33534, III, L, c 99 8 bt. 35/80

Der

Rechen-Unterricht

in der Volksschule.

Eine methodische Anleitung für Volksschullehrer.

Praktischer Theil. IV

Zahlenraum 1 bis 1000, 1 bis 1 Million u. s. w.

KRAJ. LYCEJAL BIBLIOTEKA LJUBLJANA

Von

Lukas Lautar.

Laibach.

Druck und Verlag von Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

1890.

Der

Rechen-Unterricht

in der Volksschule.

Eine methodische Anleitung für Volksschullehrer.

Praktischer Theil.

Zahlenraum 1 bis 1000, 1 bis 1 Million u. s. w.

Von

Lukas Lautar.

KRAJNA BIBLIOTEKA LAIBACH

Laibach.

Druck und Verlag von Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

1890.

Alle Rechte vorbehalten.

03005585

Vorrede.

Eine der wichtigsten Bedingungen für einen erfolgreichen Rechenunterricht ist neben der richtigen, nach Rechengesetzen bestimmten Anordnung des gesammten Rechenstoffes, dass man nicht bloß das Auffassungs-, sondern auch das Beherrschungsvermögen des Schülers in Bezug auf den durchgenommenen Stoff berücksichtigt. Die Beherrschung aller Partien, aus deren Zusammenhange der Schüler wieder Neues zu erschließen hat, ist unbedingt nothwendig, wenn selbständiges Operieren von ihm gefordert werden soll; diese Beherrschung ist aber nur möglich, wenn das Frühere bis zur mechanischen Fertigkeit eingeübt und das Gedächtnis des Kindes genügend erstarkt ist.

Für die Erzielung mechanischer Fertigkeit braucht man jedoch Zeit, welche oft wegen der Fülle des vorgeschriebenen Stoffes mangelt. Schon ein oberflächlicher Blick genügt, um sich zu überzeugen, dass die unteren Schuljahre verhältnismäßig bedeutend stärker belastet sind als die oberen; unser Bestreben soll also auf eine richtige Entlastung der niederen Stufen gerichtet sein, wenn wir der im Obigen angeführten Bedingung Genüge leisten wollen. Beim Verfassen der Rechenbücher wurde man leider durch die Vorschriften und durch die jetzt herrschenden Anschauungen, die man nicht vollends unberücksichtigt lassen kann, an der Ausführung dieses Gedankens theilweise gehindert. Da aber in diesen Rechenbüchern der gesammte Stoff nach Rechengesetzen eingetheilt ist, so ist es dem Lehrer leicht möglich, jene Partien, die die Selbständigkeit der Schüler lähmen, auf spätere Stufen zu verlegen und dadurch für die mechanische Einübung und Erstarkung des Gedächtnisses der Schüler Zeit zu gewinnen.

Durch die Einführung des Raumes 1 bis 1 Million ist einerseits ermöglicht worden, den Raum 1 bis 1000 zu entlasten, andererseits aber ist es Erfahrungssache, dass die Schüler, die im Raume 1 bis 1 Million geläufig rechnen können, auch in höheren Räumen auf keine Schwierigkeit mehr stoßen.

Den Raum 1 bis 1000 kann man aber auch durch Verschiebung nachstehend bezeichneter Kopfrechenübungen in den unbegrenzten Zahlenraum entlasten. So stellt es sich heraus, dass die Schüler des dritten

Schuljahres z. B. die Aufgabe 834 + 23 schon deshalb schwer lösen, weil sie die gewonnenen Resultate nicht im Gedächtnisse behalten können. Aus diesem Grunde wären die Übungen des dritten Rechenbuches S. 10 Z. 12 v. o. bis S. 11 Z. 1 v. u., S. 28 Z. 11 bis S. 30 Z. 10 v. u., S. 43 Z. 10 v. o. bis Z. 3 v. u., S. 59 Z. 1 v. o. bis S. 61 Z. 16 v. o., S. 72 Z. 5 v. o. bis S. 73 Z. 14 v. u. in den entsprechenden Stellen des vierten Rechenbuches einzuschalten. Thut man dies, so muss man es bei den Reihen, bei den angewandten Aufgaben des dritten Rechenbuches u. s. w. entsprechend berücksichtigen.

Die schriftliche Multiplication und Division mit zwei- und mehrziffrigen Zahlen passt aus den angeführten Gründen auch besser in den unbegrenzten Zahlenraum.

Das Rechnen mit gemeinen und Decimalbrüchen wäre um ein Jahr, wie dies deutsche Pädagogen thun, zu verschieben. Jedenfalls sollen aber die Übungen 3 bis 8 über das Gleichnamigmachen der Brüche S. 63 in den unbegrenzten Zahlenraum verschoben werden, was auch bei der nächsten Auflage der Rechenbücher berücksichtigt wird.

Beim angewandten Rechnen hat man nach sogenannten Rechenkreisen fortzuschreiten, um selbständiges Auffinden der Operationen bei den Schülern zu erzielen. (Sieh «Specielle Methodik» vom selben Verfasser.) Da aber an der Unter- und Mittelstufe das Sachliche hauptsächlich die Zahl zu erläutern und die Oberstufe erst die Schüler mit dem Sachlichen vertraut zu machen hat, so könnte man vortheilhaft auch diesbezüglich einige Verschiebungen vornehmen. So z. B. gehört die Zinsrechnung bis auf die vorbereitenden Aufgaben auf die Oberstufe, ebenso die Durchschnittsrechnung, die Flächeninhaltsberechnungen u. s. w. Die Wichtigkeit des Zählens sowie öftere Wiederholung des bereits Durchgenommenen (vergl. Vorrede zur Anleitung, Raum 1 bis 20, 100) muss auch hier betont werden. Von besonderer Bedeutung ist die Wiederholung der Ableitung schwierigerer Regeln, nachdem die Schüler mechanische Fertigkeit nach einer solchen Regel erlangt haben. Dies gilt insbesondere von der Divisionsregel für einen mehrstelligen Divisor, welche in unseren Rechenbüchern möglichst anschaulich behandelt wird.

Marburg im September 1889.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Anleitung zum Gebrauche des dritten Rechenbuches.

Raum 1 bis 1000.

Seite

I. Auffassung der Zahlen.

Übersichtliche Wiederholung der Zahlen von 1 bis 100 1
Zählübungen.
Auflösung und Zusammenfassung der Einheiten, Lesen und Schreiben der Zahlen.
Erweiterung des Zahlenraumes bis 1000 2
Zählübungen 3
Auflösung und Zusammenfassung der Einheiten, Lesen und Schreiben der Zahlen 4
Zusammensetzung und Zerlegung der Zahlen 5

II. Additionsgebiet.

Kopfrechnen.
Addition reiner Zehner, reiner Hunderter 6
Addition einziffriger Zahlen zu mehrziffrigen 7
Addition reiner Hunderter zu mehrziffrigen Zahlen.
Addition reiner Zehner zu Zahlen, die aus Zehnern und Hundertern bestehen.
Addition reiner Zehner zu zweiziffrigen Zahlen 8
Addition reiner Zehner zu dreiziffrigen Zahlen.
Addition zweiziffriger, dreiziffriger Zahlen.
Reihen 9
Brüche 10
Auffassung der Brüche.
Darstellung der Brüche durch Strecken.
Schreiben der Brüche.
Lesen der Brüche 11
Schriftliches Rechnen 12

III. Subtractionsgebiet.

Kopfrechnen 14
Subtraction reiner Zehner, reiner Hunderter 15
Subtraction einziffriger Zahlen von mehrziffrigen.
Schriftliches Rechnen 16
Das Verfahren.
1. Subtrahieren ohne Borgen . . 17
2. Subtrahieren mit Borgen.

IV. Multiplicationsgebiet.

Vervielfachen mit Grundzahlen 19
Kopfrechnen.
Schriftliches Rechnen 21

V. Divisionsgebiet. Seite

Dividieren durch Grundzahlen 22

Kopfrechnen.

Messen im Kopfe 23

Theilen im Kopfe 24

Seite

Schriftliches Rechnen 26

Division ohne Übergang in eine andere Ordnung.

Division mit Übergang in eine andere Ordnung 28

Raum 1 bis 1 Million.

Seite

I. Auffassung der Zahlen 29

II. Additionsgebiet 30

III. Subtractionsgebiet.

IV. Multiplicationsgebiet 31

Seite

Multiplication mit reinen Zehnern, Hundertern u. s. w. . . 32

V. Divisionsgebiet 34

Division durch reine Zehner, Hunderter u. s. w.

Anleitung zum Gebrauche des vierten Rechenbuches.

Unbegrenzter Zahlenraum.

Seite

A. Gebiet der ganzen Zahlen.

I. Auffassung der Zahlen.

Decimale Schreibweise mehrnamiger Zahlen unter Berücksichtigung der Verwandlungszahl a) 10, b) 100, c) 1000 . . . 36

Auflösung und Zusammenfassung der Einheiten, Lesen und Schreiben der Zahlen 37

II. Additionsgebiet.

Kopfrechnen.

Schriftliches Rechnen 38

III. Subtractionsgebiet.

Kopfrechnen 40

Schriftliches Rechnen 41

IV. Multiplicationsgebiet.

Kopfrechnen 44

Schriftliches Rechnen.

Seite

V. Divisionsgebiet.

Kopfrechnen 48

Schriftliches Rechnen 49

1. Der Quotient besteht aus Einern 50

2. Der Quotient besteht aus reinen Zehnern (Hundertern, Tausendern u. s. w.) 51

3. Der Quotient ist eine mehrstellige Zahl 52

B. Rechnen mit Decimalzahlen.

I. Auffassung der Decimalzahlen.

1. Lesen und Schreiben der Decimalzahlen 57

2. Erweitern und Kürzen der Decimalzahlen.

3. Gleichnamigmachen der Decimalzahlen 58

Seite

II. Die Grundoperationen mit Decimalzahlen.

1. Addition.
2. Subtraction 59
3. Multiplication.
4. Division 60

C. Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

I. Reducieren 62

1. Verwandlungszahl ist decimal.
2. Verwandlungszahl ist nicht decimal.

II. Resolvieren 63

Seite

III. Die Grundoperationen mit mehrnamigen Zahlen.

1. Addieren 64
2. Subtrahieren 65
3. Multiplicieren 66
4. Dividieren 67
   1. Messen.
   2. Theilen.

D. Rechnen mit den häufiger vorkommenden gemeinen Brüchen und mit solchen, deren Nenner kleiner ist als 100.

I. Auffassung der Brüche . . 68

II. Die Grundoperationen mit Brüchen 69

Anhang zum vierten Rechenbuche.

Seite

I. Bruchrechnung 70
II. Preisrechnungen 71
III. Zusammengesetzter Dreisatz.

Seite

IV. Procentrechnung 72
V. Zinsrechnung 74
VI. Raumlehre 75

Anleitung
zum Gebrauche des dritten Rechenbuches.

Raum 1 bis 1000.

I. Auffassung der Zahlen.

Übersichtliche Wiederholung der Zahlen von 1 bis 100.

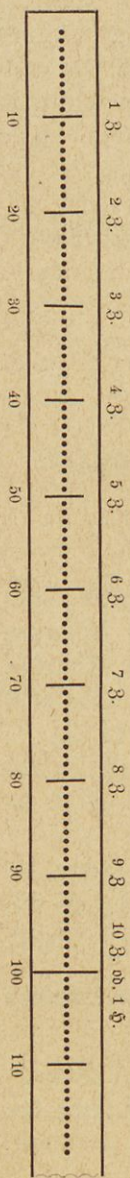
Zählübungen.

§ 1. Die bekannten Maße werden systematisch wiederholt, dann nimmt man an ihnen die aus dem Rechenbuche ersichtlichen Zählungen vor. Beim Zählen der Maßeinheiten werden die niederen Einheiten a) nicht in höhere, b) auch in höhere Einheiten verwandelt. Man zählt also z. B. a) 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, ... 9 *cm*, 10 *cm*, 11 *cm*, 12 *cm*, ... bis 100 *cm*, b) 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, ... 9 *cm*, 10 *cm* oder 1 *dm*, 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, ... 9 *cm*, 10 *cm* oder 2 *dm*, u. s. f. bis 10 *dm* oder 1 *m*.

An das Zählen der Maßeinheiten schließt sich das Zählen der Einer und Zehner an. Endlich wird das Zählen ohne jegliche Benennung vorgenommen; das Wie ist aus dem Rechenbuche ersichtlich.

Auflösung und Zusammenfassung der Einheiten, Lesen und Schreiben der Zahlen.

§ 2. Unter Auflösung der Einheiten verstehen wir das Verwandeln höherer Einheiten in niedere und unter Zusammenfassung das Umgekehrte. In den Beispielen 3 *m* = 30 *dm*, 4 Z. = 40 E.,



5 *l* 6 *dl* = 56 *dl*, 2 Z. 3 E. = 23 E. erscheinen höhere Einheiten in niedere aufgelöst, und in den Beispielen 60 kr. = 6 Z., 90 E. = 9 Z., 54 Bg. = 5 Lg. 4 Bg., 32 E. = 3 Z. 2 E. wieder in höhere zusammengefasst.

Auf der Auflösung beruht das Lesen, auf der Zusammenfassung das Schreiben der Zahlen.

Z. B. in 34 = 3 Z. 4 E. werden 3 Z. in dreißig verwandelt und man liest 34 = vier und dreißig. Hat man umgekehrt die Zahl «sechs und fünfzig» aufzuschreiben, so verfährt man folgendermaßen: sechs und fünfzig = 5 Z. 6 E. = $\overset{\text{Z. E.}}{5\ 6}$ = 56, wobei sich die Benennungen der Einheiten aus den Stellen verstehen.

Die Durchführung der diesbezüglichen Übungen versteht sich aus den Aufgaben im Rechenbuche von selbst.

Erweiterung des Zahlenraumes bis 1000.

§ 3. Die Zahlen bis 1000 pflegt man an der sogenannten Hundertertafel zu veranschaulichen, welche auf der Schultafel entworfen wird. Man macht nämlich ein Rechteck, welches durch Parallele zur Grundlinie und Höhe in 100 kleinere, jedoch gleich große Rechtecke zerlegt wird. In jedes Rechteck kommen 2 Reihen zu je 5 Punkten, so dass in 10 Rechtecken eines Streifens 100 Punkte und in allen 10 Streifen 1000 Punkte sich befinden.

Will man jedoch die Zahlen bis 1000 in einer Reihe darstellen, so nehme man einen Papierstreifen, den wir Hunderterstreifen nennen wollen, z. B. von der Länge des Zimmers, und zeichne auf demselben in einer Reihe 1000 Punkte auf, und zwar so, dass je 100 Punkte durch eine deutlich sichtbare Gerade von der Breite des Streifens

und je 10 Punkte jedes Hunderters durch eine kürzere Gerade getrennt erscheinen, wie dies die Figur auf Seite 2 in einem Bruchstücke zeigt.

Als Veranschaulichungsmittel dient auch sehr gut der Meterstab mit der Eintheilung in Decimeter, Centimeter und Millimeter. Auch Fisolen und andere kleine Dinge, die man zu Häufchen (Zehnern), zu Haufen (Hundertern) vereinigt und geordnet in einer Reihe zusammenstellt, lassen sich gut zur Veranschaulichung benutzen. Man trachte jedoch, in diesem Raume die äußere Anschauung auf die innere überzuführen. Zu diesem Zwecke läßt man z. B. die Schüler 10 Rechenapparate nebeneinander sich vorstellen, oder man legt in der Vorstellung 1 Ries Papier aus Bogen, Lagen und Buch zusammen, u. s. w.

Zählübungen.

§ 4. Der Hunderterstreifen wird längs der Zimmerwand durch zwei Schüler gespannt gehalten, der Lehrer zeigt auf die Hunderter, die er früher als solche durch Zählen erkennen ließ, der Reihe nach und läßt zählen: 1 H., 2 H., 3 H., . . . 10 H. oder 1 Tausender; oder: hundert, zweihundert, dreihundert, . . . tausend.

Nun kann er 1000 Fisolen nehmen und läßt sie so abzählen, daß er bei je 100 abbricht und von neuem zählen läßt. Jede 100 Fisolen vereinigt er zu Häufchen, die er wieder in einer Reihe ordnet; die Hunderterhäufchen läßt er schließlich abzählen, wie früher die Punkte.

Theilt man 1 Centimeter in 10 gleiche Theile, so heißt ein solcher Theil 1 Millimeter. 1 *cm* hat also 10 *mm*, 2 *cm* = 20 *mm*, 3 *cm* = 30 *mm* u. s. f., 10 *cm* oder 1 *dm* = 100 *mm*, 2 *dm* = 200 *mm*, 3 *dm* = 300 *mm* u. s. f., 10 *dm* oder 1 *m* = 1000 *mm*.

1 Bch. = 100 Bg., 2 Bch. = 200 Bg., 3 Bch. = 300 Bg., . . . 10 Bch. oder 1 Ries = 1000 Bg.

Ähnlich verfahre man in den Fällen: 1 fl. = 100 kr., 1 *hl* = 100 *l*, 1 *q* = 100 *kg*, (10 *q* = 1 Tonne [*t*] = 1000 *kg*), 1 *kg* = 100 *dkg*.

Ebenso übe man umgekehrt: 100 *mm* oder 1 *dm*, 200 *mm* oder 2 *dm* u. s. w.

Dasselbe gilt für andere Maße.

Nun übergehe man zu den Zählübungen im Rechenbuche. Man zählt anschaulich:

1.) 1 *dm*, 2 *dm*, 3 *dm*, 4 *dm*, . . . 10 *dm* oder 1 *m*.

2.) 1 *cm*, 2 *cm*, 3 *cm*, 4 *cm*, . . . 10 *cm* oder 1 *dm*; 1 *dm* 1 *cm* (2 *cm*, 3 *cm*, . . . 9 *cm*), 1 *dm* 10 *cm* oder 2 *dm*; 2 *dm* 1 *cm*, . . . 2 *dm* 10 *cm* oder 3 *dm*; u. s. w. bis 9 *dm* 10 *cm* oder 10 *dm* oder 1 *m*.

3.) 1 *mm*, 2 *mm*, 3 *mm*, . . . 10 *mm* oder 1 *cm*; 1 *cm* 1 *mm* (2 *mm*, 3 *mm*, . . . 9 *mm*), 1 *cm* 10 *mm* oder 2 *cm*; 2 *cm* 1 *mm*, 2 *cm* 2 *mm* u. s. w. bis 10 *cm* oder 1 *dm*; 1 *dm* 1 *mm* (2 *mm*, 3 *mm*, . . . 9 *mm*), 1 *dm* 10 *mm* oder 1 *dm* 1 *cm*; 1 *dm* 1 *cm* 1 *mm* (2 *mm*, 3 *mm*, . . . 9 *mm*), 1 *dm* 1 *cm* 10 *mm* oder 1 *dm* 2 *cm*; und so fort bis 1 *dm* 9 *cm* 10 *mm* oder 1 *dm* 10 *cm* oder 2 *dm*; u. s. f. bis man zu 9 *dm* 9 *cm* 10 *mm* oder 9 *dm* 10 *cm* oder 10 *dm* oder 1 *m* kommt.

Wie man in den anderen Fällen, die im Rechenbuche angeführt sind, zu verfahren hat, ist aus dem Gesagten klar. Nur für Hunderter, Zehner und Einer mögen die drei Fälle noch angeführt werden.

1.) 1 H. oder hundert, 2 H. oder zweihundert, 3 H. oder dreihundert u. s. f., 10 H. oder tausend.

2.) 1 Z. oder zehn, 2 Z. oder zwanzig, 3 Z. oder dreißig u. s. f., 10 Z. oder hundert, 1 Z. oder hundert zehn, 2 Z. oder hundert zwanzig, 3 Z. oder hundert dreißig u. s. w. bis 1 H. 10 Z. oder 2 H. oder zweihundert u. s. f. Das Verfahren bis dreihundert, bis vierhundert u. s. f. bis tausend ist nun klar.

3.) 1 E., 2 E., 3 E., . . . 10 E. oder 1 Z., 1 E., 2 E. u. s. f., 10 E. oder 2 Z. u. s. f. bis 10 Z. oder 1 H. oder hundert, 1 E., 2 E. u. s. f. bis 10 E. oder 1 H. 1 Z. Das weitere Verfahren bis 1 Tausender ist nun ersichtlich.

Statt der früheren Redeweise können wir uns auch folgender bedienen: eins, zwei, drei, . . . zehn, elf, zwölf, dreizehn, . . . zwanzig u. s. f. bis hundert, hundert eins, hundert zwei u. s. w., wie leicht ersichtlich, bis tausend.

Auflösung und Zusammenfassung der Einheiten, Lesen und Schreiben der Zahlen.

§ 5. Das Verfahren ist aus dem Rechenbuche und aus § 2 ersichtlich.

Zusammensetzung und Zerlegung der Zahlen.

§ 6. Das Verfahren bei diesen Aufgaben ist von selbst einleuchtend. Die Resultate geben die Schüler unmittelbar an. Statt der ersten Summanden kann der Lehrer analoge Zahlen nach Belieben wählen. — Die Wiederholung der Fundamentalübungen soll noch möglichst oft vorgenommen werden.

II. Additionsgebiet.

Kopfrechnen.

§ 7. An Aufgaben wie: Zähle zusammen, wie viel 5 + 3, 23 + 9, 60 + 30 u. s. f. ist, erläutert man die Begriffe addieren, Summanden und Summe.

Zusammenzählen heißt auch addieren; die Zahlen, die man zusammenzählt, heißen Summanden und die gesuchte Zahl die Summe. Nun lasse man Beispiele, wie sie voranstehend angeführt sind, durchführen und stelle die Fragen: Welche Zahlen sind die Summanden? welche Zahl ist die Summe?

§ 8. Nur die öfters wiederkehrende Wiederholung kann das Gelernte fest erhalten und zum bleibenden Eigenthume machen. Vor allem wiederhole man planmäßig auch an dieser Stufe die Fundamentalübungen, das «Einsundeins», das «Einsvoneins», das «Einmaleins» und das «Einsineins».

Das möglichst rasche Zählen zu 2, 3, 4, ... 9 bis 20, 30, ... 90 ist auch noch immer zu pflegen, um das «Einmaleins» und das «Einsineins» anschaulich, mit Verständnis zu befestigen.

Die Wiederholung der übrigen bereits vorgekommenen Übungen wird den neuen im Rechenbuche vorangeschickt, aber auch an Reihen vorgenommen.

Die schriftlichen Übungen schließen sich eng an die Form des mündlichen Rechnens an. Zu Hausaufgaben eignen sich insbesondere die Reihen. Da jedoch dieselben zeitweise sehr lang ausfallen, daher

mehrere Reihen zugleich durchgeführt den Geist des Kindes zu sehr abspannen, so sei man beim Geben derartiger Hausaufgaben vorsichtig.

Die Bemerkungen dieses Paragraphen gelten wohl auch für spätere Operationen.

§ 9. In manchen Fällen ist der Gedankengang weitläufig und daher schwerfällig, es ist daher empfehlenswert, denselben abzukürzen. Hat man z. B. auszurechnen, wie viel 834 + 23 ist, so denkt man sich zuerst «834 ist 800 und 34», dann «34 und 23 ist wie viel», ferner «34 ist 30 und 4, 23 ist 20 und 3» u. s. w. Diese Gedankenreihe wird kürzer, wenn die vorangehenden Stufen, auf welche sich diese Berechnung stützt, zur vollsten Geläufigkeit eingeübt sind, so dass man einiges sozusagen stillschweigend übergehen kann. Zu dem Zwecke müssen einige vorangehende Übungen unmittelbar angeeignet, bei anderen aber das Normalverfahren derartig geläufig eingeübt werden, dass man sich der Durchführung desselben kaum bewusst wird. Im angeführten Falle rechnet man:

834 + 23 =; 34 und 20 ist 54, und 3 ist 57, 834 + 23 = 857.

Dabei erwähnt man nicht der Zerlegung der Zahlen 834, 34 und 23; das Normalverfahren für die Berechnung von 34 und 20, nämlich 30 und 20 ist 50, und 4 ist 54, wird als derartig geläufig vorausgesetzt, dass man, dessen kaum bewusst, das Resultat 54 unmittelbar anzugeben scheint; 54 und 3 muss unmittelbar gewusst werden u. s. w.

Die voranstehenden Bemerkungen gelten für alle Operationen.

§ 10. Nachstehend sollen die einzelnen Additionsstufen für sich besprochen werden.

a) Addition reiner Zehner, reiner Hunderter.

Um diese Übungen noch klarer zum Verständnis zu bringen, werden ihnen Aufgaben mit benannten Zahlen vorausgeschickt. Z. B.:

$$60\ mm + 20\ mm =$$

$$60\ mm + 20\ mm = 6\ cm + 2\ cm = 8\ cm = 80\ mm$$

also: $60\ mm + 20\ mm = 80\ mm$. Dies gilt auch für später.

Wie viel ist 40 + 40? Anfangs rechnet man: 40 + 40 = 4 Z. + 4 Z. = 8 Z. = 80; also: 40 + 40 = 80. Schließlich muss jedoch das Resultat unmittelbar angegeben werden können; man sagt alsogleich: 40 + 40 = 80.

Wie viel ist 400 + 200? Anfangs: 400 + 200 = 4 H. + 2 H. = 6 H. = 600; 400 + 200 = 600. Schließlich unmittelbar: 400 + 200 = 600.

Wie viel ist 80 + 30? Die Aufgaben dieser Gruppe könnte man wie die früheren behandeln. Bequemer ist die Rechnung, wenn man die Hunderter ergänzt, also: 80 und 20 ist 100, und 10 ist 110; 80 + 30 = 110.

Auch diese Übungen müssen derartig eingeübt werden, dass die Kinder die Resultate unmittelbar angeben können.

b) Addition einziffriger Zahlen zu mehrziffrigen.

Das Verfahren ergibt sich aus dem Rechenbuche von selbst. Die Ergänzung des neuen Hunderters, z. B. 498 + 2 = 500, und der Übergang in den neuen Hunderter, z. B. 894 + 8 =; 894 und 6 ist 900, und 2 ist 902, 894 + 8 = 902, sind fleißig zu üben. Die Resultate müssen schließlich unmittelbar angegeben werden können.

c) Addition reiner Hunderter zu mehrziffrigen Zahlen.

Das Verfahren ergibt sich unmittelbar aus dem Rechenbuche.

d) Addition reiner Zehner zu Zahlen, die aus Zehnern und Hundertern bestehen.

Wie viel ist 410 + 30? 10 und 30 ist 40, 410 + 30 = 440. Schließlich unmittelbar: 410 + 30 = 440.

Wie viel ist 360 + 90? 360 und 40 ist 400, und 50 ist 450, 360 + 90 = 450. Der Übergang in den neuen Hunderter ist fleißig zu üben, so dass das Resultat so rasch berechnet werden kann, als ob man es unmittelbar wüsste.

e) Addition reiner Zehner zu zweiziffrigen Zahlen.

Wie viel ist 41 + 30? 40 und 30 ist 70, 41 und 30 ist 71. Unmittelbar anzueignen.

Wie viel ist 85 + 30? 80 + 30 = 110, 85 + 30 = 115.

Das Normalverfahren soll derartig geläufig werden, dass man sich dessen kaum bewusst wird.

f) Addition reiner Zehner zu dreiziffrigen Zahlen.

Wie viel ist 547 + 40? 47 + 40 = 87, 547 + 40 = 587.

Das Normalverfahren geläufig einzuüben.

g) Addition zweiziffriger, dreiziffriger Zahlen.

Den ersten Summanden betrachtet man als unzerlegt, während der zweite zerlegt wird.

Wie viel ist 13 + 25? 13 und 20 ist 33, und 5 ist 38, 13 + 25 ist 38.

Wie viel ist 834 + 23? 834 und 20 ist 854, und 3 ist 857, 834 + 23 = 857.*

Wie viel ist 734 + 240? 734 und 200 ist 934, und 40 ist 974, 734 + 240 = 974.

Wie viel ist 432 + 327? 432 und 300 ist 732, und 20 ist 752, und 7 ist 759, 432 + 327 = 759.

Das Rechnen mit zwei dreiziffrigen Zahlen ist jedoch schon schwer, das Gedächtnis wird stark in Anspruch genommen; daher plage man die Kinder mit solchen Aufgaben nicht zuviel und unterstütze sie durch Aufschreiben der Beispiele. Um die Kinder an dieser Stufe zu entlasten, überlässt man die Gruppen «Addition zweiziffriger Zahlen zu dreiziffrigen, Addition einer aus Hundertern und Zehnern bestehenden Zahl zu einer dreiziffrigen, Addition dreiziffriger Zahlen zu dreiziffrigen» lieber dem nächsten Schuljahre, was bei der neuen Auflage der Rechenbücher berücksichtigt wird.

---

* Im Rechenbuche ist diese Behandlung dementsprechend zu corrigieren.

Reihen.

§ 11. Von höchster Bedeutung sind die Reihen, sie bieten Stoff für tägliche Studien, für lückenlose Wiederholung der vorangehenden Operationen bei neuen; etwaige Lücken werden beseitigt, und die Orientierung in der Zahlenreihe wird möglichst intensiv.

Wie weit der Lehrer in den einzelnen Stunden zu gehen, welche Reihen er vorzunehmen hat, wird sein Takt entscheiden. Jedenfalls soll er alle Gattungen durchmachen und zu ihnen öfters zurückkehren. Die Reihen sind zunächst fürs mündliche Rechnen bestimmt; sie eignen sich aber auch sehr gut fürs schriftliche, sowohl für jenes, das sich ans mündliche eng anschließt, als auch fürs Regelrechnen. Gerade an Reihen soll man bei späteren Operationen das mündliche und das schriftliche Rechnen wiederholen.

§ 12. Bei den angewandten Aufgaben hat der Lehrer so lange unnachsichtlich darauf zu dringen, dass die Schüler vor der Ausrechnung die nöthigen Schlüsse bilden, bis er sich überzeugt hat, dass ihnen dieselben vollends geläufig sind. Später, und zwar beim schriftlichen Rechnen, macht das Aussprechen der Schlüsse das Verfahren nur schleppend und hindert ein rasches mechanisches Rechnen. Diese Bemerkung gilt für alle Operationen. Für den Additionsschluss werde bemerkt, dass denselben die Schüler auf dieser Stufe schon geläufig heraushaben.

Die Erfahrung lehrt, dass die directe Angabe der auszuführenden Operation den Schülern anfangs Schwierigkeiten macht, es ist also nothwendig, den Schülern das kürzere Verfahren in Verbindung mit dem Schlusse beizubringen. Hat man z. B. die Aufgabe: «Ein Tischler kauft 246 Stück Bretter, 154 Stück hat er noch im Vorrathe; wie viel Stück besitzt er nun?» zu behandeln, so arbeite man etwa folgendermaßen: «Nun besitzt er 246 Stück und 154 Stück; um also zu erfahren, wie viel 246 und 154 Stück zusammen ausmachen, werde ich diese Zahlen addieren.» Die analoge Bemerkung gilt für die übrigen Operationen. Man soll aber auch beim reinen Rechnen schon die Begriffe «und» und «addieren» in Verbindung miteinander wieder-

holt gebrauchen. Z. B.: «Um zu erfahren, wie viel 624 und 218 ist, muss man die Zahlen addieren.»

Der Charakter der einzelnen Gruppen der angewandten Aufgaben ist leicht zu erkennen. Bei den Preisaufgaben wird auf den Schluss von einer Mehrheit durch die Einheit auf eine andere Mehrheit vorbereitet. Der Inhalt der angewandten Aufgaben wird nach und nach durch Rechenkreise über «Einnahmen und Ausgaben», «Gewinn und Verlust», «Zinsen» u. s. w. erweitert.

Brüche.

Auffassung der Brüche.

§ 13. Im Raume 1 bis 100 wurden die Schüler mit den Halben, Dritteln, Vierteln u. s. w. bis zu den Zehnteln auf Grundlage der Veranschaulichung vertraut gemacht (vergl. Anleitung 1 bis 100, S. 71); an dieser Stelle wird das Bekannte wiederholt und durch Hundertel und Tausendtel erweitert. Die Hundertel kann man am metrischen Scheibchenrechenapparat und die Tausendtel am Meterstab mit Millimetern veranschaulichen. Jedoch hat die äußere Anschauung immer mehr in eine innere überzugehen.

Darstellung der Brüche durch Strecken.

§ 14. Die Schüler sollen Halbe, Drittel, Viertel u. s. w. bis zu den Zehnteln auch an Strecken darstellen lernen, was später z. B. fürs Resolvieren und Reducieren der Brüche von Bedeutung ist.

Schreiben der Brüche.

§ 15. Nun ist es auch an der Zeit, den Schülern das eigentliche Schreiben und Lesen der Brüche beizubringen. Dabei verfahre man etwa folgendermaßen:

a) Halbe oder Drittel oder Viertel u. s. w. bekommt man durch Theilen der Ganzen in gleiche Theile; dieses Theilen wollen wir durch einen wagrechten Strich andeuten. (Nun macht man auf der Tafel einen solchen Strich.) Halbe bekommt man durch Theilen eines Ganzen

in zwei gleiche Theile; das Theilen in zwei gleiche Theile wird bezeichnet, indem man eine 2 unter den Strich schreibt. — Ähnliches gilt für Drittel, Viertel u. s. w. Schließlich hat man auf der Tafel

$\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, ... $\overline{10}$, $\overline{100}$, $\overline{1000}$.

b) Von den erhaltenen Theilen des Ganzen kann man entweder nur einen nehmen; dies wird dadurch bezeichnet, dass man ober den Strich eine 1 schreibt. Nun wird dies für alle früheren Fälle durchgeführt, wie dies hier für ein Halbes gezeigt werden soll.

Wir wollen ein Ganzes in gleiche Theile theilen (deuten wir dies durch einen wagrechten Strich auf der Tafel an); wir theilen in zwei gleiche Theile (schreiben wir dies durch eine 2 unter dem Strich auf) und nehmen nur einen Theil (schreiben wir dies durch eine 1 ober dem Strich an).

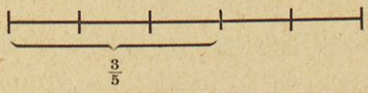
Und so bekommt man als zweite Reihe auf die Tafel:

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.

c) Oder nimmt man von den erhaltenen Theilen zwei, drei, überhaupt mehrere. Nimmt man z. B. zwei Halbe, so schreibt man ober dem Strich eine 2.

Aus dem Voranstehenden wird man leicht ersehen, wie den Schülern die Schreibweise $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ u. s. w. zu erläutern ist.

Das Schreiben der Brüche kann noch anschaulicher durch Darstellung der Brüche durch Strecken gemacht werden. Wie dies geschieht, zeigt für einen Fall nachstehende Figur:



Lesen der Brüche.

§ 16. a) $\frac{}{2}$ bedeutet, dass wir ein Ganzes in zwei gleiche Theile getheilt haben; die erhaltenen Theile heißen Halbe. Durch das Zeichen werden also Halbe aufgeschrieben.

Was bedeutet $\frac{}{3}$? Was haben wir mit diesem Zeichen aufgeschrieben?

Ähnlich verfährt man mit $\frac{}{4}$, $\frac{}{5}$, ... $\overline{10}$, $\overline{100}$, $\overline{1000}$.

b) Was bedeutet in $\frac{1}{2}$ die Zahl 1 ober dem Strich? Was bedeutet die Zahl 1 ober dem Strich in $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$?

c) Was bedeutet die Zahl 2 ober dem Strich in $\frac{2}{2}$? Was bedeuten die Zahlen ober dem Strich in $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{2}{5}$ u. s. w.?

Alles übrige ergibt sich aus dem Rechenbuche von selbst.

Schriftliches Rechnen.

§ 17. Das über Münzen, Maße, Gewichte u. s. w. Bekannte wird wiederholt und durch 1 *km* = 1000 *m*, 1 *dkg* = 10 *g*, 1 *kg* = 1000 *g*, 1 *t* (Tonne) = 1000 *kg*, 1 gemeines Jahr = 365 Tage, 1 Schaltjahr = 366 Tage erweitert.

Wie durch die Vorübungen Früheres wiederholt und für das Verständnis des schriftlichen Addierens ganzer Zahlen vorbereitet wird, ist aus dem Rechenbuche von selbst ersichtlich.

Die schriftlichen Übungen, die bisher vorgenommen wurden, unterschieden sich in der Form nicht vom Kopfrechnen. Nun soll aber das schriftliche Rechnen eine vom Kopfrechnen unabhängige Form annehmen, welche für alle Zahlenräume ihre Giltigkeit behält. Diese Rechnungsform soll zuerst zum Verständnis, schließlich jedoch zur vollsten mechanischen Geläufigkeit gebracht werden. Das Verfahren ist hier am nachstehenden Beispiele erläutert. Z. B. 518 + 357 = ?

Man setzt mit aller Genauigkeit Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w., also:

$$\begin{array}{r} 518 \\ 357 \end{array}$$

und bestimmt bei jeder Zahl die Zahl der Einer, Zehner u. s. w., was durch Darüberschreiben noch deutlicher ersichtlich gemacht wird, also:

$$\begin{array}{r} \text{H. Z. E.} \\ 5\,1\,8 \\ 3\,5\,7 \\ {\scriptstyle 1} \\ \hline 8\,7\,5 \end{array}$$

Dabei spricht man: «Wir haben zu berechnen, wie viel 518 und 357 ist oder wie viel 5 H. 1 Z. 8 E. und 3 H. 5 Z. 7 E. sind. 7 E. und 8 E.

sind 15 E. oder 5 E. und 1 Z.» 5 E. werden unter die Einer geschrieben und 1 Z. wird weitergezählt zu den Zehnern. Letzteres kann anfangs durch das Schreiben einer kleineren Zahl 1 unter die Zehner angedeutet werden. «1 Z. und 5 Z. sind 6 Z., und 1 Z. sind 7 Z.» Die 7 Z. werden unter die Zehner geschrieben. «3 H. und 5 H. sind 8 H.» Die 8 H. werden unter die Hunderter geschrieben.

Auf diese Art sollen die Aufgaben unter der Aufschrift «Ableitung der Regel» behandelt werden, und zwar trachte man, dass die Schüler die Aufgaben nach der Behandlung der zwei ersten selbständig ohne Beihilfe des Lehrers lösen.

Bei späteren Aufgaben wird das Verfahren kürzer. Für obiges Beispiel spricht man: «7 und 8 ist 15 (die 5 wird untergesetzt und 1 weitergezählt); 1 und 5 ist 6, und 1 ist 7 (die 7 wird untergesetzt); 3 und 5 ist 8 (die 8 wird untergesetzt).»

Endlich werde so addiert: Man zeigt auf die einzelnen Zahlen, ohne sie jedoch zu nennen, und gibt nur die jedesmalige Summe an; es heißt also bei den Einern obiger Aufgabe so: «7, 15», die 5 wird untergeschrieben, mit 1 Z. sofort zur Zehnerreihe gegangen, und es heißt dort: «1, 6, 7» u. s. w.

Bei den Aufgaben unterscheidet man solche ohne und solche mit Uebergang in höhere Ordnungen. Aus letzteren ersieht man, dass man am praktischesten verfährt, wenn man die Addition bei den Einern beginnt.

Man lasse auch die Addition von oben anfangen.

Additionsaufgaben sollen auch dictiert werden, damit sich die Schüler im Aufschreiben derselben üben, und zwar etwa so: «Addiere die Zahlen ...»

Es werde hier wieder bemerkt, dass die Fundamentalübungen für die vier Grundrechnungsarten vor jedem neuen Abschnitt zu wiederholen sind. Die Reihenübungen bieten Stoff für jede Stunde, und zwar fürs mündliche und schriftliche Rechnen.

Bei den angewandten Aufgaben beginne man, die Schüler an die Redeweise: «Um dieses zu berechnen, werde ich die Zahlen ...

addieren u. s. w.» anzugewöhnen. Diese Bemerkung gilt für jede Operation, sobald der Operationsschluss den Schülern geläufig ist, und ist besonders bei zusammengesetzten Aufgaben auszunützen, weil dieselben sonst schwerfällig werden. Man lasse z. B. bei der Aufgabe 7.) den Schüler folgendermaßen reden: «Zuerst werde ich berechnen, wie viel Weizen der Landmann im zweiten Jahre geerntet hat, indem ich zu 166 *hl* 82 *hl* addiere; und dann werde ich die Ernte beider Jahre zusammenzählen.»

In Bezug auf die Aufgabe 6.) ist zu bemerken, dass der Schüler im Laufe der Zeit die Zahl der Tage, die jeder Monat hat, dem Gedächtnisse einprägen soll.

III. Subtractionsgebiet.

Kopfrechnen.

§ 18. An Aufgaben wie: Zähle von der Zahl 12 die Zahl 4 ab, von der Zahl 46 die Zahl 8, von 70 die Zahl 30 u. s. f., erläutert man die Begriffe subtrahieren, Minuend, Subtrahend und Rest oder Unterschied (Differenz). Eine Zahl von einer andern wegzählen, heißt auch subtrahieren. Die Zahl, von welcher weggezählt werden soll, heißt Minuend; die Zahl, welche wegzuzählen ist, Subtrahend, und die Zahl, welche man durchs Wegzählen findet, Rest oder Unterschied (Differenz). Nun lasse man Beispiele, wie voranstehend angeführt sind, durchführen und stelle die Frage: Welche Zahl ist der Minuend, welche der Subtrahend, welche der Rest?

Um den Begriff «Unterschied» noch besser zu klären, gebe man Beispiele wie: «Um wie viel ist 9 größer als 6?» dann bemerke man: «3 ist der Unterschied zwischen 9 und 6».

§ 19. Beherzige die §§ 8 und 9. — Im Nachstehenden sollen die einzelnen Subtractionsstufen fürs Kopfrechnen besprochen werden; sie entsprechen vollständig den Additionsstufen.

a) Subtraaction reiner Zehner, reiner Hunderter.

Die Übungen mit benannten Zahlen haben hier dieselbe Bedeutung wie bei der Addition.

Wie viel ist 80 — 40? Anfangs rechnet man: 80 — 40 = 8 Z. — 4 Z. = 4 Z. = 40; also: 80 — 40 = 40. Schließlich muss jedoch das Resultat unmittelbar angegeben werden können, also: 80 — 40 = 40.

Wie viel ist 600 — 200? Anfangs: 600 — 200 = 6 H. — 2 H. = 4 H. = 400; 600 — 200 = 400. Schließlich unmittelbar: 600 — 200 = 400.

Wie viel ist 110 — 30? Die Aufgaben dieser Gruppe könnte man wie die früheren behandeln. Bequemer ist die Rechnung, wenn man zuerst bis 100 zurückschreitet, also: 110 weniger 10 ist 100, weniger 20 ist 80, 110 — 30 = 80.

Auch diese Resultate müssen die Kinder schließlich unmittelbar angeben können.

b) Subtraction einziffriger Zahlen von mehrziffrigen.

Für die Behandlung dieser Stufe gelten ähnliche Bemerkungen wie für die Addition S. 7, b. Überhaupt genügen die Bemerkungen bei der Addition und die Andeutungen bezüglich der Lösungen im Rechenbuche für alle späteren Subtractionsfälle vollkommen. Dabei soll man genau berücksichtigen, welche Fälle unmittelbar und für welche Fälle nur das Normalverfahren anzueignen ist. Reihen, angewandtes Rechnen vergl. § 11 und § 12. Die Additionsreihen sind auch neben den Subtractionsreihen zu wiederholen, und zwar sowohl mündlich als schriftlich.*

§ 20. Auch hier ist noch der Hauptzweck, die Kinder mit dem Wesen der Brüche vertraut zu machen. Eine Erweiterung wurde durch Einführung der Begriffe Zähler und Nenner vorgenommen. Die Subtractionsübungen sind sowohl mündlich als schriftlich vorzunehmen.

---

* Der Stoff häuft sich im Raume 1 bis 1000 derartig, dass für die Übung und Wiederholung zu wenig Zeit bleibt, daher ist es angezeigt, um die Kinder dieses Schuljahres zu entlasten, die Gruppen «Subtraction zweiziffriger Zahlen, Subtraction aus Hundertern und Zehnern bestehender Zahlen von dreiziffrigen, Subtraction dreiziffriger Zahlen von dreiziffrigen» dem nächsten Schuljahre zu überlassen. (Vergl. S. 8.)

Ferner ist hier am Platze, die Kinder mit der praktischen Eintheilung der Hohlmaße und Gewichte vertraut zu machen, und zwar etwa folgendermaßen:

Um Strecken bequem messen zu können, hat man sich den Meterstab verfertigt. Um z. B. eine Länge von 76 *cm* zu bestimmen, braucht man diese Länge am Meterstab nur abzulesen, statt 1 *cm* 76 mal aufzutragen.

Mit den Münzen verhält es sich geradeso, 4 kr. zahlt man mit 1 Vierer statt mit 4 kr., 10 kr. mit 1 Zehner statt mit 10 kr., 25 kr. mit 1 Viertelguldenstücke statt mit 25 kr. u. s. w.

Wie verhält es sich nun mit den Hohlmaßen? Bis jetzt lernten wir das *hl, l, dl* und *cl* kennen. Um das Messen im Verkehre noch bequemer zu machen, hat man auch noch folgende Maße verfertigt: $\frac{1}{2}$ *hl*, $\frac{1}{4}$ *hl*, $\frac{1}{5}$ *hl* oder 20 *l*, 10 *l*, 5 *l*, 2 *l*, 1 *l*, $\frac{1}{2}$ *l*, $\frac{1}{4}$ *l*, $\frac{1}{8}$ *l*, $\frac{1}{16}$ *l*, ja fürs Messen gewisser Flüssigkeiten sogar noch $\frac{1}{32}$ *l*. Dies alles soll in der Wirklichkeit gezeigt werden. Es existieren auch gute Wandtafeln, die man auf die Wand aufhängt, sobald man die wirklichen Maße gezeigt hat. Mit einer anderen Eintheilung der Hohlmaße wollen wir uns jedoch erst später vertraut machen.

Wie verhält es sich ferner mit den Gewichten?

Schriftliches Rechnen.

§ 21. Die schriftliche Subtraction kann auf zweierlei Art verrichtet werden. Entweder zählt man die kleinere von der größeren weg, um den Rest zu finden, oder es wird zur kleineren so viel dazu gezählt, dass man die größere bekommt, wodurch der Unterschied beider Zahlen bestimmt wird. In beiden Fällen erhält man dasselbe Resultat.

Die Subtraction im Sinne des Wegzählens ist leichter aufzufassen und deshalb wird sie vorerst in diesem Sinne behandelt.

Das Verfahren.

Bezüglich der Vorübungen wäre im allgemeinen nichts zu bemerken, weil ihre Bedeutung sich von selbst ergibt; bei den schriftlichen Vorübungen muss man die Schüler nur an die neue Redeweise

«4 *dm* von 5 *dm* bleibt 1 *dm*» angewöhnen, und zwar folgendermaßen: «Wenn ich 4 *dm* von 5 *dm* wegnehme, so bleibt 1 *dm*, oder kürzer: 4 *dm* von 5 *dm* bleibt 1 *dm*.» Beim mündlichen Rechnen wird immer das Wörtchen «weniger» gebraucht. Die Wörtchen «weniger» und «von» bringe man auch hier wiederholt in Verbindung miteinander; z. B. statt 600 weniger 300 kann man auch sagen: 300 von 600. Die Regel selbst wird an den hiezu bestimmten Beispielen den Schülern zum Verständnis gebracht. Dabei beachte man dasselbe Verfahren wie bei der Addition: zuerst wird die Regel vom Lehrer abgeleitet, an späteren Beispielen sollen die Schüler dieselbe möglichst selbständig suchen. Wie die Schüler mechanisch geläufig zu rechnen haben, wird aus den nachstehenden Beispielen ersichtlich. Vergl. die Addition.

1. Subtrahieren ohne Borgen.

Wie viel ist 789 — 345?

a) Man setzt die Zahlen so untereinander, dass Einer genau unter Einer, Zehner genau unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen,

H. Z. E.
7 8 9
3 4 5
———
4 4 4

und spricht: Wir haben 345 von 789 oder 3 H. 4 Z. 5 E. von 7 H. 8 Z. 9 E. wegzunehmen. (Die Hunderter, Zehner und Einer kann man mit Buchstaben über den Zahlen genauer bezeichnen.) 5 E. von 9 E. bleiben 4 E., 4 Z. von 8 Z. bleiben 4 Z., 3 H. von 7 H. bleiben 4 H.

b) 5 von 9 bleibt 4, 4 von 8 bleibt 4, 3 von 7 bleibt 4.

2. Subtrahieren mit Borgen.

Erster Fall. Wie viel ist 783 — 229?

·13
7 8 3
2 2 9
———
5 5 4

a) Wir haben 229 von 783 oder 2 H. 2 Z. 9 E. von 7 H. 8 Z. 3 E. wegzunehmen. Von 3 E. können wir 9 E. nicht wegnehmen, wir nehmen daher von unsern 8 Z. einen Zehner weg und machen Einer daraus. Dieses Wegnehmen nennt man Borgen. Wir bezeichnen es durch einen Punkt über der 8, durch den Borgepunkt. 1 Z. gibt uns 10 E., 3 E. hatten wir schon, macht zusammen 13 E., die wir mit kleinen Ziffern darüber setzen. 9 E. von 13 E. bleiben 4 E., 2 Z. von 7 Z. (warum nicht von 8 Z.?) bleiben 5 Z., 2 H. von 7 H. bleiben 5 H.

b) Später kurz so: 9 von 3 kann man nicht, muss man borgen; 9 von 13 bleibt 4, 2 von 7 bleibt 5, 2 von 7 bleibt 5.

Ebenso verfährt man, wenn bei den Hundertern geborgt wird.

Zweiter Fall. Wie viel ist 405 — 237?

$$\begin{array}{c} 9 \\ \cdot\,10\;15 \\ 4\;0\;5 \\ 2\;3\;7 \\ \hline 1\;6\;8 \end{array}$$

7 E. kann man von 5 E. nicht wegnehmen, wir wollen uns 1 Z. borgen. Nun sind keine Zehner da, wir borgen uns also 1 H. oder 10 Z. (eine kleine 10 über die 0 in der Zehnerstelle). Von den 10 Z. borge ich 1 Z., bleiben 9 Z. (Punkt über die kleine 10, kleine 9 über die kleine 10), und erhalte 15 E. — 7 E. von 15 E. bleiben 8 E., 3 Z. von 9 Z. bleiben 6 Z. u. s. w.

Später kurz so:

$$\begin{array}{c} \cdot\;\;\cdot \\ 4\;0\;5 \\ 2\;3\;7 \\ \hline 1\;6\;8 \end{array}$$

7 von 5 kann man nicht, muss man borgen; 7 von 15 bleibt 8, 3 von 9 bleibt 6 u. s. w.

An mehreren solchen Beispielen lernen die Kinder, wie man über die Null hinweg borgt und dass diese dadurch zur 9 wird.

Aus den Aufgaben mit Borgen ersehen die Schüler, dass man am praktischesten die Subtraction bei den Einern beginnt. Auch Subtractionsaufgaben sollen dictiert werden.

Wiederholung der Fundamentalübungen für die vier Grundrechnungsarten ist noch immer zu empfehlen. Die schriftliche Addition nach der Regel soll an Reihen wiederholt werden. Bezüglich der Redeweise bei den angewandten Aufgaben werde auf das bei der Addition Gesagte hingewiesen. «Um dieses zu berechnen, müssen wir die Zahl .. von der Zahl .. subtrahieren» u. s. w.

IV. Multiplicationsgebiet.

Vervielfachen mit Grundzahlen.

Kopfrechnen.

§ 22. An Aufgaben wie: «Wie viel ist $3 + 3$ oder 2×3, $6 + 6 + 6$ oder 3×6, $14 + 14 + 14 + 14$ oder 4×14 u. s. w.» erläutert man die Begriffe multiplicieren, Multiplicand, Multiplicator, Product, Factoren. Eine Zahl wiederholt nehmen, heißt multiplicieren. Die Zahl, welche wiederholt zu nehmen ist, heißt Multiplicand; die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal eine andere zu nehmen ist, Multiplicator; und die Zahl, welche man durchs Vervielfachen erhält, Product. Multiplicand und Multiplicator heißen auch die Factoren des Productes. Nun lasse man Beispiele, wie voranstehend angeführt sind, durchführen und stelle die Fragen: «Welche Zahl ist der Multiplicand, welche der Multiplicator, welche das Product? Nenne beide Factoren!»

§ 23. Auch hier sind noch die §§ 8 und 9 zu beherzigen. Nachstehend sollen die einzelnen Multiplicationsstufen fürs Vervielfachen mit Einern beim Kopfrechnen besprochen werden.

Bezüglich des Einmaleins braucht man wohl kein Wort mehr zu verlieren; dasselbe soll so lange geübt werden, dass jeder Schüler das Resultat momentan nach der gestellten Aufgabe angibt. Ebenso ist die Bedeutung der Übungen mit benannten Zahlen nicht nothwendig hervorzuheben, sie ergibt sich von selbst.

Nachstehend soll nur an Beispielen die Behandlung der einzelnen Stufen gezeigt werden.

Wie viel ist 3×20? Anfangs: 3×2 Z. = 6 Z. oder 60, $3 \times 20 = 60$. Später unmittelbar: $3 \times 20 = 60$.

Wie viel ist 2×300? Anfangs: 2×3 H. = 6 H. oder 600, $2 \times 300 = 600$. Später unmittelbar: $2 \times 300 = 600$.

Wie viel ist 5×74? $5 \times 70 = 350$, $5 \times 4 = 20$, $350 + 20 = 370$; $5 \times 74 = 370$. Die Schüler müssen mit dem Normalverfahren vertraut werden.

Wie viel ist 2×390? $2 \times 300 = 600$, $2 \times 90 = 180$, $600 + 180 = 780$; $2 \times 390 = 780$. Das Normalverfahren anzueignen.

Wie viel ist 7×137? $7 \times 100 = 700$, $7 \times 30 = 210$, $700 + 210 = 910$, $7 \times 7 = 49$, $910 + 49 = 959$; $7 \times 137 = 959$. Das Normalverfahren anzueignen.

Diese Übungen passen jedoch besser fürs nächste Schuljahr, weil bis dahin das Gedächtnis der Kinder erstarkt.

Die Bedeutung der Reihen ist schon genügend betont worden.

Die Additions- und Subtractionsreihen sind neben den Multiplicationsreihen in einemfort sowohl mündlich als schriftlich zu wiederholen; dadurch wiederholt sich der ganze Stoff lückenlos.

Bezüglich des angewandten Rechnens vergl. § 12. An dieser Stelle kommen schon Aufgaben vor, bei denen der Schluss von einer Mehrheit durch die Einheit auf eine andere Mehrheit zu machen ist.

Um die Brüche noch intensiver zur Auffassung zu bringen, werden dieselben an Strecken dargestellt und Brüche mit gleichen Zählern (vorläufig mit dem Zähler 1) oder mit gleichen Nennern ihrem Werte nach verglichen. Eine Erweiterung findet durch eine genauere Unterscheidung zwischen echten und unechten Brüchen und durch die Verwandlung gemischter Zahlen in unechte Brüche statt.

Schriftliches Rechnen.

§ 24. Die Bedeutung der Vorübungen ist aus dem Rechenbuche von selbst zu erkennen. Die Regel wird wieder an mehreren Beispielen abgeleitet, und zwar zuerst unter Leitung des Lehrers, dann aber möglichst selbständig von den Schülern. Das Verfahren soll an zwei Beispielen ersichtlich gemacht werden.

Erstes Beispiel. Es soll 324 mit 2 multipliciert werden.

a)		oder	b)	
	324			324
	324		×	2
	648			648

Um recht anschaulich zu sein und vom Bekannten auszugehen, wollen wir zunächst die Multiplication als eine Addition betrachten. Nach a) verfahren wir also: 4 E. und 4 E. sind 8 E. u. s. w., wie bekannt. Statt 4 E. und 4 E. können wir auch kürzer 2mal 4 E. sagen, ebenso statt 2 Z. und 2 Z. 2mal 2 Z., und statt 3 H. und 3 H. 2mal 3 H. Wir schreiben daher die Zahl 324 nur einmal und die Zahl 2 unter 324, wie in b), und sprechen: 2mal 4 E. sind 8 E. (unterschreiben der 8 E. unter die Einer), 2mal 2 Z. sind 4 Z. (unterschreiben der 4 Z. unter die Zehner), 2mal 3 H. sind 6 H. (unterschreiben der 6 H. unter die Hunderter).

Später kurz: 2mal 4 ist 8, 2mal 2 ist 4, 2mal 3 ist 6, wobei die erhaltenen Producte 8, 4, 6 unter die entsprechenden Stellen gesetzt werden.

Zweites Beispiel. Es soll 256 mit 3 multipliciert werden.

	256
×	3
	768

Die Zahl 256 oder 2 H. 5 Z. 6 E. sind 3mal zu nehmen. 3mal 6 E. sind 18 E. oder 1 Z. 8 E. 8 E. schreiben wir unter die Einer und 1 Z. zählen wir zu den Zehnern weiter. 3mal 5 Z. sind 15 Z., und 1 Z. sind 16 Z. oder 1 H. 6 Z. 6 Zehner schreiben wir

unter die Zehner und 1 H. wird weitergezählt zu den Hundertern. 3mal 2 H. sind 6 H., und 1 H. sind 7 H. 7 H. werden unter die Hunderter geschrieben.

Kurz: 3mal 6 ist 18 (8 untergesetzt), bleibt 1; 3mal 5 ist 15, und 1 ist 16 (6 untergesetzt), bleibt 1; 3mal 2 ist 6, und 1 ist 7 (7 untergesetzt).

Das schriftliche Rechnen nach der Regel soll für die Addition und Subtraction an Reihen wiederholt werden.

Bezüglich der Redeweise bei den angewandten Aufgaben werde auf das bei der Addition Gesagte hingewiesen. «Um dieses zu berechnen, müssen wir die Zahl .. mit der Zahl .. multiplicieren» u. s. w. So lange man von den Kindern den Schluss verlangt, sehe man strenge darauf, dass sie den Multiplicand mit dem Multiplicator nicht vertauschen.

Die Form bei zusammengesetzten Aufgaben sei eine übersichtliche. Aufgabe 1 des Rechenbuches z. B. lasse man so schreiben:

4 fl. 12 kr.	85 kr.	32 fl. 96 kr.
8	6	5 » 10 »
32 fl. 96 kr.	510 kr. oder 5 fl. 10 kr.	38 fl. 6 kr.

V. Divisionsgebiet.

Dividieren durch Grundzahlen.

Kopfrechnen.

§ 25. An Beispielen wie: «Wie oft ist 3 in 6 enthalten, wie viel ist der dritte Theil von 6; wie oft ist 4 in 48 enthalten, wie viel ist der vierte Theil von 48?» u. s. w. wird den Schülern zuerst beigebracht, dass man dasselbe Resultat bekommt, ob eine Zahl durch eine andere gemessen oder getheilt wird.

Eine Zahl durch eine andere messen oder theilen heißt dividieren. Die Zahl, welche zu messen oder zu theilen ist, heißt Dividend; die

Zahl, durch welche zu messen oder zu theilen ist, Divisor; und die Zahl, welche man durchs Messen oder Theilen bekommt, Quotient.

Nun lasse man an mehreren Beispielen das Messen und Theilen vornehmen und frage: «Welche Zahl ist der Dividend, welche der Divisor, welche der Quotient?

Beim Kopfrechnen soll jedoch das Messen und Theilen noch getrennt behandelt werden.

§ 26. Beherzige die §§ 8 und 9. Die Wichtigkeit des «Einsdurcheins» braucht nicht mehr betont und die Bedeutung der Übungen mit benannten Zahlen nicht mehr hervorgehoben zu werden.

Die Ausrechnung soll möglichst kurz sein, weil sie von den Schülern leichter übersehen wird. So soll man z. B. die Aufgabe 6 *dm* in 36 *m* so ausrechnen: «6 *dm* sind in 36 *dm* 6mal, also in 36 *m* 60mal enthalten», und nicht: «6 *dm* sind in 36 *dm* 6mal, in 36 *m* 10mal so oft, also 10mal 6, d. i. 60mal enthalten», indem man sich auf bereits Erkanntes stützt. Schließlich sollen die Schüler unmittelbar anzugeben wissen, dass 6 *dm* in 36 *m* 60mal enthalten sind. Diese Bemerkung gilt auch für spätere Fälle.

Fürs Messen und Theilen im Kopfe ist eine passende Zerlegung des Dividends von höchster Wichtigkeit. Manchesmal genügt es, denselben bloß in seine dekadischen Bestandtheile zu zerlegen, so wird z. B. 3 in 96 berechnet, indem man 96 zerlegt in 90 und 6, oder die Hälfte von 482 durch Zerlegung der Zahl 482 in 400 und 80 und 2. In anderen Fällen ist die Zerlegung nicht so einfach, deshalb wurden ins Rechenbuch zweckentsprechende Vorübungen aufgenommen, die geläufig eingeübt sein wollen, bevor man zu den Übungen übergeht, auf welche sie vorbereiten.

Messen im Kopfe.

§ 27. Besprechung der einzelnen Stufen. Wo es nicht nothwendig erscheint, eine besondere Bemerkung zu machen, wird die Behandlung an passenden Beispielen nur gezeigt.

Wie oft ist 2 in 140 enthalten? 2 ist in 14 7mal, in 140 70mal enthalten. Unmittelbar anzueignen.

Wie oft ist 6 in 548 enthalten? 6 ist in 540 90mal, in 8 1mal (2 bleibt), in 548 91mal enthalten (2 bleibt). Das Normalverfahren anzueignen.

Dem Messen reiner Zehner, bei welchem der Quotient zweiziffrig ist, gehen Zerlegeübungen* voraus. Die sollen fleißig geübt werden, damit die Hauptschwierigkeit dieses Messens beseitigt ist. Die Zerlegeübungen an den benannten Zahlen machen die mit unbenannten Zahlen noch klarer. Für die Anschaulichkeit wird noch dadurch gesorgt, dass zuerst das Messen durch 2, dann durch 3, jedes für sich, behandelt wird; an dieses Messen schließt sich das Messen durch 4, 5, 6, ... 9 an.

Wie oft ist 2 in 70 enthalten? $70 = 60 + 10$, 2 ist in 60 30mal, in 10 5mal, also in 70 35mal enthalten.

Wie oft ist 2 in 52 enthalten? $52 = 40 + 12$, 2 ist in 40 20mal, in 12 6mal, also in 52 26mal enthalten. Das Normalverfahren anzueignen.

Neben den Reihen fürs Messen sind die Additions-, Subtractions- und Multiplicationsreihen öfter zu wiederholen, und zwar sowohl mündlich als schriftlich.

Bei den Brüchen sollen die vorangehenden Übungen wiederholt werden. Eine Erweiterung wird durch das Resolvieren größerer Theile in kleinere vorgenommen, und zwar auf Grundlage der Anschauung.*

Für Brüche mit den Nennern 2, 3, 4, ... 10, 16, 32 bediene man sich zu diesem Zwecke der Strecken und für Brüche mit den Nennern 10, 100 und 1000 des Meterstabes.

Theilen im Kopfe.

§ 28. Es werde vor allem bemerkt, dass die Redeweisen «der dritte Theil» oder «ein Drittel» streng voneinander zu unterscheiden sind. So soll man z. B. «$\frac{1}{2}$ von 40 *mm*» immer als «die Hälfte (der zweite Theil) von 40 *mm*» oder «$\frac{1}{4}$ von 2 *m*» immer als «der

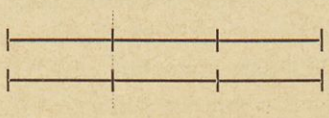
* Um das dritte Jahr zu entlasten, wären auch diese Übungen ins vierte Rechenbuch zu verlegen.

vierte Theil von 2 *m*», dagegen aber «$\frac{1}{5}$ *m*» immer als «ein Fünftel Meter» lesen.

Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 90? Der dritte Theil von 90 oder von 9 Z. sind 3 Z. oder 30, der dritte Theil von 90 ist 30. Unmittelbar anzueignen.

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 65? Die Hälfte von 60 ist 30, die Hälfte von 5 ist 2 (bleibt 1), die Hälfte von 65 ist 32 (bleibt 1).

Die Bruchform, wie sie sich durchs Theilen mehrerer Ganzen ergibt, soll durch Zeichnung veranschaulicht werden. Z. B. stellt man $\frac{1}{3}$ von $2 = \frac{2}{3}$ so dar, wie dies nachstehende Figur zeigt:



Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 45? $45 = 30 + 15$, der dritte Theil von 30 ist 10, der dritte Theil von 15 ist 5, also der dritte Theil von 45 ist 15.

Wie viel ist $\frac{1}{4}$ von 300? 300 ist 280 und 20 u. s. w.*

$\frac{1}{3}$ von 56 =; $56 = 30 + 26$, der dritte Theil von 30 ist 10, der dritte Theil von 26 ist 8 (2), der dritte Theil von $2 = \frac{2}{3}$, also ist der dritte Theil von $56 = 18\frac{2}{3}$. — Das Gedächtnis ist anfangs durch Aufschreiben der Resultate zu unterstützen.

$\frac{1}{4}$ von 267 =; $267 = 240 + 27$ u. s. w.*

Alle angeführten Übungen werden zunächst im Sinne des Theilens ausgeführt, später aber auch im Sinne des Messens, damit die Schüler ganz klar erkennen, dass das Resultat dasselbe ist, ob man die Division im Sinne des Messens oder Theilens ausführt, bevor sie zum schriftlichen Rechnen nach der Regel übergehen. Die Fragen nach dem Dividende, Divisor und Quotienten haben den Zweck, den Schülern diese Begriffe möglichst leicht und verständlich einzuprägen.

---

* Ins vierte Rechenbuch zu verschieben

$\frac{3}{4}$ von 428 = oder der vierte Theil von 428 ist dreimal zu nehmen; der vierte Theil von 400 = 100, der vierte Theil von 28 ist 7, also der vierte Theil von 428 = 107; $3 \times 100 = 300$, $3 \times 7 = 21$ also $3 \times 107 = 321$; $\frac{3}{4}$ von 428 = 321.

Die Reihen fürs Messen dienen zugleich als Reihen fürs Theilen. Bezüglich der Wiederholung der Reihen gilt das, was schon öfters gesagt wurde. — Bezüglich des angewandten Rechnens und der Brüche ist jede Bemerkung zu dem bereits Gesagten überflüssig.

Schriftliches Rechnen.

§ 29. Die Schüler haben im Vorangehenden erkannt, dass man dasselbe Resultat bekommt, ob man die Division im Sinne des Messens oder im Sinne des Theilens ausführt. Dies kann man ihnen noch an angewandten Beispielen genauer erläutern. Z. B.:

1.) 1 *hl* Weizen kostet 6 fl.; wie viel Hektoliter erhält man für 18 fl.? — Man erhält so viele Hektoliter, als 6 fl. in 18 fl. enthalten sind, also 3 *hl*.

2.) 6 *hl* Weizen kosten 18 fl.; wie viel kostet 1 *hl?* — So kostet 1 *hl* den sechsten Theil von 18 fl., das sind 3 fl.

In beiden Fällen sind Dividend und Divisor gleich, aber auch die Quotienten gleich.

Da also dieselbe Zahl herauskommt, ob man die Division im Sinne des Messens oder im Sinne des Theilens vornimmt, so wollen wir an dieser Stelle fürs schriftliche Rechnen nach der Regel den leichteren Weg wählen, wir wollen nämlich die Division im Sinne des Theilens durchführen.

Das Verfahren soll an dieser Stelle an unbenannten Zahlen genauer gezeigt werden. Die Bedeutung der Division benannter Zahl ist aus dem Rechenbuche direct ersichtlich.

Division ohne Übergang in eine andere Ordnung.

Es sei 86 durch 2 zu dividieren.

Mündlich. Die Hälfte von 80 ist 40, die Hälfte von 6 ist 3, die Hälfte von 86 ist 43.

Schriftlich. Diese Aufgabe schreiben wir so auf, dass wir 86 links und 2 rechts setzen, zwischen beide aber zwei Punkte, die sogenannten Divisionspunkte.

a) Wir haben den zweiten Theil von 86 oder von 8 Z und 6 E. zu nehmen:

```
 Z. E.          Z. E.
 8 6 : 2 =      4 3
 8 .
 ---
   6
   6
 ---
```

Der zweite Theil von 8 Z. sind 4 Z., die 4 Z. schreiben wir rechts vom Gleichheitszeichen an. Nun wollen wir untersuchen, ob der zweite Theil von 8 Z genau 4 Z. sind; 2mal 4 Z. sind 8 Z, 8 Z. von 8 Z. bleibt kein Zehner. Ferner haben wir noch den zweiten Theil von 6 E. zu suchen, die 6 E. setzen wir hinunter. Der zweite Theil von 6 E. sind 3 E., die 3 E. werden zu den 4 Z. geschrieben. Ob der zweite Theil von 6 E. genau 3 E. sind, können wir uns wieder überzeugen. 2mal 3 E. sind 6 E., 6 E. von 6 E. bleibt nichts. Der zweite Theil von 86 sind also 4 Z. 3 E., d. i. 43.

b) Das Verfahren kann noch kürzer durchgeführt werden.

```
 8 6 : 2 = 4 3
 8 .
 ---
   6
   6
 ---
```

Der zweite Theil von 8 ist 4 (4 rechts vom Gleichheitszeichen geschrieben), 2mal 4 ist 8, 8 von 8 bleibt nichts; 6 herab. Der zweite Theil von 6 ist 3 (3 zu 4 geschrieben), 2mal 3 ist 6, 6 von 6 bleibt nichts.

Das gleiche Verfahren gilt auch beim Dividieren einer dreiziffrigen Zahl. Z. B.:

```
 9 3 6 : 3 = 3 1 2
 9 . .
 -----
   3 .
   3 .
 -----
     6
     6
 -----
```

Division mit Übergang in eine andere Ordnung.

Das Verfahren soll gleich an einer dreiziffrigen Zahl gezeigt werden. Es sei 954 durch 8 zu dividieren.

Wir haben den achten Theil von 954 oder von 9 H. und 5 Z. und 4 E. zu nehmen.

```
H. Z. E.          H. Z. E.
954 : 8 =         119 2/8
8 . .
-----
15 .
 8 .
-----
 74
 72
-----
  2
```

a) Der achte Theil von 9 H. ist 1 H., 1 H. schreiben wir rechts vom Gleichheitszeichen an. Nun wollen wir untersuchen, ob der achte Theil von 9 H. genau 1 H. ist; 8mal 1 H. sind 8 H., 8 H. von 9 H. bleibt 1 H. 1 H. sind 10 Z., und 5 Z. sind 15 Z., es wird also 5 zu 1 herabgesetzt. Der achte Theil von 15 Z. ist 1 Z., 1 Z. wird rechts zu 1 H. geschrieben. 8mal 1 Z. sind 8 Z., 8 Z. von 15 Z. bleiben 7 Z. 7 Z. sind 70 E., und 4 E. sind 74 E., es wird also 4 zu 7 herabgesetzt. Der achte Theil von 74 E. sind 9 E, 9 E. werden rechts zu den Hundertern und Zehnern geschrieben. 8mal 9 E. sind 72 E., 72 E. von 74 E. bleiben 2 E. Der achte Theil von 2 sind $\frac{2}{8}$, die man zu den Hundertern, Zehnern und Einern dazusetzt.

b) Kürzeres Verfahren.

Der achte Theil von 9 ist 1 (1 rechts vom Gleichheitszeichen geschrieben), 8mal 1 ist 8, 8 von 9 bleibt 1; 5 herab. Der achte Theil von 15 ist 1 (1 zu 1 geschrieben), 8mal 1 ist 8, 8 von 15 bleibt 7; 4 herab. Der achte Theil von 74 ist 9 (9 zu 11 geschrieben), 9mal 8 ist 72, 72 von 74 bleibt 2. Der achte Theil von 2 ist $\frac{2}{8}$ ($\frac{2}{8}$ zu 119 geschrieben).

Beim angewandten Rechnen kommen in der ersten Gruppe nur Divisionsaufgaben vor, und zwar wechseln Aufgaben, bei denen

man auf ein Theilen, mit solchen, bei denen man aufs Enthaltensein zu schließen hat, ab. Die Redeweise soll an den ersten beiden Beispielen des Rechenbuches erläutert werden.

«So erhält jedes Dorf den fünften Theil von 835 Mann; wir haben also 835 durch 5 zu dividieren.»

«So kann man so viele Schreibhefte machen, als 6 Bg. in 732 Bg. enthalten sind; wir haben also 732 durch 6 zu dividieren.»

Später, nachdem den Schülern der Schluss geläufig ist, sollen sie einfach so reden: «Um dies zu berechnen, muss man 835 durch 5 dividieren» u. s. w.

In der zweiten Gruppe kommen zusammengesetzte Aufgaben vor, auf eine übersichtliche Form lege man viel Gewicht. Bezüglich der Redeweise vergleiche die Bemerkung in § 17.

Die nächsten Gruppen führen den Geldkreis, insoferne er schon an Aufgaben behandelt wurde, im Zusammenhange vor. Schließlich wird die Schlussrechnung an Preisaufgaben wiederholt, und zwar der Schluss von der Einheit auf eine Mehrheit, von einer Mehrheit auf die Einheit und von einer Mehrheit durch die Einheit auf eine andere Mehrheit. Das reine Rechnen soll an Reihen sowohl mündlich als schriftlich von Stunde zu Stunde wiederholt werden.

Raum 1 bis 1 Million.

I. Auffassung der Zahlen.

§ 30. Vor allem nehme man eine übersichtliche Wiederholung durch Zählübungen, durch Auflösung und Zusammenfassung der Einheiten, durch Lesen und Schreiben der Zahlen im Raume 1 bis 1000 vor, woran man dann die Erweiterung anschließt. Die Erweiterung wird jedoch zuerst bis 10.000, dann bis 100.000 und schließlich bis zu 1 Million vorgenommen, wie dies aus dem Rechenbuche ersichtlich ist.

Auch in diesen Räumen sind Zählübungen vorzunehmen. Gezählt werden die höchsten bekannten Einheiten bis zur nächst höheren Einheit, z. B. im Raume 1 bis 10.000 die Tausender bis zu 1 Zehntausender, gezählt werden die nächst niederen Einheiten, z. B. im angeführten Raume die Hunderter. Das Zählen mit Einheiten, die um zwei oder mehrere Ordnungen niederer sind, wird wegen Zeitersparnis nur innerhalb gewisser, und zwar kleinerer Grenzen vorgenommen; dabei sind insbesondere die Übergänge in neue Hunderter, in neue Tausender u. s. w. zu berücksichtigen. Der weitere Vorgang ist aus dem Rechenbuche genügend ersichtlich.

Das Verfahren bei der Auflösung und Zusammenfassung der Einheiten, beim Lesen und Schreiben der Zahlen ergibt sich auch aus dem Rechenbuche und aus § 2.

II. Additionsgebiet.

§ 31. Der Lehrer wiederhole die Übungen des Additionsgebietes im Raume 1 bis 1000, und zwar zunächst die Kopf- und dann die schriftlichen Übungen, erweitere die Maße durch Myriameter (*μm*) und Ballen* und bespreche wieder die Begriffe «addieren», «Summanden» und «Summe». Daran schließe er die Erweiterung der schriftlichen Addition bis zu 1 Million an. Da das Verfahren das gleiche ist wie im Raume 1 bis 1000, ist diesbezüglich eine Bemerkung überflüssig.

III. Subtractionsgebiet.

§ 32. Die Übungen des Subtractionsgebietes im Raume 1 bis 1000 sollen wiederholt, die Begriffe «subtrahieren», «Minuend», «Subtrahend» und «Rest» oder «Unterschied» (Differenz) wieder besprochen werden.

---

* 1 *μm* = 10.000 *m* = 10 *km*; 1 Ballen = 10.000 Bg. = 10 Rs.

Um die vorangehenden Operationsgebiete bei den neu auftretenden auch noch zu wiederholen, bediene man sich der Reihen. Dies gilt für später auch.

An die schriftlichen Übungen im Raume 1 bis 1000 schließt sich die Erweiterung solcher Übungen bis zu 1 Million an. Die Subtractionsregel werde auch hier nur im Sinne des Wegzählens abgeleitet. Das Verfahren ist aus § 21 im Raume 1 bis 1000 ersichtlich.

IV. Multiplicationsgebiet.

§ 33. Die Wiederholungen sind auf diesem Gebiete im selben Sinne vorzunehmen, wie auf dem Additions- und Subtractionsgebiete. Auch die Begriffe «multiplicieren», «Multiplicand», «Multiplicator», «Product» und «Factoren» sind wieder zu erläutern. An die schriftlichen Übungen im Raume 1 bis 1000 schließe sich die Erweiterung derselben bis zu 1 Million an.

Im Raume 1 bis 1000 wurde jedoch die Multiplication nur mit Einern vorgenommen; die Multiplication mit Zehnern und mit gemischten Zahlen, die man im Raume 1 bis 1000 vorzunehmen pflegt, wurde diesem Raume vorbehalten.

Die Multiplication mit Zehnern ist sehr verwandt der Multiplication mit Hundertern, Tausendern u. s. w.; daher empfiehlt es sich, diese Multiplicationen nebeneinander zu behandeln.

Die Multiplication mit gemischten (mehrziffrigen) Zahlen hat der Verfasser wohl nur aus dem Grunde ins dritte Rechenbuch aufgenommen, weil dies andere Verfasser auch thun und es vielleicht manchem Lehrer erwünscht ist, sie an dieser Stelle vornehmen zu können. Nach der Überzeugung des Verfassers soll jedoch erst die Multiplication mit Zehnern, Hundertern u. s. w. von den Schülern geistig verarbeitet werden, bevor sie in die Multiplication mit gemischten Zahlen eingeführt werden. Diese Bemerkung gilt auch für die Division durch gemischte Zahlen.

Multiplication mit reinen Zehnern, Hundertern u. s. w.

§ 34. Der Multiplication mit reinen Zehnern, Hundertern und Tausendern überhaupt soll die Multiplication mit 10, 100 und 1000 vorangehen. Den schriftlichen Übungen gehen mündliche voran. Die Behandlung letzterer ist aus dem Rechenbuche ersichtlich. Die Ableitung der Regel soll an nachstehenden Beispielen ersichtlich gemacht werden.

1.) Es sei 43 mit 10 zu multiplicieren.

Im Kopfe. 10mal 40 ist 400, 10mal 3 ist 30, 10mal 43 ist 430. Aus diesem und mehreren anderen Fällen, welche auf die Tafel geschrieben werden, ergibt sich die Regel fürs schriftliche Rechnen.

«Eine Zahl wird mit 10 multipliciert, wenn man ihr rechts eine Null anhängt.» Daran schließen sich dann mehrere Übungsbeispiele. Dabei bediene man sich der Form wie

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 10 \\ \hline 430 \end{array}$$

2.) 52 ist mit 100 zu multiplicieren.

Im Kopfe. 100mal 50 ist 5000, 100mal 2 ist 200, 100mal 52 ist 5200. Aus diesem und mehreren anderen Fällen, welche auf die Tafel geschrieben werden, ergibt sich die Regel fürs schriftliche Multiplicieren mit 100.

«Eine Zahl wird mit 100 multipliciert, wenn man ihr rechts zwei Nullen anhängt.» — Übungsbeispiele. — Aus nachstehendem Beispiele ist die einzuhaltende Form ersichtlich:

$$\begin{array}{r} 52 \\ 100 \\ \hline 5200 \end{array}$$

Wie man die Regel: «Eine Zahl wird mit 1000 multipliciert, wenn man ihr rechts drei Nullen anhängt,» ableitet, ist aus dem Gesagten ersichtlich. Auch in diesem Falle übe man die Schüler, nachdem sie die Regel aufgefaßt haben, im geläufigen mechanischen Rechnen ein und vergesse auf die einzuhaltende Form nicht.

§ 35. Bevor man zur schriftlichen Multiplication mit reinen Zehnern, Hundertern und Tausendern übergeht, sollen Übungen im Kopfe vorgenommen werden; wie dies zu geschehen hat, ist aus dem Rechenbuche ersichtlich. Es empfehlen sich jedoch noch Vorübungen wie: Das 6fache von 5 ist 30; das 2fache von 5 ist 10; das 3fache von 10 ist 30; das 6fache von 5 bekommt man auch, wenn man das 2fache von 5 3mal nimmt. — Noch mehrere solche einfache Beispiele. Daran schließe man Fragen an wie: Wie bekommt man noch das 20=, 30=, 40=, . . . 90fache; das 200=, 300=, . . . 900fache; das 2000=, 3000=, . . . 9000fache?

Im Nachstehenden soll an Beispielen die Ableitung der Regel für die Multiplication mit reinen Zehnern, Hundertern und Tausendern gezeigt werden. Es sei für alle Fälle im vorhinein bemerkt, dass die Schüler, nachdem sie die Regel aufgefasst haben, im geläufigen mechanischen Rechnen nach der erläuterten Regel einzuüben sind.

1.) Multipliciere 37 mit 20.

Im Kopfe. 37 nimmt man 20mal, wenn man das 2fache von 37 10mal nimmt. 2mal 30 ist 60, 2mal 7 ist 14, 60 und 14 ist 74, 2mal 37 ist 74, 10mal 74 ist 740. Aus diesem Beispiele ergibt sich, dass man beim schriftlichen Multiplicieren die Zahl 37 nur 2mal zu nehmen und dazu eine Null zu setzen braucht. Also:

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 20 \\ \hline 740 \end{array}$$

2mal 7 ist 14, bleibt 1; 2mal 3 ist 6, und 1 ist 7; an 74 eine Null an. — Die Null kann man auch zuerst schreiben und dann mit 2 multiplicieren. Ähnlich wird die Regel an mehreren anderen Beispielen erkannt. — Übungsbeispiele.

2.) Multipliciere 42 mit 300.

Man lasse zuerst die Rechnung im Kopfe ausführen. Daraus erkennt man wieder, dass man beim schriftlichen Multiplicieren die

Zahl 42 nur 3mal zu nehmen und dazu zwei Nullen zu setzen braucht. Also:

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 300 \\ \hline 12600 \end{array}$$

3mal 2 ist 6; 3mal 4 ist 12; an 126 zwei Nullen an. — Übungsbeispiele.

3.) Multipliciere 32 mit 4000. — Analog mit 1.) und 2.).

Die Multiplication mit gemischten Zahlen wird im unbegrenzten Zahlenraume besprochen.

V. Divisionsgebiet.

§ 36. Die Wiederholungen sind auf diesem Gebiete im selben Sinne vorzunehmen, wie auf den vorangehenden Operationsgebieten. Auch die Begriffe «dividieren», «Dividend», «Divisor» und «Quotient» sind wieder zu erläutern. An die schriftlichen Übungen im Raume 1 bis 1000 schließe sich die Erweiterung derselben bis zu 1 Million an. Bezüglich dieser Erweiterung ist Ähnliches zu bemerken, wie bei der Multiplication. (Vergl. § 33.) Die Division durch gemischte Zahlen dürfte besser dem unbegrenzten Zahlenraume überlassen werden.

Division durch reine Zehner, Hunderter u. s. w.

§ 37. Der Division durch reine Zehner, Hunderter und Tausender überhaupt soll die Division durch 10, 100, 1000 vorangehen, und zwar werden zuerst mündliche und dann schriftliche Übungen vorgenommen. Die Behandlung letzterer ist aus dem Rechenbuche ersichtlich. Die Ableitung der Regel soll an nachstehenden Beispielen gezeigt werden.

1. a) Es sei 730 durch 10 zu dividieren.

10 ist in 730 so oft enthalten, als 1 Z. in 73 Z. oder 1 in 73, d. i. 73mal. — Regel: Man braucht nur im Dividend und Divisor die Nullen zu streichen, um den Quotienten zu bekommen.

b) Es sei 655 durch 10 zu dividieren.

655 ist 650 und 5; 10 in 650 oder 1 in 65 ist 65mal enthalten, 5 ist der Rest. — Regel: Um den Quotienten zu bekommen, braucht man nur im Dividend die Einer abzuschneiden; die abgeschnittene

Ziffer im Dividend ist der Rest. — Übungsbeispiele. Dabei bediene man sich der Form wie:

$$\frac{65{,}5}{5 \text{ Rest.}} : 1{,}0 = 65$$

2. a) Es sei 6500 durch 100 zu dividieren.

100 ist in 6500 so oft enthalten, als 1 H. in 65 H. oder 1 in 65, d. i. 65mal. Man braucht also nur im Dividend die zwei Nullen zu streichen, um den Quotienten zu bekommen.

b) Es sei 7432 durch 100 zu dividieren.

7432 ist gleich 7400 und 32; 100 ist in 7400 47mal enthalten, 32 bleibt als Rest. — Regel: Um den Quotienten zu bekommen, braucht man nur im Dividend die Ziffern an den zwei niedersten Stellen abzuschneiden. Die abgeschnittenen Ziffern stellen den Rest vor. — Übungsbeispiele. Dabei bediene man sich der Form wie:

$$\frac{74{,}32}{32 \text{ Rest.}} : 1{,}00 = 74$$

3.) Wie man die Regel: «Eine Zahl wird durch 1000 dividiert, wenn man im Dividend die Ziffern an den drei niedersten Stellen abschneidet und diese als Rest nimmt,» ableitet, ist aus dem Gesagten ersichtlich. Mechanische Einübung hat in allen drei Fällen auf die Auffassung der Regel zu folgen.

4.) Aus den Übungen im Kopfe (vergl. Rechenbuch S. 94) folgt folgende Regel: «Durch reine Zehner (Hunderter, Tausender) wird dividiert, wenn man im Divisor die Null (zwei, drei Nullen) und im Dividend eine Stelle (zwei, drei niederste Stellen) abschneidet und dann dividiert; die abgeschnittenen Ziffern werden zu der gebliebenen Zahl herabgesetzt, und so bekommt man den Rest.»

Z. B.: $643{,}2 : 2{,}0 = 321$

$$\begin{array}{l} \underline{6} \\ =4 \\ \underline{4} \\ =3 \\ \underline{2} \\ 12 \text{ Rest.} \end{array}$$

Übungsbeispiele.

Anleitung
zum Gebrauche des vierten Rechenbuches.

Unbegrenzter Zahlenraum.

A. Gebiet der ganzen Zahlen.

I. Auffassung der Zahlen.

Decimale Schreibweise mehrnamiger Zahlen unter Berücksichtigung der Verwandlungszahl a) 10, b) 100, c) 1000.

§ 38. Das Bekannte über Münzen, Maße, Gewichte u. s. w. wird im Zusammenhange wiederholt. Daran schließt sich die Einübung in der decimalen Schreibweise und umgekehrt die Einübung im Lesen decimal geschriebener Zahlen. Dadurch wird nicht nur das dekadische Zahlensystem anschaulicher, sondern es wird auch auf Decimalbrüche vorbereitet. Die decimale Schreibweise soll an einem Beispiele erläutert werden.

24 fl. 56 kr. kann man auch schreiben: «24 fl. 56», indem man die Benennung «kr.» ausläſst, wobei man unzweideutig weiß, daſs neben 24 fl. auch 56 kr. sind.

Man könnte sogar den Namen «fl.» stellen wie in «24 56 fl.», was jedoch zur Leseweise «2456 fl.» führen könnte. Dem kann man wieder vorbeugen, wenn man zwischen 24 und 56 einen Punkt macht, also schreibt: «24·56 fl.»

Aus dem Rechenbuche ist ersichtlich, daſs für die decimale Schreibweise drei Stufen unterschieden werden, je nachdem die Verwandlungszahl 10, 100 oder 1000 ist. Das Verfahren ist jedoch in allen drei Fällen ähnlich. Ein besonderes Augenmerk richte man auf die speciellen

Fälle, in denen eine oder auch zwei Nullen einzuschalten sind, sowie auf den Fall, dass von der höheren Benennung keine Einheiten vorhanden sind. Z. B.:

5 fl. 8 kr. = 5 fl. 08 = 5 08 fl. = 5·08 fl.
64 kr. = 0 fl. 64 = 0 64 fl. = 0·64 fl.

Nachdem den Schülern diese Schreibweise zum Verständnis gebracht wurde, sollen sie im directen decimalen Anschreiben eingeübt werden. Z. B.:

8 fl. 32 kr. = 8·32 fl.
4 fl. 6 kr. = 4·06 fl.

Schließlich sollen die Schüler decimal geschriebene Zahlen auch geläufig lesen können. Z. B.: 6·48 fl. = 6 fl. 48 kr.

Auflösung und Zusammenfassung der Einheiten. Lesen und Schreiben der Zahlen.

§ 39. Diesbezüglich verweisen wir zunächst auf den § 2. Um jedoch die Schüler im Lesen und Schreiben der Zahlen einzuüben, hat man denselben die Zerlegung der Zahlen in Millionen, Tausender und Einer gehörig beizubringen. Insbesondere sind jene Fälle auch zu berücksichtigen, in welchen eine Art oder auch mehrere Arten der Einheiten in der Zahl nicht vorkommen; der Schüler muss wissen, dass beim Schreiben fehlende Stellen durch die Null zu besetzen sind. Zu diesem Zwecke ist die Benützung der aus dem Rechenbuche ersichtlichen Tabelle sehr empfehlenswert. Das Weitere ergibt sich aus dem Rechenbuche.

II. Additionsgebiet.

Kopfrechnen.

§ 40. Auch auf dieser Stufe erscheint das Kopfrechnen vom schriftlichen Rechnen getrennt. Damit ist jedoch nicht gesagt, dass die ganze zusammenhängende Partie des Kopfrechnens zu erledigen ist, bevor man zum darauf folgenden schriftlichen Rechnen übergeht; es kann der Lehrer

nur bequemer den Stoff derartig eintheilen, dass er im Anfange der Stunde die Schüler im Kopfe und daraufhin schriftlich rechnen lässt.

Von größter Bedeutung ist die Wiederholung des bereits Bekannten, damit es nicht in Vergessenheit geräth und zur vollsten Geläufigkeit eingeübt wird. Im Additionsgebiete sowie in jedem anderen Gebiete wiederholen sich daher Übungen der anderen Operationen, es wiederholen sich die Übungen über die Auffassung der Brüche, beim angewandten Rechnen Aufgaben mit verschiedenen Operationsschlüssen in keiner vom Schüler zu errathenden Reihenfolge. Aufgaben über Einnahme und Ausgabe, Gewinn, Capital und Zins, Preisrechnungen kommen wiederholt vor, um den Schüler mit diesen Gebieten vertraut zu machen.

Schriftliches Rechnen.

§ 41. Bevor man mit mehrnamigen Zahlen zu rechnen beginnt, wird das Bekannte über Münzen, Maße und Gewichte systematisch wiederholt. Vergl. § 20. Zur Veranschaulichung der Maße bediene man sich einer passenden Wandtafel. Daran schließe man eine Erweiterung durch Flächenmaße an.

Es wird auf die Tafel ein Quadrat gezeichnet, dessen Seite 1 *m* lang ist. Ein solches Quadrat heißt ein «Quadratmeter» (m^2) und wird als Maß für Flächen benützt. Man hat noch kleinere Flächenmaße, um kleinere Flächen messen zu können. Nun zeichnet man auf die Tafel ein Quadrat, dessen Seite ein 1 *dm*, und dann ein Quadrat, dessen Seite ein 1 *cm* lang ist; das erstere Quadrat heißt ein «Quadratdecimeter» (dm^2), das zweite ein «Quadratcentimeter» (cm^2). Ein Quadrat, dessen Seite 1 *mm* lang ist, heißt ein «Quadratmillimeter» (mm^2).

Untersuchen wir nun, wie oft sich ein Quadratdecimeter auf ein Quadratmeter auftragen lässt. Längs der unteren Seite (Grundlinie) lassen sich auf das Quadratmeter 10 Quadratdecimeter auftragen. (Wird gezeichnet.) Da aber auch die linke Seite (die Höhe) 10 *dm* lang ist, so können wir 10 solche Streifen zu 10 Quadratdecimeter auftragen, also 10 mal 10, d. i. 100 Quadratdecimeter. (Wird auch gezeichnet.) $1\ m^2 = 100\ dm^2$.

Auf die gleiche Art wird gezeigt, dass 1 dm^2 = 100 cm^2.

Durch Schlüsse folgert man ferner, dass 1 cm^2 = 100 mm^2.

Fürs Rechnen mit mehrnamigen Zahlen wird von nun an auch die decimale Schreibweise gebraucht, wodurch die Schüler unbemerkt ins Wesen der Decimalbrüche eingeführt werden. Man liest z. B.: «8·5 *m*, 26·38 fl., 14·162 *t*,» «8 *m* 5 *dm*, 26 fl. 38 kr., 14 *t* 162 *kg*». Erläutert man aber den Schülern, dass man statt «5 *dm*, 38 kr., 162 *kg*» auch «$\frac{5}{10}$ *m*, $\frac{38}{100}$ fl., $\frac{162}{1000}$ *kg*» lesen kann, so stehen schon vor ihrem geistigen Blicke die Decimalbrüche in größter Klarheit. Später wird man für «8·52 *m*, 7·326 *m*» u. s. w. neben den Leseweisen «8 *m* 52 *cm*, 7 *m* 326 *mm*, 8 *m* 5 *dm* 2 *cm*, 7 *m* 3 *dm* 2 *cm* 6 *mm*» die Leseweisen «$8\frac{52}{100}$ *m*, $7\frac{326}{1000}$ *m*, 8 *m* + $\frac{5}{10}$ *m* + $\frac{2}{100}$ *m*, 7 *m* + $\frac{3}{10}$ *m* + $\frac{2}{100}$ *m* + $\frac{6}{1000}$ *m*» gebrauchen, um jede Schwierigkeit für die Auffassung der Decimalbrüche vollends zu beseitigen.

Man dictiere auch den Schülern Aufgaben mit mehrnamigen Zahlen, die sie allsogleich decimal aufschreiben sollen.

§ 42. An einem Beispiele soll nun die Addition mehrnamiger Zahlen für die decimale Schreibweise erläutert werden:

46 Lg. 3 Bg.	=	46·3 Lg.
8 » 2 »	=	8·2 »
27 » 6 »	=	27·6 »
12 » 8 »	=	12·8 »
94 Lg. 9 Bg.	=	94·9 Lg.

Man spricht bei jeder Schreibweise:*

«8 Bg. und 6 Bg. sind 14 Bg., und 2 Bg. sind 16 Bg., und 3 Bg. sind 19 Bg.; 19 Bg. sind 1 Lg. und 9 Bg.; 9 Bg. werden unter die Reihe der Bogen angeschrieben und 1 Lg. wird weitergezählt (bei der ersten Schreibweise setzt man die Benennung «Bg.» zu 9 dazu, bei der zweiten Schreibweise wird ein Punkt vor 9 gesetzt und nach der Ausführung der Addition die Benennung «Lg.» dazugeschrieben); 1 Lg. und 2 Lg. sind 3 Lg., und 7 Lg. sind 10 Lg. u. s. w.»

* Vergl. die Ausführung nach Hentschel im theoretischen Theile S. 78.

Bei der decimalen Schreibweise wird man schließlich ganz kurz verfahren:

«8 und 6 ist 14, und 2 ist 16, und 3 ist 19 (9 wird angeschrieben, vor 9 ein Punkt gemacht und 1 weitergezählt); 1 und 2 ist 3, und 7 ist 10 u. s. w.»

Wie man noch kürzer zusammenzählt, vergl. § 17.

An das Rechnen mit benannten Zahlen schließen sich Berechnungen des Umfanges der Dreiecke und Vierecke an.

§ 43. Für die Addition unbenannter Zahlen wird die Regel an mehreren Beispielen abgeleitet. Das Verfahren ist jedoch dasselbe, wie für den Raum 1 bis 1000 und 1 bis 1 Million; deshalb wird hier nur auf den § 17 hingewiesen, ohne das Verfahren an einem besonderen Beispiele zu erläutern. Diese Bemerkung gilt für den Lehrer; für die Schüler ist es jedoch umso besser, je öfter sich derartige Ableitungen der Regeln wiederholen. In diesem Raume nimmt man zu diesem Zwecke neben Beispielen mit kleineren Zahlen noch Beispiele mit größeren Zahlen.

An die Ableitung der Regel schließen sich selbstverständlich Übungen an. Zeitweise lasse man die Addition von unten nach oben und dann von oben nach unten ausführen. Erhält man in beiden Fällen dieselbe Summe, so kann man diese als richtig ansehen, weil wegen der veränderten Reihenfolge nicht leicht in beiden Fällen derselbe Fehler möglich ist. Ein solches Verfahren nennt man die Probe.

III. Subtractionsgebiet.

Kopfrechnen.

§ 44. Auch für dieses Gebiet gelten die Bemerkungen in § 40. Die im Additionsgebiete vorkommenden Reihen- und Bruchübungen sind auch in diesem Gebiete vorzunehmen, die Preisrechnungen werden wiederholt und durch den Schluss von einem Maß auf ein Vielfaches und

umgekehrt erweitert. Die Zeitrechnungen kommen zum Abschlusse, man übersehe jedoch nicht, dass sich bei denselben das Kopfrechnen vom schriftlichen Rechnen unterscheidet.

Schriftliches Rechnen.

§ 45. Vor dem Rechnen mit mehrnamigen Zahlen wird das Bekannte über Münzen, Maße und Gewichte systematisch wiederholt. Vergl. § 41. Die Flächenmaße werden durch Ar (*a*) und Hektar (*ha*) erweitert, welche durch Abstecken entsprechender Quadrate im Freien den Schülern zur Anschauung gebracht werden sollen. Die Seite eines Ar ist 10 *m*, die eines Hektar 100 *m* lang. Durch ähnliche Schlüsse, wie sie in § 41 für das Verhältnis zwischen Quadratmeter und Quadratdecimeter gemacht wurden, erkennt man, dass $1\ a = 100\ m^2$, $1\ ha = 100\ a = 10.000\ m^2$ ist.

Bezüglich des Rechnens mit mehrnamigen Zahlen gilt analog dasselbe, was schon in § 41 und § 42 gesagt wurde. Man rechne jedoch ja nicht so, als ob man mit Decimalbrüchen zu thun hätte; dies gilt auch für die angewandten Aufgaben, in denen mehrnamige Zahlen mit decimaler Schreibweise vorkommen. — Erläuterung der $\frac{}{10000}$ am Myriameter.

Übungen im Lesen decimaler Zahlen als mehrnamige oder als einnamige mit Bruchtheilen der oberen Benennung und umgekehrt im Schreiben mehrnamiger Zahlen in decimaler Form sollen wiederholt gepflegt werden.

Hat man z. B.

$$\begin{array}{rcl} 9\ dm\ \overset{14}{4}\ cm & = & 9{\cdot}4\ dm \\ -\ 3\ \text{»}\ 8\ \text{»} & = & 3{\cdot}8\ \text{»} \\ \hline 5\ dm\ 6\ cm & = & 5{\cdot}6\ dm \end{array}$$

zu berechnen, verfährt man folgendermaßen:*

«8 *cm* kann man von 4 *cm* nicht wegnehmen, man muss 1 *dm* von 9 *dm* borgen (Borgepunkt). 1 *dm* hat 10 *cm*, 10 *cm* und 4 *cm* sind 14 *cm*. 8 *cm* von 14 *cm* bleiben 6 *cm*. 3 *dm* von 8 *dm* bleiben 5 *dm*.» Ähnlich spricht man anfangs bei der decimalen Schreibweise.

* Vergl. die Ausführung nach Hentschel im theoretischen Theile S. 78.

Bei dieser wird man jedoch schließlich ganz kurz verfahren: «8 von 4 kann man nicht, muss man borgen; 8 von 14 bleibt 6 (6 wird angeschrieben, vor 6 ein Punkt gemacht); 3 von 8 bleibt 5 (5 wird angeschrieben und rechts vom Resultate die Benennung «*dm*» hinzugesetzt).»

§ 46. Die Subtraction kann auf zweierlei Art ausgeführt werden, entweder im Sinne des Wegzählens oder im Sinne des Zuzählens. Wie man die Regel für die Subtraction im Sinne des Wegzählens ableitet, ist aus dem «1 bis 1000» und «1 bis 1 Million» schon bekannt. Trotzdem soll diese Ableitung mit genauer Unterscheidung beider Stufen «ohne und mit Borgen» wiederholt und auch an Zahlen, die größer als 1 Million sind, vorgenommen werden. Nachdem diese erste Art der Subtraction an mehreren Beispielen geübt wurde, übergehe man zur zweiten Art.

Beim Subtrahieren mittels Zuzählens sind auch zwei Fälle zu unterscheiden, und zwar sind a) alle gleichstelligen Ziffern des Minuends größer als die des Subtrahends, b) es sind im Minuend Ziffern, die kleiner sind als die gleichstelligen des Subtrahends.

Für beide Fälle muss den Schülern durchs Kopfrechnen mit kleinen Zahlen deutlich zum Bewusstsein gebracht werden, dass man dasselbe bekommt, ob man mittels Zu- oder Wegzählens subtrahiert. Z. B.:

$6 + \cdot = 8$	$8 - 6 =$	$7 + \cdot = 15$	$15 - 7 =$
$30 + \cdot = 70$	$70 - 30 =$	$46 + \cdot = 52$	$52 - 46 =$ u. s. w.

Übungen wie $4 + \cdot = 11$, $8 + \cdot = 10$, $3 + \cdot = 9$ u. s. w. sollen wiederholt werden, weil auf diesen das Subtrahieren mittels Zuzählens beruht.

Es sei nun z. B. der Unterschied zwischen 7824 und 3512 zu bestimmen:

$$\begin{array}{r} 7824 \\ -\ 3512 \\ \hline 4312 \end{array}$$

a) 2 E. und — 2 E. — sind 4 E.; 1 Z. und — 1 Z. — sind 2 Z.; 5 H. und — 3 H. — sind 8 H.; 3 T. und — 4 T. — sind 7 T.

b) 2 und — **2** — ist 4; 1 und — **1** — ist 2; 5 und — **3** — ist 8; 3 und — **4** — ist 7. Die fett gedruckten Zahlen werden entgegen unter die gleichnamigen geschrieben.

Für die Fälle, in welchen ein Übergang in eine andere Ordnung stattfindet, muss man den Schülern an kleinen Zahlen den Satz beibringen, dass der Unterschied zweier Zahlen sich nicht verändert, wenn jede um dasselbe vermehrt wird.

Der Unterschied zwischen 6 und 4 ist geradeso groß, wie zwischen 7 und 5, 8 und 6, 9 und 7 u. s. w.; zwischen 31 und 17 geradeso groß, wie zwischen 41 und 27, zwischen 716 und 324 geradeso groß, wie zwischen 816 und 424 u. s. w. Durch Aufschreiben dieser Beispiele auf die Wandtafel wird den Schülern das Erschauen des zu erläuternden Satzes noch erleichtert.

Wird also der Minuend um eine Zahl vermehrt, so muss auch der Subtrahend um dieselbe Zahl vermehrt werden, damit der Unterschied unverändert bleibt.

Bestimmen wir nun den Unterschied zwischen den Zahlen 5837 und 3262.

$$\begin{array}{r} 5837 \\ -\ 3262 \\ \hline 2575 \end{array}$$

Erklärung. 2 E. und — **5 E.** — sind 7 E. Da 6 Z. größer sind als 3 Z., so kann man durch Dazuzählen zu 6 Z. nicht 3 Z. erhalten, wohl kann man dadurch auf 13 Z. kommen. Nehmen wir daher im Minuend 13 Z., wodurch derselbe um 10 Z. oder 1 H. vermehrt erscheint. Damit aber der Unterschied beider Zahlen derselbe bleibt, müssen wir die 2 H. des Subtrahends um 1 H. vermehren. Wir sprechen also: 6 Z. und — **7 Z.** — sind 13 Z.; 1 H. und 2 H. sind 3 H., 3 H. und — **5 H.** — sind 8 H.; 3 T. und — **2 T.** — sind 5 T.

Kurz: 2 und **5** ist 7; 6 und **7** ist 13; 1 und 2 ist 3, und 5 ist 8; 3 und **2** ist 5.

Bei den angewandten Subtractionsaufgaben sollen die Schüler angeben, ob sie einen Rest oder einen Unterschied zu suchen haben.

Sonst soll aber die Redeweise: «um dies auszuführen, werden wir 3624 von 8756 subtrahieren,» gebraucht werden.

Die Probe für die Subtraction beruht auf dem Satze, dass die Differenz, zum Subtrahend addiert, den Minuend ergibt. Es empfiehlt sich, dieselbe zeitweise von den Schülern machen zu lassen.

Die Subtraction kann auch als Probe für die Richtigkeit der Addition angewendet werden. Man lasse nur einen der gegebenen Summanden aus, addiere alle übrigen und subtrahiere diese Summe von der Summe aller; kommt dabei der ausgelassene Summand zum Vorschein, so war die Addition richtig.

IV. Multiplicationsgebiet.

Kopfrechnen.

§ 47. Die Bemerkungen in § 40 gelten auch für dieses Gebiet. Die Reihen- und Bruchübungen des Additionsgebietes, die Preisrechnungen beider vorangehender Operationsgebiete, die Zeitrechnungen des Subtractionsgebietes sollen noch immer von Zeit zu Zeit wiederholt werden.

Die Zinsrechnungen werden dahin erweitert, dass man die Grundzahl 100 in Rechnung zu ziehen beginnt, und die Durchschnittsrechnung, Flächenberechnungen des Rechteckes und Quadrates treten als neue Gattungen angewandter Aufgaben auf.

Schriftliches Rechnen.

§ 48. Vor dem Rechnen mit mehrnamigen Zahlen wird das Bekannte über die Maße systematisch wiederholt. Die Gewichtsmaße werden durch Decigramm (*dg*), Centigramm (*cg*) und Milligramm (*mg*) erweitert, wobei bemerkt werden kann, dass derlei kleine Gewichte der Apotheker und der Juwelier gebrauchen. Bezüglich des Rechnens mit mehrnamigen Zahlen und Lesen derselben vergl. § 45. — Erläuterung der $\frac{}{100000}$, $\frac{}{1000000}$ an den Flächenmaßen.

Hat man z. B.:

	3 Bch. 5 Lg. 6 Bg.	=	3·56 Bch.
×	4		4
	14 Bch. 2 Lg. 4 Bg.	=	14·24 Bch.

zu berechnen, verfährt man folgendermaßen:*

«4mal 6 Bg. sind 24 Bg. oder 2 Lg. 4 Bg. (4 Bg. werden angeschrieben und 2 Lg. weitergezählt); 4mal 5 Lg. sind 20 Lg., und 2 Lg. sind 22 Lg. oder 2 Bch. 2 Lg. (2 Lg. werden angeschrieben und 2 Bch. weitergezählt); 4mal 3 Bch. sind 12 Bch., und 2 Bch. sind 14 Bch. (werden angeschrieben).» Ähnlich spricht man anfangs bei der decimalen Schreibweise, schließlich verfährt man ganz kurz:

«4mal 6 ist 24 (4 wird angeschrieben, 2 zählt man weiter); 4mal 5 ist 20, und 2 ist 22 (2 wird angeschrieben, davor ein Punkt gemacht und 2 weitergezählt); 4mal 3 ist 12, und 2 ist 14 (14 wird angeschrieben und rechts vom Resultate die Benennung ‚Bch.' geschrieben).»

§ 49. Die Multiplication mit Einern, mit 10, 100 und 1000, mit reinen Zehnern, reinen Hundertern und reinen Tausendern wurde schon bei den Übungen in den Zahlenräumen 1 bis 1000 und 1 bis 1 Million besprochen. Es erübrigt nur noch, die Multiplicationsregel für einen mehrziffrigen Multiplicator abzuleiten. Vor der Ableitung dieser Regel wiederhole man durch einige Stunden die schriftlichen Multiplicationen mit Einern, mit 10, 100 u. s. w., mit reinen Zehnern, Hundertern u. s. w., und zwar soll zuerst die Regel für jeden dieser Fälle noch einmal abgeleitet und das mechanische Verfahren an mehreren Beispielen eingeübt werden.

1.) Es sei nun 24 mit 32 zu multiplicieren.

Ausrechnung im Kopfe. — Ableitung der Regel: Die Zahl 24 nimmt man 32mal, wenn man sie 2mal und dann 30mal nimmt und das Erhaltene zusammenzählt, oder indem man sie zuerst mit 2 und dann mit 30 multipliciert und dann das Erhaltene zusammenzählt.

24	24	48	24
× 2	× 30	720	× 32
48	720	768	768

Die Producte 48 und 720 heißen Theilproducte.

* Vergl. die Ausführung nach Hentschel im theoretischen Theile S. 79.

Die Multiplication mit 2 und mit 30 braucht man jedoch nicht eigens aufzuschreiben. Schreibt man nämlich 32 unter 24, so braucht man nur zuerst mit 2 und dann mit 3 zu multiplicieren und letzterem Producte eine Null anzuhängen. Man bekommt:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\, 32 \\ \hline 48 \\ 720 \\ \hline 768 \end{array}$$

Im zweiten Theilproducte braucht man auch nicht die Null dazu zu setzen, wenn man es nur um eine Stelle nach links schreibt, also:

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\, 32 \\ \hline 48 \\ 72 \\ \hline 768 \end{array}$$

Dabei spricht man: «2mal 4 ist 8 (wird angeschrieben), 2mal 2 ist 4 (anschreiben); 3mal 4 ist 12 (2 wird um eine Stelle nach links geschrieben und 1 weitergezählt), 3mal 2 ist 6, und 1 ist 7 (anschreiben) u. s. w.»

Auf die gleiche Art werden drei-, vierziffrige Zahlen mit zweiziffrigen multipliciert.

2.) Es sei 6452 mit 376 zu multiplicieren.

6452 wird mit 376 multipliciert, wenn man es zuerst mit 6, dann mit 70 und dann mit 300 multipliciert und dann die Theilproducte addiert.

$$\begin{array}{r} 6452 \\ \times\quad 6 \\ \hline 38712 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6452 \\ \times\quad 70 \\ \hline 451640 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6452 \\ \times\quad 300 \\ \hline 1935600 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 38712 \\ 451640 \\ 1935600 \\ \hline 2425952 \end{array}$$

Die Multiplicationen mit 6, 70, 300 braucht man jedoch nicht eigens anzuschreiben. Wir schreiben 376 unter 6452, multiplicieren

zuerst mit 6, dann mit 7, indem wir früher eine Null anschreiben, und dann mit 3, indem wir früher zwei Nullen anschreiben. Man bekommt:

```
    6452
  × 376
  ------
   38712
  451640
 1935600
 -------
 2425952
```

Im zweiten und im dritten Theilproducte braucht man auch nicht die Nullen dazu zu setzen, wenn man nur jedes folgende Theilproduct um eine Stelle nach links schreibt, also:

```
    6452
  × 376
  ------
   38712
  45164
 19356
 -------
 2425952
```

Man spricht dabei: «6mal 2 ist 12 (2 wird angeschrieben, 1 weitergezählt), 6mal 5 ist 30, und 1 ist 31 u. s. w.» Haben die Schüler die Multiplication mit zwei- und dreiziffrigen Zahlen aufgefaßt, so wird ihnen die Multiplication mit Multiplicatoren, die mehr als drei Ziffern enthalten, keine Schwierigkeit mehr machen.

Mehrziffrige Zahlen werden mit mehrziffrigen Zahlen multipliciert, indem man den Multiplicand mit jeder Ziffer des Multiplicators multipliciert und jedes folgende Theilproduct um eine Stelle nach links schreibt, wenn man mit den Einern des Multiplicators zu multiplicieren beginnt.

Als specielle Fälle sind zu erwähnen:

a) Der Multiplicator enthält in einer Zwischenstelle eine Null, z. B.:

```
    6324
  × 308
  ------
```

b) Die Factoren haben am Ende Nullen, z. B.:

43200	324	760
× 86	450	3800

In allen diesen Fällen lasse man die Multiplication auf die gewöhnliche Art ausführen. Die Schüler werden sich bald überzeugen, dass man mit den Nullen gar nicht zu multiplicieren braucht, wenn man im ersten Falle nur das nächste Theilproduct um zwei, statt um eine Stelle nach links rückt, im zweiten Falle aber im Producte so viele Nullen anhängt, als in den Factoren weggelassen wurden.

Nachdem die Schüler im Multiplicieren mit mehrziffrigen Zahlen eingeübt sind, gewöhne man sie auch an die Schreibweise, bei welcher der Multiplicator rechts vom Multiplicand zu stehen kommt; z. B.: «328 × 36», was zu lesen ist: 328 multipliciert mit 36, und nicht 328mal 36, wie beim mündlichen Rechnen.

V. Divisionsgebiet.

Kopfrechnen.

§ 50. Beherzige den § 47. Bei den Zinsrechnungen tritt das erstemal die kurze Ausdrucksweise Procent (%) auf, welche der Lehrer zu erklären hat. Z. B.: «Ein Capital ist zu 4 % angelegt, heißt, je 100 fl. des Capitals tragen in einem Jahre 4 fl. Zinsen.» Sind z. B. die Zinsen zu 4 % von 6 fl. zu berechnen, sagt man wieder: «100 kr. tragen 4 kr. oder 1 fl. trägt 4 kr., 6 fl. also 6mal 4 kr., d. s. 24 kr. Zinsen in einem Jahre. Bei Aufgaben wie: «Wie viel Zinsen bekommt man von 620 fl. Capital, wenn dasselbe zu 4 % angelegt ist,» ist die Zerlegungsmethode anzuwenden.

100 fl. Capital geben 4 fl. Zinsen,
600 » » » 6mal 4 fl., d. s. 24 fl. Zinsen,
20 » » » 20mal 4 kr., d. s. 80 kr. Zinsen;

620 fl. Capital geben also 24 fl. 80 kr. Zinsen.

Als Erweiterung tritt die Theilregel auf.

Schriftliches Rechnen.

§ 51. Um Wiederholungen zu vermeiden, wird zunächst auf § 48 gewiesen.

Hat man ferner z. B.:

a) 8 Lg. 4 Bg. : 2 = 4 Lg. 2 Bg.	b) 8 Lg. 4 Bg. : 4 Bg. = $\overset{\text{Z. E.}}{2\,1}$ = 21
8·4 Lg. : 2 = 4·2 Lg.	8·4 Lg. : 4 Bg. = $\overset{\text{Z. E.}}{2\,1}$ = 21

zu berechnen, verfährt man folgendermaßen:

a) «Der zweite Theil von 8 Lg. sind 4 Lg. (wird angeschrieben), der zweite Theil von 4 Bg. sind 2 Bg. (wird zu 4 Lg. geschrieben).» Ähnlich spricht man anfangs bei der decimalen Schreibweise, schließlich verfährt man ganz kurz:

«Der zweite Theil von 8 ist 4 (wird angeschrieben und oben rechts der Punkt dazugesetzt), der zweite Theil von 4 ist 2 (wird angeschrieben und rechts vom Resultate die Benennung hinzugesetzt).»

b) «4 Bg. sind in 8 Bg. 2mal und in 8 Lg. 20mal enthalten (20 oder $\overset{\text{Z.}}{2}$ werden angeschrieben), 4 Bg. sind in 4 Bg. 1mal enthalten ($\overset{\text{E.}}{1}$ wird zu $\overset{\text{Z.}}{2}$ geschrieben).» Bei der decimalen Schreibweise verfährt man auf dieselbe Weise, schließlich jedoch kurz:

«4 in 8 ist 2mal enthalten (wird angeschrieben), 4 in 4 ist 1mal enthalten (1 wird zu 2 geschrieben).»

Bei Aufgaben wie:

1.) 23 *m* 8 *dm* : 5 *m* = 4
20 *m*
3 *m* 8 *dm* (Rest)

verfährt man wie folgt:

«5 *m* sind in 23 *m* 8 *dm* beiläufig so oft enthalten, als 5 *m* in 23 *m*, also 4mal; 4mal 5 *m* sind 20 *m*; 20 *m* von 23 *m* 8 *dm* bleiben 3 *m* 8 *dm*.»

2.) 40 *l* : 8 *l* 6 *dl* = 5 4
43 *l*
34 *l* 4 *dl*
5 *l* 6 *dl* (Rest).

«8 *l* 6 *dl* sind in 40 *l* beiläufig so oft als 8 *l* in 40 *l*, also 5mal enthalten; 5mal 6 *dl* sind 30 *dl* oder 3 *l*, 5mal 8 *l* sind 40 *l* und 3 *l* sind 43 *l*, was zuviel ist; 8 *l* 6 *dl* werden also in 40 *l* 4mal enthalten sein u. s. w.»

3.) 12 *m* 6 *dm* : 4 *m* 2 *dm* = 3
12 » 6 »
= =

«4 *m* 2 *dm* sind in 12 *m* 6 *dm* beiläufig so oft enthalten, als 4 *m* in 12 *m*, also 3mal, u. s. w.»

Derartige Aufgaben tragen zur Erläuterung der Divisionsregeln viel bei, und es empfiehlt sich, vor der Ableitung jeder Regel die entsprechenden zu wiederholen.

§ 52. Die Division durch Einer, durch 10, 100, 1000, durch reine Zehner, Hunderter, Tausender, wurde schon bei den Übungen in den Zahlenräumen 1 bis 1000 und 1 bis 1 Million besprochen. Es erübrigt also noch, die Regeln für die Division durch reine Zehner, reine Hunderter u. s. w. durch mehrziffrige Zahlen abzuleiten. Vor der Ableitung dieser Regeln wiederhole man die bereits bekannten Fälle durch einige Stunden an mehreren Beispielen,* und zwar suche man noch die Divisionsreste mittels des Wegzählens.

1.) Der Quotient besteht aus Einern. Z. B.:

a) 86 : 43 = 2
86
==

b) 5064 : 896 = 6 5
5376
4480
=584 Rest.

a) 43 ist in 86 beiläufig so oft enthalten, als 40 in 80 oder als 4 Z. in 8 Z. oder als 4 in 8; 4 ist in 8 2mal enthalten. Um uns davon zu überzeugen, multiplicieren wir 43 mit 2** und subtrahieren das Product von 86 (2mal 3 ist 6, 2mal 4 ist 8, 6 von 6 bleibt 0, 8 von 8 bleibt 0).

Es ist also richtig 43 in 86 2mal enthalten.

* Die Wiederholung besteht in der Ableitung der Regel und im darauf folgenden mechanischen Üben.

** Die Multiplication kann man zuerst seitwärts ausführen und das erhaltene Product dann unter den Dividend schreiben; später kommt das Product gleich unter den Dividend.

b) 896 ist in 5064 beiläufig so oft enthalten, als 800 in 5000 oder als 8 H. in 50 H. oder als 8 in 50; 8 ist in 50 6mal enthalten. 6mal 6 ist 36, bleibt 3; 6mal 9 ist 54, und 3 ist 57, bleibt 5; 6mal 8 ist 48, und 5 ist 53. 5376 ist größer als 5064, daher ist 896 in 5064 nicht 6mal (6 im Quotienten wird durchstrichen), sondern vielleicht 5mal enthalten. Die Fortsetzung ergibt sich von selbst.

An mehreren solchen Fällen zeigt man den Schülern:

α) Dividend und Divisor haben in diesem Falle gleichviel Stellen oder der Dividend um eine Stelle mehr.

β) Die Ziffer des Quotienten bestimmt man, wenn man die erste oder die zwei ersten Ziffern des Dividends durch die erste Ziffer des Divisors dividiert.

γ) Von der Richtigkeit dieser Ziffer überzeugt man sich, wenn man den Divisor mit dieser Ziffer multipliciert und das erhaltene Product vom Dividend subtrahiert; ist das Product größer als der Dividend, nimmt man den Quotienten um 1 kleiner, multipliciert den Divisor u. s. w. wie früher.

Darauf fertige Einübung an Beispielen.

Diese Division ist zurückgeführt auf die Fundamentalübung und soll an Beispielen zur vollsten mechanischen Fertigkeit eingeübt werden, um mit Erfolg an die nächste Gattung übergehen zu können.

2.) Der Quotient besteht aus reinen Zehnern (Hundertern, Tausendern u. s. w.).

An Kopfrechenübungen wie: «4 in 8 Z., 3 in 6 H., 6 in 12 T. u. s. w.» wird der Satz abgeleitet:

«Zehner (Hunderter, Tausender u. s. w.) werden durch Einer geradeso dividiert, wie Einer durch Einer, nur bedeutet der Quotient Zehner (Hunderter, Tausender u. s. w.).»

Nach dieser Regel werden dann auch schriftliche Aufgaben durchgeführt. Z. B.:

$$280 : 14 = \overset{3.}{28} : 14 = \overset{3.}{2}$$
$$\underline{28}$$
$$==$$

«14 in 280 oder 14 in 28 Z.; 14 ist in 28 2mal enthalten, 2mal 4 ist 8, 2mal 1 ist 2 u. s. w.; 2 bedeutet jedoch Zehner, was wir ober derselben andeuten.»

Kurz: «Null ab; 14 in 28 oder 1 in 2 ist 2mal enthalten (2 wird mit einem ‚Z.‘ darüber im Quotient angeschrieben); 2mal 4 ist 8, 2mal 1 ist 2 u. s. w.»

Bleibt ein Rest, so bedeutet er Zehner (Hunderter, Tausender u. s. w.).

Z. B.: 290 : 12 = 29 : 12 = 2 (Z.)
24
5 Z. Rest.

«12 in 290 oder 12 in 29 Z.; 12 ist in 29 2mal enthalten u. s. w. wie früher; 24 bedeutet jedoch Zehner, weil wir eigentlich 12 nicht 2mal, sondern 20mal zu nehmen haben, daher bedeutet auch der Rest 5 nicht Einer, sondern Zehner.»

Kurz: «Null ab; 12 in 29 oder 1 in 2 ist 2mal enthalten (2 wird mit einem Z. darüber im Quotient angeschrieben); 2mal 2 ist 4, 2mal 1 ist 2; 4 von 9 bleibt 5, 2 von 2 bleibt nichts; es bleiben also 5 Z.»

Bei dieser Gattung von Aufgaben hebe man insbesondere die Bedeutung des Restes hervor.

3.) Der Quotient ist eine mehrstellige Zahl.

a) 37,2 : 12 = 31 = 31 (Z. E.; Z. E.)
36
=12
12
==

b) 878,56 : 234 = 375 = 375 (H. Z. E.; H. Z. E.)
702
1765
1638
=1276
1170
=106 Rest.

a) «12 ist in 3 nicht, in 37 aber wohl enthalten (der Theildividend 37 wird durch ein Häkchen abgetrennt); 12 in 37 ist 3mal enthalten, oder dies gibt 3 Zehner, die wir rechts vom Gleichheitszeichen schreiben. Nun bestimmen wir den Rest der Zehner auf die bekannte Art. 1 Z. sind 10 E., und 2 E. sind 12 E., wir setzen also 2 zum Reste herab; 12 in 12 ist 1mal enthalten, 1 E. schreiben wir rechts zu den 3 Z. u. s. w.»

Kurz: «12 in 37 oder 1 in 3 ist 3mal enthalten (3 wird angeschrieben); 3mal 2 ist 6, 3mal 1 ist 3, 6 von 7 bleibt 1, 3 von 3 bleibt Null; 2 herab; 12 ist in 12 1mal enthalten (wird zu 3 geschrieben), 1mal 12 ist 12, 12 von 12 bleibt Null.»

b) «234 ist in 8 nicht, in 87 nicht, wohl aber in 878 enthalten (der Theildividend 878 wird durch ein Häkchen abgetrennt). Die Zahl der Hunderter im Quotient und der Rest derselben wird nun auf die bekannte Art bestimmt. 176 H. sind 1760 Z., und 5 Z. sind 1765 Z.; wir setzen also 5 zum Reste herab. Nun wird die Zahl der Zehner im Quotient und deren Rest auf die bekannte Art bestimmt. 127 Z. sind 1270 E., und 6 E. sind 1276 E.; wir setzen also 6 zum Reste herab u. s. w.»

Kurz: «234 in 878; 2 in 8 ist 4mal — man findet jedoch 4 zu groß — 234 ist also in 878 3mal enthalten; 3mal 4 ist 12, bleibt 1, 3mal 3 ist 9, und 1 ist 10, bleibt 1, 3mal 2 ist 6, und 1 ist 7; 2 von 8 bleibt 6, 0 von 7 bleibt 7, 7 von 8 bleibt 1; 5 herab; 2 ist in 17 8mal enthalten u. s. w. wie früher.»

Man ersieht also, dass diese Division zurückgeführt ist auf die Division durch mehrziffrige Zahlen für einstellige Quotienten und diese wieder auf die Fundamentalübung.

Der Fall, wenn der Divisor rechts Nullen hat, wird keine Schwierigkeiten bieten. Z. B.:

```
762,88 : 8,00 = 95
72
 42
 40
   288 Rest.
```

«800 ist in 76288 so oft als 8 H. in 762 H. oder als 8 in 762 enthalten; 8 ist in 76 9mal enthalten u. s. w.; der Rest 2 bedeutet Hunderter, zu dem noch 88 dazu kommt.»

Wenn also der Divisor rechts Nullen hat, so lässt man dieselben weg, schneidet aber auch im Dividend ebenso viele Ziffern rechts ab; zum letzten Reste setzt man dann diese Ziffern herab, wodurch man den Rest der ganzen Division erhält.

§ 53. Bis jetzt wurden die Divisionsreste im Sinne des Wegzählens gesucht, praktischer ist es jedoch, dieselben im Sinne des Zuzählens zu bestimmen,* wodurch die kürzere Form der Division ermöglicht wird. Z. B.:

```
878,56 : 234 = 375
702
----
1765
1638
----
=1276
 1170
 ----
 =106 Rest.
```

«234 in 878; 2 in 8 ist 3mal enthalten, 3mal 4 ist 12, bleibt 1, 3mal 3 ist 9, und 1 ist 10, bleibt 1, 3mal 2 ist 6, und 1 ist 7; 2 und 6 ist 8, 0 und 7 ist 7, 7 und 1 ist 8; 5 herab u. s. w.»

Die Aufgaben 25.) des Rechenbuches haben den Zweck, dem Schüler die Bestimmung der Ziffern des Quotienten für den Fall, dass sich dieselbe nach dem gewöhnlichen Verfahren zu groß ergibt, auf eine praktische Art beizubringen. Z. B.:

«122256 : 283; 2 ist in 12 6mal enthalten, 6mal 8 ist 48, bleibt 4 (5), 6mal 2 ist 12, und 4 ist 16, das größer ist als 12; ebenso ergibt sich 5 zu groß; 283 in 1222 ist also 4mal enthalten u. s. w.»

Nachdem diese Divisionsweise eingeübt wurde, übe man in der kürzeren Form des Dividierens ein. Dabei hat man die zwei Fälle zu unterscheiden: 1.) der Divisor ist einziffrig, 2.) der Divisor ist mehrziffrig.

1.) 2628 : 6

a) Längere Form:

```
2628 : 6 = 438
24
--
 22
 18
 --
  48
  48
  --
```

b) Kürzere Form:

```
2628 : 6 = 438
 22
  48
```

c) Die kürzeste Form:

```
2628 : 6
---------
 438
```

* Anfangs führe man die Division auf beide Arten nebeneinander aus, damit die Schüler die Divisionsreste vergleichen können.

Zu a) ist nichts zu bemerken.

b) Bei der zweiten Form werden die Theilproducte gleich im Kopfe subtrahiert und nur die Reste angeschrieben. Dabei spricht man: «6 in 26 ist 4mal, 4mal 6 ist 24, und 2 ist 26 (der Rest 2 wird unter 6 geschrieben und die nächste Ziffer 2 des Quotienten dazu). 6 in 22 ist 3mal, 3mal 6 ist 18, und 4 ist 22; zum angeschriebenen Rest 4 wird die nächste Ziffer 8 dazugesetzt. 6 in 48 ist 8mal, 8mal 6 ist 48, und 0 ist 48.

Dabei wird durchs Zuzählen subtrahiert.

c) Bei der dritten Form schreibt man nicht einmal den Rest an und denkt sich zum jedesmaligen Rest die nächste Ziffer des Dividends dazu. Das Übrige ergibt sich von selbst. — Übungsbeispiele.

2.) 33956 : 653

Wenn der Divisor mehrziffrig ist, kann auch die Form der Division abgekürzt werden, wenn man das Product aus dem Divisor und der jedesmaligen Ziffer des Quotienten sogleich während des Multiplicierens subtrahiert und bloß den Rest anschreibt.

a) Längere Form:

3395,6 : 653 = 52
3265
1306
1306

b) Kürzere Form:

3395,6 : 653 = 52
1306

b) Dabei spricht man: «6 in 33 ist 5mal; 5mal 3 ist 15, und 0 (wird angeschrieben unter 5) ist 15, bleibt 1; 5mal 5 ist 25, und 1 ist 26, und 3 (wird unter 9 geschrieben) ist 29, bleibt 2; 5mal 6 ist 30, und 2 ist 32, und 1 (wird unter 3 geschrieben) ist 33. Zum Rest 130 wird 6 herabgesetzt.» Das weitere Verfahren ergibt sich aus dem Gesagten. — Übungsbeispiele.

Bei der kürzeren Divisionsform müssen die durch die Beispiele 34 + · = 37, 67 + · = 72 angedeuteten Übungen vollkommen geläufig sein, daher ist es angezeigt, sie vor der Einführung in die kür-

zere Form vorzunehmen. Neben den Fundamentalübungen sind also auch diese Kopfrechnungen mit dem schriftlichen Rechnen in Verbindung.

Beim angewandten Rechnen sehe man genau auf die übliche Form. Z. B.:

1.) Ein Kaufmann mischt dreierlei Kaffee untereinander, und zwar 20 *kg* à 1 fl. 28 kr., 15 *kg* à 1 fl. 36 kr. und 40 *kg* à 1 fl. 50 kr.; wie viel ist das Kilogramm von dem gemischten Kaffee wert?

20 *kg*	à fl. 1·28	= fl.	25·60
15 »	» » 1·36	= »	20·40
40 »	» » 1·50	= »	60·00
75 *kg*		fl.	106·00 : 75 = 1·41 fl.
			310
			100
			25 kr. Rest.

2.) Drei Arbeiter verdienen bei einer gemeinschaftlichen Arbeit 120 fl.; wie ist dieses Geld unter sie zu vertheilen, wenn A 12 Tg., B 15 Tg. und C 23 Tg. arbeitet?

A Tg.	12 × 2·40	=	28·80 fl.
B »	15 × 2·40	=	36·00 »
C »	23 × 2·40	=	55·20 »
120 : 50 = 2·40 fl.,			120·00 fl. erhalten alle drei zusammen.

Sobald die Schlüsse bei einer neuen Gattung von angewandten Aufgaben eingeübt sind, lasse man mechanisch (nach der gewonnenen Regel) rechnen, um die möglichste Fertigkeit zu erreichen.

B. Rechnen mit Decimalzahlen.

I. Auffassung der Decimalzahlen.

1. Lesen und Schreiben der Decimalzahlen.

§ 54. Durch die decimale Schreibweise mehrnamiger Zahlen sind die Schüler auf die Decimalbruchform schon vorbereitet, durch den Ausdruck niedrigerer Benennungen als Bruchtheile ($\frac{}{10}$, $\frac{}{100}$, $\frac{}{1000}$ u. s. w.) einer höheren Benennung ist ihnen auch schon die Bedeutung der Stellen rechts vom Punkte erschlossen; es erübrigt also hier nur, unbenannte Decimalzahlen durch Wiederholung an Bekanntem einzuführen, die Bedeutung des Decimalpunktes insbesondere zu betonen und die zwei Theile der Decimalzahlen, Ganze und Decimale, deutlich zu erläutern. Die Schreibweise und die verschiedenen Leseweisen der Decimalzahlen sollen zur möglichsten Fertigkeit eingeübt werden; das «Wie» ergibt sich aus den Aufgaben im Rechenbuche.

2. Erweitern und Kürzen der Decimalzahlen.

§ 55. Hängt man an die Decimalzahl 0·5 rechts eine Null an, so drückt man nur aus, dass diese Decimalzahl $\frac{5}{10}$ aber keine $\frac{}{100}$ hat; der Wert der Decimalzahl wird durch Anhängen der Null nicht verändert. Es erscheinen jedoch die $\frac{5}{10}$ in $\frac{50}{100}$ verwandelt oder der Bruch $\frac{5}{10}$ wurde mit 10 erweitert. Durch Anhängen einer Null kann man auch Decimalbrüche mit zwei, drei und mehreren Decimalen erweitern; durch eine ähnliche Betrachtung wie am obigen Beispiele wird erläutert, dass sich dadurch sein Wert nicht verändert, und werden die $\frac{}{100}$ zu $\frac{}{1000}$, die $\frac{}{1000}$ zu $\frac{}{10000}$ u. s. w.

Ebenso wird der Wert eines Decimalbruches nicht verändert, wenn man ihm rechts zwei, drei oder noch mehrere Nullen anhängt. Erläuterung wie oben.

Lässt man im Decimalbruche 0·50 die Null rechts weg, so verändert sich sein Wert nicht, dadurch wird er nur gekürzt. Kommen

rechts vom Decimalbruche noch mehrere Nullen vor, so kann man sie ohne Veränderung seines Wertes weglassen oder man kann ihn abkürzen. Z. B.: 0·5000 = 0·5, 0·3200 = 0·32.

3. Gleichnamigmachen der Decimalzahlen.

§ 56. Durch das Erweitern und auch durchs Abkürzen kann man die Decimalzahlen immer in solche verwandeln, bei welchen die niederste Stelle die gleiche Bedeutung hat, d. h. man kann sie gleichnamig machen. Z. B.:

1.) Es seien die Decimalzahlen 0·45, 0·326, 0·2571 gleichnamig zu machen. — Lösung: 0·4500, 0·3260, 0·2571. Diese Decimalzahlen sind also alle auf $\frac{}{10000}$ gebracht.

2.) Mache gleichnamig: 0·340, 0·5600, 0·75. — Lösung: 0·34, 0·56, 0·75.

II. Die Grundoperationen mit Decimalzahlen.

1. Addition.

§ 57. Bei der Addition der Decimalzahlen hat man zwei Fälle zu unterscheiden: 1.) die Decimalbrüche sind gleichnamig, 2.) sie sind nicht gleichnamig.

Im zweiten Falle macht man sie durch Erweitern oder Abkürzen gleichnamig, wobei jedoch die Schüler aus einigen Beispielen bald erkennen werden, dass dies nicht einmal nothwendig ist, wenn man nur die Decimalzahlen gehörig untereinander schreibt. Das Verfahren ergibt sich von selbst. Z. B.:

1.)	0·628	2.)	0·54	= 0·5400
	0·345		0·875	= 0·8750
	0·521		0·6293	= 0·6293
	1·494		2·0443	2·0443

Längeres Verfahren: $\frac{1}{1000}$ und $\frac{5}{1000}$ sind $\frac{6}{1000}$, und $\frac{8}{1000}$ sind $\frac{14}{1000}$ oder $\frac{1}{100}$ und $\frac{4}{1000}$ (die $\frac{4}{1000}$ werden angeschrieben und

$\frac{1}{100}$ weitergezählt); $\frac{1}{100}$ und $\frac{2}{100}$ sind $\frac{3}{100}$, und $\frac{4}{100}$ sind $\frac{7}{100}$, und $\frac{2}{100}$ sind $\frac{9}{100}$ (werden angeschrieben); $\frac{5}{10}$ und $\frac{3}{10}$ sind $\frac{8}{10}$, und $\frac{6}{10}$ sind $\frac{14}{10}$ oder 1 Ganzes und $\frac{4}{10}$ (1 und 4 werden angeschrieben und zwischen sie der Decimalpunkt gesetzt).

Kurz: 1 und 5 ist 6, und 8 ist 14 (4 wird angeschrieben und 1 weitergezählt); 1 und 2 ist 3, und 4 ist 7 u. s. w.

Die Schüler erkennen bald, dass die Decimalbrüche addiert werden wie ganze Zahlen, nur hat man den Decimalpunkt zu setzen, wenn man bis zu ihm gelangt.

2. Subtraction.

§ 58. Das Verfahren ist ähnlich dem bei der Addition und braucht daher keine Erläuterung.

3. Multiplication.

§ 59. Die Multiplicationsregeln leitet man am bequemsten auf Grundlage benannter Zahlen ab.

1.) Hat man z. B. 3 Bch. 4 Lg. 7 Bg. = 3·47 Bch. mit 10 zu multiplicieren, so bekommt man

$$\begin{array}{r} 3\cdot 47 \text{ Bch.} \times 10 \\ \hline 34\cdot 70 \text{ Bch.} \end{array}$$

«10mal 7 Bg. sind 70 Bg. oder 7 Lg. und 0 Bg. (0 Bg. werden angeschrieben, 7 Lg. weitergezählt); 10mal 4 Lg. sind 40 Lg., und 7 Lg. sind 47 Lg. oder 4 Bch. und 7 Lg. (7 Lg. werden angeschrieben und 4 Bch. weitergezählt); 10mal 3 Bch. sind 30 Bch., und 4 Bch. sind 34 Bch. (34 wird angeschrieben, rechts wird der Punkt gesetzt und zum Producte die Benennung ‚Bch.‘ geschrieben).»

An mehreren solchen Beispielen erkennen die Schüler:

Eine Decimalzahl wird mit 10 multipliciert, wenn man den Decimalpunkt um eine Stelle nach rechts rückt.

Ähnlich leitet man die Multiplicationsregel für den Multiplicator 100, 1000 u. s. w. ab.

2.) Es sei 4 *m* 3 *dm* 2 *cm* 6 *mm* mit 4 zu multiplicieren.

$4 \cdot 326\ m \times 4 = 4326\ mm \times 4 = 17304\ mm = 17 \cdot 304\ m.$

Aus mehreren solchen Beispielen* erkennen die Schüler:

Eine Decimalzahl wird mit einer ganzen Zahl multipliciert wie eine ganze Zahl, nur hat man im Producte so viele Decimalen abzuschneiden, als ihrer der Multiplicand hat.

3.) Berechne den Flächeninhalt eines Rechteckes, in welchem

a) die Länge = 3 *dm* b) die Länge = $3 \cdot 2$ *dm*
» Breite = $2 \cdot 4$ *dm* » Breite = $1 \cdot 6$ »

beträgt.

a) Verwandeln wir die Decimeter in Centimeter und berechnen wir dann den Flächeninhalt:

$30 \times 24 = 720\ cm^2 = 7 \cdot 2\ dm^2$, also: $3 \times 2 \cdot 4 = 7 \cdot 2\ dm^2$.

b) Verwandeln wir auch die Decimeter in Centimeter und berechnen wir dann den Flächeninhalt:

32×16	oder	$3 \cdot 2 \times 1 \cdot 6$
192		192
32		32
$512\ cm^2 = 5 \cdot 12\ dm^2$		$5 \cdot 12\ dm^2$

An mehreren solchen Beispielen erkennt der Schüler:

Mit Decimalzahlen multipliciert man wie mit ganzen Zahlen, nur muss man im Producte so viele Decimalen abschneiden, als ihrer in den Factoren vorkommen.

4. Division.

§ 60. Auf Grundlage benannter Zahlen wird die Division der Decimalzahlen durch 10, 100 u. s. w. abgeleitet. Das «Wie» ist aus dem Rechenbuche leicht ersichtlich. Aus mehreren Beispielen erkennt der Schüler die Regel: Eine Decimalzahl wird durch 10, 100, 1000 . . . dividiert, wenn man den Decimalpunkt um eine, zwei, drei . . . Stellen nach links rückt; fehlende Stellen ergänzt man durch Vorsetzen von Nullen.

* Vergleiche «Specielle Methodik» S. 122, 123.

Ebenso leitet man aus mehreren Beispielen wie: 8 Lg. 4 Bg. : 2 oder 8·4 Lg. : 2 u. s. w. (vergl. S. 49) die Regel ab: Eine Decimalzahl wird durch eine ganze Zahl dividiert wie eine ganze Zahl, nur hat man im Quotienten den Decimalpunkt zu setzen, wenn man im Dividend bis zu ihm gelangt.

Um die Regel für die Division einer Decimalzahl durch eine Decimalzahl den Schülern zur Auffassung zu bringen, muss man den Schülern an Vorübungen den Satz begreiflich machen: Der Quotient bleibt sich gleich, wenn man Dividend und Divisor mit 10 oder mit 100 oder mit 1000 u. s. w. multipliciert. Z. B.: 6 : 3 = 2, 60 : 30 = 2, 600 : 300 = 2, 6000 : 3000 = 2 u. s. w.

Es ist also 37·2 : 1·2 gleich 372 : 12, 45·64 : 32·6 gleich 456·4 : 326, 26·3952 : 8·46 gleich 2639·52 : 846 u. s. w.

Wenn daher der Divisor eine Decimalzahl ist, so multipliciert man Dividend und Divisor mit 10, 100, 1000 u. s. w., je nachdem der Divisor eine, zwei, drei . . . Decimalen hat; dadurch wird die Division durch eine Decimalzahl zurückgeführt auf die Division durch eine ganze Zahl.

§ 61. Beim angewandten Rechnen wird die praktische Berechnung der Zinsen eingeführt, indem man zuerst die Zinsen zu 1 % berechnet und dann auf dieser Grundlage die Rechnung ausführt.

Z. B.: Berechne die Zinsen von 682 fl. zu 5 %.

Die Zinsen zu 1 % sind gleich dem 100. Theil von 682 fl., also 6·82 fl., die Zinsen zu 5 % sind gleich 6·82 × 5 = 34·10 fl.

Um auf die Regel für die Berechnung der Zinsen zu 1 % zu kommen, bedient man sich sehr gut der Zerlegungsmethode.

Z. B.: Wie viel Zinsen geben 682 fl. zu 1 %?

100 fl.	Capital	geben	1 fl.	Zinsen,
600 fl.	Capital	geben	6 fl.	Zinsen,
82 »	»	»	82 kr.	Zinsen;
682 fl.	Capital	geben	6 fl. 82 kr.	= 6·82 fl. Zinsen.

An mehreren solchen Beispielen erkennt man:

«Die Zinsen zu 1 % werden berechnet, wenn man das Capital durch 100 dividiert.»

Das angewandte Rechnen wird durch Einführung der Goldmünzen, der Achtguldenstücke und Vierguldenstücke, erweitert. Die Münzen sollen, wenn nur möglich, gezeigt werden.

C. Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

I. Reducieren.

§ 62. Vor allem soll der Lehrer das bereits Bekannte über Maße systematisch wiederholen, die Verwandlungszahlen insbesondere betonen, und es schadet durchaus nicht, wenn er dieselben wieder zur sinnlichen Anschauung bringt. Diesbezüglich geschieht nicht leicht zu viel. Die beiden durch die Verwandlungszahl, welche entweder 1.) decimal oder 2.) nicht decimal ist, bestimmten Hauptstufen sind consequent auseinander zu halten und die Unterstufen, nämlich die Verwandlung a) in eine einnamige, b) in eine mehrnamige Zahl und α) in die nächst höhere (beim Resolvieren in die nächst niedrigere Benennung), β) in eine entferntere Benennung, jedenfalls zu berücksichtigen. Diese Stufen sind durch nachstehende Beispiele erläutert.

1. Verwandlungszahl ist decimal.

a) 30 *dm* = · *m* b) 35 *dm* = · *m* · *dm*

α) 300 *cm* = · *m* β) 356 *cm* = · *m* · *dm* · *cm*

2. Verwandlungszahl ist nicht decimal.

a) 36 Stck. = · Dtzd. b) 40 Std. = · Tg. · Std.

α) 1080 Tg. = · J. β) 6243 Min. = · Tg. · Std. · Min.

Die Unterstufe b) der zweiten Hauptstufe eignet sich jedenfalls besser fürs schriftliche als fürs Kopfrechnen.

Das Verfahren fürs Kopfrechnen ergibt sich aus dem Vorangegangenen. Die Regel für das schriftliche Rechnen: «Niedrigere Einheiten werden in höhere verwandelt, wenn man ihre Zahl durch die Verwandlungszahl dividiert,» ergibt sich aus dem Kopfrechnen. (Vergl. Rechenbuch S. 58, 59.) Das schriftliche Verfahren erhellt aus den nachstehenden Beispielen.

1.) 356 *cm* = · *m* · *dm* · *cm*.

35,6 *cm* : 10 = 35 *dm* 6 *cm*, 3,5 *dm* : 10 = 3 *m* 5 *dm*

356 *cm* = 3 *m* 5 *dm* 6 *cm* = 3·56 *m*.

2.) 6243 Min. = · Tg. · St. · Min.

624,3 Min : 6,0 = 104 Std., 104 St. : 24 = 4 Tg.

3 » 8 »

6243 Min. = 4 Tg. 8 St. 3 Min.

Die Decimalbruchform für mehrnamige Zahlen mit decimaler Verwandlungszahl tritt nun in ihre vollen Rechte.

II. Resolvieren.

§ 63. Bezüglich der Stufen gilt beim Resolvieren dasselbe, was im § 62 vom Reducieren gesagt wurde.

Das Verfahren beim Kopfrechnen ist bereits bekannt, das schriftliche erhellt aus den nachstehenden Beispielen.

1.) Wie viel Kreuzer sind 8 (12, 20, 45) fl.? Um 1 fl. zu bekommen, muss man 1 kr. 100mal nehmen, und um 8 fl. zu bekommen, muss man 8 kr. 100mal nehmen. 8 × 100 = 800 kr.

2.) Wie viel Stück sind 6 (15, 28, 42, 56) Dutzend? Um 1 Dutzend zu bekommen, muss man 1 Stück 12mal nehmen, und um 6 Dutzend zu bekommen, nimmt man 6 Stück 12mal. 6 × 12 = 72 Stck.

Aus den vorangehenden Beispielen ergibt sich: «Höhere Benennungen werden in niedrigere verwandelt, wenn man die gegebene Zahl mit der Verwandlungszahl multipliciert.»

An die Ableitung der Regel schließen sich mehrere Übungsbeispiele an. Z. B.:

1.) 8 *km* 624 *m* = · *m*.

$$\begin{array}{r} 8 \times 1000 \\ \hline 8000\ m \\ 624\ » \\ \hline 8624\ m \end{array}$$

8 *km* 624 *m* = 8624 *m*

Oder auch direct:

8·624 *km* = 8624 *m*

2.) · Stck. = 48 Dtzd. 9 Stck.

$$\begin{array}{r} 48 \times 12 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576\ \text{Stck.} \\ 9\ » \\ \hline 585\ \text{Stck.} \end{array}$$

48 Dtzd. 9 Stck. = 585 Stck.

III. Die Grundoperationen mit mehrnamigen Zahlen.

1. Addieren.

§ 64. Das Verfahren beim Addieren mehrnamiger Zahlen, welche decimale Verwandlungszahlen haben, ist schon von früher her bekannt. Man lasse sie jedoch von nun an nur in Decimalbruchform auftreten. Hier soll daher noch das Addieren mehrnamiger Zahlen, deren Verwandlungszahl nicht decimal ist, besprochen werden.

Es ist gerathen, zuerst einnamige Zahlen zu addieren, um auf die Verwandlung der Summe in höhere Einheiten das Hauptgewicht zu legen. Derartige Verwandlungen können in der Regel im Kopfe ausgeführt werden. Z. B.:

24 Stck.
31 »
46 »
58 »
159 Stck.

Im Kopfe: 60 Stck. sind in 159 Stck. 2mal enthalten, 2mal 60 ist 120, und es bleiben noch 39 Stck.; 159 Stck. = 2 Schck. 39 Stck.

Schriftlich: 15,9 Stck. : 6,0 = 2 Schck. 39 Stck.
39 »

Das Verfahren beim Addieren mehrnamiger Zahlen erhellt aus dem nachstehenden Beispiele.

8 Schck.	46 Stck.
36 »	23 »
15 »	— »
9 »	58 »
— »	43 »
70 Schck.	170 Stck.
70 »	50 »

17,0 : 6,0 = 2 Schck.
5 0 Stck.

2. Subtrahieren.

§ 65. Der Stufengang ist beim Subtrahieren derselbe wie beim Addieren. Insbesondere soll jedoch der Fall hervorgehoben werden, in welchem eine Zahl des Subtrahends größer ist, als die gleichnamige Zahl des Minuends. Z. B.:

9 J.	^{12}5 Mon.
4 »	8 »
1	
4 J.	9 Mon.

5 Monate vermehren wir um 1 Jahr oder 12 Mon., dann haben wir 17 Mon.; 8 Mon. und 9 Mon. sind 17 Mon. Nun wäre aber der Unterschied um 12 Mon. oder 1 J. zu groß, daher vermehren wir im Subtrahend 4 J. um 1 J und subtrahieren dann. 5 J. und 4 J. sind 9 J.

Kurz: 5 Mon. und 12 Mon. sind 17 Mon., 8 Mon. und 9 Mon. (wird angeschrieben) sind 17 Mon.; 1 J. und 4 J. sind 5 J., und 4 J. (wird angeschrieben) sind 9 J.

Es sollen auch jene speciellen Fälle deutlich für sich herausgehoben werden, in welchen im Minuend eine Zahl oder auch mehrere Zahlen für Benennungen, die im Subtrahend vorkommen, fehlen. Z. B.:

1.)

	59	60	
15 Std.	— Min.	20 Sec.	
8 »	44 »	56 »	
6 Std.	15 Min.	24 Sec.	

2.)

	24	60	60	
12 Tg.	— Std.	— Min.	— Sec.	
5 »	16 »	18 »	40 »	
1	1	1		
6 Tg.	7 Std.	41 Min.	20 Sec.	

Erstes Beispiel ist im Sinne des Wegzählens, zweites im Sinne des Zuzählens durchgeführt. Man pflege beide Arten.

3. Multiplicieren.

§ 66. Das Multiplicieren mehrnamiger Zahlen mit decimalen Verwandlungszahlen ist schon in früheren Partien behandelt worden; sie sollen von nun an, jedoch in der Regel in Decimalbruchform, in der Rechnung auftreten. Die Aufgabe: 4 Bch. 8 Lg. 7 Bg. × 300 behandelt man also:

4·87 Bch. × 300	neben	487 Bg. × 300
14 61 Bch.		146100 Bg. = 1461 Bch.

Die Aufgabe 12 *q* 52 *kg* 43 *dkg* × 24 entweder so:

125243 *dkg* × 24 oder 12·5243 *q* × 24 u. s. w.

Sollen mehrnamige Zahlen mit nichtdecimalen Verwandlungszahlen multipliciert werden, fange man die Multiplication bei der niedrigsten Benennung an, weil sich dabei Zahlen ergeben, aus welchen man höhere Einheiten bekommt, die weiter zu zählen sind. Z. B.:

5 Schck. 34 Stck.	34 × 28	95,2 Stck. : 6,0 = 15 Sch.
28 »	272	5 2
155 Schck. 52 Stck.	68	
	952 Stck.	5 × 28
		140
		15
		155 Schck.

Der Multiplicator ist zwar immer eine unbenannte Zahl, was sich auch für die Flächeninhaltsberechnungen beim Schlusse auf die Operation ergibt. Bei der Anwendung der Regel erscheinen jedoch beide Factoren benannt; es sollen also auch solche Beispiele fleißig geübt werden. Z. B.:

3 *dm* 2 *cm* × 2 *dm* 5 *cm* =	32 *cm* × 25 *cm*	oder 3·2 *dm* × 2·5 *dm*
	160	1 6 0
	64	6 4
	800 cm^2 = 8 dm^2	8·0 0 dm^2

4. Dividieren.

§ 67. Vor allem ist hier der Unterschied zwischen Enthaltensein und Theilen recht zur Klarheit zu bringen. Das Übrige ergibt sich aus den Beispielen.

1. Messen.

Wie oft sind 2 Schck. 29 Stck. in 39 Schck. 44 Stck. enthalten?

39 Schck. 44 Stck. = 2384 Stck., 2 Schck. 29 Stck. = 149 Stck.

2384 Stck. : 149 Stck. = 16mal
=894
===

Man bringt also Dividend und Divisor auf gleiche, am besten auf die niedrigste Benennung und führt dann die Division aus.

2. Theilen.

1.) Sorten mit decimaler Verwandlungszahl.

Suche den achten Theil von 15 *q* 26 *kg* 48 *dkg*.

a) 152648 *dkg* : 8 = 19081 *dkg* = 1·9081 *q*,

b) 15·2648 *q* : 8 = 1·9081 *q*.

2.) Sorten mit nichtdecimaler Verwandlungszahl.

Suche den 16. Theil von 39 Schck. 44 Stck.

a) 39 Schck. 44 Stck. : 16 = 2 Schck. 29 Stck.
7 Schck. × 60
420 Stck.
44 »
464
144
===

b) 39 Schck. 44 Stck.
2384 Stck. : 16 = 149 Stck.
78
144
===

14,9 : 6,0 = 2 Schck. 29 Stck.
2 9 Stck.

Es ergibt sich auch aus b) 2 Schck. 29 Stck. Das Verfahren a) ist jedoch praktischer.

Wenn die Division nicht aufgeht, so braucht dieselbe nur bis zu einer gewissen Grenze durchgeführt zu werden. Man hat z. B. 832·624 *km* einer Straße auf 256 Steuerträger zu gleichen Theilen zur Beschotterung zu vertheilen, so kommt es dabei auf Decimeter oder gar Centimeter gar nicht an; die Rechnung ist genug genau, wenn die Division bis auf Meter ausgeführt wird.

832·624 *km* : 256 = 3·252 *km*
64 6
13 42
624
112

D. Rechnen mit den häufiger vorkommenden gemeinen Brüchen

und mit solchen, deren Nenner kleiner ist als 100.

I. Auffassung der Brüche.

§ 68. Durch die im Raume 1 bis 100, 1 bis 1000 und auch im unbegrenzten Zahlenraume vorgenommenen und periodisch wiederholten Übungen sind die Schüler mit der Bedeutung der im praktischen Leben am häufigsten vorkommenden gemeinen Brüche bereits vertraut. Die äußere Anschauung soll jedoch auch noch hier die innere unterstützen.

Die größte Schwierigkeit wird das Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Nenners mehrerer ungleichnamiger Brüche bieten. Dabei unterscheide man zunächst die zwei Hauptstufen: 1.) es sind nur zwei Brüche, 2.) es sind mehrere Brüche gleichnamig zu machen. Die zweite Stufe ergibt sich aus der ersten, wenn diese genügend eingeübt ist, unmittelbar; es ist also vor allem die erste Hauptstufe hauptsächlich zu berücksichtigen. Für beide Stufen hat man drei Unterstufen zu unterscheiden: a) der eine Nenner ist im anderen ohne Rest enthalten, z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$;

b) die beiden Nenner haben kein gemeinschaftliches Maß, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$;
c) die beiden Nenner sind durch dieselbe Zahl theilbar, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$.

Das Verfahren in allen diesen Fällen ist aus den Übungen des Rechenbuches ersichtlich. Es möge jedoch insbesondere betont werden, dass das Auffinden des kleinsten Nenners für die Stufe c) nur durch fleißig geübte Vorübungen den Schülern ins klare Bewusstsein gebracht werden kann. Diese Vorübungen sind charakterisiert durch die Frage: «Welche Zahl ist die kleinste, in der 4 und 6, 6 und 8, 4 und 10 u. s. w. ohne Rest enthalten sind?»

Der Lehrer soll jedenfalls mehr solcher Übungen geben, als ihrer im Rechenbuche vorkommen.

Um den Schülern Zeit zu lassen, das Neue in der Bruchlehre geistig verarbeiten zu können, übereile man sich nicht mit dem Vorwärtsschreiten, wiederhole aber inzwischen die vorangegangenen Partien.

II. Die Grundoperationen mit Brüchen.

§ 69. Bei der Addition und Subtraction sowie beim Messen hat man die beiden Fälle 1.) zwischen gleichnamigen, 2.) zwischen ungleichnamigen Brüchen zu unterscheiden. Das Verfahren ergibt sich direct aus dem Rechenbuche.

Das Multiplicieren wurde hier auf Multiplicatoren beschränkt, die ganze Zahlen sind, das Theilen aber auf solche Fälle, in welchen der Divisor im Zähler ohne Rest enthalten ist.

Angewandte Aufgaben, in denen gemeine Brüche vorkommen, sind weniger zahlreich, weil ja gemeine Brüche im praktischen Leben wohl wenig Bedeutung haben.

Da die Schüler die römischen Ziffern auf Uhren, Inschriften u. s. w. sehen, so sollen sie mit denselben wenigstens in einem engeren Raum vertraut gemacht werden. Das «Wie» ergibt sich aus dem Rechenbuche.

Anhang zum vierten Rechenbuche.

§ 70. Der Anhang hat den Zweck, jene Partien, die durch die Lehrpläne für ein- bis fünfclassige Volksschulen vorgeschrieben sind, zum Abschlusse zu bringen. Die Lehre von den Brüchen, deren Nenner, mit Ausnahme der Decimalen, die Zahl 100 nicht überschreiten, wurde noch durch das Allernothwendigste erweitert; den nach den einzelnen Maßarten geordneten Preisaufgaben wurden einige Vortheile und Formulare für Rechnungen hinzugefügt; die Procentrechnung wurde verallgemeinert und fürs kaufmännische Rechnen verwertet; die Zinsrechnung wurde auch ausgedehnt auf die Berechnung des Capitals, der Procente und der Zeit; schließlich wurde das Wichtigste aus der Raumlehre behandelt.

I. Bruchrechnung.

§ 71. Die Behandlung der einzelnen Partien der Bruchrechnung ergibt sich aus dem Rechenbuche von selbst. Hat man die vorangegangenen Partien gewissenhaft behandelt, so erscheint eine sinnliche Veranschaulichung überflüssig. Öftere Wiederholung der Bruchrechnung sowie aller übrigen im Anhange vorkommenden Partien jedoch ist jedenfalls angezeigt.

Bei der Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt werden die periodischen Decimalbrüche wohl nicht genauer betrachtet; sie sind beim angewandten Rechnen nur derartig abzukürzen, dass das Resultat noch eine praktische Bedeutung hat. Bekommt man z. B. 8·721721 . . . fl. oder 3·2525 . . . *kg* Fleisch oder 28·6464 . . . *a* u. s. w., so genügen folgende Werte vollkommen: 8·72 fl., 3·25 *kg* Fleisch, 28·65 *a* u. s. w. In einem solchen Abkürzen der Decimalbrüche soll man die Schüler für alle Maßarten gehörig einüben.

II. Preisrechnungen.

§ 72. Bei den Preisaufgaben sind nur einige Formulare für Rechnungen angeführt; jedoch ist es angezeigt, dass der Lehrer noch andere und insbesondere solche von den Schülern machen läßt, die den Ortsverhältnissen entsprechen.

III. Zusammengesetzter Dreisatz.

§ 73. Hieher gehörige Aufgaben sind nach der Schlussrechnung aufzulösen. Vor allem sollen dabei die Schüler im Unterscheiden des Bedingungs- und Fragesatzes gehörig geübt werden; ferner ist die zusammengesetzte Aufgabe zu zerlegen in einfache; jene Zahlen, die die Grundlage fürs Schließen bilden, und die zu suchende Zahl sollen deutlich herausgehoben und die einzelnen Schlüsse anfangs der Reihe nach aufgeschrieben werden. Schließlich muss man die Schüler mit der kürzesten Form, mit der sogenannten Strichrechnung, vertraut machen, weil ja immer geläufiges mechanisches Rechnen das Endziel ist.

Als Beispiel diene uns folgende Aufgabe:

5 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 24 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; in wie viel Tagen vollenden 6 Arbeiter diese Arbeit, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten?

5 Arbeiter	24 Tg.	12 Std.		(Bedingungssatz)
6 »	x »	10 »		(Fragesatz)

Erste einfache Aufgabe:

5 Arbeiter	24 Tg.	12 Std.		(Bedingungssatz)
6 »	x »	12 »		(Fragesatz)

Lösung: Die Grundlage für den Schluss bilden die Zahlen 5 Arbeiter und 6 Arbeiter, und zu bestimmen hat man die Zahl der Tage.

5 Arbeiter	24 Tg.	
1 »	$24 \times 5 =$	120 Tg.
6 »	$\frac{1}{6}$ v. 120 =	20 »

Zweite einfache Aufgabe:

6 Arbeiter 20 Tg. 12 Std. (Bedingungssatz)
6 » x » 10 » (Fragesatz)

Lösung: Die Grundlage für den Schluss bilden die Zahlen 12 Stunden und 10 Stunden, und zu bestimmen hat man die Zahl der Tage.

12 Std. 20 Tg.
1 » $20 \times 12 = 240$ Tg.
10 » $\frac{1}{10}$ v. $240 = 24$ »
} So vollenden sie die Arbeit in 24 Tagen.

Lösung nach der kürzeren Form:

5 Arbeiter 24 Tg. 12 Std. (Bedingungssatz)
6 » x » 10 » (Fragesatz)

$$x = \frac{24 \,.\, \cancel{5} \,.\, \cancel{12}\ 2}{6 \,.\, \cancel{10}} = 24 \text{ Tg.}$$

5 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 24 Tg. (24 wird ober dem Strich angeschrieben), 1 Arbeiter in 5mal so viel Zeit (5 wird als Factor zu 20 geschrieben), 6 Arbeiter im sechsten Theil dieser Zeit (6 unter den Strich), wenn sie täglich 12 Std. arbeiten; würden sie nur 1 Std. arbeiten, brauchten sie 12mal so viel Zeit (12 als Factor zu 5), bei zehnstündiger Arbeitszeit im Tage brauchen sie nur den zehnten Theil der Zeit (10 als Factor zu 6).

Schließlich wird, wenn möglich, abgekürzt und die Rechnung ausgeführt.

Antwort: So vollenden sie die Arbeit in 24 Tagen.

IV. Procentrechnung.

§ 74. Die Schüler wurden schon bei der Zinsrechnung in den Begriff «Procente» eingeführt, und es schadet durchaus nicht, derartige Rechnungen, wie sie im vierten Rechenbuche Seite 29, 39, 57, 71 vorkommen, früher zu wiederholen, bevor man zur Verallgemeine-

rung der Procentrechnung schreitet, die man vor allem an praktischen Beispielen folgendermaßen zeigt.

«Was heißt das: Ein Capital trägt jährlich 4% Zinsen, beim Verkaufe einer Ware beträgt der Gewinn 15%, in einem Orte sterben jährlich 3% Menschen u. s. w.»

Nach der Verallgemeinerung des Procentbegriffes und Auflösung mehrerer Beispiele der ursprünglichen Auffassung gemäß, führt man auf die einfachste Berechnungsweise über.

Beispiele.

1.) Berechne die Zinsen zu 1% von 428 fl.

a) 100 fl. Capital 1 fl. Zinsen (Bedingungssatz)
428 » » x » »

$$x = \frac{1 \cdot 428}{100} = \frac{428}{100} = 4 \cdot 28 \text{ fl. Zinsen.}$$

b) So oft als 100 fl. in 428 fl. enthalten sind, so viele Gulden Zinsen tragen 428 fl., d. i. 4·28 fl.

Durch die letztere Lösungsweise kommt man an mehreren Beispielen zum Satze:

Unter 1% einer Zahl versteht man den 100. Theil dieser Zahl. (Vergl. Anhang S. 21.)

2.) Berechne die Zinsen zu 4% von 428 fl.

a) 100 fl. Capital 4 fl. Zinsen (Bedingungssatz)
428 » » x » » (Fragesatz)

$$x = \frac{4 \cdot 428}{100} = \frac{428}{100} \cdot 4 = 17 \cdot 12 \text{ fl. Zinsen.}$$

b) 428 fl. geben zu 1% 4·28 fl. Zinsen und zu 4% 4mal 4·28 fl., d. s. 17·12 fl. Zinsen.

Durch die letztere Rechnungsweise kommt man an mehreren Beispielen zum Satze:

Die Procente einer Zahl berechnet man, wenn man den 100. Theil der Zahl mit der Procentzahl multipliciert. (Vergl. Anhang S. 21, 22.)

3.) Berechne die Zinsen von 832·56 fl. zu $4\frac{3}{8}$ %.

a) 1 % v. 832·56 fl. = 8·3256 fl.

$4\frac{3}{8}$ % v. 832·56 fl. = 8·3256 × $4\frac{3}{8}$
33·3024
1·0407 × 3 . . . 3·1221
36·4245 fl.

So betragen die Zinsen 36·42 fl.

b) 1 % v. 832·56 fl. = 8·3256 fl.

4 % v.	832·56 fl. =	8·3256 × 4	= 33·3024 fl.
$\frac{2}{8}$ % = $\frac{1}{4}$ % v.	832·56 » =	$\frac{1}{4}$ v. 8·3256	= 2·0814 »
$\frac{1}{8}$ % v.	832·56 » =	$\frac{1}{2}$ v. 2·0814	= 1·0407 »
$4\frac{3}{8}$ % v.	832·56 fl.		= 36·4245 fl.

Die Zinsen betragen 36·42 fl.

V. Zinsrechnung.

§ 75. In die Zinsrechnung wurden die Schüler schon früher durch sogenannte vorbereitende Aufgaben (vergl. drittes Rechenbuch S. 40, 51) eingeführt, und man ließ sie auch schon Zinsen im Sinne der Procentrechnung berechnen (vergl. viertes Rechenbuch S. 29, 39, 57, 71). An dieser Stufe wird sie vollends zum Abschlusse gebracht. Es werden die Zinsen nicht nur für ganze Jahre, sondern auch für Monate und Tage berechnet; die dabei zu beobachtenden Abstufungen und das einzuschlagende Verfahren in den einzelnen Fällen sind aus dem Rechenbuche ersichtlich. Es muss jedoch hervorgehoben werden, dass bei Ableitungen irgend eines mechanischen Verfahrens ein einziges Beispiel nicht genügt. So soll man z. B. bei der Ableitung des Satzes: «Die Zinsen zu 6 % für 1 Tag berechnet man, wenn man die 1 %igen Zinsen für 1 Jahr durch 60 dividiert», so viele Beispiele durcharbeiten, bis man die Überzeugung gewonnen hat, dass die Schüler die Regel geistig erschaut haben; ja in derartigen Fällen ist es angezeigt, auch später nach der mechanischen Einübung die Ableitung des entsprechenden Satzes zu wiederholen. Eine ähnliche Bemerkung gilt für

den Satz: «Die Zinsen zu 6 % für eine Anzahl Tage werden berechnet, wenn man das Capital zuerst durch 100 und dann durch 60 dividiert und den erhaltenen Quotienten mit der Zahl der Tage multipliciert; oder auch: wenn man das Capital zuerst mit der Zahl der Tage multipliciert und das Product durch 6000 dividiert.»

Beispiele.

1.) Berechne die Zinsen zu 6 % für 1 Tag von 725 fl.

a) Ableitung der Regel:

zu 1 % für 1 Tag betragen die Zinsen $\frac{1}{360}$ von 7·25 fl.,
» 6 % » 1 » » » » $\frac{6}{360}$ oder $\frac{1}{60}$ v. 7·25 fl. = 0·12 fl.

b) Kurz: 7·25 fl. : 60 = 0·12 fl.

2.) Berechne die Zinsen zu 6 % von 8736 fl. für 42 Tage.

a) Zu 6 % für 1 Tag betragen die Zinsen $\frac{87 \cdot 36}{60}$ fl.
» 6 % » 42 Tage » » » $\frac{87 \cdot 36}{60} \cdot 42 = 61 \cdot 15$ fl.

b) Kurz: $\frac{8 \cdot 7 \cdot 36 \,.\, 42\ 7}{60} = 61 \cdot 152$ fl.

3.) Wie groß sind die Zinsen zu 5 % von 816 fl. für 52 Tage?

```
  816 × 52
  ────────
  4080
   1632
  ────────
  42,432 : 6,000 = 7·072 fl. Zinsen zu 6 %
                   1·178 »  »  » 1 %
                   ─────────────────
                   5·894 »  »  » 5 %
```

Die schriftliche Berechnung ist größtentheils der mündlichen angepasst.

VI. Raumlehre.

§ 76. Jede Schule soll mit mehreren geometrischen Körpern, z. B. mit einem Würfel, rechtwinkligen Parallelepiped, einem drei- und sechsseitigen senkrechten Prisma, einer vierseitigen senkrechten Pyramide, mit

einem senkrechten Cylinder, einem senkrechten Kegel und einer Kugel versehen sein. Da man bei Schulen minderer Kategorie auch einen niederern Standpunkt einzunehmen hat, werden im Anhange zum vierten Rechenbuche die abgekürzte Pyramide und der abgekürzte Kegel nicht besprochen; in der Anleitung sollen jedoch diese Körper entsprechenden Orts behandelt werden, weil sie doch von praktischer Bedeutung sind und in günstigen Fällen die Rauminhaltsberechnung derselben befähigten Schülern beigebracht werden kann. Den Schülern sollen alle die zu betrachtenden geometrischen und auch andere im Schulzimmer befindlichen Körper in Bezug auf ihre Ausdehnung, Begrenzung u. s. w. (vergl. Anhang zum vierten Rechenbuche S. 31 bis 33) der Reihe nach vorgeführt werden; dadurch werden sie mit den Grundbegriffen der Raumlehre bekannt und auch befähigt, ihre Gedanken auf die **Form allein** zu sammeln. Um letzteres zu erreichen, muss man den Schülern zur geistigen Verarbeitung Zeit lassen, daher übergehe man **nicht zu früh** zu den späteren Partien; man betrachte also diesbezüglich die Körper **wiederholt.** Das Verfahren ergibt sich unmittelbar aus dem Rechenbuche, ebenso die Anordnung des Stoffes. Zuerst wird der Punkt besprochen, dann die Linie (die gerade und die Kreislinie), später die Winkel, die Figuren u. s. w. Alle diese Raumgebilde werden jedoch zugleich an den entsprechenden Körpern betrachtet, weil sie ja nie für sich allein, sondern nur an Körpern vorkommen; dadurch werden die Schüler gewöhnt, ihre Aufmerksamkeit den Formen ihrer Umgebung zuzuwenden.

Großes Gewicht wird auf das Messen im Schulzimmer und im Freien gelegt; und wenn es nur möglich ist, soll man den Schülern Messvorrichtungen wie Messbänder, Messlatten, Messketten im praktischen Gebrauche zeigen.

§ 77. Die Flächeninhaltsberechnung des Rechteckes und Quadrates wurde schon vorgenommen; doch soll das bereits Bekannte wiederholt werden, um es zu befestigen und um an Bekanntes Neues anzuschließen.

Die Flächeninhaltsberechnung des Trapezes und der unregelmäßigen Vielecke soll auf die Flächeninhaltsberechnung des Dreieckes zurückgeführt werden, indem man das Vieleck durch Diagonale in Dreiecke zerlegt, deren Flächeninhalte bestimmt und addiert. Die Oberflächenberechnung der Körper erscheint in Verbindung gebracht mit den Flächeninhaltsberechnungen. Die Berechnung der Kugeloberfläche kann man den Schülern nicht erklären, es wird ihnen einfach die Regel angeführt.

§ 78. Die Cubikinhaltsberechnung der Prismen beruht auf der Berechnung des Cubikinhaltes eines rechtwinkligen Parallelepipeds; die Berechnungen bei der Pyramide stützen sich auf das Prisma und die Berechnungen der drei runden Körper des Cylinders, des Kegels und der Kugel auf jene beiden Körper.

Bevor man jedoch zur Cubikinhaltsberechnung übergeht, muss man die Schüler mit den Körpermaßen vertraut machen. Dieselben sollen sinnlich veranschaulicht werden. Ein Cubikmeter kann aus Meterstäben zusammengesetzt werden. Ein Cubikdecimeter soll jedoch zerlegbar sein, und zwar soll man von ihm eine Platte von 100 cm^3 trennen können, von dieser wieder eine Reihe von 10 cm^3 und von dieser 1 cm^3; die übrige Zerlegbarkeit in Platten zu 100 cm^3, in Reihen zu 10 cm^3 und in Cubikcentimeter soll jedoch durch dunkle Striche angedeutet werden.

Auf die natürlichste Art misst man, wenn man untersucht, wie oft die Maßeinheit im betreffenden Körper enthalten ist; dies ist aber in den seltensten Fällen möglich, daher muss man das Messen der Körper auf das Messen gewisser Strecken zurückführen.

Obwohl sich das Verfahren aus dem Rechenbuche ergibt, soll hier die Cubikinhaltsberechnung des rechtwinkligen Parallelepipeds erläutert werden.

§ 79. Aufgabe: In einem rechtwinkligen Parallelepipede betrage die Länge 4 *dm*, die Breite 3 *dm* und die Höhe 5 *dm*; bestimme den Cubikinhalt. Da das Parallelepiped 4 *dm* lang ist, so lassen sich längs der Länge auf der Grundfläche 4 dm^3 auftragen; und da die Grundfläche 3 *dm* breit ist, so lassen sich auf derselben drei Reihen zu 4 dm^3,

also 3mal 4 dm^3, d. s. 12 dm^3, auftragen (oder auch: der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $4 \times 3 = 12$ dm^3, es lassen sich also auf derselben 12 dm^3 auftragen); und da das Parallelepiped 5 *dm* hoch ist, so lassen sich im ganzen Körper 5 Schichten zu 12 dm^3, also 5mal 12 dm^3, d. s. 60 dm^3, auftragen.

Soll auch durch eine Zeichnung erläutert werden.

Aus mehreren solchen Beispielen erkennt man, dass man nur die Länge, Breite und Höhe des Parallelepipeds zu messen braucht, um durch Rechnung den Cubikinhalt zu bestimmen, und zwar nach dem Satze:

Der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds wird berechnet, indem man die Maßzahlen der Länge, Breite und Höhe oder die Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multipliciert.

Durch Aufgaben, wie sie im Anhang zum vierten Rechenbuche S. 46 von 1 bis 5 vorkommen, überzeugt man sich, dass Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen denselben Cubikinhalt haben, dass also der Cubikinhalt eines jeden Prisma gerade so berechnet wird, wie der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds von gleicher Grundfläche und Höhe, indem man nämlich die Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multipliciert.

§ 80. Eine abgekürzte Pyramide bekommt man, wenn man eine Pyramide parallel zu ihrer Grundfläche schneidet; die abgeschnittene Pyramide soll im Gegensatze zur gegebenen, zur großen Pyramide die kleine Pyramide heißen. Um den Cubikinhalt einer abgekürzten Pyramide zu berechnen, muss man den Cubikinhalt der kleinen Pyramide vom Cubikinhalt der großen Pyramide subtrahieren. Es ist also vor allem nothwendig, aus der Höhe der abgekürzten Pyramide und aus den Seiten ihrer Grundflächen die Höhe der großen Pyramide zu berechnen. Die Höhe der kleinen Pyramide ist dann gleich dem Unterschiede der bereits bekannten Höhen. Dies soll an einem Beispiele gezeigt werden.

Aufgabe: Berechne den Cubikinhalt einer senkrechten vierseitigen abgekürzten 15 *cm* hohen Pyramide, deren untere Grundfläche 8 *cm* und deren obere Grundfläche 3 *cm* zur Seitenlänge hat.

Die Länge der Seite der unteren Grundfläche nimmt bei einer Höhe von 15 *cm* um 5 *cm* und bis zur Spitze um 8 *cm* ab.

Ist zur Abnahme um 5 *cm* eine Höhe von 15 *cm* erforderlich, so
ist » » » 1 » » » » $\frac{1}{5}$ v. 15 *cm* = 3 *cm*
und » » » 8 » » » » 8mal 3 » = 24 »
erforderlich. Also beträgt die Höhe der großen Pyramide 24 *cm* und die Höhe der kleinen Pyramide 24 — 15 = 9 *cm*.

Der Cubikinhalt der großen Pyramide = $64 \cdot \frac{24}{3}$ = 512 cm^3
» » » kleinen » = $9 \cdot \frac{9}{3}$ = 27 »
» » » abgekürzten » . . . . . = 485 cm^3

Beim abgekürzten Kegel bestimmt man die Höhe des großen und des kleinen Kegels ähnlich.

Aufgabe: Berechne den Cubikinhalt eines senkrechten abgekürzten, 20 *cm* hohen Kegels, dessen untere Grundfläche 12 *cm* und dessen obere Grundfläche 8 *cm* zum Halbmesser hat.

Die Länge des Halbmessers der unteren Grundfläche nimmt bei einer Höhe von 20 *cm* um 4 *cm* und bis zur Spitze um 12 *cm* ab.

Ist zur Abnahme um 4 *cm* eine Höhe von 20 *cm* erforderlich, so
ist » » » 1 » » » » $\frac{1}{4}$ v. 20 *cm* = 5 *cm*
und » » » 12 » » » » 12mal 5 » = 60 »
erforderlich. Also beträgt die Höhe des großen Kegels 60 *cm* und die Höhe des kleinen Kegels 60 — 20 = 40 *cm*.

Der Cubikinhalt des großen Kegels = $24 . 3{\cdot}14 . 6 . \frac{60}{3}$ = 9043·2 cm^3
» » » kleinen » = $16 . 3{\cdot}14 . 4 . \frac{40}{3}$ = 2679·5 »
» » » abgekürzten Kegels . . . . . = 6363·7 cm^3

ЕРМИТАЖ
ЛИБРАРИ