kg* 1 K 28 h?

12. Njiva ima obliko pravokotnega trikotnika, katerega kateti merite 103 *m* in 67·6 *m*; koliko je njiva vredna, ako se računa ar po 22 K?

e) Kako izračunaš trapezu ploščino? kako višino? kako vsoto obeh vzporednic? kako srednico? Zapiši dotične obrazce!

Naloge.

1. Izračunaj trapezu ploščino, ako merite:

a) vzporednici 9·35 *m* in 8·25 *m*, višina pa 3·15 *m*;
b) » 24·6 *m* in 27·8 *m*, » » 15·64.. *m*!

2. V trapezu meri višina 3·7 ($7\frac{3}{4}$) *m* in srednica 5·2 ($3\frac{3}{5}$) *m*; kolika je ploščina?

3. Trapezova ploščina znaša 1022 m^2, višina pa 12 *m*; kolika je srednica?

4. V trapezu meri ploščina 340 (124·8) m^2, višina 5 (6·4) *m* in jedna vzporednih stranic 12 (12·8) *m*; kolika je druga vzporedna stranica?

5. Kolika je dolžina 5·2 *m* širokega pravokotnika, ki je ploščinsko jednak trapezu, katerega višina znaša 6·3 *m*, vzporednici pa 11 *m* in 9·4 *m*?

6. Travnik ima obliko trapeza, katerega vzporednici merite 168·42 *m* in 109·3 *m*, in katerega ploščina znaša 1·5 *ha*; kolika je razdalja vzporednih stranic?

7. Dvorišče ima obliko trapeza, katerega vzporednici merite 20·4 *m* in 18·5 *m* in ste druga od druge oddaljeni 15 *m*; koliko kamenitih plošč je treba, da se pomosti dvorišče, ako meri vsaka plošča 25 dm^2?

8. Pri kamnoseku se naroči trapezasta plošča; njeni vzporednici morate meriti 1·9 *m* in 1·2 *m*, njiju razdalja pa 1·1 *m*; koliko velja plošča, ako se računa m^2 po 31 K 8 h?

9. Streha ima dve trikotniški ploskvi, dve pa trapezasti; trikotnika in trapeza imata isto višino, namreč 3·6 *m*; osnovnica vsakega trikotnika meri 8 *m*, vzporednici vsakega trapeza pa znašate po 18 *m* in 10 *m*; koliko opek je treba, da se pokrije streha, ako meri vsaka opeka 5 dm^2?

f) Imenuj nekatere četverokotnike, v katerih stojite diagonali pravokotno druga na drugi! Kako določiš ploščino četverokotniku s pravokotno stoječima diagonalama? Kako izračunaš iz ploščine in jedne diagonale drugo diagonalo? Kako določiš kvadratu ploščino iz diagonale? Kako izračunaš iz kvadratove ploščine njega diagonalo? Zapiši dotične obrazce!

Naloge.

1. Kvadratova diagonala meri *a)* 8·7 *dm*, *b)* 63·45 *m*, *c)* 508·76.. *m*; kolika je ploščina?

2. Kvadratova ploščina znaša *a)* 1 m^2, *b)* 2·89 m^2, *c)* 17·25.. dm^2; kolika je diagonala?

3. Izračunaj rombu ploščino, ako merite diagonali *a)* 38·4 *m* in 25·6 *m*, *b)* 452·6.. *m* in 708·8.. *m*!

4. V rombu je ploščina $= p$ in jedna diagonala $= d$; kolika je druga diagonala?

a) $p = 2\cdot 44\ m^2$, *b)* $p = 209\cdot 55\ dm^2$, *c)* $p = 57210\ m^2$
$d = 2\cdot 275\ m$ $\quad d = 16\cdot 5\ dm$ $\quad d = 286\cdot 4..\ m$.

5. Izračunaj deltoidu ploščino, ako merite diagonali *a)* 33 *dm* in 44 *dm*, *b)* 6·75.. *m* in 10·8 *m*!

6. Deltoidova ploščina znaša 96 dm^2 (1643·52 m^2) in jedna diagonala 12 *dm* (38·4); kolika je druga diagonala?

7. Kolika je ploščina četverokotnika s pravokotno stoječima diagonalama, ako znašajo razdalje vseh štirih oglišč od presečišča obeh diagonal po vrsti 42 *dm*, 38 *dm*, 15 *dm* in 55 *dm*?

g) Kako določiš pravilnemu mnogokotniku ploščino? Zapiši obrazec!

Naloge.

1. V pravilnem mnogokotniku meri obseg 42·5 *dm* in polumer včrtanega kroga 0·84 *m*; kolika je ploščina?

2. Kolika je ploščina pravilnega peterokotnika, ako meri stranica 1·5 *m*, in ako je polumer včrtanega kroga približno 0·68819krat tolik kakor stranica?

3. Izračunaj ploščino pravilnega osmerokotnika (deseterokotnika), ako znaša stranica 8·25 *dm*, in ako je razstoj središča od stranice približno 1·20711 (1·53884) krat tolik kakor stranica!

h) Kako določimo nepravilnemu mnogokotniku ploščino?

Naloge.

1. V trapezoidu *ABCD* meri diagonala $AC = 5\cdot 24$ (1·72) *m*, pravokotnici iz oglišč *B* in *D* na diagonalo *AC* znašate 3·56 (0·72) *m* in 2·35 (0·58) *m*; kolika je ploščina?

2. V peterokotniku *ABCDE* merite diagonali $AC = 7\cdot 5\,m$ in $AD = 8\cdot 2\,m$, razstoja oglišč *B* in *D* od diagonale *AC* znašata 3·2 *m* in 4·6 *m*; razstoj oglišča *E* od diagonale *AD* meri 2·5 *m*. Kolika je ploščina?

3. Načrtaj v šesterokotniku *ABCDEF* diagonalo *AD* in spusti iz oglišč *B*, *C*, *E* in *F* pravokotnice BB', CC', EE' in FF' na *AD*! Kolika je ploščina šesterokotnikova, ako merijo $BB' = 15$, $CC' = 30$, $EE' = 40$, $FF' = 22$, $AB' = 10$, $AF' = 20$, $AC' = 50$, $AE' = 60$, $AD = 90$ *cm*?

i) Kako izračunamo krogu ploščino? Kako izračunamo iz krogove ploščine polumer? Zapiši dotične obrazce!

Naloge.

1. Izračunaj krogu ploščino, ako meri polumer *a)* 3·7 *dm*, *b)* $83\frac{2}{5}$ *dm*; *c)* 0·865.. *m*!

2. Krogov obod meri *a)* 17·96 *dm*, *b)* 5·875 *m*, *c)* 6·154.. *m*; kolik je polumer, kolika ploščina?

3. Krog ima *a)* 10 dm^2, *b)* 0·8659 m^2, *c)* 31·47.. cm^2 ploščine; kolik je njega polumer?

4. Kolik je obod kroga, katerega ploščina znaša *a)* 2464 m^2, *b)* 654·68 cm^2 *c)* 17·5684.. dm^2?

5. Izračunaj polumer kroga, kateri ima toliko ploščino kakor kvadrat s stranico *a)* 2 *m* 3 *dm*, *b)* 0·875 *m*!

6. Kolika je stranica kvadrata, ki je ploščinsko jednak krogu s polumerom 5·6 *dm*?

7. Nad daljico $s = 1\cdot624\ m$ stoji polukrog in pravokotnik, katerega stranice se dotikajo polukroga; kolika je ploskev med polukrogom in pravokotnikovim obsegom?

8. Kvadratu s stranico 7·2 *dm* je včrtan krog; kolika je ploskev med krožnico in kvadratovim obsegom?

9. Krogu s polumerom 5·4 *dm* je včrtan kvadrat; kolika je razlika obeh ploskev?

k) Kako določimo kolobarju ploščino? Kako najdemo kolobarjevo širino? Zapiši dotične obrazce!

Naloge.

1. Polumera dveh istosrediščnih krogov merita *a)* 5·8 *dm* in 3·95 *dm*, *b)* 6·89.. *dm* in 4·73.. *dm*; kolik je kolobar?

2. Izračunaj kolobar, ako znaša ploščina notranjega kroga 42·18 cm^2 (5·1445 m^2) in kolobarjeva širina 4 *cm* (0·994 *m*)!

3. Izračunaj kolobar, ako merita oboda notranjega in vnanjega kroga 30 *m* in 40 *m*!

4. Kolika je kolobarjeva ploščina, ako meri obod vnanjega kroga 162·7834 *m* in kolobarjeva širina 2·56 *m*?

5. Kako širok je kolobar, ako znaša njega ploščina 10 cm^2 (2·3 m^2) in polumer notranjega kroga 3 *cm* (0·6 *m*)?

6. Kolik je polumer kroga, ki je ploščinsko jednak kolobarju s polumeroma 29 *cm* in 21 *cm* (1 *dm* in 6 *cm*)?

l) Kako izračunamo ploščino krogovega izseka? Kako sta si izsek in krožnina? kako lok in krožnica? Ali sta si izsek in krožnina tako, kakor sta si lok in krožnica? Zapiši dotične obrazce!

Naloge.

1. V krogovem izseku je *a)* $r = 4\ m,\ l = 5\ m$; *b)* $r = 16\cdot8\ m,\ l = 8\cdot75\ m$; kolika je izsekova ploščina?

2. Polumer krogovega izseka meri r in pripadajoči obsrediščni kot α; kolika je izsekova ploščina?

a) $r = 2\cdot71\ m$,	*b)* $r = 0\cdot25\ m$,	*c)* $r = 68\cdot5\ cm$
$\alpha = 63^0$	$\alpha = 30^0\ 18'$	$\alpha = 36^0\ 36'\ 36''$.

3. Ploščina krogovega izseka znaša p in pripadajoči obsrediščni kot α; kolik je polumer?

a) $p = 24\ m^2$,	*b)* $p = 2\ dm^2$,	*c)* $p = 0\cdot276\ m^2$,
$\alpha = 40^0$	$\alpha = 7^0\ 12'$	$\alpha = 48^0\ 17'\ 30''$.

4. Ploščina krogovega izseka je p, polumer pa r; kolik je pripadajoči obsrediščni kot?

a) $p = 7\cdot9\ cm^2$,	*b)* $p = 12300\ dm^2$,	*c)* $p = 10\cdot942\ m^2$
$r = 8\cdot3\ cm$	$r = 164\ dm$	$r = 2\cdot408\ m$.

5. Krog meri 35 m^2, izsek pa 25 m^2; kolik je *a)* obsrediščni kot, *b)* polumer, *c)* pripadajoči lok?

6. Lok nekega kroga meri 1 m in pripadajoči izsek 1 m^2; *a)* kolik je polumer, *b)* koliko stopinj meri pripadajoči lok?

§ 8.

Kako se glasi Pitagorov izrek? Čemu je jednak kvadrat nad hipotenuzo pravokotnega trikotnika? Čemu je jednak kvadrat nad vsako kateto pravokotnega trikotnika? Kako se prepričaš o resnici Pitagorovega izreka? Zapiši ta izrek v znakih! Zapiši, čemu je jednaka hipotenuza pravokotnega trikotnika, čemu kateta!

Naloge.

1. Načrtaj kvadrat, ki je jednak vsoti 2, 3, 4 določenih kvadratov!

2. Načrtaj kvadrat, ki je 2-, 3-, 4krat tolik kakor določeni kvadrat!

3. Načrtaj kvadrat, ki je jednak razliki dveh določenih kvadratov!

4. Načrtaj kvadrat, ki je jednak polovici določenega kvadrata! (Načrta pravokotni jednakokraki trikotnik s pomočjo polukroga!)

5. Načrtaj kvadrat, ki je jednak vsoti (razliki) dveh določenih pravokotnikov (trapezov)!

6. Načrtaj kvadrat, ki je jednak vsoti treh določenih paralelogramov (trikotnikov)!

7. V pravokotnem trikotniku merite kateti *a)* 35 m in 12 m, *b)* 7·2 dm in 3·84 dm; kolika je α) hipotenuza, β) ploščina, γ) višina na hipotenuzo? (Višino na hipotenuzo najdeš, ako deliš dvojno ploščino s hipotenuzo.)

8. V pravokotnem trikotniku meri *a)* hipotenuza 68 dm, jedna kateta 32 dm, *b)* hipotenuza 5·46 m, jedna kateta 2·72 m; kolik je obseg, kolika ploščina?

9. Kvadratova stranica meri *a)* 9·3 dm, *b)* 0·276 m; kolika je diagonala? (Kvadratova diagonala je hipotenuza pravokotnega trikotnika, katerega kateti ste kvadratovi stranici.)

10. Kvadratova diagonala meri *a)* 7·5 dm, *b)* 90·8 cm; kolika je stranica?

11. Kolika je diagonala 6·5 m dolgega in 3·3 m širokega pravokotnika? (Napravi sliko!)

12. V pravokotniku meri diagonala 7·3 dm, jedna stranica 4·8 dm; kolika je stranica ploščinsko jednakega kvadrata?

13. V jednakokrakem trikotniku meri osnovnica 4·8 (16·8) dm in vsak krak 2·5 (20·5) dm; kolika je *a)* višina, *b)* ploščina? (Napravi sliko ter poišči pravokotni trikotnik, iz katerega izračunaš višino!)

14. Kolik je obseg jednakokrakega trikotnika, katerega osnovnica meri 10·2 (3·36) dm, višina pa 6·8 (4·25) dm?

15. V jednakostraničnem trikotniku meri stranica *a)* 8·5 cm, *b)* 23·4 dm, *c)* 3·76. . dm; kolika je α) višina, β) ploščina?

16. V rombu merite diagonali *a)* 3·12 m in 1·3 m, *b)* 2·26 dm in 1·75 dm; kolika je stranica?

17. Kolik je rombov obseg, v katerem znaša ploščina 21 m^2, jedna diagonala pa 35 dm?

18. Izračunaj ploščino pravilnega šesterokotnika, katerega stranica meri *a)* 5·2 *cm*, *b)* 7·5 *dm*?

19. Krogu s polumerom 6 *dm* je včrtan pravilni šesterokotnik; kolika je ploskev, ki leži med krožnico in šesterokotnikovim obsegom?

20. V krogu s polumerom 10·1 (1·97) *dm* meri neka tetiva 4 (3·9) *dm* kolika je njena središčna razdalja?

21. Kolika je tetiva v krogu s polumerom 2·9 (26·5) *m*, če meri njena središčna razdalja 2·1 (2·3) *m*?

§ 9.

Kaj je mera, kaj mersko število določene daljice? Pojasni ta izraza s primerom! Kedaj iščemo razmerje dveh daljic? Kaj pomeni izraz «*LM* : *NO*», če ste *LM* in *NO* določeni daljici? Kako imenujemo *LM*, kako *NO*, kako ves navedeni izraz? Kaj je količnik ali kvocijent razmerja? Kam ga zapišemo? Kateri pomen ima količnik v obliki ulomka? Kedaj je količnik celo število, kedaj ulomek? Kako izrazimo razmerje dveh daljic s celima številoma? Kaj pomenite celi števili, s katerima izrazimo razmerje dveh daljic? Na koliko in na katere načine določujemo razmerje dveh daljic? Kako določimo razmerje treh daljic?

Naloge.

1. Kedaj ste si dve daljici kakor *a)* 1 : 3, *b)* 2 : 5, *c)* 7 : 4?

2. Načrtaj dve daljici, ki ste v razmerji *a)* 2 : 3, *b)* 6 : 8, *c)* $2 : 1\frac{1}{4}$, *d)* $1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{2}$.

(Pri nalogi *b)* se določeno razmerje lahko okrajša, t. j. izrazi z manjšima številoma; pri nalogah *c)* in *d)* je treba najprej določeni razmerji izraziti s celimi števili).

3. Načrtaj tri daljice, ki so si kakor *a)* 2 : 3 : 4, *b)* $2 : 2\frac{1}{2} : 3$, *c)* $2\frac{1}{3} : 3\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4}$

(Določeno razmerje pri nalogi *b)*, oziroma *c)*, izraziš s celimi števili, ako pomnožiš tema razmerjema vsak člen z najmanjšim skupnim mnogokratnikom vseh imenovalcev, ki se nahajajo v dotičnem razmerji. Če imajo vsi členi razmerja kako skupno mero, se razmerje okrajša s to mero).

§ 10.

Katera razmerja imenujemo jednaka? Kedaj smemo razmerja izjednačiti? Kaj je sorazmerje? Koliko členov ga sestavlja? Katera člena sta notranja, katera zunanja? Kako pravimo četrtemu členu sorazmerja? Katero sorazmerje imenujemo stalno? Kako se zove notranji člen, kako četrti člen stalnega sorazmerja? Katere daljice imenujemo sorazmerne? Kedaj ste dve dvojici daljic sorazmerni? Ali je pri sorazmernih daljicah skupna mera prve dvojice jednaka skupni meri druge dvojice? Kako najdemo sorazmerne daljice? Katere daljice se imenujejo istoležne? Ali so istoležne daljice sorazmerne?

Naloge.

1. Načrtaj dve dvojici sorazmernih daljic!
2. Načrtaj tri, štiri dvojice sorazmernih daljic!
3. Načrtaj tri daljice, ki tvorijo stalno sorazmerje!
4. Izračunaj trem določenim daljicam $a = 7 \cdot 75$ $(0 \cdot 25)$ m, $b = 3 \cdot 11$ $(2 \cdot 75)$ m in $c = 10 \cdot 54$ (1) m četrto sorazmernico!
5. Izračunaj daljicama $a = 16$ $(113 \cdot 6)$ cm in $b = 20$ $(28 \cdot 4)$ cm tretjo sorazmernico!
6. Izračunaj daljicama $a = 4 \cdot 5$ $(27 \cdot 9)$ dm in $b = 24 \cdot 5$ $(12 \cdot 4)$ dm srednjo sorazmernico!

§ 11.

Naloge.

1. Razdeli določeno daljico AB na 5, 7, 9 jednakih delov!
2. Razdeli določeno daljico AB v razmerji *a)* $3 : 8$, *b)* $1\frac{1}{3} : 2$, *c)* $2 : 2\frac{2}{3} : 3\frac{1}{3}$!
3. Zmanjšaj določeno daljico AB v razmerji *a)* $6 : 5$, *b)* $7 : 3$!
4. Povečaj določeno daljico AB v razmerji *a)* $2 : 5$, *b)* $4 : 9$!
5. Načrtaj dve nejednaki daljici in potem dve drugi daljici, ki ste sorazmerni s prvima!
6. Načrtaj tri nejednake daljice ter jim poišči četrto sorazmernico!
7. Načrtaj dve nejednaki daljici ter jima poišči tretjo sorazmernico!

§ 12.

Naloge.

1. Načrtaj dva kroga, katerih oboda sta v razmerji $2 : 3$!
2. Načrtaj dva pravilna šesterokotnika, katerih obsega sta si kakor $3 : 4$!
3. Razdeli določeni trikotnik *a)* na dva trikotnika, ki sta si kakor $3 : 5$; *b)* na tri trikotnike, ki so si kakor $2 : 3 : 4$!
4. Razdeli določeni paralelogram *a)* na dva paralelograma, ki sta si kakor $2 : 3$; *b)* na tri paralelograme, ki so si kakor $4 : 5 : 6$!
5. Razdeli določeni paralelogram iz oglišča na dva dela, ki sta si *a)* kakor $1 : 3$, *b)* kakor $2 : 5$!
6. Razdeli določeni paralelogram iz oglišča na tri dele, ki so si *a)* kakor $2 : 3 : 5$, *b)* kakor $4 : 3 : 2$!
7. Načrtaj dva kroga, katerih ploščini ste v razmerji $16 : 25$!
8. Načrtaj dva kroga in dva kvadrata, katerih ploščine so sorazmerne!
9. Stranici dveh pravilnih peterokotnikov merite *a)* $4 \cdot 4$ dm in $7 \cdot 7$ dm, *b)* $0 \cdot 65$ m in $0 \cdot 39$ m; kako sta si obsega? (Izrazi razmerje z najmanjšima celima številoma!)
10. Polumera dveh krogov znašata *a)* $8 \cdot 1$ dm in $2 \cdot 7$ dm, *b)* $5 \cdot 7$ m in $3 \cdot 8$ m; kako sta si *a)* oboda, *b)* ploščini?
11. Osnovnici dveh paralelogramov (trikotnikov) merite 8 $(8 \cdot 4)$ dm in $4 \cdot 2$ $(5 \cdot 5)$ dm, njiju višini pa 35 (33) cm in 25 (28) cm; kako ste si ploščini?
12. Ploščini dveh paralelogramov z isto osnovnico ste v razmerji $3 : 7$; kolika je višina drugega paralelograma, če meri v prvem 5 dm 1 cm?
13. Ploščina nekega paralelograma, katerega osnovnica je 18 cm dolga, znaša 112 cm^2; kolika je ploščina drugega paralelograma z isto višino, če meri njegova osnovnica $2 \cdot 7$ cm?

14. Osnovnici dveh jednako visokih trikotnikov ste v razmerji 11 : 9; kolika je ploščina prvega trikotnika, če znaša v drugem 6 dm^2 30 cm^2?

15. Izmed dveh trikotnikov z isto osnovnico je prvi $3\frac{3}{4}$ krat večji od drugega; kolika je višina drugega trikotnika, če znaša v prvem 1 *dm* 2 *mm*?

16. Ploščina nekega kvadrata znaša 36·75 dm^2; kolika je stranica drugega kvadrata, ki je $5\frac{1}{3}$ krat večji od prvega?

17. Polumer nekega kroga meri 0·34 (5·7) *dm*; kolik je polumer drugega kroga, katerega ploščina je 9 (25) krat večja?

18. Polumer kroga, ki ima 165·25 (7·82) m^2 ploščine, je r; kolika je ploščina drugega kroga, katerega polumer je $1\frac{1}{2}$ (10) krat večji?

19. Krogu meri polumer 5·8 *dm*; kolik polumer mora imeti drug krog, da je njegova ploščina $2\frac{1}{2}$ krat tolika?

20. Krog ima 315 *mm* v polumeru; kolik premer ima drug krog, ako je razmerje med ploščino tega in prvega kroga 9 : 4?

§ 13.

Katere lastnosti imata podobna trikotnika? V čem se ujemata, po čem razlikujeta? V kakšni zvezi so njiju koti, v kakšni stranice? Katere stranice so v podobnih trikotnikih istoležne? Kako najdemo najlažje določenemu trikotniku podoben trikotnik?

Naloge.

1. Načrtaj določenemu trikotniku podoben trikotnik ter zapiši v znakih, v kakšni zvezi so njiju koti, v kakšni stranice!

2. Načrtaj trikotnik, v katerem merijo stranice 21 (135), 35 (120) in 28 (85) *mm*, razdeli potem jedno izmed stranic v razmerji 3 : 4 (7 : 3), nariši skoz razdelišče vzporednico z drugo stranico ter izračunaj stranice nastalega podobnega trikotnika!

3. Načrtaj pravokotni trikotnik s katetama 48 *mm* in 55 *mm*, razdeli prvo kateto v razmerji 3 : 5, načrtaj skoz razdelišče vzporednico s hipotenuzo ter izračunaj stranice nastalega podobnega trikotnika!

§ 14.

Iz česa sklepamo na podobnost dveh trikotnikov? Ali sta dva trikotnika podobna, če se ujemata v dveh kotih? Kako se prepričaš o tej lastnosti?

Naloge.

1. Načrtaj nad določeno daljico $A'B'$ trikotnik $A'B'C'$, ki je podoben določenemu trikotniku ABC!

(Nalogo razrešiš s pomočjo izreka o podobnosti dveh trikotnikov.)

2. Načrtaj določenemu trikotniku ABC podoben trikotnik $A'B'C'$ tako, da bodo njiju istoležne stranice v razmerji *a)* 5 : 3, *b)* 4 : 7, *c)* $\frac{3}{2} : \frac{2}{3}$, *d)* $3\frac{3}{4} : 1\frac{2}{3}$!

(Pri teh nalogah je treba najprej zmanjšati, oziroma povečati osnovnico določenega trikotnika ABC v določenem razmerji; potem razrešiš te naloge kakor prejšnjo.)

3. Določi, ali sta *a)* dva jednakostranična, *b)* dva pravokotna jednakokraka trikotnika podobna!

4. Stranice nekega trikotnika merijo: $AB = 9\ dm$, $AC = 12\ dm$ in $BC = 8\ dm$; v podobnem trikotniku $A'B'C'$ meri stranica $A'B'$, ki je z AB istoležna, 6 *dm*. Izračunaj ostali dve stranici trikotnika $A'B'C'$!

5. V trikotniku, katerega stranice znašajo $a = 7\ dm$, $b = 7{\cdot}7\ dm$ in $c = 8{\cdot}4\ dm$, je prečnica d, ki je s stranico c vzporedna, $1{\cdot}68\ dm$ dolga; koliki so odseki, katere napravi prečnica na stranicah a in b?

6. V trikotniku ABC je $AB : AC = 2 : 3$ in $AB : BC = 4 : 5$; izračunaj razmerje med stranicama AC in BC!

7. Načrtaj dva podobna trikotnika, v katerih je razmerje med istoležnimi stranicami *a)* $2 : 3$, *b)* $3 : 4$, *c)* $7 : 3$!

8. Vodoravna senca nekega stolpa meri $36{\cdot}3\ m$, in senca navpične $1\ m$ dolge palice znaša ob istem času $0{\cdot}55\ m$; kako visok je stolp?

§ 15.

Kako sta si obsega, kako istoležni višini dveh podobnih trikotnikov? Kako se prepričaš o teh lastnostih?

Naloge.

1. V trikotniku meri osnovnica $2{\cdot}5\ dm$ in višina $3\ dm$; kolika je višina podobnega trikotnika, če meri pripadajoča osnovnica $7{\cdot}5\ dm$?

2. Obseg nekega trikotnika znaša $185\ m$; kolik je obseg podobnega trikotnika, če je razmerje dveh istoležnih stranic $= 7 : 8$ $(5 : 3)$?

3. Istoležni stranici dveh podobnih trikotnikov merite $1{\cdot}2\ m$ in $0{\cdot}8\ m$; kolik je obseg drugega trikotnika, če meri obseg prvega $3{\cdot}5\ m$?

§ 16.

Kako ste si ploščini dveh podobnih trikotnikov? Kako se prepričaš o tej lastnosti?

Naloge.

1. Istoležne stranice dveh podobnih trikotnikov so si kakor $2 : 3$ $(5 : 7)$. Ploščina prvega trikotnika znaša $5{\cdot}4\ m^2$; kolika je ploščina drugega trikotnika?

2. Osnovnica nekega trikotnika meri $14\ m$, ploščina pa $400\ m^2$; kolika mora biti osnovnica podobnega trikotnika, da bode njega ploščina 2 (3) krat tolika?

3. Obsega dveh podobnih trikotnikov znašata $0{\cdot}54\ m$ in $0{\cdot}42\ m$; kolika je ploščina drugega trikotnika, če znaša v prvem $2{\cdot}16\ m^2$?

4. Ploščini dveh podobnih trikotnikov znašate $5{\cdot}67\ m^2$ in $0{\cdot}07\ m^2$; kolik je obseg drugega trikotnika, če znaša v prvem $10{\cdot}2\ m$?

§ 17.

Katere lastnosti imata dva podobna mnogokotnika? V čem se ujemata, po čem razlikujeta? V kakšni zvezi so njiju koti, v kakšni stranice? Katere stranice, katere diagonale se imenujejo istoležne? S čim so istoležne diagonale sorazmerne? Kako si je treba dva podobna mnogokotnika misliti sestavljena? Kedaj smemo trditi, da sta dva mnogokotnika podobna? Kako načrtamo najlažje določenemu mnogokotniku podoben mnogokotnik?

Naloge.

1. Zmanjšaj določenemu peterokotniku vse stranice v razmerji 3 : 2!
2. Povečaj določenemu šesterokotniku vse stranice v razmerji 3 : 4!
3. Načrtaj dva podobna peterokotnika, katerih istoležne stranice so v razmerji *a)* 4 : 5, *b)* 6 : 5!
4. Načrtaj določenemu šesterokotniku podoben mnogokotnik tako, da bodo njiju istoležne stranice v razmerji *a)* 4 : 3, *b)* 2 : 3!

§ 18.

Kako sta si obsega, kako ploščini dveh podobnih mnogokotnikov? Kako se prepričaš o teh lastnostih? Kako načrtavamo daljice, ki jih izmerimo v naravi? Kaj pomeni merilo, po katerem je napravljen zemljevid ali slika? V kakšni zvezi je lik v sliki z dotičnim likom v naravi? Kako sta si taka lika? kako njiju stranice, kako obsega, kako ploščini?

Naloge.

1. V sliki, napravljeni po merilu 1 : 2000, znaša razdalja dveh točk 82 *mm*; kolika je razdalja teh točk *a)* v naravi, *b)* v sliki, napravljeni po merilu 1 : 5000?
2. Koliko meri daljica 1 *km* na zemljevidu, napravljenem po merilu 1 : 150000?
3. Na zemljevidu so razdalje treh točk A, B, C te-le: $AB = 130$ *mm*, $BC = 190$ *mm*, $AC = 200$ *mm*. Koliko *km* znašajo razdalje teh točk v naravi, če je zemljevid napravljen po merilu 1 : 200000?
4. Razdalje treh točk A, B, C na polji znašajo: $AB = 350\,m$, $BC = 300\,m$, $AC = 275\,m$; trikotnik, ki ga določujejo te točke, naj se načrta po merilu *a)* 1 : 2500, *b)* 1 : 5000!
5. Razdalje treh krajev A, B, C v naravi so: $AB = 15\,km$, $BC = 20\,km$, $AC = 24\,km$. V sliki je zmanjšana daljica $AC = 120$ *mm*; *a)* po katerem merilu je slika napravljena, *b)* koliko merite daljici AB in BC v sliki?
6. Določeni mnogokotnik naj se tako poveča, da postane njegova ploščina 4-, 9-, 16 krat tolika; v katerem razmerji moraš povečati stranice tega mnogokotnika?
7. Istoležni stranici dveh podobnih mnogokotnikov ste $s = 15\,cm$ in $s_1 = 12\,cm$. Kolika je ploščina drugega mnogokotnika, če znaša v prvem *a)* $1\,dm^2$, *b)* $0\cdot3325\,m^2$?
8. V sliki, napravljeni po merilu 1 : 100, znaša ploščina nekega mnogokotnika $1\cdot5423\,dm^2$; kolika je ploščina tega mnogokotnika *a)* v naravi, *b)* v sliki napravljeni po merilu 1 : 150?
9. Ako znaša stranica 1 *cm*, je

ploščina pravilnega peterokotnika $= 1\cdot7205..\,cm^2$,
» » šesterokotnika $= 2\cdot5981..\,cm^2$,
» » osmerokotnika $= 4\cdot8285..\,cm^2$,
» » deseterokotnika $= 7\cdot6941..\,cm^2$.

Kolika je ploščina v vsakem slučaji, če meri stranica *a)* 1 *dm*, *b)* 3 *cm*, *c)* $1\cdot3$ *dm*, *d)* $2\cdot34$ *m*?

§ 19.

Naloge.

1. Načrtaj določenemu trapezoidu podoben četverokotnik tako, da razdeliš določeni trapezoid na trikotnike iz točke, ki leži *a)* v jednem oglišči, *b)* v jedni stranici, *c)* znotraj določenega trapezoida, in da bo razmerje po dveh istoležnih stranic $= 3 : 5$ $(4 : 3)$!

2. Načrtaj določenemu peterokotniku (šesterokotniku) podoben mnogokotnik po istih pogojih, ki se nahajajo v prejšnji nalogi!

3. Povej in zapiši obrazec za diagonalo določenega kvadrata! Kako najdeš ta obrazec?

4. Povej in zapiši obrazce: *a)* za višino in za ploščino jednakostraničnega trikotnika, *b)* za polumer kroga, ki je jednakostraničnemu trikotniku včrtan, oziroma očrtan! Kako najdeš te obrazce?

5. Povej in zapiši obrazce: *a)* za ploščino pravilnega šesterokotnika, *b)* za polumer kroga, ki je pravilnemu šesterokotniku včrtan, oziroma očrtan! Kako najdeš te obrazce?

6. Povej in zapiši obrazec za stranico pravilnega šesterokotnika, ki je določenemu krogu očrtan! Kako najdeš ta obrazec?

7. Povej in zapiši približno vrednost *a)* za $\sqrt{2}$, *b)* za $\sqrt{3}$!

8. Stranica nekega kvadrata meri *a)* $5\cdot87$ *dm*, *b)* $3\frac{5}{6}$ *dm*, *c)* $0\cdot694..$ *m*; kolika je diagonala?

9. Stranica jednakostraničnega trikotnika znaša $43\cdot5$ *cm* ($852..$ *mm*); kolika je *a)* višina, *b)* ploščina, *c)* polumer včrtanega in očrtanega kroga?

10. Stranica pravilnega šesterokotnika znaša *a)* 735 *mm*, *b)* $83\frac{1}{3}$ *cm*, *c)* $8\cdot47..$ *dm*; kolika je ploščina, kolik polumer včrtanega kroga?

11. Polumer kroga meri 89 ($71\cdot6..$) *cm*; kolika je stranica očrtanega pravilnega šesterokotnika?

12. Kolik premer ima krog, ki je ploščinsko jednak vsoti dveh krogov s premeroma $9\cdot6$ *dm* in 12 *dm* 8 *cm*?

(Množenje z Ludolfovim številom smeš tukaj opustiti. Zakaj?)

13. Kolik polumer je treba dati krogu, da bode njegova ploščina jednaka razliki dveh krožnin, ki imate polumera $8\cdot5$ *dm* in 51 *cm*?

Primerjaj nalogo 12.!

14. Polumer kroga meri 41 *cm*; *a)* kolika je stranica včrtanega in očrtanega kvadrata? *b)* za koliko je krogov obod večji, oziroma manjši, nego sta obsega včrtanega in očrtanega kvadrata?

15. Kvadratu s stranico $43\cdot5$ *cm* je jeden krog včrtan, drugi pa očrtan; za koliko je kvadratova ploščina večja, oziroma manjša, nego ste ploščini včrtanega in očrtanega kroga?

16. Krogu s polumerom 15 *cm* je včrtan in očrtan kvadrat; koliko meri ploskev med obsegoma obeh kvadratov?

17. Pravokotniku s stranicama $10\cdot4$ *dm* in $7\cdot8$ *dm* je očrtan krog; kolik je obseg podobnega pravokotnika, ki je temu krogu očrtan?

(Načrtaj podobni pravokotnik s pomočjo diagonal in somernic določenega pravokotnika tako, da so istoležne stranice obeh pravokotnikov vzporedne! Po izreku, da so v podobnih trikotnikih istoležne stranice sorazmerne z istoležnimi višinami, najdeš stranice očrtanega pravokotnika.)

18. Kolika je razlika *a)* med obodoma, *b)* med ploščinama dveh krogov, izmed katerih je jeden očrtan, drugi pa včrtan jednakostraničnemu trikotniku z obsegom 45 *cm*?

19. Krogu s polumerom 1·9 *dm* je včrtan in očrtan pravilni šesterokotnik; koliko znaša razlika med ploščinama teh dveh mnogokotnikov?

20. Kolik je polumer kroga, ki je ploščinsko jednak jednakostraničnemu trikotniku s stranico 1·8 *dm*?

21. Kolik je premer kroga, ki je ploščinsko jednak pravilnemu šesterokotniku z obsegom 8·4 *dm*?

22. V jednakokrakem trapezu merite vzporednici 1·8 *dm* in 1·2 *dm*, kraka pa po 5 *cm*; kolika je višina, kolika ploščina?

(Razdeli določeni trapez na paralelogram in na jednakokraki trikotnik ter poišči temu trikotniku višino!)

23. V trapezu meri jedna vzporednica 33 *dm*, vsaka izmed ostalih stranic pa 17 *dm*; kolika je ploščina?

Primerjaj nalogo 22.!

24. V pravokotniku meri diagonala 12 *cm* in kot, katerega oklepate diagonali, 60^0; kolik je obseg?

25. Za koliko je ploščina kroga s polumerom $r = 1$ *dm* večja od ploščine včrtanega pravilnega šesterokotnika, in za koliko manjša od ploščine očrtanega kvadrata?

26. Kolika je ploščina krogovega odseka, katerega lok meri 60^0 (120^0), polumer pa 5 (8·6) *dm*?

(Ploščino krogovega odseka najdeš, ako odšteješ od ploščine pripadajočega izseka ploščino trikotnika, katerega omejujejo tetiva in dva polumera.)

27. Kolika je ploščina krogovega odseka, ki pripada *a)* kvadrantovi tetivi *b)* sekstantovi tetivi, če meri polumer 4 *dm*?

Primerjaj nalogo 26.!

28. V krogu s polumerom 6 *cm* meri neka tetiva 4 *cm*; kolika je tetiva, ki pripada za polovico manjšemu loku?

29. Krogu vzporedniku, ki gre skoz Dunaj, meri stopinja 74·314.. *km*; kolik je polumer tega vzporednika?

30. Ljubljana ima $46^0\,3'$ zemljepisne širine; koliko kilometrov je od ravnika (ekvatorja) oddaljena, če meri poludnevnik 40000 *km*?

§ 20.

Kaj določuje premici lego v prostoru popolnoma? Ali morete dve različni premici imeti dve skupni točki? Kako spoznamo in se prepričamo o ploskvi, da je ravnina? Kedaj leži premica popolnoma v ravnini? Kaj določuje ravnini lego popolnoma? koliko točk, in kateri drugi stvori? Kako si pojasniš vsakega izmed teh slučajev? Kako nastane ravnina? Pojasni vse te slučaje s primernimi slikami! Kakšne ravnine razločujemo? Kaj je poluravnina in kako jo dobimo? Kaj je raven lik ali ravna ploskev?

§ 21.

Kolikero medsebojno lego utegnete imeti dve premici v prostoru? Kedaj se sečete? Kedaj ste vzporedni? Kedaj ste navskrižni ali se križate? Pokaži to trojno lego s pomočjo dveh ravnih palčic! Poišči v šolski sobi dve premici (ali dva roba), ki *a)* se sečete, *b)* ste vzporedni, *c)* ste navskrižni! Kako se morate pomikati dve premici po prostoru, da ne izpremenite svoje medsebojne lege? Kako se morata kraka določenega kota pomikati po prostoru, da ohrani kot svojo prvotno velikost? Kedaj so koti z vzporednimi kraki jednaki, kedaj suplementarni? Ali veljajo te lastnosti le o kotih v prostoru, ali tudi o kotih v jedni in isti ravnini? Načrtaj vse te slučaje *a)* za jedno in isto ravnino, *b)* za prostor!

§ 22.

Kolikero lego more imeti premica z ozirom na določeno ravnino? Kedaj je premica vzporedna z ravnino? Kedaj seče premica ravnino? Kaj je podnožišče preme črte? Pokaži s pomočjo ravne deščice in ravne palčice glavni legi med premico in ravnino! Kolikero lego more imeti ravnina z ozirom na določeno ravnino? Kedaj je ravnina vzporedna z ravnino? Kedaj seče ravnina ravnino? Kaj je presečnica dveh ravnin? Kakšna črta je presečnica? Kako se prepričaš, da je presečnica dveh ravnin prema črta? Pokaži s pomočjo dveh ravnih deščic glavni legi med ravninama!

§ 23.

Kedaj pravimo, da stoji premica pravokotno na ravnini? Kako spoznaš to lastnost? Kako jo zapišeš v znakih? Koliko pravokotnic se dá načrtati iz točke, ležeče zunaj določene ravnine, na to ravnino? Kako spoznaš to resnico? Kaj določuje razdaljo med točko in določeno ravnino? Katero lastnost ima razdalja med točko in določeno ravnino? Kakšno medsebojno lego imate daljici, ki stojite pravokotno na jedni in isti ravnini? Kedaj stojite vzporednici pravokotno na jedni in isti ravnini? Kako se prepričaš o teh lastnostih? Poišči v šolski sobi daljice, ki stojijo pravokotno na jedni in isti ravnini!

§ 24.

Kaj je vzmet točke na določeno ravnino? Kako ga najdeš? Kako najdeš vzmet daljice na določeno ravnino? Kateri trikotnik se imenuje vzmetni trikotnik? Kaj je nakloński kot določene daljice proti določeni ravnini? Katero lastnost ima ta kot? Kako se prepričaš o tej lastnosti? Ali more naklonski kot biti večji ko 90^0? Kedaj stoji daljica pravokotno na ravnini, kedaj poševno? Od česa je odvisna velikost vzmeta določene daljice na določeno ravnino? Kakšen postaja vzmet, če se veča, oziroma manjša naklonski kot? Kedaj je vzmet jednak daljici, kedaj jednak daljičini polovici? Kedaj je vzmet določene daljice $= 0$? Kako izračunaš vzmet določene daljice, če znaša naklonski kot 30^0, 45^0, 60^0? Kako izračunaš iz znanega vzmeta dolgost daljice, če meri naklonski kot 30^0, 45^0, 60^0? Kako določiš vzmet in naklonski kot daljice, ki leži popolnoma zunaj določene ravnine? Kedaj imajo jednake daljice jednake vzmete? Kje ležijo podnožišča jednakih daljic, ki jih načrtamo iz iste točke na jedno in isto ravnino? Kako so vzporedne daljice naklonjene proti jedni in isti ravnini? Kako se prepričaš o teh lastnostih?

Naloge.

1. Naklonski kot 1 *m* dolge palice proti določeni ravnini znaša 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0; kolik je v vsakem slučaji vzmet?

2. Štiri daljice so po 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 naklonjene proti jedni in isti ravnini; koliko meri vsaka teh daljic, ako znaša njen vzmet 1 *m*?

3. Kolik je vzmet daljice, ki je *a)* 3 *dm*, *b)* 15·7 *cm*, *c)* 8·64.. *dm*, *d)* $9\frac{3}{8}$ *m* dolga, če meri naklonski kot 30^0, 45^0, 60^0?

4. Kako dolga mora biti daljica, da meri vzmet *a)* 5 *dm*, *b)* 3·9 *m*, *c)* 14·58.. *dm*, *d)* $13\frac{5}{6}$ *cm*, ako znaša naklonski kot 30^0, 45^0, 60^0?

5. Kolik je vzmet daljice l na določeno ravnino, ako ste daljičini krajišči po m in n dolgostnih jednot oddaljeni od te ravnine?

a) $l = 8{\cdot}5\,m$	*b)* $l = 27{\cdot}85\,cm$	*c)* $l = 4{\cdot}72..\,dm$
$m = 9{\cdot}8\,m$	$m = 23{\cdot}5\,cm$	$m = 8{\cdot}96..\,dm$
$n = 8{\cdot}1\,m$	$n = 8{\cdot}46\,cm$	$n = 5{\cdot}37..\,dm$

6. Kolika je daljica, katere vzmet meri p, ako ste daljičini krajišči po m in n dolgostnih jednot oddaljeni od vzmetne ravnine (t. j. ravnina, v kateri leži vzmet)?

a) $p = 30\,cm$	*b)* $p = 91\,dm$	*c)* $p = 26\,m$
$m = 31\,cm$	$m = 105\,dm$	$m = 133\frac{1}{3}\,m$
$n = 15\,cm$	$n = 45\,dm$	$n = 80\,m$

§ 25.

Kedaj je presečnica dveh ravnin vzporedna z določeno premico? Kedaj je premica vzporedna z določeno ravnino? Ali je v tem slučaji premica tudi vzporedna s premicami, ki ležijo v določeni ravnini, in s katerimi? Kako se prepričaš o teh lastnostih? Poišči v šolski sobi presečnico dveh ravnin, ki je vzporedna z določeno ravnino!

§ 26.

Kako nastane ploskovni kot ali klin dveh ravnin ali poluravnin? Kaj je ploskovni kot? Kako se imenujete ravnini, ki ga mejite? kako njiju presečnica? Kako zaznamuješ in zapišeš v znakih ploskovni kot? Od česa je odvisna velikost ploskovnega kota? Kakšne ploskovne kote razločujemo? Kedaj je ploskovni kot oster (prav, top)? S čim merimo velikost ploskovnega kota? Kaj je naklonski kot dveh ravnin? V čem se razlikujeta naklonski in ploskovni kot dveh ravnin? Kaj določa naklonski kot? Kako ga najdeš? Kedaj stoji ravnina na ravnini pravokotno, kedaj poševno? Ali more naklonski kot dveh ravnin biti večji od 90^{0}? S čim merimo velikost ostrega in pravega ploskovnega kota? s čim velikost topega ploskovnega kota?

§ 27.

Kako stvorimo ravnino, ki stoji na določeni ravnini pravokotno? Kako dve ali več takih ravnin? Kako si pojasniš to lastnost? Kedaj stoji presečnica dveh ravnin pravokotno na tretji ravnini? Katera ravnina se imenuje navpična, katera vodoravna? Koliko je navpičnih, koliko vodoravnih ravnin? Kakšno medsebojno lego imate navpična in vodoravna ravnina? Pokaži s pomočjo dveh ravnih deščic *a)* dve ravnini, ki stojite pravokotno druga na drugi, *b)* navpično in vodoravno ravnino! Poišči v šolski sobi ravnine za navedena slučaja!

§ 28.

Kedaj stoji jedna in ista premica pravokotno na dveh ravninah? Kedaj stoji premica pravokotno na vzporednih ravninah? Kako si pojasniš to lastnost? Kakšno medsebojno lego imajo presečnice, ki ležijo v vzporednih ravninah? Kako najdeš take presečnice? Kako se prepričaš o tej lastnosti? Kakšno dolgost imajo vzporednice, kakšno pravokotnice med vzporednima ravninama? Kako si pojasniš to lastnost? Kaj nam določa razdaljo dveh vzporednih ravnin? Kedaj se ne izpremeni naklonski kot med premico in ravnino? Kako se mora pomikati premica, kako ravnina? Kakšne naklonske kote tvori jedna in ista premica z vzporednimi ravninami? Kedaj se ne izpremeni naklonski kot med ravninama? Kako se morate pomikati ravnini? Kakšne naklonske kote tvori določena ravnina z vzporednimi ravninami? Ali morete dve navpični ravnini biti vzporedni? Ali se morete sekati dve vodoravni ravnini? Poišči v šolski sobi *a)* vzporedne presečnice, *b)* vzporednice med vzporednima ravninama, *c)* pravokotnice med vzporednima ravninama!

§ 29.

Kaj je telesni ogel? Kako se stvori? Kako se imenujejo ravnine, ki mejé telesni ogel? kako njih presečnice? kako njih presečišče? Kateri koti se imenujejo robovni, kateri ploskovni? Kaj so stranice telesnega ogla? Koliko robov, koliko robovnih in koliko ploskovnih kotov se nahaja na telesnem oglu? Kako razvrščamo telesne ogle? Kaj so tri-, četvero-, peterorobniki? Kako imenujemo te ogle še drugače? Kateri ogli so jednakostranični, jednakokotni, pravilni, skladni, somerni? Kaj je mreža telesnega ogla? Kako jo stvorimo? Katero lastnost imajo robovni koti trirobnega ogla? katero pa robovni koti vsakega ogla? Kako se prepričaš o teh lastnostih? Poišči ogle v šolski sobi ter določi število obstranskih ploskev, robov, robovnih in ploskovnih kotov! Ali so robovni, oziroma ploskovni koti na teh oglih ostri, ali pravi, ali topi? Ali najdeš v šolski sobi dva skladna, dva somerna ogla?

Naloge.

1. Načrtaj mrežo tri-, četvero-, peterorobnega ogla ter napravi iz te mreže dotični ogel!

2. Napravi iz mreže *a)* dva skladna, *b)* dva somerna trirobnika!

3. Napravi iz mreže pravilni trirobnik, v katerem merijo robovni koti *a)* po 60°, *b)* po 90°!

§ 30.

Kako nastane prizma? kako prizmatični prostor? Kaj je tvornica, kaj vodnica prizmatičnega prostora? Katero telo se imenuje prizma? Kako se zovejo mejne ploskve na prizmi? Kakšni ste osnovni ploskvi? Kakšne so obstranske ploskve? Kaj so prizmini robi? Kateri robi so osnovni, kateri obstranski? Katero lastnost imajo obstranski robi? Kaj in kakšni so prizmini ogli? Povej razloček med oglom in ogliščem! Kaj je prizmina višina? Katera prizma je pokončna, katera poševna? Katera prizma se imenuje jednakorobna, katera pravilna? Kakšne prizme razločujemo z ozirom na število obstranskih ploskev ali robov? Kedaj je prizmina višina jednaka obstranskemu robu? kedaj je manjša od obstranskega roba? Kaj je paralelepiped? Kakšne paralelepipede razločujemo? Kateri paralelepiped je pravokoten? Kateri paralelepiped se imenuje kocka, kateri romboeder? Kakšne so mejne ploskve na pravokotnem paralelepipedu? kakšne na kocki? kakšne na romboedru? Kakšne preseke imamo na prizmi? Katera preseka sta med poprečnimi preseki najvažnejša? Kateri presek se imenuje vzporeden, kateri pravokoten ali normalen? Ali more vzporedni presek biti ob jednem pravokoten, in kedaj? Kateri presek se zove diagonalen? Povej, kakšen je lik vsakemu izmed omenjenih presekov! Kaj je paralelepipedova diagonala? Ali imajo ogli, katere spaja paralelepipedova diagonala, skupno mejno ploskev? Kako izračunaš diagonalo pravokotnega paralelepipeda? kako kockino diagonalo? Koliko diagonal je v pravokotnem paralelepipedu in kakšne so? Kaj je prizmina mreža? Kako jo načrtaš?

Naloge.

1. Načrtaj *a)* kockino mrežo, *b)* mrežo pravokotnega paralelepipeda, *c)* mrežo pravilne tri- in šesterostranične prizme!

2. Robi pravokotnega paralelepipeda merijo:

a) $a = 8\ dm$, $b = 6\ dm$, $c = 24\ dm$;
b) $a = 24\ cm$, $b = 29\ cm$, $c = 48\ cm$;
c) $a = 10 \cdot 4\ cm$, $b = 7 \cdot 8\ cm$, $c = 31 \cdot 2\ cm$;
d) $a = 5 \cdot 52\ dm$, $b = 6 \cdot 67\ dm$, $c = 11 \cdot 04\ dm$.

Kolika je paralelepipedova diagonala, in kolika je ploščina diagonalnega preseka, ki gre skoz rob c?

3. Kolika je kockina diagonala, in kolika ploščina diagonalnega preseka, ako meri rob *a)* 9 *dm*, *b)* 8·7 *cm*, *c)* 2·74 *dm*, *d)* 1·856.. *m*?

4. Kockina diagonala znaša *a)* 15 *dm*, *b)* 9·8 *cm*, *c)* 4·67 *dm*, *d)* 2·098.. *m*; kolik je rob in kolika ploščina diagonalnega preseka?

§ 31.

Kaj je prizmino površje? kaj prizmin plašč? Kakšen lik stvorimo iz plašča pokončne prizme, ako ga odvijemo in razgrnemo v ravnino? Kaj je temu liku osnovnica, kaj višina? Kako izračunaš plašč pokončne prizme? Kako izračunaš prizmino površje? Kaj ti ostane, ako odštevaš dvojno osnovno ploskev od prizminega površja? Kako izračunaš osnovno ploskev iz površja in plašča? Kako izračunaš obstranski rob pokončne prizme iz plašča? Ali se dá določiti iz plašča in obstranskega roba pokončne prizme osnovni rob? Kako najdeš kockino površje? Kako izračunaš kockin rob iz površja? Kako ste si površji dveh kock?

Naloge.

1. Zapiši obrazce, po katerih izračunaš *a)* prizmin plašč, *b)* prizmino površje, *c)* kockino površje; razreši te jednačbe z ozirom na vsako občno število, ki se nahaja v njih, ter raztolmači dobljene rezultate!

2. Koliko je kockino površje, ako meri rob *a)* 78 *cm*, *b)* 6·49 *dm*, *c)* $18\frac{3}{4}$ *cm*, *d)* 2·569.. *m*?

3. Izračunaj iz kockinega površja P rob!

a) $P = 365 \cdot 04\ cm^2$, *b)* $P = 7166 \cdot 3616\ cm^2$, *c)* $P = 4 \cdot 5038..\ m^2$.

4. Kako ste si površji dveh kock, ako merita njuna roba $a = 7\ (1 \cdot 8)\ dm$ in $b = 21\ (5 \cdot 4)\ dm$?

5. Koliko je površje pravilne četverostranične prizme, ako znaša osnovni rob s in obstranski rob v?

a) $s = 12\ cm$, $v = 18\ cm$; *b)* $s = 3 \cdot 8\ dm$, $v = 16 \cdot 5\ dm$;
c) $s = 5\frac{2}{5}\ m$, $v = 7\frac{1}{2}\ m$.

6. Izračunaj osnovni rob pravilne četverostranične prizme iz višine v in plašča p!

a) $v = 2 \cdot 05\ m$, $p = 28 \cdot 7\ m^2$; *b)* $v = 43 \cdot 5\ cm$, $p = 53 \cdot 418\ dm^2$.

7. Izračunaj višino pravilne četverostranične prizme iz osnovnega roba s in površja P!

a) $s = 7 \cdot 3\ cm$, $P = 204 \cdot 62\ cm^2$; *b)* $s = 15 \cdot 6\ dm$, $P = 10 \cdot 73904\ m^2$.

8. Koliko je površje pravokotnega paralelepipeda, kateremu sta a in b osnovna roba in c obstranski rob?

a) $a = 14\ cm$, $b = 24\ cm$, $c = 36\ cm$;
b) $a = 2\frac{1}{3}\ dm$, $b = \frac{9}{14}\ dm$, $c = 2\frac{2}{5}\ dm$.

9. Pokončna tristranična prizma je $v\ dm$ visoka in ima za osnovno ploskev pravokotni trikotnik, katerega kateti merite $a\ dm$ in $b\ dm$; koliko je površje?

a) $v = 3 \cdot 08$, $a = 2 \cdot 72$, $b = 2 \cdot 25$; *b)* $v = 24 \cdot 6$, $a = 10 \cdot 5$, $b = 20 \cdot 8$;
c) $v = 15 \cdot 6$, $a = 9 \cdot 72$, $b = 7 \cdot 48$.

10. Osnovna ploskev pokončne tristranične prizme je pravokotni trikotnik, kateremu je a jedna kateta in c hipotenuza; koliko je površje, ako je obstranski rob $= v$?

a) $a = 10 \cdot 8\ cm$, $c = 13 \cdot 5\ cm$, $v = 24 \cdot 6\ cm$;
b) $a = 9 \cdot 87\ dm$, $c = 15 \cdot 75\ dm$, $v = 19 \cdot 4\ dm$.

11. Pravilna tristranična prizma je $v\ dm$ visoka; koliko je površje, ako znaša osnovni rob $s\ dm$?

a) $v = 28$, $s = 15$; *b)* $v = 13 \cdot 25$, $s = 6 \cdot 7$; *c)* $v = 8\frac{7}{8}$, $s = 2\frac{3}{4}$.

12. Izračunaj površje pravilne tristranične prizme, katere obstranski rob je jednak osnovnemu robu s!

a) $s = 36\ cm$; *b)* $s = 4 \cdot 5\ dm$; *c)* $s = 6\frac{3}{4}\ dm$.

13. Izračunaj višino pravilne tristranične prizme iz osnovnega roba s in površja P!

a) $s = 4\ dm$, $P = 313 \cdot 856\ dm^2$; *b)* $s = 5 \cdot 7\ dm$, $P = 187 \cdot 166..\ dm^2$.

14. Koliko je površje pravilne šesterostranične prizme, katere osnovni rob je $= s$ in obstranski rob $= v$?

a) $s = 3 \cdot 5\ dm$, $v = 4 \cdot 5\ dm$; *b)* $a = 0 \cdot 675..\ m$, $v = 0 \cdot 974..\ m$.

15. Kolika je višina pravilne šesterostranične prizme, ako je osnovni rob $= s$ in površje $= P$?

a) $s = 6 \cdot 45\ dm$, $P = 832 \cdot 456\ dm^2$; *b)* $s = 1 \cdot 02\ m$, $P = 16 \cdot 728..\ m^2$.

§ 32.

Kaj je prizmina prostornina? kaj jednota telesne mere? kaj mersko število prizmine prostornine? Imenuj nekatere jednote telesne mere ter zapiši njih znamenja! Kako določimo prizmino prostornino neposredno? Kedaj določimo prizmino prostornino posredno? Kako izračunaš prostornino pravokotnega paralelepipeda? kako kockino prostornino? Kako si pojasniš te pravili? Od česa je odvisna prizmina prostornina? Kedaj ste dve prizmi prostorno jednaki? Kako se imenuje ta osnovna resnica? Kako si jo pojasniš? Kako izračunaš prizmino prostornino? Kako izračunaš osnovno ploskev iz prostornine in višine? kako višino iz prostornine in osnovne ploskve? Kako so jednote telesne mere odvisne druga od druge? Kaj je liter, kaj hektoliter?

Naloge.

1. Zapiši obrazce, po katerih izračunaš prostornino *a)* pravokotnega paralelepipeda, *b)* kocke, *c)* pokončne prizme; razreši te jednačbe z ozirom na vsako občno število, ki se nahaja v njih, ter raztolmači dobljene rezultate!

2. Pravokotni paralelepiped je a *dm* dolg, b *dm* širok in c *dm* visok; kolika je njegova prostornina?

a) $a = 42,\ b = 15,\ c = 12$;
b) $a = 24{\cdot}7,\ b = 18{\cdot}5,\ c = 9{\cdot}3$;
c) $a = 7{\cdot}43..,\ b = 6{\cdot}82..,\ c = 8{\cdot}95..$;
d) $a = 8\frac{3}{5},\ b = 6\frac{1}{4},\ c = 12\frac{1}{2}$.

3. Kolika je višina pravokotnega paralelepipeda, ako meri dolžina a *cm*, širina b *cm* in prostornina k cm^3?

a) $a = 75,\ b = 36,\ k = 21600$; *b)* $a = 8{\cdot}4,\ b = 5{\cdot}6,\ k = 635{\cdot}04$;
c) $a = 9\frac{3}{4},\ b = 7\frac{1}{2},\ k = 380\frac{1}{4}$.

4. Kako dolga je $4{\cdot}6$ ($5\frac{3}{4}$) *m* široka in $3{\cdot}2$ ($4\frac{2}{5}$) *m* visoka soba, ako znaša njena prostornina $100{\cdot}096$ ($183\frac{3}{10}$) m^3?

5. Prizmatična posoda je znotraj 7 *m* dolga, $4\frac{1}{2}$ *m* široka in 3 *m* visoka; koliko *hl* vode drži?

6. Osnovna ploskev prizmatične posode je 2 *m* dolg in $1{\cdot}2$ *m* širok pravokotnik; kako globoka mora biti posoda, da bode držala 12 *hl*?

7. Hrastovo bruno je $4{\cdot}2$ *m* dolgo, $9{\cdot}1$ *dm* široko in istotoliko debelo; koliko velja to bruno, ako se plača 1 m^3 po 50 K?

8. V pokončnem paralelepipedu znašate kvadratni osnovni ploskvi 200 dm^2, plašč pa $590{\cdot}4$ dm^2; kolika mu je prostornina?

9. Koliko velja zid iz opeke, ki je 57 *m* dolg, $0{\cdot}47$ *m* širok in $2{\cdot}5$ *m* visok, ako je vsaka opeka $0{\cdot}316$ *m* dolga, $0{\cdot}158$ *m* široka in 79 *mm* debela in ako se plača za tisoč opek $40{\cdot}8$ K?

10. Kolika je kockina prostornina, ako meri rob *a)* 17 *cm*, *b)* $4{\cdot}25$ *dm*, *c)* $3{\cdot}689$ *m*, *d)* $3\frac{3}{8}$ *m*?

11. Kolika je kockina prostornina, ako znaša njeno površje *a)* $521{\cdot}1744$ dm^2, *b)* $2578{\cdot}6084$ m^2?

12. Kolik je kockin rob, ako znaša njena prostornina *a)* $21 \cdot 952\ m^3$, *b)* $248 \cdot 858189\ dm^3$, *c)* $876 \cdot 256784\ dm^3$, *d)* $1 \cdot 157621\ m^3$?

13. Izračunaj rob kocke, katera ima toliko prostornino kakor dve kocki skupaj, katerih roba merita $5 \cdot 4$ *cm* in $7 \cdot 2$ *cm*!

14. Koliko je površje kocke, katera je prostorno jednaka trem kockam z robi a, b, c?

a) $a = 3\ dm,\ b = 4\ dm,\ c = 5\ dm$;
b) $a = 48\ cm,\ b = 64\ cm,\ c = 108\ cm$;
c) $a = 5 \cdot 1\ m,\ b = 6 \cdot 8\ m,\ c = 8 \cdot 5\ m$;
d) $a = 2 \cdot 82\ m,\ b = 3 \cdot 76\ m,\ c = 4 \cdot 7\ m$.

15. Izračunaj rob kocke, katera je prostorno jednaka pravokotnemu paralelepipedu, ki je 63 *cm* dolg, 28 *cm* širok in 42 *cm* visok!

16. Osnovna ploskev $18 \cdot 5$ *dm* visoke pokončne prizme je pravokotni trikotnik, katerega hipotenuza meri $12 \cdot 5$ *dm*, jedna kateta pa $7 \cdot 5$ *dm*; kolika je prostornina?

17. Tristranična pokončna prizma je $8 \cdot 4$ *dm* visoka in ima za osnovno ploskev jednakokraki trikotnik, katerega osnovnica meri $5 \cdot 36$ *dm*, krak pa $3 \cdot 35$ *dm*; kolika je njena prostornina?

18. Osnovni rob pravilne tristranične prizme, ki je $5 \cdot 6$ *dm* visoka, meri $4 \cdot 8$ *dm*; kolika je prostornina?

19. Na pravilni tristranični prizmi meri vsak rob $3 \cdot 2$ *dm*; kolika je prostornina?

20. Prostornina pravilne četverostranične prizme znaša $48 \cdot 654\ m^3$, njena višina pa $8 \cdot 5$ *dm*; kolik je osnovni rob?

21. Izračunaj prostornino pravilne šesterostranične prizme, ako meri vsak rob 15 $(2 \cdot 7)$ *cm*!

§ 33.

Kako nastane valj? kako valjev prostor? kako valjeva ploskev? Kaj je tvornica, kaj vodnica valjeve ploskve? Kaj je valj? Kakšne ploskve ga mejé? Kaj je valjeva os, kaj višina, kaj stranica? Katero lastnost imajo valjeve stranice? Kakšni so robi na valji? Koliko jih je? Ali so na valji ogli? Zakaj jih ni? Kedaj je valj pokončen, kedaj poševen, kedaj jednakostraničen? Kedaj je valjeva višina jednaka osi? kedaj različna od osi? Kateri presek se imenuje vzporeden? Kakšen je lik vzporednega preseka? Kakšen je lik poprečnega preseka, ki zadeva vse stranice? Kateri presek se zove osji presek? Kakšen je lik osjega preseka? Kedaj je lik osjega preseka kvadrat, kedaj pravokotnik, kedaj poševnokotni paralelogram? Kakšen lik stvorimo, ako odvijemo in razgrnemo plašč pokončnega valja v ravnino? Kaj je temu liku osnovnica, kaj višina? Kakšna je mreža pokončnega valja? Ali je valj soroden s prizmo? Ali smemo valj smatrati za prizmo? Po čem se razlikujeta valj in prizma?

Naloge.

1. Stranica poševnega valja meri 8·5 *dm*, višina pa 7·5 *dm*; kolik je vzmet osi na osnovno ploskev?

2. Os poševnega valja meri 14·3 *dm*, njen vzmet na osnovno ploskev pa 5·5 *dm*; kolika je višina?

3. Kolika je os poševnega valja, ako meri njen vzmet na osnovno ploskev 6·5 *cm*, višina pa 15·6 *cm*?

4. Os poševnega valja meri 45 *cm* in je *a)* 30°, *b)* 45°, *c)* 60° naklonjena proti osnovni ploskvi; za koliko so osji vzmeti na osnovno ploskev med seboj različni?

§ 34.

Kako izračunaš valjevo površje? Kako najdeš plašč pokončnega valja? Kako izračunaš plašč in površje jednakostraničnega valja? Povej, kako sta si osnovna ploskev in plašč, kako osnovna ploskev in površje, kako plašč in površje jednakostraničnega valja! Kako sta si plašča, kako površji dveh jednakostraničnih valjev? Kako izračunaš prostornino pokončnega valja? kako prostornino jednakostraničnega valja? Kako ste si prostornini dveh valjev *a)* z jednakima višinama, *b)* z jednakima osnovnima ploskvama? Kako ste si prostornini dveh jednakostraničnih valjev?

Naloge.

1. Zapiši obrazce, po katerih izračunaš *a)* plašč, *b)* površje, *c)* prostornino pokončnega valja; razreši te jednačbe z ozirom na vsako občno število, ki se nahaja v njih, ter raztolmači dobljene rezultate!

2. Zapiši obrazce za plašč, površje in prostornino jednakostraničnega valja ter stori to, kar se zahteva v nalogi 1.!

3. V pokončnem valji meri *a)* polumer osnovne ploskve 38 *cm*, višina pa 56 *cm*, *b)* premer osnovne ploskve 2·7 *dm*, stranica pa 1·85 *dm*, *c)* polumer osnovne ploskve 0·846.. *m*, višina pa 1·734.. *m*; kolik je plašč, koliko površje?

4. Izračunaj plašč in površje jednakostraničnega valja, če meri njegova stranica *a)* 5 *dm*, *b)* $4\frac{1}{2}$ *dm*!

5. Koliko je površje pokončnega valja, ki je 15 (23·4) *dm* visok in katerega osji presek meri 280 (379·8) dm^2?

6. Osji presek jednakostraničnega valja meri 3136 (182·25) dm^2; kolik je plašč in koliko površje?

7. Koliko je površje pokončnega valja, ako meri obod osnovne ploskve 6·28 (17·4) *dm*, višina pa 14·4 (7·5) *dm*?

8. Plašč pokončnega valja znaša 5882·9 cm^2, polumer osnovne ploskve pa 23·4 *cm*; kolika je višina?

9. Površje pokončnega valja meri 340·608 dm^2, polumer osnovne ploskve pa 3·9 *dm*; kolika je višina?

10. Kolik je polumer osnovne ploskve pokončnega 1·5 *m* visokega valja, ako meri plašč 1·1386 m^2?

11. Kolika je stranica jednakostraničnega valja, ako znaša površje *a)* $678 \cdot 58\, cm^2$, *b)* $8\, dm^2$?

12. Kolika je prostornina pokončnega valja, ako meri *a)* polumer osnovne ploskve $3 \cdot 8\, dm$ in višina $5 \cdot 6\, dm$; *b)* premer osnovne ploskve $1 \cdot 568 \ldots m$, stranica pa $0 \cdot 965 \ldots m$?

13. Izračunaj prostornino jednakostraničnega valja, ako meri *a)* polumer osnovne ploskve $4 \cdot 7\, dm$, *b)* stranica $14 \cdot 568 \ldots m$!

14. Koliko litrov drži valjasta posoda, katere premer znaša $54\, cm$, višina pa $90\, cm$?

15. Koliko hektolitrov vode je v vodnjaku, ki ima $2\, m$ v premeru, če stoji voda $4 \cdot 5\, m$ visoko?

16. Valj ima $37 \cdot 268\, dm^3$ prostornine; kolika je višina, ako meri polumer osnovne ploskve $3 \cdot 7\, dm$?

17. Valj je $4 \cdot 3\, dm$ visok in ima $20\, dm^3$ prostornine; kolik je polumer osnovne ploskve?

18. Kolik je polumer jednakostraničnega valja, ako znaša prostornina *a)* $10\, dm^3$, *b)* $2256 \cdot 748\, dm^3$?

19. Valjasta posoda drži $1\, l$ in ima $108 \cdot 4\, mm$ svetlobe; kolika je njena višina?

20. Valjasta posoda drži $\frac{1}{2}\, hl$ in je $399 \cdot 3\, mm$ visoka; kolik je premer osnovne ploskve?

21. Okroglo hrastovo bruno je $3\, m$ dolgo in ima $9 \cdot 42\, dm$ v obsegu; kolika je njegova prostornina?

22. Za okrogel, $2 \cdot 3\, dm$ dolg in $66\, cm$ debel hlod se plača 177 K; po čem se računa $1\, m^3$?

23. Notranji premer valjaste, $5\, cm$ debele cevi meri $18\, cm$, višina pa $2 \cdot 85\, m$; kolik je notranji in kolik zunanji plašč?

24. Valjasta cev je $32\, dm$ dolga in ima $1 \cdot 4\, dm$ svetlobe; kolika je njena prostornina, če je stena $5\, cm$ debela?

(Prostornina valjaste cevi je razlika med prostorninama dveh valjev, v znakih

$$k = R^2\pi \, . \, v - r^2\pi \, . \, v = (R^2 - r^2)\pi \, . \, v.$$

25. Višina valjastega stolpa, čegar vnanji obseg meri $13\, m$, znaša $7 \cdot 2\, m$, debelina zidú pa $86\, cm$; koliko m^3 zidú se nahaja v stolpu?

26. Cev je $3 \cdot 2\, m$ dolga in $12\, cm$ debela; *a)* koliko dm^2 pločevine je treba za to cev; *b)* koliko velja cev, ako se plača $1\, m^2$ pločevine po 7 K?

27. Prizmatično bruno, ki je $5 \cdot 2\, m$ dolgo, $3\, dm$ široko in $2 \cdot 6\, m$ visoko, je po dolgem valjasto izdolbljeno; kolika je njega prostornina, ako ima votlina $18\, cm$ v premeru?

28. Koliko lesa odpade od valjastega hloda, ki je $7 \cdot 8\, m$ dolg in $53\, cm$ debel, če izsekaš iz njega bruno največjega kvadratnega preseka?

29. Koliko lesa odpade od hloda v prešnji nalogi, ako je presek bruna pravokotnik, katerega jedna stranica meri $28\, cm$?

30. Dva pokončna valja z jednakima višinama imata $3 \cdot 5\, dm$ in $4 \cdot 9\, dm$ v premeru; kako ste si osnovni ploskvi, kako plašča, kako prostornini teh valjev?

31. Dva pokončna valja imata jednaki osnovni ploskvi; kako sta si plašča, kako prostornini teh valjev, ako merite njuni višini $7\, dm$ $2\, cm$ in $9\, dm$ $6\, cm$?

32. Polumera dveh jednakostraničnih valjev merita 3·2 *cm* in 8·4 *cm*; kako ste si osnovni ploskvi, kako plašča, kako površji, kako prostornini teh valjev?

33. Stranici pravokotnika merite $a = 3·5$ *dm* in $b = 2·1$ *dm*; kako ste si površji in kako prostornini teles, ki nastanete, ako zavrtiš pravokotnik okoli vsake stranice tako, da se povrne v svojo prvotno lego?

§ 35.

Kako nastane piramidast prostor? Kaj mu je tvornica, kaj vodnica? Kako stvoriš piramido? Kakšne ploskve mejé piramido? Kaj je piramidin plašč? Kakšne robe razločujemo na piramidi? Kateri robi so osnovni, kateri obstranski? Kako se zove točka, v kateri se stikajo vsi obstranski robi? Kaj se še stika v tej točki? Kaj je piramidina višina, kaj obstranska višina? Katera teh višin je manjša? Koliko oglov je na piramidi? Kolikerostranični so ogli na osnovni ploskvi? Kolikeroroben je ogel ob vrhu? Kakšne piramide razločujemo po številu obstranskih robov ali ploskev? Katera piramida je pokončna, katera poševna, katera pravilna, katera jednakorobna? Kakšno lastnost ima osnovna ploskev pokončne piramide? Kako so naklonjeni obstranski robi pokončne piramide proti osnovni ploskvi? Kakšne so obstranske ploskve *a)* na pokončni, *b)* na poševni, *c)* na pravilni, *d)* na jednakorobni piramidi? Kakšna je osnovna ploskev pri vsaki izmed navedenih piramid? Zakaj je vsaka jednakorobna piramida pravilna? Kolikerostranične utegnejo biti jednakorobne piramide? Kakšne preseke razločujemo na piramidi? Kakšen je lik vzporednega preseka? Zakaj je ta lik podoben osnovni ploskvi? Kakšen je lik poprečnega preseka, ki zadeva vse obstranske robe? Na kaj razdeli vzporedni presek piramido? Kaj je prisekana, kaj dopolnilna piramida? Kakšne ploskve mejé prisekano piramido? Kako ste si višini prvotne in dopolnilne piramide? Kako ste si osnovni ploskvi teh piramid? Kako se prepričaš o teh lastnostih? Kako sta si osnovna ploskev in vzporedni presek vsake piramide? Kateri piramidini presek se imenuje diagonalni presek? Kakšen je lik diagonalnega preseka? Na kaj razdelijo diagonalni preseki piramido? Kako načrtaš piramidino mrežo?

Naloge.

1. Načrtaj mrežo *a)* pokončne, *b)* pravilne, *c)* jednakorobne, *d)* poševne tristranične piramide!

2. Načrtaj mrežo četverostranične piramide, ki je *a)* pokončna, *b)* pravilna, *c)* jednakorobna, *d)* poševna!

3. Načrtaj mrežo pravilne šesterostranične piramide!

4. Višina pravilne četverostranične piramide meri 32 *cm* in osnovna ploskev 256 cm^2; ako razdelimo višino te piramide na štiri jednake dele ter napravimo skoz vsako razdelišče vzporedni presek, koliko znaša ploščina vsakega preseka, in kolika je njegova stranica?

5. Osnovna ploskev 45 *cm* visoke piramide meri 3240 cm^2; kolika je višina dopolnilne piramide, ako meri njena osnovna ploskev *a)* 2250 cm^2, *b)* 360 cm^2?

6. Kolika je osnovna ploskev 25 *cm* visoke piramide, ako meri vzporedni presek, ki je 13 *cm* oddaljen od osnovne ploskve, 81 cm^2?

7. Osnovni rob pravilne četverostranične piramide meri 8·8 *dm*, višina pa 13·2 *dm*; v kateri razdalji od osnovne ploskve je treba napraviti vzporedni presek, da bode njegova ploščina dvakrat (štirikrat) manjša od osnovne ploskve?

§ 36.

Kako izračunaš piramidino površje, kako piramidin plašč? Kako najdeš plašč pravilne piramide? Kedaj ste dve piramidi prostorno jednaki? Kako se imenuje ta osnovna resnica? Kako si jo pojasniš? Kako ste si pokončna tristranična prizma in tristranična piramida z jednakima osnovnima ploskvama in jednakima višinama? Kako se prepričaš o tej lastnosti? Kako izračunaš piramidino prostornino? Kako izračunaš piramidino višino iz prostornine in osnovne ploskve? kako osnovno ploskev iz prostornine in višine? Kako ste si prostornini dveh piramid *a)* z jednakima višinama, *b)* z jednakima osnovnima ploskvama? Kako se prepričaš o teh lastnostih?

Naloge.

1. Zapiši obrazca, po katerih izračunaš *a)* površje, *b)* prostornino pokončne piramide; razreši te jednačbi z ozirom na vsako občno število, ki se nahaja v njih, ter raztolmači dobljene rezultate!

2. Izračunaj površje tristranične piramide, na kateri meri vsak rob 5 *dm*!

3. Osnovna ploskev pokončne piramide je kvadrat, katerega stranica meri 2 *m* 5 *dm*; koliko je površje, ako meri obstranska višina 4 *m* 8 *dm*?

4. Koliko je površje pravilne četverostranične piramide, ako meri osnovni rob 7·8 (8·52) *dm* in obstranski rob 6·5 (7·1) *dm*?

5. Osnovni rob pravilne četverostranične piramide, ki je 4·8 (6·8) *m* visoka, meri 7·2 (10·2) *m*; koliko znaša površje?

6. Osnovna ploskev pokončne četverostranične piramide je pravokotnik s stranicama 8·4 *dm* in 7·2 *dm*; kolik je plašč, ako meri piramidina višina 4·8 *dm*?

7. Pokončni četverostranični piramidi je osnovna ploskev pravokotnik, katerega stranici merite 10 *cm* in 16 *cm*; koliko je površje, ako je obstranski rob = 13 *cm*?

8. Izračunaj površje pravilne šesterostranične piramide, ako meri osnovni rob 4·8 (6) *dm* in obstranski rob 5·1 (7·8) *dm*!

9. Izračunaj plašč pravilne šesterostranične piramide, ako meri piramidina višina 6·8 (6·08) *m* in osnovni rob 3·4 (4·56) *m*!

10. Osnovni rob pravilne četverostranične piramide meri 2·3 *m*; kolika je prostornina, ako znaša višina 8·7 *m*?

11. Izračunaj prostornino pravilne *a)* tristranične, *b)* šesterostranične piramide, ako je višina = 8·9 *dm* in osnovni rob = 4·7 *dm*!

12. Kako visoka je piramida, ki ima 600 dm^3 prostornine in katere osnovna ploskev meri 30·75 dm^2?

13. Osnovna ploskev pokončne piramide je 11 *dm* dolg in 9 *dm* širok pravokotnik; kolika je višina, ako znaša prostornina 118·8 dm^3?

14. Prostornina pravilne četverostranične piramide, ki je 0·9 (7·5) *dm* visoka, znaša $15\frac{3}{4}$ (40) dm^3; kolika je stranica osnovne ploskve?

15. Izračunaj prostornino pokončne piramide, kateri je osnovna ploskev pravokotnik s stranicama 14 *cm* in 6·4 *cm*, ako meri obstranski rob 1 *dm*!

16. Na pravilni šesterostranični piramidi meri osnovni rob 14 *cm*, obstranska višina pa 36 *cm*; kolika je prostornina?

17. Izračunaj prostornino pravilne četverostranične piramide, ako meri osnovna ploskev 289 cm^2 (21·78 dm^2), obstranski rob pa 13 *cm* (6·5 *dm*)!

18. Izračunaj prostornino jednakorobne četverostranične piramide, ako meri osnovna ploskev 196 dm^2!

19. Površje pravilne četverostranične piramide znaša 56·25 m^2, osnovni rob pa 2·5 *m*; kolika je prostornina?

§ 37.

Kako nastane stožčeva ploskev, kako stožčev prostor, kako stožec? Kaj je tvornica, kaj vodnica stožčeve ploskve? Kakšni ravnini mejite stožec? Kako jima je ime? Kaj je vrh ali teme stožčevo? kaj os, kaj višina, kaj stranica? Ali se nahajajo na stožci robi? Kedaj je stožec pokončen, kedaj poševen, kedaj jednakostraničen? Kedaj se stika stožčeva višina z osjo? Kakšne preseke razločujemo na stožci? Kateri presek se imenuje vzporeden? Kakšen je lik tega preseka? Kako sta si polumera osnovne in presečne ploskve? Kako se prepričaš o tej lastnosti? Na kaj razdeliš stožec z vzporednim presekom? Kakšne ploskve mejé prisekani, kakšne dopolnilni stožec? Kako ste si višini prvotnega in dopolnilnega stožca? Kako ste si osnovna in vzporedna presečna ploskev? Kako se prepričaš o tej lastnosti? Kateri presek se zove osji presek? Kakšen je lik osjega preseka? Kedaj je lik osjega preseka jednakokraki, kedaj raznostranični, kedaj jednakostranični trikotnik? Kakšna je mreža pokončnega stožca? Kakšno ploskev stvorimo, ako odvijemo in razgrnemo stožčev plašč v ravnino? Ali je stožec soroden s piramido? Ali smemo stožec smatrati za piramido? Po čem se razlikujeta stožec in piramida? Kako nastane popolna stožčeva ploskev? Kako dvojni stožec? Kakšni so preseki na dvojnem stožci? Kedaj je presek krog, kedaj elipsa, kedaj parabola, kedaj hiperbola? Kako se te krive črte zovejo s skupnim imenom?

Naloge.

1. Polumer pokončnega stožca meri 4·8 *dm*, višina pa 15 *dm*; kolik je vzporedni presek, ki je 4 *dm* od vrha oddaljen?

2. Premer pokončnega stožca znaša 25·2 *cm*, višina pa 16·8 *cm*; kolik je polumer, kolika stranica dopolnilnega stožca, ki je 8 *cm* visok?

3. Stranica pokončnega stožca meri 1·3 *m*, polumer osnovne ploskve pa 5 *dm*, za koliko mora vzporedni presek biti oddaljen od vrha, da znaša njega premer 6 *dm*?

§ 38.

Kako izračunaš plašč, kako površje pokončnega stožca? Kako najdeš plašč, kako površje jednakostraničnega stožca? Povej, kako sta si osnovna ploskev in plašč, kako osnovna ploskev in površje, kako plašč in površje jednakostraničnega stožca? Kako sta si plašča, kako površji dveh jednakostraničnih stožcev? Kako izračunaš prostornino pokončnega stožca? Kako najdeš višino jednakostraničnega stožca? Povej obrazec, po katerem izračunaš prostornino jednakostraničnega stožca! Kako ste si prostornini dveh stožcev *a)* z jednakima višinama, *b)* z jednakima osnovnima ploskvama? Kako ste si prostornini dveh jednakostraničnih stožcev?

Naloge.

1. Zapiši obrazce, po katerih izračunaš *a)* plašč in površje pokončnega stožca, *b)* plašč in površje jednakostraničnega stožca, *c)* prostornino pokončnega stožca, *d)* prostornino jednakostraničnega stožca; razreši te jednačbe z ozirom na vsako občno število, ki se nahaja v njih, ter raztolmači dobljene rezultate!

2. Polumer pokončnega stožca meri 34 *cm* (3·81 *dm*), stranica pa 140 *cm* (5·26 *dm*); kolik je plašč, koliko površje?

3. Izračunaj *a)* plašč, *b)* površje pokončnega stožca, katerega višina meri 63 (20·4) *cm*, polumer pa 16 (8·5) *cm*!

4. Izračunaj *a)* plašč, *b)* površje jednakostraničnega stožca, ako meri *m* polumer 4·3 *dm*, *n* stranica 7·6 *dm*!

5. Plašč pokončnega stožca meri 427·04 dm^2, stranica pa 17 *dm*; kolik je premer osnovne ploskve, kolika višina?

6. Plašč pokončnega stožca meri 23·55 dm^2, polumer osnovne ploskve pa 1·5 *dm*; kolika je stranica in kolika višina?

7. Osnovna ploskev pokončnega stožca meri 15 dm^2, stranica pa 4 *dm*; kolik je plašč?

8. Površje jednakostraničnega stožca znaša 2530 cm^2; kolik je polumer osnovne ploskve, kolika višina?

9. Kolika je prostornina pokončnega stožca, ako meri *a)* polumer osnovne ploskve 1·5 *m* in višina 6 *dm*, *b)* premer osnovne ploskve 2·3 *dm* in višina 3·6 *dm*?

10. Izračunaj prostornino pokončnega stožca, ako meri *a)* polumer osnovne ploskve 3·04 *dm* in stranica 4·25 *dm*, *b)* premer osnovne ploskve 70 *dm* in stranica 37 *dm*!

11. Stranica jednakostraničnega stožca meri 6·5 *dm*; kolika je prostornina?

12. Kolika je višina pokončnega stožca, ako znaša premer osnovne ploskve 6·4 *dm*, prostornina pa 160·768 dm^3?

13. Prostornina pokončnega stožca znaša 397·3632 dm^3, višina pa 12 *dm*; kolik je polumer osnovne ploskve?

14. Izračunaj prostornino pokončnega stožca, ako meri plašč 1570 dm^2 in stranica 25 *dm*!

15. Kolik je polumer jednakostraničnega stožca, ako znaša prostornina *a)* 48·918 m^3, *b)* 1811·78 dm^3, *c)* 100·6176 dm^3?

16. Prostornina jednakostraničnega stožca znaša 160 dm^3; koliko je površje?

17. Površje jednakostraničnega stožca meri 2530 cm^2; kolika je prostornina?

18. Stožkast lijak ima 2·1 *dm* v premeru in 2·8 *dm* dolgo stranico; koliko dm^2 pločevine je treba zanj?

19. Kako visok mora biti lijak, kateri ima 2 *dm* (30 *cm*) v premeru, da bode držal ravno 1 *l* (5 *l*)?

20. Kako sta si plašča, kako prostornini dveh jednakostraničnih stožcev, ako merita premera osnovnih ploskev 3·9 *dm* in 5·2 *dm*?

21. Kako sta si plašča, kako prostornini dveh stožcev, ki nastaneta, ako zavrtimo pravokotni trikotnik s katetama $a = 18$ *dm* in $b = 24$ *dm* okoli vsake katete tako, da se povrne v svojo prvotno lego?

22. Koliko je površje, kolika prostornina stožca, ki nastane, ako zavrtiš jednakokraki trikotnik, katerega krak meri 26 *dm*, osnovnica pa 20 *dm*, okoli višine tako, da se povrne v svojo prvotno lego?

23. Koliko je površje, kolika prostornina dvojnega stožca, ki nastane, ako zavrtiš jednakokraki trikotnik prejšnje naloge okoli osnovnice tako, da se povrne v svojo prvotno lego?

24. Izračunaj površje in prostornino dvojnega stožca, ki nastane, ako zavrtiš pravokotni trikotnik s katetama $a = 64$ *cm* in $b = 48$ *cm* okoli hipotenuze tako, da se povrne v svojo prvotno lego!

§ 39.

Kako nastane kroglina ploskev? Kaj je krogla, kaj so kroglini krogi, kaj je kroglino središče, kaj kroglin polumer, kaj kroglina tetiva? Katera tetiva se zove kroglin premer? Katero lastnost imajo kroglini polumeri (premeri)? Kaj je središčna razdalja točke z ozirom na določeno kroglo? Kolikero lego more imeti točka z ozirom na določeno kroglo? Kedaj leži točka znotraj krogline ploskve, kedaj v kroglini ploskvi, kedaj zunaj krogline ploskve? Kaj je središčna razdalja premice z ozirom na določeno kroglo? Kolikero lego more imeti premica z ozirom na določeno kroglo? Kedaj ima premica s kroglo jedno točko, kedaj dve točki skupni? Kedaj nima premica s kroglo nobedne skupne točke? Kaj je središčna razdalja ravnine z ozirom na določeno kroglo? Kolikero lego utegne imeti ravnina z ozirom na določeno kroglo? Kedaj nima ravnina s kroglo nobedne skupne točke? Kedaj ima ravnina s kroglo jedno skupno točko? Kako se imenuje taka ravnina, kako skupna točka? Kako stvorimo dotikalno ravnino? Kedaj seče ravnina kroglo? Kakšen je lik kroglinega preseka, in kako mu je ime? Kedaj je kroglin krog večji, kedaj manjši? Kedaj je kroglin krog največji? Kako in iz česa izračunaš polumer kroglinega kroga? Kaj so krogi vzporedniki? Od česa je odvisna njih velikost? Kateri izmed vzporednikov je največji, in kako mu je ime? Kaj je os, in kaj sta tečaja krogov vzporednikov? Kaj so poludnevniki? Koliko je krogov vzporednikov in poludnevnikov? Na kaj razdeli kroglo vsak ravninski presek? Kako se imenujeta ta dela? Kaj meji vsak kroglin odsek? Kaj je kroglina kapica, kaj višina krogline kapice? Kaj je osnovna ploskev kroglinega odseka? Kaj je polukrogla? Kako jo stvoriš? Na kaj razpade krogla, ako jo presečemo z dvema vzporednima ravninama? Kako se imenujejo ti deli? Kaj je kroglina plast? Kakšne ploskve jo mejé? Kaj ste osnovni ploskvi, kaj je pas krogline plasti? Kaj je višina krogline plasti, oziroma kroglinega pasa? Kako določimo razdaljo dveh točk na kroglini ploskvi? Ali se dá kroglina ploskev odviti in razgrniti v ravnino?

Naloge.

1. Kolika je tetiva krogle s polumerom 2·05 *dm*, ako je 1·33 *dm* oddaljena od središča?

2. Kolika je središčna razdalja krogline tetive, ki je 9 *cm* dolga, ako meri kroglin polumer 5·1 *cm*?

3. Kolik je kroglin polumer, če meri kroglina tetiva 10·12 *cm* in njena središčna razdalja 4·08 *cm*?

4. Ravnina preseče kroglo s polumerom 5·3 *dm* v središčni razdalji 4·5 *cm*; kolik je polumer, obod in ploščina kroglinega preseka?

5. V kateri središčni razdalji je treba kroglo, katere polumer znaša 5·22 *dm*, presekati z ravnino, da bode meril obod kroglinega kroga 23·7384 *dm*?

6. Polumer kroglinega kroga, ki je 4·2 *dm* oddaljen od središča, znaša 11·2 *dm*; kolik je obod, kolika ploščina največjega kroglinega kroga?

7. Koliko meri lok 46° 18′ kroglinega kroga v naloga 4.?

8. Dunaj ima 34° 12′ 36″ zemljepisne dolžine in 48° 12′ 35″ zemljepisne širine; kako daleč je Dunaj oddaljen *a)* od ravnika, ako meri zemeljski poludnevnik 40 000 *km*, *b)* od glavnega ali prvega meridijana, ako meri polumer vzporednika, ki gre skoz Dunaj, $4237\frac{7}{9}$ *km*?

§ 40.

Po katerih obrazcih izračunaš kroglino prostornino? Kako najdeš prvi, kako drugi obrazec za kroglino prostornino? Kako ste si prostornini dveh krogel? Po katerem obrazci izračunaš kroglino površje? Kako najdeš ta obrazec? Kako ste si površji dveh krogel? Kedaj smemo trditi, da ste dve telesi prostorno jednaki? Kako se imenuje ta občna resnica?

Naloge.

1. Kolika je prostornina krogle, katere polumer meri *a)* $2 \cdot 4$ *dm*, *b)* $25 \cdot 4$ *cm*, *c)* $0 \cdot 875$ *m*?

2. Solnčni premer je 112 krat večji od zemeljskega premera; kako ste si prostornini solnca in zemlje?

3. Kolik je polumer krogle, če znaša prostornina *a)* $904 \cdot 32\ dm^3$, *b)* $24 \cdot 41664\ dm^3$, *c)* $3 \cdot 05208\ dm^3$?

4. Koliko je površje krogle, če znaša polumer *a)* $4 \cdot 5$ *dm*, *b)* $3 \cdot 85$ *m*, *c)* $48 \cdot 76$.. *cm*?

5. Koliko je *a)* površje, *b)* prostornina meseca, če znaša njega premer 3482 *km*?

6. Izračunaj površje in prostornino zemlje, če jo smatramo za popolno kroglo s premerom $12739 \cdot 7$ *km*!

7. Kolik je premer krogle, ako znaša površje *a)* $153 \cdot 86\ dm^2$, *b)* $78 \cdot 5\ cm^2$, *c)* $2 \cdot 1471625\ m^2$?

8. Kako ste si prostornini dveh krogel, če ste njiju površji v razmerji *a)* 48 : 75, *b)* 275 : 396?

9. Kako ste si površji dveh krogel, ako ste njiju prostornini v razmerji *a)* 243 : 1125, *b)* 704 : 1375?

10. Iz kocke z robom 15 *cm* se izreže tako velika krogla, kakor je mogoče; koliko znaša odpadek?

11. Zunanji polumer votle krogle meri 145 *mm*, notranji polumer pa 133 *mm*; kolika je prostornina krogline lupine?

12. Kako debela je lupina votle krogle, če meri njeno zunanje površje $6 \cdot 28$ ($5 \cdot 372$) m^2, prostornina votlega prostora pa $904 \cdot 32\ dm^3$ ($1 \cdot 13864\ m^3$)?

13. Koliko litrov drži votla krogla, katere lupina je 15 *mm* debela, ako znaša zunanji premer 34 *cm*?

§ 41.

Katero telo se imenuje pravilno? Kakšne so mejne ploskve pravilnega telesa? Kakšni so ogli? Naštej vsa pravilna telesa! Zakaj je le pet pravilnih teles? Opiši vsako izmed pravilnih teles, t. j. povej, koliko in kakšne ploskve ga mejé, koliko ima robov, koliko oglov, in kolikerorobni so ogli! Kako izračunaš tetraedrovo višino, površje in prostornino? Kako najdeš te obrazce? Kako izračunaš oktaedrovo površje in prostornino? Kako najdeš ikozaedrovo površje? Kako izračunaš kockino diagonalo, površje in prostornino?

Naloge.

1. Izračunaj površje pravilnega *a)* tetraeda, *b)* oktaedra, *c)* ikozaedra, ako meri rob 8 ($7 \cdot 6$) *cm*!

2. Površje pravilnega *a)* tetraedra, *b)* oktraedra, *c)* ikozaedra meri 120 cm^2; kolik je rob?

3. Kolika je prostornina pravilnega *a)* tetraedra, *b)* oktotaedra, ako meri rob 5 (13) *dm*?

4. Prostornina pravilnega *a)* tetraeda, *b)* oktaedra znaša 45 cm^3; kolik je rob?

5. Koliko je površje pravilnega *a)* tetraedra, *b)* oktaedra, ako znaša prostornina 172 cm^3?

6. Kocka z robom 2 *dm* je prostorno jednaka pravilnemu *a)* tetraedru, *b)* oktaedru; kolik je tetraedrov in oktaedrov rob?

7. Krogla s premerom 1 *dm* ima *a)* s kocko, *b)* s pravilnim tetraedrom, *c)* z oktaedrom jednako površje; kolika je prostornina vsakega izmed navedenih teles?

§ 42.

Kako najdeš prostornino posode ali votline, ki nima določene geometrijske podobe? Kako določiš prostornino trdnega telesa? Na koliko načinov?

Naloge.

1. Prizmatična posoda, ki je 64 (47) *cm* dolga in 25 (32) *cm* široka, je deloma napolnjena z vodo; ako se potopi kamen v tej posodi, zviša se gladina vode za 35 (12) *cm*. Kolika je prostornina kamena?

2. V valjasti posodi, ki ima 75·36 *cm* v obsegu, stoji voda 16 *cm* visoko; ako se potopi nepravilno telo v tej vodi, stoji voda 20·5 *cm* visoko. Kolika je prostornina nepravilnega telesa?

3. Prizmatična posoda, katere osnovna ploskev meri 9 dm^2, je 6 *dm* 4 *cm* visoko napolnjena z vodo; kolik je tlak na dno, ako tehta 1 dm^3 vode 1 *kg*?

4. Koliko tehta voda, kar je drži 165 *cm* dolga, 85 *cm* široka in 7 *dm* globoka posoda?

5. Koliko prostornino ima posoda, katera tehta prazna 1·5 *kg*, z vodo napolnjena pa 14·8 *kg*?

6. Valjasta cev, katere dno meri 1 cm^2, je 760 *mm* visoko napolnjena z živim srebrom; kolik je tlak na dno, ako je specifična teža živega srebra 13·59?

7. Kolik je notranji premer valjaste cevi, ki je 47 *mm* visoko napolnjena z živim srebrom, ako tehta to srebro 585·5 *mg*?

8. Bakrena plošča je 1·6 *m* dolga, 4·6 *dm* široka in 5·5 *cm* debela; koliko velja ta plošča, ako tehta 1 dm^3 bakra 8·88 *kg* in se plača 1 *kg* bakra po 2·7 K?

9. Osnovna ploskev 8 *dm* visoke prizme je kvadrat; kolik je osnovni rob, ako tehta prizma 135 *kg* in 1 dm^3 njene snovi 2·7 *kg*?

10. Svinčena kocka tehta 1 *kg*; kolik je njen rob, ako je specifična teža svinca 11·35?

11. Iz rumene medí, kateri je specifična teža 8·38, ulijejo se valjaste uteži po 5 *kg*; koliko *cm* znaša premer teh utežij, če je njih višina dvakrat tolika kakor premer?

12. Koliko velja 1·6 *m* dolga in 1 *cm* debela cev iz litega železa, ki ima 7·2 specifične teže, ako meri premer svetlobe 1·8 *dm* in se računa 1 *kg* železa po 0·3 K?

13. Kako težka je četverostranična pravilna piramida iz granita, ki mu je specifična teža 2·91, ako meri osnovni rob 0·9 *m*, obstranski pa 2·4 *m*?

14. Stožec iz litega železa tehta 50 *kg*; kolika je njegova višina, ako meri polumer osnovne ploskve 12 *cm* in ako tehta 1 dm^3 železa 7·2 *kg*?

15. Krogla tehta 101·74 *kg* in ima v premeru 30 *cm*; kolika je specifična teža snoví?

16. Koliko krogel se dá iz 1000 *kg* železa uliti, ako znaša premer vsake krogle 2·4 *dm* in je specifična teža litega železa 7·2?

---

17. Koliko je površje kocke, ki ima štirikrat toliko prostornino kakor druga kocka z robom $1\frac{1}{2}$ *dm*?

18. Pokončna, 6 *dm* visoka piramida ima za osnovno ploskev pravilni šesterokotnik s stranico 2·6 *dm*; kolik je rob prostorno jednake kocke?

19. Dve krogli imate po 28 *cm* in 15 *cm* v premeru; kolik je polumer tretje krogle, ki ima istotoliko površje kakor prvi dve skupaj?

20. Premera dveh krogel merita 3 *dm* in 1 *dm* 8 *cm*; kolik je premer tretje krogle, ki ima istotoliko prostornino kakor prvi dve skupaj?

21. Poprečni presek 42 *m* dolgega in 3·5 *m* visokega zidu je trapez, katerega vzporednici merite 1 *m* in 0·64 *m*; kolika je prostornina zidu in koliko velja 1 m^3, ako se mora plačati za ves zid 1024·59 K?

22. V valjasti posodi, ki je 5 (80) *cm* visoko napolnjena z vodo, potopi se krogla s premerom 5·5 (30) *cm*; kako visoko stoji voda v posodi, ako meri njen premer 6 (40) *cm*?

23. Votla železna krogla, ki je 5 *kg* težka, potopi se v vodi tako, da gleda za polovico iz nje; kolik je *a)* zunanji polumer, *b)* stenina debelost krogle, ako je specifična teža železa 7·2?

24. Kocki z robom 2 *dm* je včrtana krogla; kolika je razlika med površjem kocke in včrtane krogle?

25. Kocki z 6 *dm* dolgim robom je očrtana krogla; za koliko je kroglina prostornina večja od kockine?

26. Kocki je včrtan valj; kolika je razlika *a)* med površjema, *b)* med prostorninama teh teles, ako meri kockin rob 2 *dm*?

27. Kako ste si *a)* površji, *b)* prostornini pravilne šesterostranične prizme in očrtanega valja, ako meri osnovni rob prizme $a = 1$ *dm*, obstranski rob pa $b = 2 \cdot 5$ *dm*?

28. Pravilni tristranični jednakorobni prizmi je včrtan in očrtan valj; izračunaj razmerje *a)* med površji, *b)* med prostorninami teh treh teles!

29. Pravilni četverostranični piramidi je včrtan in očrtan stožec; kako so si plašči teh treh teles, ako meri piramidina višina 20 *cm* in osnovni rob 30 *cm*?

30. Pravilni šesterostranični piramidi je včrtan in očrtan stožec; izračunaj razlike med prostorninami teh treh teles, ako meri osnovni rob piramide 10 *cm*, obstranski rob pa 26 *cm*!

31. Jednakostraničnemu valju je očrtana pravilna četverostranična prizma; za koliko je valjev plašč manjši od prizminega, ako meri valjeva stranica 4 *dm*?

32 Pokončnemu valju, katerega polumer znaša 3 *dm*, stranica pa 5 *dm*, je včrtana pravilna *a)* četverostranična, *b)* šesterostranična prizma; za koliko je valjevo površje večje od površja četverostranične prizme, in za koliko valjeva prostornina večja od prostornine šesterostranične prizme?

33. Za koliko se razlikujeta plašča jednakostraničnega stožca in očrtane pravilne četverostranične piramide, ako meri stožčeva stranica $s = 10$ *dm*?

34. Pokončnemu stožcu, katerega stranica meri 17 *cm*, višina pa 15 *cm*, je včrtana pravilna šesterostranična piramida; kako ste si površji, kako prostornini teh teles?

35. Kako ste si prostornini dveh jednakostraničnih valjev, ako je površje jednega dvakrat toliko kakor površje drugega valja?

36. Krogli je očrtan jednakostraničen valj; kako ste si površji, in kako prostornini teh dveh teles?

37. Pravokotnik, katerega stranici merite 6 *dm* in 4 *dm*, zavrti se jedenkrat okoli večje in drugokrat okoli manjše stranice tako, da se povrne v svojo prvotno lego. Kako sta si *a)* plašča, *b)* površji, *c)* prostornini nastalih teles?

38. Pravokotniku s stranicama 12 *cm* in 5 *cm* je očrtan krog; izračunaj površja in prostornine teles, ki nastanejo, ako zavrtiš pravokotnik okoli somernice *a)* večje, *b)* manjše stranice tako, da se povrne v svojo prvotno lego!

39. Rombovi diagonali merite 3 *dm* in 1·6 *dm*; kako ste si *a)* površji, *b)* prostornini teles, ki nastanete, ako zavrtiš romb okoli večje in okoli manjše diagonale tako, da se povrne v svojo prvotno lego?

40. Jednakostraničnemu trikotniku s stranico 2 *dm* je včrtan in očrtan krog; izračunaj površja in prostornine teles, ki nastanejo, ako zavrtiš trikotnik okoli višine tako, da se povrne v svojo prvotno lego.

41. Kvadratu je včrtan in očrtan krog; kako so si površja, kako prostornine teles, ki nastanejo, ako zavrtiš kvadrat okoli jedne diagonale tako, da se povrne v svojo prvotno lego?