

Univerza v Mariboru
Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko
Inštitut za elektroniko in telekomunikacije



Tomaž Dogša

CAE/CAD v elektroniki

Analiza in načrtovanje toleranc

Maribor 2010

Copyright 2010. Druga popravljena izdaja, junij 2010.

Prva izdaja, september 2007.

NASLOV: CAE/CAD v elektroniki: Analiza in načrtovanje toleranc

AVTOR: izr. prof. dr. Tomaž Dogša

VRSTA PUBLIKACIJE: učbenik v elektronski obliki. Dostopen je v digitalni knjižnici UKM in na naslovu <http://saturn.uni-mb.si/~dogsa/rnv/rnv.html>.

RECENZENTI: izr. prof. Tadej Tuma, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani,
izr. prof. Rudolf Babič, izr. prof. Gorazd Lešnjak, Fakulteta za
elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Univerza v Mariboru

PRELOM STRANI IN OBLIKOVANJE OVITKA: Tomaž Dogša

LEKTORIRANJE: Tina Škrajnar

Vse pravice so pridržane.

Popravki, rešitve nalog itd.: <http://saturn.uni-mb.si/~dogsa/rnv/rnv.html>

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor

621.38.049.77:004.92(075.8)

DOGŠA, Tomaž

CAE/CAD v elektroniki. Analiza in načrtovanje toleranc [Elektronski vir] / Tomaž Dogša. -
2. popravljena izd. - Maribor : Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko,
Inštitut za elektroniko in telekomunikacije, 2010

Način dostopa (URL): <http://saturn.uni-mb.si/~dogsa/rnv/rnv.html>

ISBN 978-961-248-233-6

COBISS.SI-ID 65052417

Avtorjev naslov:

Tomaž Dogša
Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko,
Smetanova 17, 2000 Maribor
tdogsa@uni-mb.si

Datoteke: G_C_Analiza_in_nacrtovanje_toleranc_OVITEK.DOC,
G_C_Analiza_in_nacrtovanje_toleranc.doc,
G_D_Statistika.doc .
Datum pretvorbe v pdf format: 1. julij 2010

PREDGOVOR

Ta učbenik je namenjen predvsem študentom, ki poslušajo predmet Računalniško načrtovanje vezij oziroma jih zanima problematika načrtovanja vezij. V učbeniku sem predpostavil, da je bralec seznanjen z osnovnimi analizami vezij oziroma s simulatorjem SPICE ter da obvlada osnove elektronike. Osnovne analize vezij s simulatorjem SPICE so opisane v mnogih tujih¹ in domačih knjigah [TUMA, 1997].

Težavnost učbenika je prilagojena novim bolonjskim učnim programom: dodano je dosti zgledov, izpuščena je nepotrebna teorija in naprednim študentom je omogočeno poglobljanje. Nekatera poglavja so sicer dokaj obširna, vendar so dodana zato, da je z njimi zaokrožena celotna problematika. Konkretna zahteve glede potrebnega znanja so podrobneje definirane v učnem načrtu.

Proučevanje vpliva variabilnosti parametrov je zelo zanimiv segment načrtovanja, ki je v učbenikih pogosto zanemarjen. Ker so teoretični temelji občutljivosti zelo temeljito opisani v učbeniku [BRATKOVIČ, 1992], sem se osredotočil bolj na praktično uporabo. Ker je bila v preteklosti uporaba računalnika povezana z nakupom dragih delovnih postaj in ustrezne programske opreme, se je le malo inženirjev ukvarjalo s problematiko, ki je povezana s tolerancami. S pocenitvijo računalniške opreme so tudi CAE/CAD orodja postala dostopna širši strokovni javnosti. Sodobni simulatorji omogočajo uporabo skriptnih jezikov, s pomočjo katerih je možno implementirati mnoge zahtevnejše analize, kot je na primer analiza najbolj neugodnega primera. Kljub določeni avtomatizaciji je potrebno razumevanje ozadja teh analiz. Prav to pa je namen tega učbenika.

Vsebina učbenika je razdeljena na devet poglavij. Naloge, ki so povezane z nekim računanjem, so dodane le na koncu poglavij. Rešitve, ki naj olajšajo pripravo študentov na izpit, bodo kasneje izdane v posebni publikaciji. Do izdaje bodo dostopne na mojih spletnih straneh². V vsakem poglavju je mnogo konkretnih zgledov, pri katerih je uporabljen simulator SPICE firme Intusoft, ki temelji na Berkleyevem simulatorju 3f4. Večina izpisov oziroma analiz je napravljena s pomočjo skriptov oziroma skriptnega jezika.

Po uvodu sledi poglavje, ki je namenjeno definiciji tolerance. Ker se koeficienti občutljivosti uporabljajo skoraj v vseh poglavjih, je poglavje z naslovom *Analiza občutljivosti* skoraj takoj na začetku. Razumevanje tega poglavja je za nadaljnje analize zelo pomembno. *Analiza toleranc* je razdeljena na dva dela: na analizo najbolj neugodnega primera in na oceno statistične tolerance. Ker je pri slednji potrebno obvladati osnove statistike in verjetnosti, je v zadnjem poglavju dodana kratka razlaga osnov statistike. Podrobnejše razlage so v mnogih

¹ [HYMOWITZ, 1988], [TUINENGA, 1988], [LAMEY, 1994], [RASHID, 2003].

² <http://saturn.uni-mb.si/~dogsa/>

učbenikih, od katerih najbolj priporočam [ČIBEJ, 1998] in [CHATFIELD, 1983]. Po kratkem poglavju *Primerjava metod za analizo toleranc* sledi pomembno poglavje *Načrtovanje toleranc*. Za razumevanje tega poglavja je potrebno obvladati vsa predhodna poglavja. Na koncu je naštetá literatura, ki naj študenta vpelje v podrobnejšo problematiko načrtovanja in analize toleranc ter statistike. V prilogi je še dodana lestvica vrednosti po DIN IEC 63.

Predgovor k drugi izdaji

Večjih sprememb ni. Popravil sem samo vse najdene napake. Ta izdaja obstaja samo v elektronski obliki.

Junij, 2010

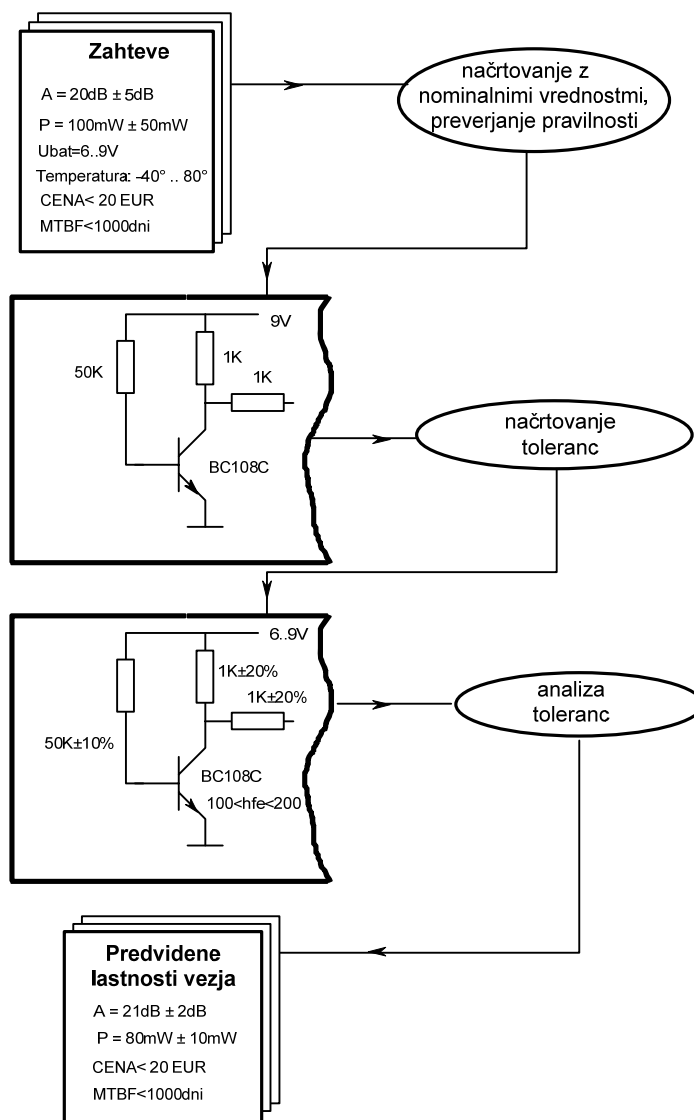
Kazalo

1. Uvod.....	7
2. Definicija in meritev toleranc.....	9
2.1 Meritev toleranc	12
2.2 Standardne vrednosti parametrov	14
2.3 Naloge za poglavje 2	16
3. Analiza občutljivosti.....	17
3.1 Meritev občutljivosti (perturbacijska metoda)	19
3.2 Analitični izračun občutljivosti	20
3.3 Normirana občutljivost.....	21
3.4 Določitev občutljivosti s simulatorjem.....	25
3.5 Naloge za poglavje 3	28
4. Pregled metod za analizo toleranc	31
5. Analiza najbolj neugodnega primera	32
5.1 Analitična metoda.....	32
5.2 Linearizacija lastnosti v prostoru toleranc.....	35
5.3 Metoda z vsemi možnimi kombinacijami vrednosti parametrov.....	38
5.4 Metoda z izborom ekstremnih vrednosti parametrov	39
5.5 Izbor ustreznih ekstremnih vrednosti parametrov s pomočjo podatkov o občutljivosti	40
5.6 Naloge za poglavje 5	43
6. Ocena statistične tolerance in izmeta	45
6.1 Hitra ocena statistične tolerance.....	45
6.2 Statistična ocena z Monte Carlo analizo	47
6.3 Lastnosti in uporaba Monte Carlo analize.....	49
6.4 Računalniško podprta Monte Carlo analiza	50
6.5 Simulacija proizvodnje.....	54
6.6 Naloge za poglavje 6	58
7. Primerjava metod za analizo toleranc.....	60
8. Načrtovanje toleranc parametrov.....	61
8.1 Predpisana je (statistična) toleranca samo ene lastnosti	63
8.2 Predpisan je najbolj neugoden primer za eno lastnost – poenostavitev z linearizacijo.....	64
8.3 Predpisan je najbolj neugoden primer za več nelinearnih lastnosti.....	65
8.4 Predpisan je najbolj neugoden primer za več lastnosti – poenostavitev z linearizacijo.....	69
8.5 Naloge za poglavje 8	74

9.	Osnove statistične analize	76
9.1	Diskretna porazdelitev	78
9.2	Zvezna porazdelitev	84
9.3	Frekvenčna porazdelitev	85
9.4	Kumulativna frekvenčna porazdelitev	89
9.5	Gostota verjetnosti	90
9.6	Zvezna porazdelitvena funkcija	92
9.7	Mere povprečja	93
9.8	Mere razpršenosti	96
9.9	Enakomerna porazdelitev	98
9.10	Normalna ali Gaussova porazdelitev	99
9.11	Ocenitev standardne deviacije celotne populacije s pomočjo vzorca	104
9.12	Naloge za poglavje 9	105
10.	Literatura	107
11.	Priloge	109
11.1	Lestvice vrednosti po DIN IEC 63	109
12.	Stvarno kazalo	111

1. Uvod

Načrtovanje vezja se začne s postavitvijo zahtev oziroma specifikacij, ki morajo biti definirane v obliki intervalov (glej sliko 1.1). Nato sledi načrtovanje z idealnimi vrednostmi elementov in drugih parametrov. Idealni so zato, ker pri njih ne upoštevamo njihove neizogibne variabilnosti. Tem vrednostim pravimo tudi nazivne ali nominalne. Najprej poiščemo takšne nazivne vrednosti elementov, da je zadoščeno specifikacijam. Ker variacija vrednosti elementov (npr. temperature, baterijske napetosti, vrednosti uporov) povzroči tudi variacijo lastnosti vezja, sledi načrtovanje toleranc, ki pove, v kakšnem obsegu lahko variirajo parametri, ne da bi presegli dovoljene meje, podane v specifikacijah. S postopkom, ki mu pravimo analiza toleranc, nato preverimo vpliv zunanjih dejavnikov (npr. temperature) in pravilnost načrtovanja toleranc.



Slika 1.1 Načrtovanje in analiza toleranc v razvojnem ciklusu.

Tako poteka vsako načrtovanje, ki je namenjeno masovni proizvodnji. Tipična vprašanja, na katera mora načrtovalec odgovoriti, so³:

- Ali bo vezje še delovalo znotraj dopustnih odstopanj, če se bo temperatura spreminjala v -20 °C do 60 °C?
- Ali bo ojačevalnik še vedno deloval, ko bo napetost padla za 20 %?
- Kolikšne so lahko tolerance uporov in kondenzatorjev?
- Ali je komponenta LM741 primerna za doseganje postavljenih zahtev?

Proučevanje vpliva variiranja vrednosti elementov je glavni namen tega učbenika. Ker vedno velja, da se z oženjem toleranc elementov viša njihova cena, je načrtovanje toleranc zelo pomembna aktivnost. **Robustnost** je lastnost vezja, ki pove, v kolikšni meri je odporno na spremembo vrednosti elementov, iz katerih je zgrajeno. Z dobrim načrtovanjem lahko zelo zmanjšamo vpliv toleranc elementov oziroma povečamo robustnost.

V poglavjih, ki sledijo, se bomo podrobneje seznanili s celotnim postopkom analize in načrtovanja toleranc.

³ Vprašanja se nanašajo na zgled, ki je na sliki 1.1.

2. Definicija in meritev toleranc

Vzroke za spremembe lastnosti vezja lahko razdelimo v dve skupini: **notranji** in **zunanji** vzroki. Notranji vzroki so povezani z lastnostmi gradnikov. Tovarna, ki izdeluje 10nF kondenzatorje, nikakor ne more izdelovati popolnoma enakih kondenzatorjev. Vrednost neke lastnosti, ki je bila pri izdelavi zahtevana, bomo imenovali **nazivna** ali **nominalna** vrednost. Razlike, ki se bodo vedno pojavljale med posameznimi gradniki, nastanejo zaradi tehnoloških postopkov in merilne negotovosti. Zunanji vzroki so povezani s spremembo okolja (npr. temperatura), staranjem elementa (npr. napetost baterije) in variacijo zunanjih virov oziroma bremen (npr. na izhod usmernika lahko priključimo različna bremenja). V večini primerov na zunanje vzroke ne moremo vplivati, saj so sestavni del zahtev. Zaradi tega dejstva mora vsak **kvantitativni opis lastnosti ali parametra vsebovati tudi dopustno odstopanje**, kar pomeni, da mora biti definiran z odprtim ali zaprtim intervalom. Temu intervalu pravimo toleranca. Za toleranco obstajata dve vrsti definicij.

1. definicija: toleranca je dopustna razlika med najvišjo in najnižjo dovoljeno vrednostjo nekega parametra oziroma lastnosti.

V bistvu gre za maksimalno in minimalno vrednost parametra oziroma lastnosti. Odstopanje je lahko simetrično ali nesimetrično. Najpogosteje imamo opravka s simetrično podano toleranco.

Zgled:

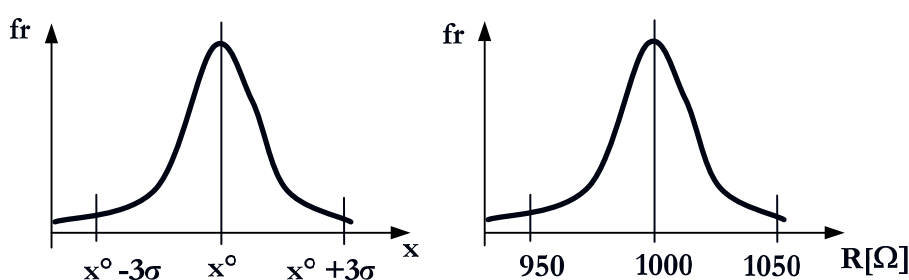
1. simetrično podana toleranca: $U = 5 \text{ V} \pm 0,5 \text{ V}$ ali $(5 \pm 0,5)\text{V}$ ali $5 \text{ V} \pm 10 \%$
2. nesimetrično podana toleranca: 7 V do 10 V nominalna vrednost 9 V

Prva definicija zadošča, kadar govorimo o nekaj primerkih. V primeru masovne proizvodnje se toleranca nanaša na večje število primerkov. Ker nikoli ne moremo zagotovo vedeti, kolikšna bo dejanska vrednost parametra naslednjega primerka, oziroma lastnosti, je njegova vrednost **naključni dogodek**, ki ga lahko obravnavamo s stališča **verjetnosti** oziroma **statistike**. Večina proizvodnih procesov je takšne narave, da se izmerjene vrednosti, s katerimi podajamo neko lastnost, distribuirajo po Gaussovi porazdelitveni funkciji. Zato se po dogovoru definira toleranca kot področje, v katerega pade 99,73 % vseh vrednosti, oziroma (glej sliko 2.2) :

$$x^{\circ} \pm 3\sigma \quad (2.1)$$

2. definicija: toleranca je področje, v katerega pade 99,73 % vseh primerkov.

Tako definirana toleranca pomeni, da še vedno obstaja približno 0,3 % verjetnosti, da bo vrednost nekega primerka ležala izven tolerančnega intervala (glej tabelo 2.1). V množici elementov se bo največkrat pojavil takšen, ki bo imel nominalno vrednost in zelo redko ekstremne vrednosti. Tipičen zgled je upor, npr. $1k\Omega \pm 5\%$.



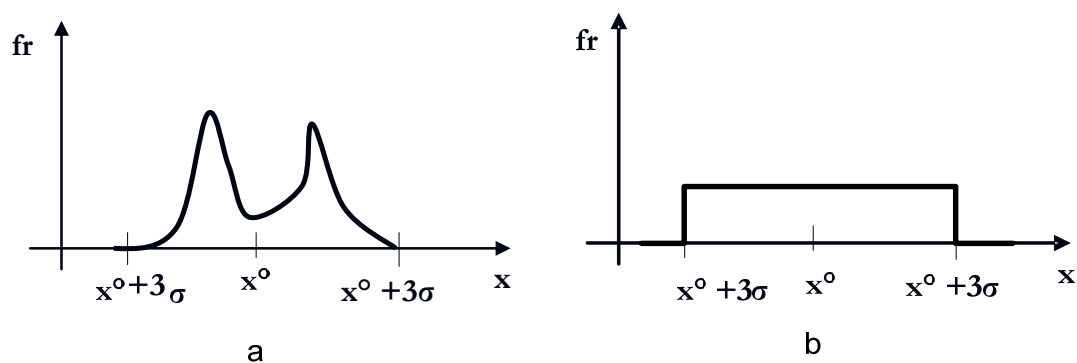
Slika 2.2 Gaussova porazdelitev vrednosti neke lastnosti x in upora $1k\Omega \pm 5\%$

V praksi se vedno ne srečujemo z Gaussovo porazdelitvijo, saj pogosto proizvajalci izločijo elemente, ki imajo ožje tolerance (glej sliko 2.3a). Izločene elemente ponujajo kot elemente, ki so izdelani v ožjem tolerančnem razredu. Občasno se pojavlja tudi enakomerna porazdelitev, kjer obstaja enaka verjetnost, za vsako vrednost znotraj intervala $x^\circ \pm 3\sigma$ (glej sliko 2.3b).

Tabela 2.1 Verjetnost pri različnih vrednostih σ .

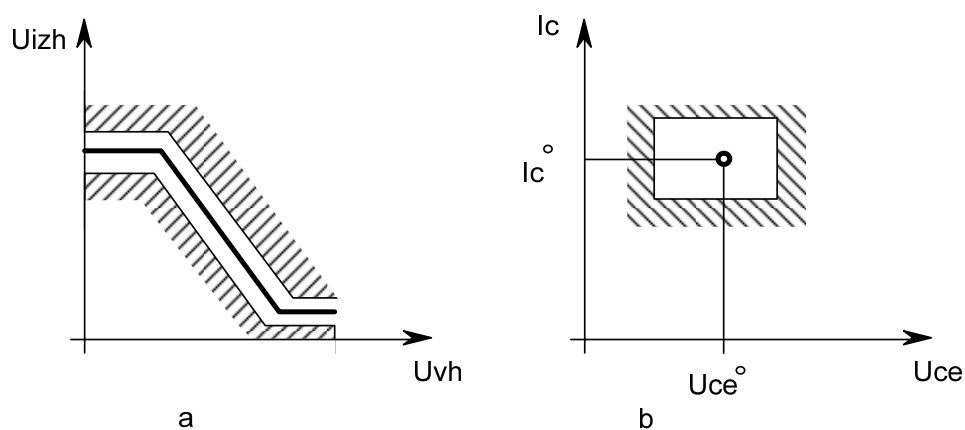
k	$P\{-k < X < k\}$	$P\{-k > X > k\}$
σ	68.26 %	31,74 %
2σ	95.44 %	45,60 %
3σ	99.73 %	0,27 %
4σ	99.9936 %	$6,4 \cdot 10^{-3} \%$
5σ	99.999 9426 %	$5,7 \cdot 10^{-5} \%$
6σ	99.999 999 802 %	$1,98 \cdot 10^{-7} \%$
7σ	99.999 999 999 74 %	$2,6 \cdot 10^{-10} \%$

Variacije parametrov niso vedno statistično neodvisne, ampak so lahko tudi korelirane. Npr. pri proizvodnji integriranih vezij imajo vsi difuzijski upori bodisi preveliko ali pa premajhno vrednost.

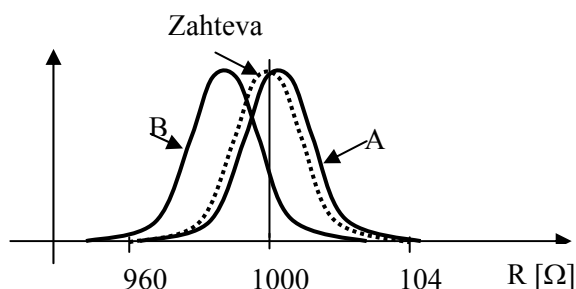


Slika 2.3 a. Porazdelitev, pri kateri so izločeni elementi z ožjimi tolerancami in b. enakomerna porazdelitev.

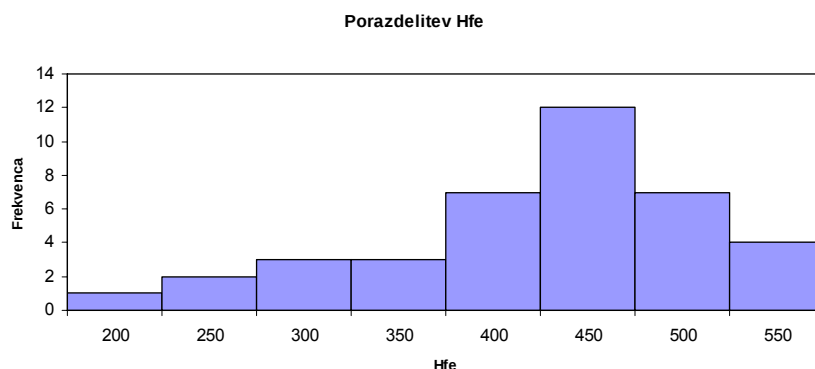
Lastnosti vezij so lahko definirane tudi z grafi. Tudi tukaj uporabljamo simetrični in nesimetrični način podajanja tolerančnega območja, npr. narišemo lahko nominalno karakteristiko in območje $\pm 3\sigma$.



Slika 2.4 Tolerančno področje neke karakteristike (a) in tolerančno območje delovne točke tranzistorja (b).



Slika 2.5 Zgled – Porazdelitev upornosti $1k\Omega \pm 5\%$ v vzorcu 40 uporov. Proizvajalec A: srednja vrednost $= 1001\Omega$, $s = 5\Omega$. Proizvajalec B: srednja vrednost $= 984\Omega$, $s = 7\Omega$. Zahtevano : srednja vrednost $= 1000\Omega$, $s = 17\Omega$.

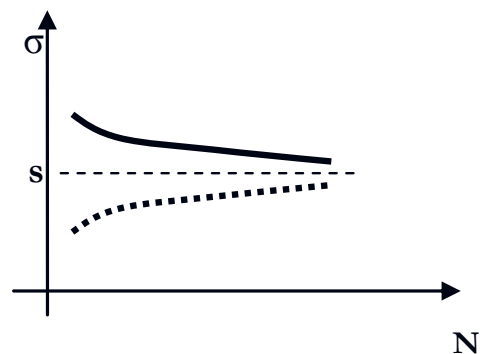


Slika 2.6 Porazdelitev izmerjenih vrednosti tokovnega ojačenja tranzistorja BC547B. (Podatki v katalogu: tipična vrednost 450, minimalna 200.)

2.1 Meritev toleranc

Če imamo veliko število elementov, izberemo samo vzorec le-teh, s pomočjo katerega nato ocenimo standardno deviacijo celotne populacije. Predpostavili bomo, da imamo naključno izbranih N primerkov in da lahko pri meritvi določene lastnosti oziroma parametra zanemarimo merilni pogrešek. Naj bo s standardna deviacija vzorca in σ standardna deviacija celotne populacije. Le pri velikem N je srednja vrednost vzorca približno enaka nominalni vrednosti celotne populacije, iz katere smo izbrali N primerkov. Isto velja za standardno deviacijo: $\sigma \approx s$. Z manjšanjem števila primerkov se natančnost ocene slabša (glej tabelo 2.2 in sliko 2.7). Npr. pri 100 vzorcih in pri 95 % stopnji zaupanja je standardna deviacija celotne populacije $\sigma = \pm 14\%$. Šele pri 200 primerkih pade natančnost ocene na $\pm 10\%$. Pri oceni standardne deviacije celotne

populacije vzamemo **najbolj neugoden primer**, to je pozitivno vrednost napake. Na sliki 2.7 je to označeno s polno črto.



Slika 2.7 Z večanjem števila primerkov se manjša interval, znotraj katerega leži σ . Polna črta je najbolj pesimistična ocena, črtkana pa najbolj optimistična.

Tabela 2.2 Standardna deviacija celotne populacije σ v odvisnosti od števila primerkov za 95 % stopnjo zaupanja. Standardna deviacija vzorca je označena s črko s. Prikazan je najbolj neugoden primer.

N	σ
10	$s+44\%$
50	$s+20\%$
100	$s+14\%$
200	$s+10\%$

Zgled 1

Iz množice istih napetostnih virov z znano toleranco $\pm 20\%$ smo vzeli različno velik vzorec naključnih primerkov. Na podlagi tega vzorca smo ocenili standardno deviacijo celotne populacije oziroma toleranco (glej tabelo 2.3). Vidimo, da se rezultat neprestano spreminja in šele pri velikem številu primerkov se ocena približa dejanski toleranci.

Tabela 2.3 Statistični podatki za napetostni vir $UG = 10V \pm 20\%$. Velikost vzorca je označena z N. Stopnja zaupanja je 95 %.

UG	N=10	N=50	N=100	N=200	N=500	N=∞
Sred. vred.	10,05	10,06	9,97	9,98	9,99	10,00
Stand. dev. s	0,743	0,585	0,610	0,568	0,626	0,666
Toleranca 3σ	31,9 %	20,8 %	20,9 %	18,7 %	19,9 %	20,0 %
Max. vred.	11,61	11,61	11,61	11,61	11,93	12,00
Min. vred.	8,940	8,779	8,77	8,77	8,28	8,00

Zgled 2

Iz množice kondenzatorjev smo naključno izbrali 10 primerkov in izmerili njihovo kapacitivnost. Izmerjene so bile naslednje vrednosti v pF: 25, 24, 22, 25, 26, 20, 25, 24, 26, 21. Približno oceni, kolikšne so tolerance.

Rešitev:

Kondenzatorji v vzorcu imajo kapacitivnost med 20 pF in 26 pF. Srednja vrednost vzorca je 24 pF in standardna deviacija je 2 pF. Ker imamo zelo majhen vzorec (samo 10 primerkov), ocenjujemo, da leži σ celotne populacije nekje v intervalu $2 \text{ pF} \pm 44 \%$ oziroma 1,12 pF..2,88 pF. Ker bomo upoštevali najbolj neugoden primer, bomo izbrali za sigmo vrednost: $2 \text{ pF} + 44 \% \approx 3 \text{ pF}$. Na podlagi vzorca ocenjujemo, da imajo kondenzatorji v celotni seriji kapacitivnost $(24 \pm 9) \text{ pF}$.

Popolnoma napačen je zaključek, da je toleranca kondenzatorjev 20 pF ... 26 pF, saj se ti podatki nanašajo le na vzorec in ne na celotno populacijo!

2.2 Standardne vrednosti parametrov

Večina vrednosti parametrov oziroma lastnosti lahko zavzame katerokoli vrednost in katerokoli toleranco. Npr. ojačevalnik ima lahko moč $22\text{W} \pm 7 \%$ in integriran upor upornost $11,2\text{K} \pm 5 \%$. Zaradi enostavnejšega načrtovanja in ekonomskih vzrokov je pogosto smotno, da lastnosti gradnikov zavzamejo točno določene standardizirane vrednosti, ki imajo tudi določeno toleranco. Npr. diskretni upor ima lahko vrednost $150\text{K} \pm 20 \%$, medtem ko kombinacija $180\text{K} \pm 20 \%$ ne obstaja.

Po standardu DIN IEC 63 so vrednosti parametrov in njihove tolerance izbrane tako, da brez lukenj pokrijejo določeno področje. Niz vrednosti je definiran z izrazom, ki ga je potrebno pravilno zaokrožiti:

$$x(i) = 100e^{\frac{i-1}{N} \ln(10)} \quad (2.2)$$

i: zaporedni indeks v seriji, N: število vrednosti v dekadi.

Niz vrednosti ima oznako E<N>, kjer je N število vrednosti v dekadi. Npr. E6 pomeni, da je dekada razdeljena na 6 vrednosti. Po dogovoru ima naslednja vrsta vedno dvakrat več vrednosti: E3, E6, E12, itd. (glej tabelo 2.4). Število vrednosti v dekadi in toleranca ter cena so seveda povezani: več je vrednosti, nižja je toleranca in višja je cena. Npr. lestvica E6 ima v dekadi 6 vrednosti,

druga po vrsti je $150 \pm 20\%$. Pri izbiri vrednosti je pogosto potrebno izbrati eno izmed sosednjih vrednosti. Če poznamo občutljivost⁴, je odločitev enostavna.

Tabela 2.4 Standardizirana lestvica vrednosti⁵.

E3 (50 %)	E6 (20 %)	E12 (10 %)
100	100	100
		120
220	150	150
	220	180
		220
⋮	⋮	⋮

Tudi načrtovalci integriranih vezij so pri izbiri dimenzij vezani na tehnološke parametre: vsaka dimenzija mora biti mnogokratnik določene konstante.

⁴ Občutljivost bo razložena v naslednjem poglavju.

⁵ Celotna tabela je v prilogi.

2.3 Naloge za poglavje 2

1. Tovarna proizvaja ojačevalnike z nazivno močjo 24W. Iz tekočega traku smo vzeli 10 ojačevalnikov in izmerili njihovo moč. Oceni toleranco moči ojačevalnikov, ki jih proizvaja tovarna.

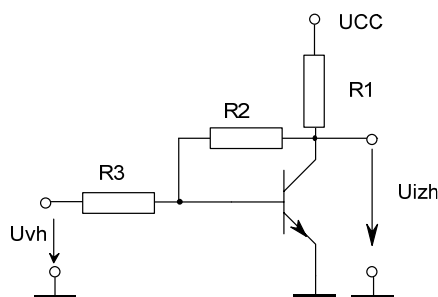
Rezultati meritev: 25W, 24W, 22W, 25W, 26W, 22W, 25W, 24W, 26W, 21W.

2. Imamo usmernik z napetostjo 5 ± 1 V. Kolikšna je verjetnost, da bo napetost na njegovem izhodu ležala v intervalu 4,8 do 5,2V? Kolikšna je verjetnost, da bo napetost manjša od 4,5V? Predpostavi, da so vrednosti napetosti porazdeljene po Gaussovi porazdelitvi⁶.

⁶ Za rešitev te naloge je potrebno obvladati podpoglavje Normalna ali Gaussova porazdelitev, ki se nahaja v poglavju Osnove statistike.

3. Analiza občutljivosti

Proučevanje vpliva majhne spremembe nekega parametra na določeno lastnost vezja je osrednji problem, s katerim se ukvarja *analiza občutljivosti* (sensitivity analysis). V bistvu nas zanima, v kolikšni meri je neka lastnost vezja občutljiva na spremembo posameznih parametrov. Npr. za ojačevalnik na sliki 3.1 nas zanima, v kolikšni meri vpliva sprememba napajalne napetosti U_{CC} na kolektorski tok I_c .



Slika 3.1 Preprost ojačevalnik.

To bi enostavno ugotovili tako, da bi najprej izmerili tok delovne točke, nato pa povišali napetost U_{CC} za 2V. Ugotovili bi, da se je tok povečal za 4mA. Kvantitativno ovrednotimo občutljivost tako, da izračunamo kvocient:

$$\frac{\text{sprememba lastnosti}}{\text{sprememba parametra}} = \frac{\Delta I_c}{\Delta U_{CC}} = \frac{4mA}{2V} = 2mA/V \quad (3.1)$$

Občutljivost običajno označujemo s črko S , ki ji lahko dodamo tudi dva parametra:

$$S_{U_{CC}}^{I_c} = 2mA/V \quad \text{ali} \quad S(I_c, U_{CC}) = 2mA/V$$

Rezultat preberemo in interpretiramo na naslednji način: *občutljivost toka I_{cc} na spremembo napetosti U_{cc} v delovni točki je $2mA/V$* , kar pomeni, da se pri dvigu napetosti za 1V tok poveča za 2mA.

Podatki o občutljivostih so zelo uporabni, saj jih potrebujemo pri:

1. analizi in načrtovanju toleranc,

2. pravilnem zaokroževanju nazivnih vrednosti⁷,
3. iskanju parametra, s katerim bomo korigirali lastnost,
4. identifikaciji kritičnih elementov.

Občutljivost lahko izračunamo na več načinov: na analitični način, s perturbacijsko metodo, s pomočjo Tellegenovega teorema in inkrementalnega vezja⁸. V nadaljevanju bomo obravnavali samo prvi dve metodi.

Sedaj skušajmo idejo o občutljivosti posplošiti. Vezje, ki ga načrtujemo, mora zadostiti več zahtevam oziroma mora imeti določene lastnosti, npr.: vhodna upornost, ojačenje, zgornja frekvenčna meja, prenosna karakteristika itd. Npr.:

$$P = \frac{U^2}{R1 + R2} = F_1(U, R1, R2)$$

$$A_u = -\sqrt{\frac{k'_n W_a / L_a}{k'_p W_b / L_b}} = F_2(W_a, L_a, W_b, L_b)$$

Te lastnosti bomo označili s $F_1, F_2, \dots$. Lastnost F_j je odvisna od strukture, vrednosti posameznih komponent⁹ in zunanjih dejavnikov (npr. temperatura). Vrednosti komponent in zunanjih dejavnikov bomo poimenovali *parametri*. Splošno odvisnost vseh lastnosti od m parametrov lahko zapišemo kot niz funkcij, ki imajo m argumentov:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_1(\underline{x}) \\ F_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_2(\underline{x}) \\ &\vdots \\ F_n &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_n(\underline{x}) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Iz niza vseh lastnosti bomo izbrali samo na eno in jo označili s F . Lastnost F je v matematičnem smislu **funkcija**, ki je lahko definirana na analitični način, s tabelo ali pa z grafom. Pri obravnavi se bomo omejili samo na vezja in na funkcije, ki so definirane v realnem prostoru. Če je vezje že zgrajeno, lahko lastnost F in parametre tudi izmerimo. Tudi s simulatorjem lahko določimo lastnost F le, če poznamo ustrezen model vezja in vrednosti parametrov. Torej bo pogoj, ki ga bomo postavili takoj na začetku, to, da lahko na neki način določimo lastnost F , če poznamo vrednosti parametrov.

⁷ Glej poglavje 2.2 Standardne vrednosti parametrov.

⁸ Več o tem pristopu glej v [BRATKOVIČ, 1992].

⁹ Pri ojačevalniku na sliki 3.1 je bila lastnost kolektorski tok I_c .

Ne smemo pozabiti, da lastnost F ni odvisna samo od vrednosti parametrov, ampak tudi od strukture vezja. Izbor strukture vezja je odvisen od zahtevanih lastnosti, razpoložljive tehnologije in od znanja, ki ga ima načrtovalec. V večini primerov velja, da sprememba vrednosti parametrov ali strukture povzroči tudi spremembo lastnosti.

3.1 Meritev občutljivosti (perturbacijska metoda)

Najprej nas bo zanimalo, kako majhna sprememba samo enega izmed parametrov vpliva na lastnost F . Ker bomo parameter x_i spremenili samo za majhno vrednost, nas bo zanimalo obnašanje F v **okolici določene točke** (glej sliko 3.2). To točko, ki jo bomo poimenovali **nominalna ali nazivna vrednost**, bomo označili z: $\underline{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_m^\circ)$. Parameter x_i za malenkost spremenimo (ostali parametri morajo ostati nespremenjeni!) in izmerimo spremembo ΔF (za zgled glej izraz 3.1):

$$\hat{S}_{x_i}^F \approx \frac{\Delta F}{\Delta x_i} \bigg|_{\underline{x}=\underline{x}^\circ} = \frac{F(x_i + \Delta x_i) - F(x_i)}{(x_i + \Delta x_i) - (x_i)} \bigg|_{\underline{x}=\underline{x}^\circ} \quad (3.3)$$

Tako izračunani občutljivosti pravimo **inkrementalna občutljivost**.

Perturbacijska metoda je uporabna, kadar lahko parametre enostavno spreminjamo in merimo spremembo lastnosti. Če vezje še ni zgrajeno, lahko s simulatorjem to meritev zelo enostavno simuliramo.

Če bi izbrali drugo točko oziroma nazivno vrednost parametrov, bi se razen izjem, občutljivost spremenila.

Z manjšanjem spremembe parametra Δx_i se razlika med diferencialno in inkrementalno občutljivostjo manjša. Ker v imenovalcu računamo razliko med dvema skoraj enakima številoma, lahko pride pri majhnih spremembah do **velikih pogreškov**. Pri meritvi na točnost tudi vpliva kakovost instrumenta. Velikost spremembe je običajno 10 % do 30 % nazivne vrednosti. Če je toleranca znana, potem običajno izberemo σ , 2σ ali pa 3σ .

Največja prednost perturbacijske metode je njena enostavnost oziroma **univerzalnost**, saj ne zahteva analitičnega izraza za opis lastnosti F . Pri velikem številu parametrov postane nepraktična, saj moramo za m parametrov izvesti $m+1$ meritev¹⁰ oziroma simulacij. Ker obstajajo tudi druge metode, kjer lahko z eno ali dvema simulacijama dobimo občutljivosti neke lastnosti na vse parametre, lahko to štejemo za njeno slabost.

¹⁰ Ena meritev oziroma simulacija je potrebna tudi za določitev vrednosti lastnosti pri nominalnih vrednosti parametrov.

Zgled

S perturbacijsko metodo¹¹ izračunaj občutljivost resonančne frekvence nihajnega kroga na spremembo induktivnosti ($L = 0,01\text{H}$, $C = 0,01\text{F}$).

Nominalna vrednost resonančne frekvence:

$$\omega_R = F(L, C) = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \cdot 10^{-2}}} = 100\text{s}^{-1}$$

Izberemo 10 % povišanje L . Pri $L = 0,011\text{H}$ je frekvenca:

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{1,1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}}} = 95,3\text{s}^{-1}$$

$$\hat{S}_L^\omega = \frac{\Delta F}{\Delta L} \bigg|_{\underline{x}=\underline{x}^\circ} = \frac{95,3 - 100}{0,001} = -4,7 \cdot 10^3 \text{s}^{-1} / \text{H} = -4,7\text{s}^{-1} / \text{mH}$$

Če se induktivnost poveča za 1mH, pade frekvenca za $4,7\text{s}^{-1}$.

3.2 Analitični izračun občutljivosti

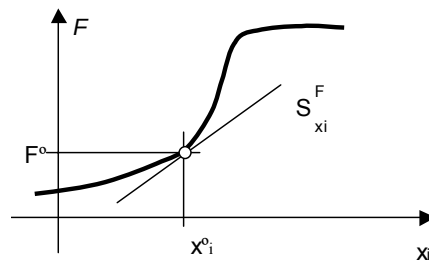
Če je F v tej točki odvedljiva, je občutljivost lastnosti F na majhno spremembo parametra x_i definirana kot parcialni odvod F po x_i :

$$\hat{S}_{x_i}^F = \frac{\partial F}{\partial x_i} \bigg|_{\underline{x}=\underline{x}^\circ} \quad (3.4)$$

Ker gre za infinitezimalno majhne spremembe, bomo $\hat{S}_{x_i}^F$ poimenovali **diferencialna občutljivost¹² lastnosti F na spremembo parametra x_i** . Pogosto ji pravimo kar koeficient občutljivosti oziroma občutljivost lastnosti F na parameter x_i .

¹¹ Če poznamo analitični izraz za lastnost, raje uporabimo analitični pristop, ki je v nadaljevanju opisan. Tukaj je samo zaradi zgleda uporabljena perturbacijska metoda.

¹² Strešico smo dodali zato, da bomo lahko razlikovali med normirano in nenormirano občutljivostjo.



Slika 3.2 Spreminjanje neke lastnosti v odvisnosti od parametra x_i . Občutljivost v delovni točki je v bistvu vrednost odvoda v tej točki, ki je odvisna tudi od položaja točke oziroma nominalne vrednosti parametra.

Zgled

Izračunaj občutljivost resonančne frekvence nihajnega kroga na spremembo induktivnosti ($L = 0,01\text{H}$, $C = 0,01\text{F}$).

Občutljivost frekvence na spremembo L :

$$\hat{S}_L^\omega = \left. \frac{\partial F}{\partial L} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^o} = -\frac{1}{2}(LC)^{-3/2}C = -\frac{1}{2}(10^{-2} \cdot 10^{-2})^{-3/2} \cdot 0,01 = -5000\text{s}^{-1} / H$$

Kadar so pričakovane spremembe oziroma nazivna vrednost precej manjše, kot je osnovna vrednost enote, ustrezno spremenimo enoto parametra. Ker je nazivna vrednost 10mH , bomo občutljivost podali v enoti s^{-1}/mH :

$$\hat{S}_L^\omega = \left. \frac{\partial F}{\partial L} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^o} = -5000\text{s}^{-1} / H = -5\text{s}^{-1} / \text{mH}$$

Kot smo pričakovali, se rezultata za malenkost razlikujeta.

3.3 Normirana občutljivost

Spremembo oziroma odvod lahko izrazimo tudi v procentih. Pogosto želimo ugotoviti, kako vpliva relativna sprememba parametra, izražena v procentih, na spremembo lastnosti. Če je ena izmed sprememb izražena v procentih, potem govorimo o **normirani občutljivosti**. To ugotovimo s primerjavo posameznih občutljivosti. Za primerjavo med raznimi občutljivostmi je primerno normiranje na relativno spremembo parametra:

$$S_{x_i}^F = \frac{\frac{\Delta F}{\Delta x_i}}{\frac{\Delta x_i}{x_i^o}} = \frac{\Delta F}{\Delta x_i} \cdot \frac{x_i^o}{100} \quad (3.5)$$

Enota tako definirane občutljivosti se nanaša na en procent spremembe. Na primer 5 V/% pomeni, da se bo napetost povečala za 5V, če se poveča vrednost parametra za 1 %. Občutljivost lahko normiramo tudi na nominalno vrednost lastnosti:

$$S_{x_i}^F = \frac{\Delta F}{\Delta x_i} \cdot \frac{100}{F^\circ} \quad (3.6)$$

Če gre za zelo majhne spremembe, se pogosto uporablja enota ppm (parts per million – milijoninka), npr.: $2 \cdot 10^{-3}/V = 2000 \text{ ppm}/V$.

Normiramo lahko hkrati na nominalno vrednost lastnosti in parametra:

$$S_{x_i}^F = \frac{\Delta F}{\Delta x_i} \cdot \frac{x_i^\circ}{F^\circ} \quad (3.7)$$

Zgoraj definirana občutljivost nima enote in se podaja v razmerju %/%.

Zgled 1

Nazivna vrednost nekega stabiliziranega vira pri 27 °C je 2V. Če se temperatura dvigne za 2 °C, se napetost poveča na 2,0008V. Izračunaj občutljivost in jo normiraj na različne načine.

$$\begin{aligned} \hat{S}_T^U &= \left. \frac{\Delta U}{\Delta T} \right|_{x=x^\circ} = \frac{2 - 2,0008}{27 - 29} = 4mV / ^\circ C \\ S_T^U &= \frac{\Delta U}{\Delta T} \cdot \frac{T}{100} = \frac{(2 - 2,0008)27}{(27 - 29)100} = 1,08mV / \% \\ S_T^U &= \frac{\Delta U}{\Delta T} \cdot \frac{100}{U} = \frac{(2 - 2,0008) \cdot 100}{(27 - 29)2} = 0.2\% / ^\circ C = 2000 \text{ ppm} / ^\circ C \\ S_T^U &= \frac{\Delta U}{\Delta T} \cdot \frac{T}{U} = \frac{(2 - 2,0008)27}{(27 - 29)2} = 0,0054\% / \% \end{aligned}$$

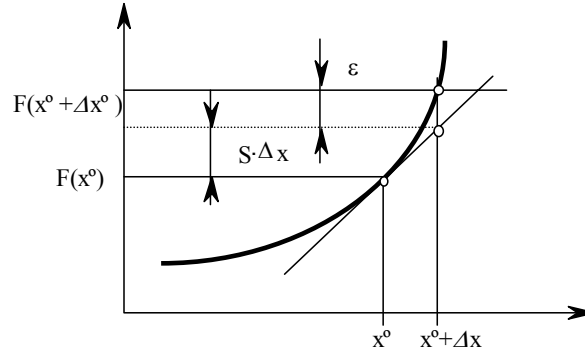
Pogosto ne poznamo analitičnega izraza za neko lastnost, ampak samo občutljivost. Če sprememba parametra ni prevelika, lahko kljub temu izračunamo posledico, ki jo povzroči **majhna** sprememba parametra x_i (glej sliko 3.3):

$$\Delta F \approx \hat{S}_{x_i}^F \cdot \Delta x_i$$

$$F(x_i^\circ + \Delta x_i) \approx F^\circ + \Delta F = F^\circ + \hat{S}_{x_i}^F \cdot \Delta x_i \quad (3.8)$$

V bistvu smo linearizirali lastnost F v okolici delovne točke. Popolnoma natančen rezultat bi dobili, če bi vrednost spremembe vstavili v funkcijo:

$$F = F(x_i^\circ + \Delta x_i)$$



Slika 3.3 Z večanjem spremembe parametra (Δx) se večja tudi napaka ε .

Označimo z $\Delta F(x_i)$ spremembo lastnosti, ki je posledica spremembe i-tega parametra.

$$\Delta F(x_i) \approx \hat{S}_{x_i}^F \cdot \Delta x_i$$

Če je občutljivost normirana na relativno spremembo, izraženo v procentih (enačba 3.5), potem mora biti tudi Δx izražen v %. Če se hkrati spremeni več parametrov in so te spremembe majhne, je skupna sprememba kar vsota $\Delta F(x_i)$:

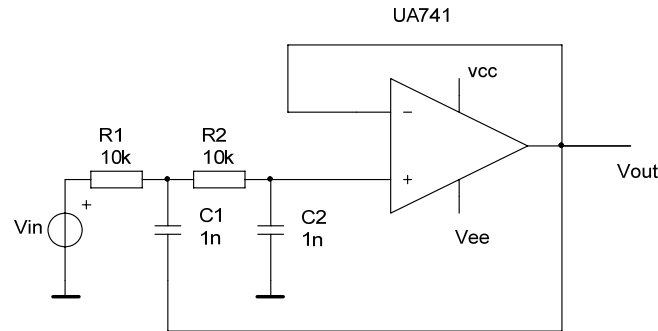
$$\Delta F \approx \sum_{i=1}^m \Delta F(x_i) \quad (3.9)$$

oziroma

$$\Delta F \approx S_{x_1}^F \Delta x_1 + S_{x_2}^F \Delta x_2 + \dots + S_{x_m}^F \Delta x_m = \sum_{i=1}^m S_{x_i}^F \Delta x_i = \underline{S}^T \cdot \underline{x} \quad (3.10)$$

Zgled 2

Z analizo občutljivosti filtra smo določili občutljivost mejne frekvence na spremembo posameznih parametrov¹³. Za koliko se spremeni mejna frekvenca, če se C1 poveča za 10 % in R2 zmanjša za 5 %?



Parameter	S [Hz/%]
VCC	$-3,9 \cdot 10^{-6}$
VEE	$-1,3 \cdot 10^{-2}$
C1	20
R1	-50
R2	-50
C2	-117

$$\Delta f_{zg} \approx S_{C1}^{f_{zg}} \Delta C1 + S_{R2}^{f_{zg}} \Delta R2 = 20 \text{ Hz} / \% \cdot 10\% + (-50 \text{ Hz} / \%)(-5\%) = 450 \text{ Hz}$$

Mejna frekvenca filtra se je dvignila za 450Hz.

V nekaterih primerih so parametri odvisni od neke skupne spremenljivke, npr. napajalne napetosti, temperature:

$$F(T) = F(x_1(T), \dots, x_m(T)) \quad (3.11)$$

V tem primeru občutljivost na temperaturo izračunamo tako, da vsak parameter dodatno odvajamo po T:

$$\hat{S}_T^F = \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dT} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dT} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dT} \quad (3.12)$$

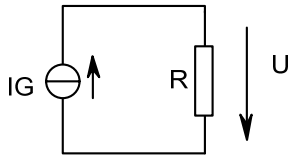
¹³ Na sliki je Sallen-Keyev filter.

$$\hat{S}_T^F = \frac{\partial F}{\partial T} = \hat{S}_{x_1}^F \hat{S}_T^{x_1} + \hat{S}_{x_2}^F \hat{S}_T^{x_2} + \dots + \hat{S}_{x_m}^F \hat{S}_T^{x_m} \quad (3.13)$$

V tem primeru imenujemo $\hat{S}_T^{x_m}$ temperaturni koeficient parametra x_m .

Zgled 3

Izračunaj občutljivost napetosti U na spremembo temperature.



$U = I_G R$ in $R = R_0 + kT^2$. Nazivne vrednosti: $I_G = 0,1\text{A}$, $R = 100\Omega$, $k = 2\Omega/^\circ\text{C}^2$, $T = 25^\circ\text{C}$

Rešitev:

Ker so znani analitični izrazi, bomo uporabili analitični izračun občutljivosti:

$$\hat{S}_T^U = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial I_G} \frac{dI_G}{dT} + \frac{\partial U}{\partial R} \frac{dR}{dT} = 0 + 2I_G kT$$

Občutljivost v točki, ki jo določa nazivna vrednost:

$$\hat{S}_T^U = 2I_G kT = 2 \cdot 0,1 \cdot 2 \cdot 25 = 10\text{V}/^\circ\text{C}$$

3.4 Določitev občutljivosti s simulatorjem

Večina simulatorjev ima vgrajen ukaz le za izračun diferencialne občutljivosti delovne točke¹⁴ na spremembo posameznih parametrov. Za izračun drugih občutljivosti je potrebno simulirati ustrezno meritev (perturbacijska metoda) oziroma uporabiti ustrezni skript¹⁵.

¹⁴ Delovna točka vezja so vse vrednosti enosmernih tokov in napetosti. Pogosto merimo samo najpomembnejše napetosti in tokove.

¹⁵ To je poseben jezik, s katerim lahko krmilimo delovanje simulatorja.

Zgled 1 – Izračun občutljivosti s simulatorjem

Zanima nas občutljivost napetosti v vozlišču številka 1 na spremembe vseh parametrov. Ker gre za občutljivost delovne točke, uporabimo ukaz `.SENS V(1)`, ki sproži analizo diferencialne občutljivosti. Izpis prikazuje slika 3.4.

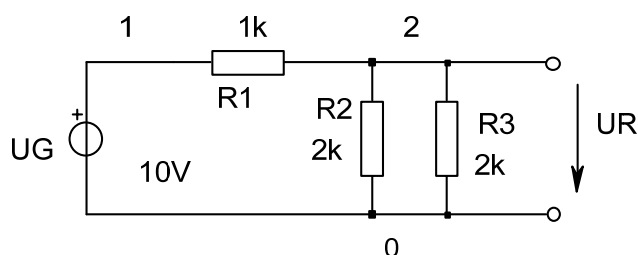
Spremembo lastnosti F dobimo tako, da pomnožimo normiran koeficient občutljivosti, ki ga izpiše SPICE, kar z odstotno vrednostjo spremembe parametra. Npr. če je $\Delta R2 = 10\%$, je sprememba napetosti $\Delta V(1) = 0,125V$.

DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(1)			
ELEMENT NAME	ELEMENT VALUE	ELEMENT SENSITIVITY (VOLTS/UNIT)	NORMALIZED SENSITIVITY (VOLTS/PERCENT)
R2	2.000D+03	6.250D-04	1.250D-02
R3	2.000D+03	6.250D-04	1.250D-02
R1	1.000D+03	-2.500D-03	-2.500D-02
VG	1.000D+01	5.000D-01	5.000D-02
I1	2.500D-06	9.815D+04	2.454D-03
Q4			
BF	1.000D+02	6.238D-04	6.238D-04

Slika 3.4 Zgled izpisa rezultatov¹⁶ analize občutljivosti (verzija SPICE 2G6).

Zgled 2: Izračun občutljivosti s simulatorjem IsSpice4

Zanima nas občutljivost napetosti U_R oziroma $V(2)$ na spremembe parametrov.

**Diferencialna občutljivost**

Vgrajen ukaz `.sens` izračuna samo nenormirane koeficiente občutljivosti delovne točke.

¹⁶ D+03 pomeni 10^3 . Črka D pomeni, da gre za dvojno, E pa za enojno natančnost.

```

E:\...\ZGLED-DELILINK.CIR SENS
*#SAVE V(1) @V1[I] @V1[P] V(2) @R1[I] @R1[P] @R2[I]
*#SAVE @R2[P] @R3[I] @R3[P]
*#ALIAS UIZH
*#SENS V(2)
*#PRINT ALL
V1 1 0 DC=10
R1 1 2 1K
R2 2 0 2K
R3 2 0 2K
.END

```

ELEMENT NAME	ELEMENT VALUE	ELEMENT SENSITIVITY
r1	1.000e+003	-2.500e-003
r2	2.000e+003	6.250e-004
r3	2.000e+003	6.250e-004
v1.dc	1.000e+001	5.000e-001

Slika 3.5 Diferencialna občutljivost napetosti UR (verzija IsSpice4).

Inkrementalna občutljivost

Isto nalogo lahko rešimo tudi s perturbacijsko metodo. Velikost spremembe parametrov naj bo $1/3$ vrednosti tolerance oziroma σ . Ker imamo 4 parametre, je potrebno izvesti 5 simulacij. Problem hitreje rešimo, če uporabimo ustrezen skript za izračun občutljivosti. Kljub obstoju takšnega skripta, je potrebno napisati še lastni skript, ki izračuna določeno lastnost. Ker gre v našem primeru za preprosto lastnost (napetost UR), je ta skript zelo enostaven.

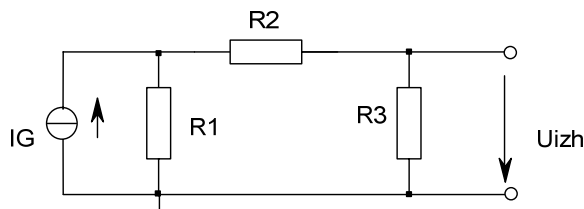
PARAMETER	NOMINALNA VREDNOST	SPREMEMBA PARAMETRA	OBČUTLJIVOST [V/ENOTO]	RELATIVNA OBČUTLJIVOST [V/%]
r1	1,0K	66,667	-2,41e-3	-2,41e-002
r2	2,0K	133,33	5,95e-4	1,19e-002
r3	2,0K	133,33	5,95e-4	1,19e-002
v1	10,0	0,66667	5,00e-1	5,00e-002

Slika 3.6 Inkrementalna občutljivost UR na posamezne parametre.

Če primerjamo diferencialno in inkrementalno občutljivost napetosti UR, vidimo, da se za malenkost razlikujeta.

3.5 Naloge za poglavje 3

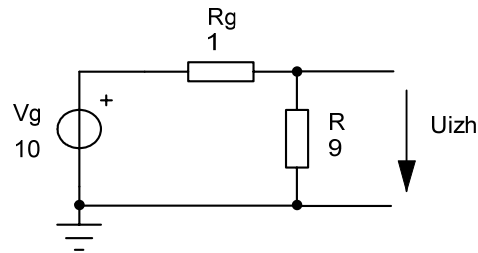
1. Lastnost F je opisana s funkcijo $F = 4x_1x_2^2 + 3x_1^2 - 2$. Nominalna vrednost delovne točke je $x_1^\circ = 1$, $x_2^\circ = 2$. Kateri parameter najbolj vpliva na F ?
2. Pri temperaturi 25 °C je bila izhodna napetost 250mV, pri 30 °C pa 245mV. Kolikšna je občutljivost napetosti na temperaturo (temperaturni koeficient)? Občutljivost izrazi na dva načina: v enotah mV/°C in v ppm/°C.
3. Nazivna vrednost toka je 200μA, občutljivost toka na spremembo napajalne napetosti pa 100ppm/V. Za koliko μA se bo povečal oziroma zmanjšal tok, če se bo povečala napajalna napetost za 2V?
4. Disipacija nekega vezja je opisana z izrazom: $P = I^2 R_1 + \frac{U^2}{R_2}$. Nominalne vrednosti so: $I = 2\text{A}$, $U = 4\text{V}$, $R_1 = 6\Omega$ in $R_2 = 1\Omega$. Kolikšna je nazivna moč? Na spremembo katerega parametra bo moč najbolj občutljiva? Kolikšna je sprememba moči, če se upor R_1 poveča za 2 %, napetost U pa zmanjša za 4 %? Spremembo moči izračunaj na dva načina.
5. Izračunaj na dva načina občutljivost izhodne napetosti na spremembe vrednosti uporov: z analitično in perturbacijsko metodo. Kolikšna je natančnost izračuna ΔU_{izh} s pomočjo občutljivosti, če pričakujemo naslednje spremembe:
 - povečanje posameznega upora za 10 %,
 - povečanje posameznega upora za 0,5Ω in
 - upora R_1 in R_2 se povečata za 10 % in R_3 se zmanjša za 5 %?



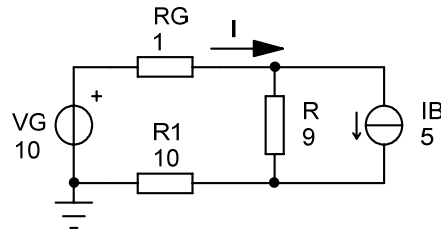
$$I_G = 1\text{A}, R_1 = 2\Omega, R_2 = 16\Omega, R_3 = 6\Omega.$$

6. Določi potek moči na uporu R_G v odvisnosti od napetosti U_G .
 - a. Kolikšna je občutljivost moči na uporu R na spremembo napetosti U_G ?
 - b. Kolikšna je občutljivost moči na uporu R_G na spremembo napetosti U_G ?
 - c. Kolikšna je občutljivost moči na uporu R na spremembo upora R ?
 Občutljivosti izrazi v enoti W/%.

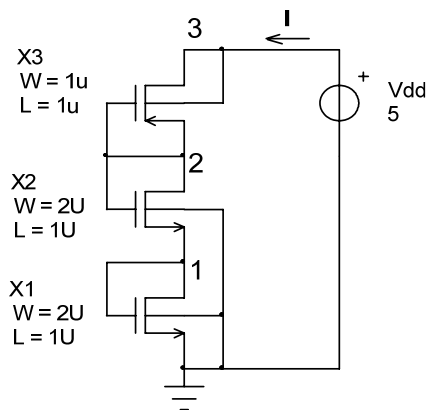
$$(R_G = 1\Omega, U_G = 10\text{V}, R = 9\Omega)$$



7. Kolikšna je občutljivost toka I na spremembo napetosti U_G ? Uporabi perturbacijsko metodo. ($R_G = 1\Omega$, $U_G = 10V$, $R = 9\Omega$, $R_1 = 10\Omega$, $I_B = 5A$). Izberi 5 % spremembe parametrov. Občutljivost izrazi v enoti [%/V].

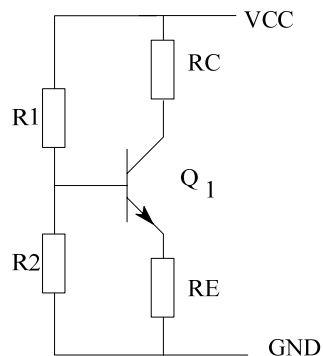


8. S pomočjo občutljivosti ugotovi, za koliko se spremeni tok I , če se upor R zmanjša za 5 %? Vezje je enako kot pri nalogi 7. Uporabi analitični izračun občutljivosti.
9. Z nominalnimi parametri smo izvedli simulacijo 1. Nato smo V_{dd} povišali na 5,5V in izvedli simulacijo 2. Parameter W_2 smo povečali za 0,8 μm in izvedli simulacijo 3. Nato smo povečali temperaturo za 100 °C in izvedli simulacijo 4. Vsakič smo spremenili samo en parameter. Izračunaj občutljivost toka na spremembo napajalne napetosti in na spremembo dimenzije W_2 . (Izračunaj nenormirano in vse variante normirane občutljivosti.)



	Simulacija 1	Simulacija 2 + ΔV_{dd}	Simulacija 3 + ΔW_2	Simulacija 4 + ΔT
V (2)	2.96e+000	3.21e+000	2.88e+000	2.89e+000
V (1)	1.35e+000	1.47e+000	1.39e+000	1.32e+000
V (3)	5.00e+000	5.50e+000	5.00e+000	5.00e+000
tok	4.68e-005	6.44e-005	5.22e-005	3.89e-005

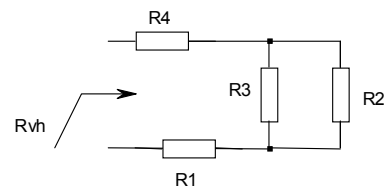
10. Glej podatke iz prejšnje naloge. Kolikšna je občutljivost $V(2)$ na spremembo napajalne napetosti? Občutljivost izrazi v enoti $V/\%$. Kolikšen je temperaturni koeficient toka izražen v $\text{ppm}/^\circ\text{C}$?
11. Zanima nas občutljivost toka delovne točke I_c na spremembe upornosti in napajalne napetosti oziroma kateri element najbolj vpliva na I_c ? Tokovno ojačenje tranzistorja je 500.



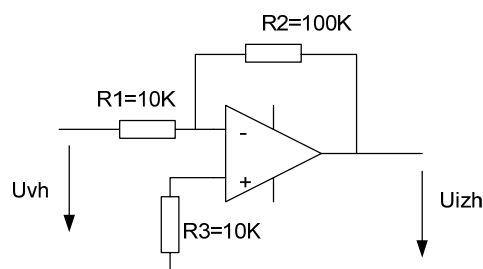
12. Imamo enak ojačevalnik kot pri prejšnjem zgledu. Kateri upor najbolj vpliva na diferencialno vhodno upornost v vozlišču 2?
13. Kako bi s pomočjo simulatorja SPICE določil, kateri element najbolj vpliva na zgornjo frekvenčno mejo ojačevalnika? Na kratko opiši postopek.
14. Znani so podatki o naslednjih občutljivostih: $\hat{S}_T^{U_{izh}} = 0,1V/^\circ\text{C}$, $S_{R1}^{U_{izh}} = 0,01V/\%$, $S_{R2}^{U_{izh}} = -0,02V/\%$. Kolikšna bo sprememba U_{izh} , če se temperatura dvigne za 20°C , obe upornosti pa se povečata za 10 %?

15. Toleranca katerega izmed uporov $R1$ in $R4$ najbolj vpliva na R_{vh} ?

$$R3 = R2 = 10\Omega, R4 = 20\Omega, R1 = 5\Omega$$



16. Izračunaj normirano občutljivost $[/\%]$ napetostnega ojačenja na spremembe uporov.



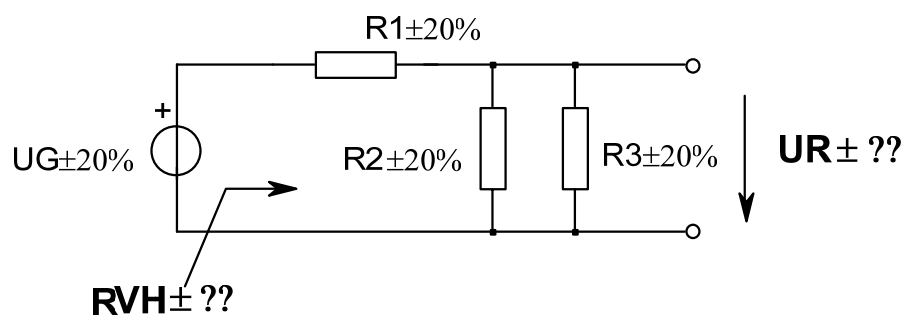
4. Pregled metod za analizo toleranc

Analiza toleranc je postopek, kjer iščemo toleranco določene lastnosti vezja, pri čemer poznamo tolerance in nominalne vrednosti parametrov (glej zgled na sliki 4.1). V razvojnem ciklusu vezja (glej sliko 1.1) najprej načrtujemo z nominalnimi vrednostmi, šele nato sledi načrtovanje toleranc parametrov. Tipični variabilni parametri so: temperatura, napajalne napetosti in tolerance diskretnih elementov (npr. h_{FE}). V bistvu nas zanima, kako vplivajo variacije vseh parametrov na spremembo lastnosti. V večini primerov analiziramo tolerance zato, da bi preverili, ali smo pravilno določili tolerance parametrov.

Glede na definicijo toleranc lahko metode za analizo razdelimo v dve skupini. V prvi, ki je usmerjena v iskanje **najbolj neugodnega primera** (worst case analysis), so naslednje metode:

1. analitična metoda,
2. linearizacija lastnosti,
3. vse možne kombinacije vrednosti parametrov,
4. ustrezen izbor ekstremnih vrednosti,
5. matematično programiranje,
6. izkušnje (empirična ocena toleranc),
7. genetski algoritmi in
8. poskušanje.

V drugo skupino spadajo metode, kjer iščemo **tolerančno območje**, ki je definirano s področjem $\pm 3\sigma$. Med temi metodami, ki jim pravimo tudi statistične metode, je najbolj znana Monte Carlo analiza.



Slika 4.1 Zgled za analizo toleranc – znane so nominalne vrednosti in tolerance parametrov, iščemo toleranco dveh lastnosti: U_R in V_{Hh} .

Če poznamo **dopustno** toleranco lastnosti, potem s to analizo tudi preverjamo, ali **dejanska** toleranca lastnosti **presega** dopustno.

5. Analiza najbolj neugodnega primera

V prejšnjem poglavju smo ugotovili, da se vrednosti parametrov glede na posamezen primerik spreminjajo, vendar ležijo vedno znotraj predpisanega tolerančnega območja. Te spremembe se odražajo tudi v spremembah lastnosti. **Najbolj neugoden primer¹⁷ je takšna kombinacija vrednosti parametrov, pri katerih doseže variacija lastnosti maksimalno vrednost.** Zgodi se lahko, da vrednost lastnosti preseže dopustna odstopanja, ali pa da vezje sploh ne deluje pravilno. Načrtovalca zanima, kolikšne so vrednosti lastnosti v najbolj neugodnem primeru in kolikšna je verjetnost, da se to zgodi. Pri iskanju najbolj neugodnega primera verjetnostnega vidika ne bomo upoštevali. Predpostavili bomo, da obstaja zadostna verjetnost, da se najbolj neugoden primer zgodi.

5.1 Analitična metoda

Lastnost F (npr. napetost usmernika, moč, cena) naj bo odvisna od m parametrov. $x_1 \dots x_m$. Parametri so lahko dimenzije (npr. $W = 2\mu\text{m}$) ali pa vrednosti elementov (npr. $R = 10\text{K}$, $U_G = 5\text{V}$), vrednosti parametrov v modelih polprevodnikov (npr. h_{FE} , U_T), vrednosti generatorjev, s katerimi vzbujaemo vezje in pa vsi drugi dejavniki, ki kakorkoli vplivajo na lastnost F (npr. temperatura). Pri proizvodnji integriranih vezij so to procesni parametri.

Označimo z n število lastnosti, ki nas zanimajo:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_1(\underline{x}) \\ F_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_2(\underline{x}) \\ &\vdots \\ F_n &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_n(\underline{x}) \end{aligned}$$

Znane so tolerance vsakega parametra: $x_i^{\min} \leq x_i \leq x_i^{\max}$. Vsi intervali, znotraj katerih se gibljejo vrednosti parametrov, tvorijo parameterski prostor. **Pri analizi najbolj neugodnega primera iščemo maksimum¹⁸ in minimum funkcij F_j na prostoru, ki ga definirajo tolerance parametrov.** Če problem prevedemo v matematični jezik, v bistvu iščemo maksimum in minimum funkcije F_j v omejenem prostoru. Tiste z največjimi oziroma najmanjšimi vrednostmi bomo poimenovali **absolutni**, ostale pa **lokalni** minimumi oziroma maksimumi. Ker imajo te funkcije v večini primerov več parametrov, iskanje ekstremov ni enostavno. Če gre za samo en parameter, je problem zelo enostaven:

- Poiščemo točke, v katerih ima funkcija odvod enak nič.
- Z drugim odvodom določimo, ali so ekstremi maksimumi ali minimumi.

¹⁷ Angl. worst case (WC).

¹⁸ Maksimum oziroma minimum bomo označili z naslednjo notacijo: $\min[F_j(\underline{x})], \max[F_j(\underline{x})]$.

- Izračunamo vrednosti na robovih intervala.
- Iz podatkov, dobljenih v 2. in 3. koraku, določimo absolutne ekstreme.

Zgled

Neko vezje ima dve lastnosti F_1 in F_2 . Obe sta odvisni samo od enega parametra, ki lahko zavzame vrednost $3 \leq x \leq 6$. Nominalna vrednost parametra je $x^o = 4$.

$F_1 = f(x)$ (natančen potek lastnosti je v tem zgledu zahtevna funkcija, zato je samo simbolično podana)

$$F_2 = 2(x - 2)^2$$

Če poteke lastnosti narišemo, lahko takoj odčitamo območje, znotraj katerega se bosta gibali obe lastnosti. Problem bomo rešili na analitični način.

Rešitev za lastnost F1:

Izračunamo odvod F_1 : $F_1' = (x - 0,5)(x - 1)(x - 3,5)(x - 5)$. Znotraj parameterskega prostora sta samo dve ničli: $x = 3,5$ in $x = 5$. Vrednosti lastnosti v teh lokalnih ekstremih sta: $F_1(x = 3,5) = 5,2$ in $F_1(x = 5) = 2$.

Izračunamo še vrednosti na robovih: $F_1(x = 3) = 4$ in $F_1(x = 6) = 7$. Sedaj lahko izberemo absolutna ekstrema:

$$F^{\max} = F_1(x = 6) = 7 \text{ in } F^{\min} = F_1(x = 5) = 2$$

Najbolj neugoden primer oziroma toleranca lastnosti F_1 je:

$$2 \leq F_1 \leq 7$$

Nominalna vrednost lastnosti: $F_1^o(x = 4) = 3$

Rešitev za lastnost F2:

$F_2' = 4(x - 2)$ Ničle odvoda $0 = 4(x - 2)$ so pri $x = 2$. Ker te vrednosti parameter ne more zavzeti¹⁹, nas ta ekstrem ne zanima. Izračunamo vrednosti na robovih: $F_2(x = 3) = 2$ in $F_2(x = 6) = 32$. Takoj vidimo, da sta edina ekstrema tista, ki sta na robovih. Najbolj neugoden primer oziroma toleranca lastnosti F_2 je

$$2 \leq F_2 \leq 32$$

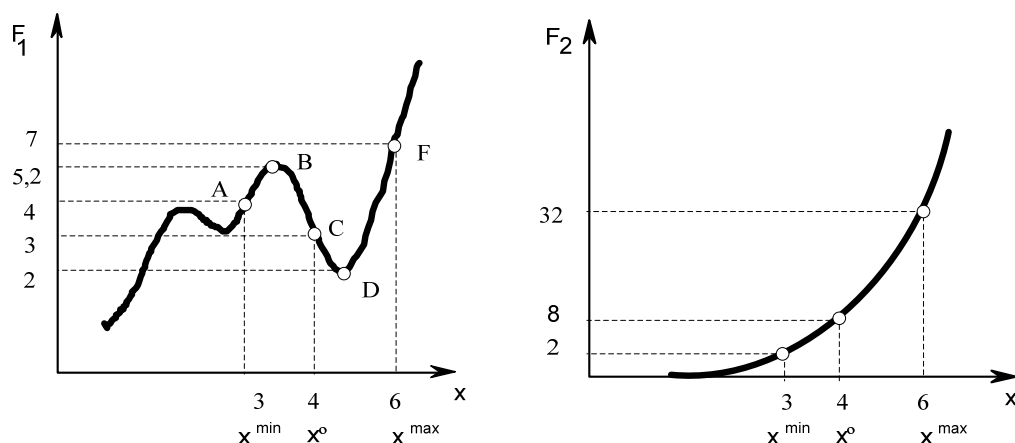
¹⁹ Vrednost leži zunaj prostora, ki ga definirajo tolerance parametrov.

Nominalna vrednost lastnosti: $F_2^\circ(x=4)=8$

Pri spremembi parametra $3 \leq x \leq 6$, lahko pričakujemo spremembe lastnosti:

$$2 \leq F_1 \leq 7 \text{ in } 2 \leq F_2 \leq 32.$$

Na sliki 5.1 sta prikazana poteka obeh lastnosti.



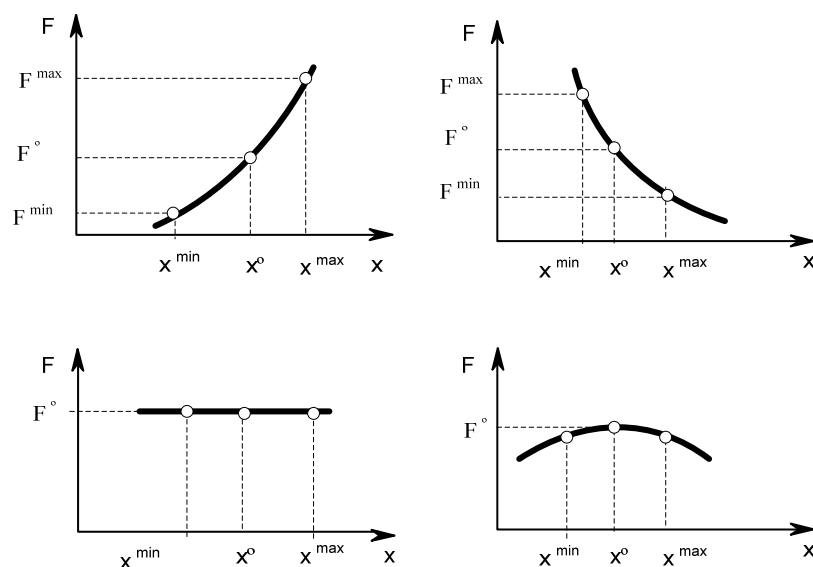
Slika 5.1 Potek obeh lastnosti, ki sta odvisni samo od enega parametra. Funkcija na desni ima več lokalnih ekstremov.

V večini primerov je potek lastnosti znotraj parameterskega prostora monotona funkcija (glej sliko 5.2) in ekstremi so na robovih parameterskega prostora. Velika dinamika (več lokalnih ekstremov), ki jo kaže slika 5.1, je zelo redka. S tem zgledom smo skušali samo pokazati, da ne velja vedno, da se ekstremne vrednosti lastnosti pojavljajo pri ekstremnih vrednostih parametrov.

Če imamo več kot en parameter, se postopek zelo zaplete, tako da v splošnem ni možno določiti ekstremnih vrednosti lastnosti F na analitični način in si je potrebno pomagati z numeričnimi postopki. Pri optimizacijskih metodah gre za zelo podoben problem²⁰. Bistvena razlika je v tem, da je pri optimizaciji prostor, ki ga lahko zavzamejo parametri, dosti večji. Pri analizi toleranc gre za zelo ozko področje, kjer lahko pogosto predpostavimo, da je F približno linearna.

Le analitična metoda lahko **garantira** natančne meje toleranc oziroma določi absolutno najbolj neugodno vrednost lastnosti F . Z vsemi drugimi metodami lahko določimo meje le z neko določeno verjetnostjo. Z numeričnimi metodami sicer lahko poiščemo ekstreme lastnosti F , vendar zelo težko ugotovimo, ali gre za lokalne ali pa za absolutne ekstreme.

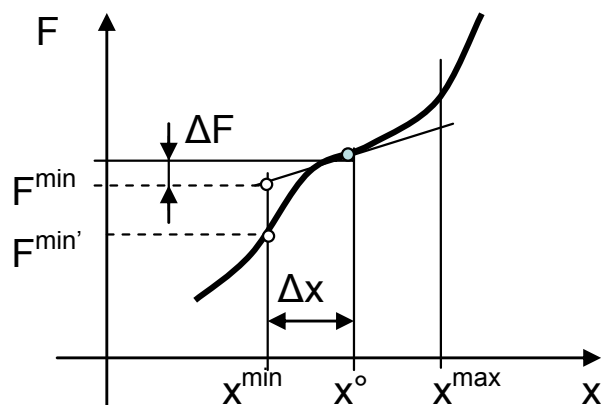
²⁰ Več o tej problematiki je v literaturi, ki obravnava optimizacijo (glej npr. [BRATKOVIČ, 1992]).



Slika 5.2 Tipične oblike poteka lastnosti znotraj parameterskega prostora.

Analitična metoda ne zahteva nobenih omejitev glede velikosti sprememb parametrov, saj so le-te lahko poljubno velike. Rezultat, ki ga dobimo pri velikih spremembah parametrov, je pogosto potrebno zapisati v nesimetrični obliki. Problem analize najbolj neugodnega primera se poenostavi, če so tolerance parametrov majhne, saj lahko takrat funkcijo F v okolici nazivne vrednosti lineariziramo.

5.2 Linearizacija lastnosti v prostoru toleranc



Slika 5.3 $F^{\min'}$ je dejanski minimum, $F^{\min}$ pa vrednost, ki jo dobimo, če lastnost F v delovni točki lineariziramo. Pri maksimalnih vrednostih je napaka v tem zgledu dosti manjša.

Kadar so tolerance parametrov relativno majhne, lahko nelinearen potek lastnosti v tem intervalu poenostavimo z linearizacijo. Pri analizi občutljivosti smo poiskali povezavo med majhnimi spremembami parametrov in spremembo lastnosti F :

$$\Delta F \approx \hat{S}_{x_i}^F \Delta x_i \quad (5.1)$$

Če so spremembe parametrov zelo majhne in funkcija ni pretirano nelinearna, potem je sprememba lastnosti kar enaka vsoti prispevkov posameznih parametrov. Ker ima sprememba Δx lahko pozitiven ali pa negativen predznak, izberemo takšnega, da se vsi prispevki seštejejo ali pa odštejejo. Prispevek k spremembi lastnosti, ki nastane zaradi spremembe parametra x_i , bomo označili z $\Delta F(\Delta x_i)$. Če spremembe niso prevelike, velja:

$$\Delta F \approx \Delta F(\Delta x_1) + \Delta F(\Delta x_2) + \dots \Delta F(\Delta x_m) \quad (5.2)$$

$$\Delta F \approx S_{x_1}^F \Delta x_1 + S_{x_2}^F \Delta x_2 + \dots S_{x_m}^F \Delta x_m \quad (5.3)$$

Če so tolerance parametrov nesimetrične, je tudi toleranca lastnosti nesimetrična.

Zgled 1

Tok nekega tokovnega generatorja je odvisen od dveh parametrov: R_b in U_G . V kolikšnem območju leži I_G ?

Nazivne vrednosti parametrov:

$R_b^0 = 12\text{K}$, $R_b = 10\text{K} \dots 20\text{K}$

$U_G^0 = 5\text{V}$, $U_G = 5,2\text{V} \dots 3\text{V}$

Občutljivosti toka tokovnega generatorja sta:

$$S_{UG}^I = 2\%/V \text{ in } S_{Rb}^I = -3\%/k\Omega$$

Rešitev:

$$+\Delta R_b = 8\text{k in } -\Delta R_b = 2\text{k}$$

$$+\Delta U_G = 0,2\text{V in } -\Delta U_G = 2\text{V}$$

$$\Delta I = S_{UG}^I \Delta U_G + S_{Rb}^I \Delta R_b$$

$$\Delta I^{\max} = 2\%/V \cdot 0,2\text{V} + (-3\%/k\Omega)(-2k\Omega) = +6,4\%$$

$$\Delta I^{\min} = 2\%/V(-2\text{V}) + (-3\%/k\Omega)(8k\Omega) = -28\%$$

Enačba 5.3 se poenostavi, če so tolerance parametrov simetrične: v najbolj neugodnem primeru dobimo kar vsoto posameznih sumandov. Seveda je tudi toleranca lastnosti zaradi tega simetrična:

$$\Delta F = \left| S_{x_1}^F \Delta x_1 \right| + \left| S_{x_2}^F \Delta x_2 \right| + \dots + \left| S_{x_m}^F \Delta x_m \right| \quad (5.4)$$

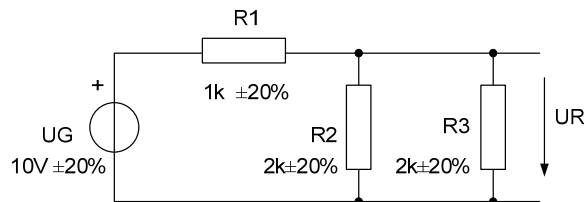
$$\Delta F = \sum_{i=1}^m \left| S_{x_i}^F \cdot \Delta x_i \right| \quad (5.5)$$

Ekstremni vrednosti F sta: $\max[F(\underline{x})] = F^\circ + \Delta F$ in $\min[F(\underline{x})] = F^\circ - \Delta F$

Ta metoda je uspešna le, če je F **monotona funkcija** in če jo lahko brez velikih pogreškov zamenjamo z linearno. V tem primeru ležita ekstrema lastnosti pri ekstremnih vrednostih parametrov.

Zgled 2

Nominalna vrednost $U_R = 5V$ in znane so občutljivosti. Ocení najbolj neugoden primer U_R .



ELEMENT	Nominalna vrednost	Občutljivost [V/enoto]	Normirana občutljivost [V/%]
R2	2,000E+03	6,250E-04	1,250E-02
R3	2,000E+03	6,250E-04	1,250E-02
R1	1,000E+03	-2,500E-03	-2,500E-02
VG	1,000E+01	5,000E-01	5,000E-02

Ker so vse tolerance parametrov simetrične, lahko kar seštejemo prispevke vsakega parametra:

$$\Delta U_R = 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot 20 + 1,25 \cdot 10^{-2} \cdot 20 + 2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 20 + 5 \cdot 10^{-2} \cdot 20 = 2V$$

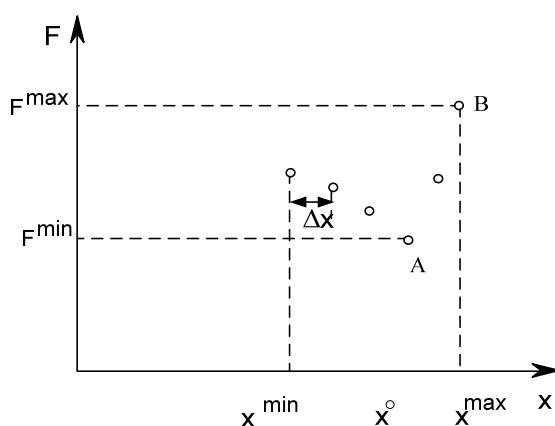
oziroma 40 %

$$U_R^{\max} = 7V \text{ in } U_R^{\min} = 3V$$

5.3 Metoda z vsemi možnimi kombinacijami vrednosti parametrov

Če bi za vsako možno vhodno kombinacijo parametrov analizirali vezje, bi dobili vse možne vrednosti, ki jih lahko zavzame določena lastnost vezja.

To je najenostavnejša, vendar časovno najzahtevnejša metoda. Z njo bi lahko ugotovili tudi absolutne ekstremne vrednosti. Če so vrednosti parametrov zvezne veličine, razdelimo tolerančno območje parametrov na končno število enako oddaljenih točk Δx_i . Če to število označimo z w , potem je za m parametrov potrebnih w^m simulacij ali izračunov ali meritev. Iz dobljenih rezultatov izberemo ekstremne vrednosti.



Slika 5.4 Če ima funkcija F samo en parameter, lahko to metodo tudi enostavno ilustriramo. Iz slike je razvidno, da se v tem zgledu ekstremne vrednosti F **ne nahajajo** pri ekstremnih vrednostih parametra.

Zgled

$$UR = f_1(R1, R2, R3, UG)$$

$$R1 = 10 \pm 2\Omega$$

$$R2 = 10 \pm 2\Omega$$

$$R3 = 5 \pm 2\Omega$$

$$UG = 5 \pm 2V$$

Rešitev:

Odločimo se, da iz intervala, v katerem leži vrednost parametra, izberemo 5 enako oddaljenih vrednosti ($\Delta x = 1\Omega$ in $\Delta x = 1V$):

R1	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
R2	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
R3	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0
UG	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0

Ker obstaja $5^4 = 625$ kombinacij, moramo opraviti prav toliko izračunov ali meritev ali simulacij. Iz dobljenih rezultatov nato poiščemo ekstremne vrednosti UR.

5.4 Metoda z izborom ekstremnih vrednosti parametrov

Ker je prejšnja metoda zahtevala izredno veliko število simulacij, bomo poskušali množico kombinacij zmanjšati s tem, da ne bomo izbrali prav vseh kombinacij, ampak samo tiste, za katere velja velika verjetnost, da bodo odkrile maksimum oziroma minimum funkcije F . Če tolerance niso prevelike in je F **monotona funkcija**, se ekstremne vrednosti nahajajo **na robovih parameterskega (tolerančnega) prostora**. Torej pri tej metodi izbiramo samo **ekstremne** vrednosti parametrov (npr. maksimalno in minimalno temperaturo, maksimalno in minimalno napetost baterije).

Za ocenitev toleranc po tej metodi imamo na razpolago tri pristope:

1. Poskusimo z vsemi možnimi kombinacijami **ekstremnih** vrednosti parametrov. Ker si lahko za vsak parameter izberemo eno izmed dveh možnosti (maksimalna ali minimalna vrednost), je potrebno za m parametrov preveriti 2^m kombinacij.
2. Z empiričnim poznavanjem lastnosti vezja določimo predznake občutljivosti in nato izberemo pravo kombinacijo.
3. Z analizo občutljivosti določimo predznake in nato izberemo ustrezno kombinacijo.

To metodo se uporablja, kadar imamo majhno število parametrov oziroma kadar proučujemo vpliv variacije zunanjih dejavnikov. Tipična parametra, katerih vpliv variacije je potrebno skoraj vedno preveriti, sta temperatura in napajalna napetost.

Zgled

Pri načrtovanju integriranih vezij na lastnosti vezja vplivajo variacije v samem proizvodnem procesu. Variacije nastopajo med posameznimi šaržami, znotraj rezine so relativno majhne. Proizvajalec nikakor ne more zagotoviti konstantnih procesnih razmer, kar pomeni, da bodo tudi parametri tranzistorjev²¹ variirali okrog tipičnih vrednosti. Te spremembe parametrov se odražajo v variaciji hitrosti preklopa²². Če narišemo možne vrednosti hitrosti, dobimo območje, ki ima približno obliko paralelograma (glej sliko 5.5). Proizvajalci navajajo tipični model za NMOS in PMOS tranzistor in štiri **ekstremne** modele, ki ležijo v ogliščih.

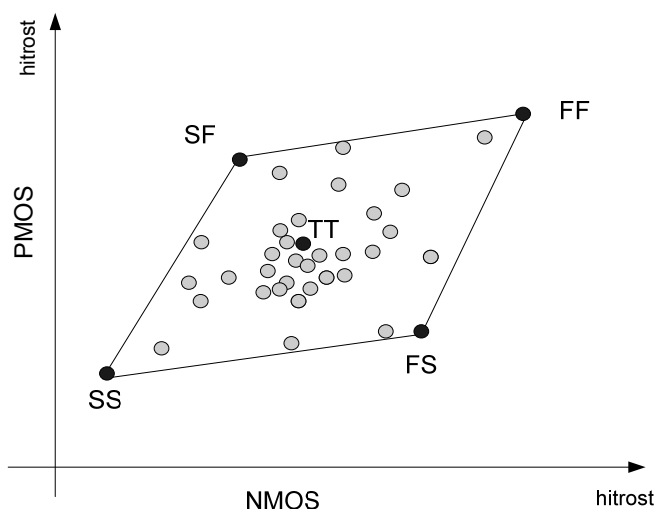
²¹ Predvsem gre za debelino oksida, pragovno napetost ($\pm 15\%$ do $\pm 20\%$) in dolžino kanala.

²² Povečanje pragovne napetosti povzroči zmanjšanje toka v območju nasičenja in s tem znižanje hitrosti.

Tabela 5.1 Oznake modelov za MOS tranzistorje.

	NMOS	PMOS
TT	tipična hitrost	tipična hitrost
FF	hiter	hiter
SS	počasen	počasen
FS	hiter	počasen
SF	počasen	hiter

Načrtovalec mora preveriti, ali bo vezje delovalo pri tej variaciji hitrosti. Pri analizi izbire vse štiri ekstremne vrednosti. Če k temu še dodamo variacijo zunanjih parametrov (napajalne napetosti, temperatura), dobimo 4 parametre. Zraven simulacije s tipičnimi (nominalnimi vrednostmi) je potrebno opraviti še 2^4 simulacij. Pri tej analizi, ki ji pravimo *analiza ogliščnih točk*²³, gre v bistvu za analizo najbolj neugodnega primera, kjer preizkusimo vezje z vsemi kombinacijami ekstremnih vrednosti nekaterih pomembnih parametrov.



Slika 5.5 Območje, znotraj katerega ležijo hitrosti preklopa PMOS in NMOS tranzistorjev. Ogliščne točke so označene s črno barvo.

5.5 Izbor ustreznih ekstremnih vrednosti parametrov s pomočjo podatkov o občutljivosti

Namesto da bi izbrali prav vse možne kombinacije ekstremnih vrednosti parametrov, izberemo samo tiste, za katere velja velika verjetnost, da bodo

²³ Angl. Corner analysis.

odkrile pravi ekstrem. Ko na ta način določimo pravo kombinacijo ekstremnih vrednosti parametrov, s simulacijo, izračunom ali meritvijo določimo maksimalno in minimalno vrednost oziroma toleranco $F(\underline{x})$.

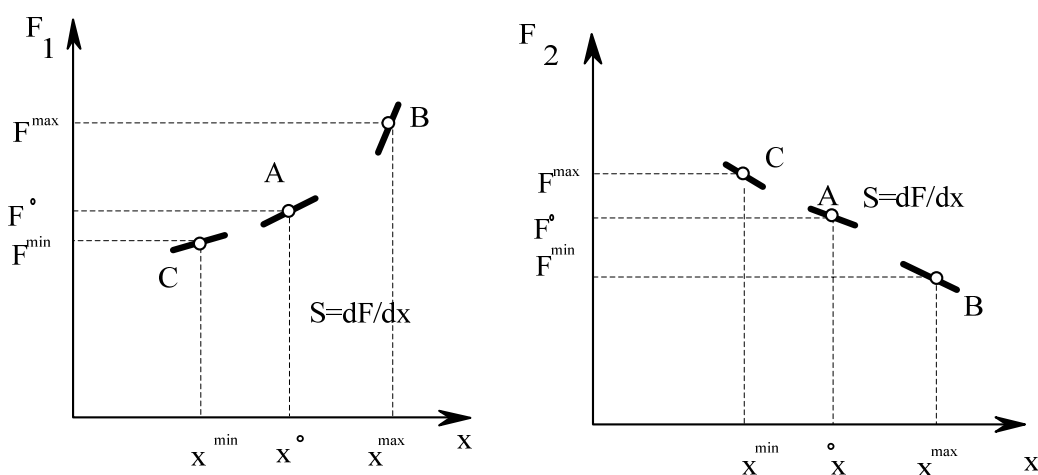
V nekaterih primerih variacije parametrov niso neodvisne, ampak so povezane. Npr. pri proizvodnji integriranih vezij imajo vsi difuzijski upori bodisi preveliko ali pa premajhno vrednost.

Če je občutljivost parametra x_i pozitivna, to pomeni, da večanje parametra povzroči večanje F (glej sliko 5.6). Za maksimalno vrednost F torej v tem primeru izberemo maksimalno vrednost parametra x_i . Če je občutljivost negativna, izberemo minimalno vrednost parametra. Označimo tako dobljeno kombinacijo parametrov z $\underline{x}^{\max*}$. Za izračun minimalne vrednosti F izberemo ravno **komplementarne** vrednosti. Označimo tako dobljeno kombinacijo parametrov z $\underline{x}^{\min*}$.

Sedaj lahko s simulacijo, izračunom ali meritvijo določimo maksimalno in minimalno vrednost oziroma toleranco $F(\underline{x})$:

$$\begin{aligned}\max[F(\underline{x})] &= F(\underline{x}^{\max*}) \\ \min[F(\underline{x})] &= F(\underline{x}^{\min*})\end{aligned}$$

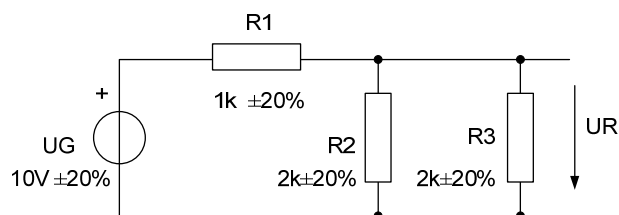
Za kontrolo monotonosti poteka lastnosti F lahko izračunamo občutljivosti pri ekstremnih vrednostih parametrov. Če je lastnost monotona funkcija, se predznaki občutljivosti ne bodo spremenili. Ker dejanski potek funkcije ne poznamo, lahko trdimo le, da obstaja verjetnost, da je funkcija monotona. Če se predznak **spremeni**, potem potek funkcije zagotovo **ni monoton**, kar pomeni, da obstaja lokalni ekstrem znotraj prostora, ki ga definirajo tolerance. Če še vedno vztrajamo pri tej metodi, potem poskusimo tudi z izborom ravno **nasprotne** ekstremne vrednosti parametra.



Slika 5.6 Povezava med občutljivostjo in izborom ekstremne vrednosti parametra dveh lastnosti $F1 = F1(x)$ in $F2 = F2(x)$.

Zgled

Kolikšna je najmanjša oziroma največja napetost U_R ? Preveri tudi monotonost U_R .

**Rešitev:**

S simulatorjem ali pa na analitični način določimo občutljivosti:

	nenormirana občutljivost
	$[V/\Omega], [V/V]$
R2	6.250D-04
R3	6.250D-04
R1	-2.500D-03
VG	5.000D-01

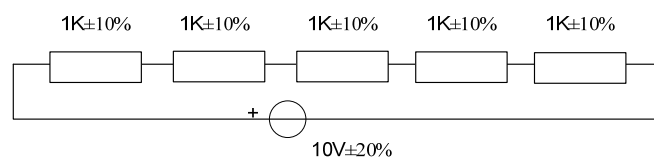
Glede na predznak občutljivosti izberemo maksimalno ali minimalno vrednost parametra. Nato s simulacijo določimo $U_R^{\max}$ in $U_R^{\min}$ pri obeh izbranih kombinacijah vrednosti parametrov. Dobimo dve vrednosti: $U_R = 7,2V$ in $U_R = 3,2V$. Za test monotonosti v obeh delovnih točkah ponovno izračunamo občutljivosti²⁴. Ker nobena **ni spremenila predznaka**, predvidevamo, da je potek funkcije monoton in da smo izbrali pravo kombinacijo ekstremnih vrednosti.

	nenormirana občutljivost	ustrezna kombinacija za	
	$V/[\Omega], V/V$	$U_R^{\max}$	$U_R^{\min}$
R2	6,250D-04	$R2^{\max}=2,4K$	$R2^{\min}=1,6K$
R3	6,250D-04	$R3^{\max}=2,4K$	$R3^{\min}=1,6K$
R1	-2,500D-03	$R1^{\min}=0,8K$	$R1^{\max}=1,2K$
VG	5,000D-01	$VG^{\max}=12V$	$VG^{\min}=8V$

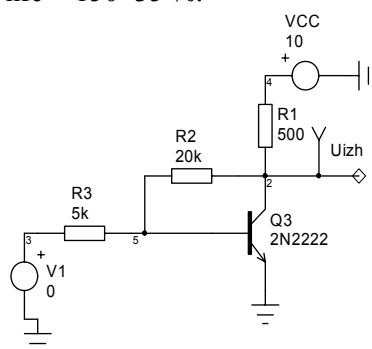
²⁴ Rezultati te analize niso prikazani v zgledu.

5.6 Naloge za poglavje 5

1. Na dvopolni element, ki je opisan s karakteristiko $i = u(u^2/3 - 3u + 8)$, je pritisnjena napetost $u_0 = 4,5V \pm 1,5V$. Z matematično analizo ugotovi, v kolikšnem območju leži tok delovne točke i_0 ?
2. Karakteristika dvopola je enaka kot pri vaji 1. Delovna točka je $u_0 = 6V \pm 20\%$. Kolikšna je toleranca i_0 ? Skiciraj karakteristiko.
3. Kolikšna je nazivna vrednost toka? V kolikšnem območju leži vrednost toka? Kolikšna je verjetnost, da bo tok večji od izračunane zgornje meje?



4. Resonančna frekvenca nekega oscilatorja je opisana z izrazom: $f_r = k_1 R_a^2 - k_2 R_b$. ($R_a = 1k \pm 20\%$, $R_b = 100 \pm 20\%$, $k_1 = 10^{-3} \text{Hz}/\Omega^2$, $k_2 = \text{Hz}/\Omega$). Kolikšna je nazivna vrednost f_r ? Kolikšna je zgornja oziroma spodnja meja resonančne frekvence?
5. S pomočjo rezultatov simulacije izračunaj najbolj neugoden primer U_{izh} , če je toleranca uporov 5 %, baterije 20 % in $h_{fe} = 150 \pm 35\%$.



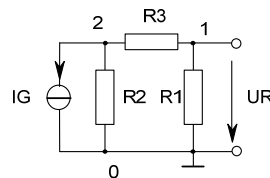
IME IN NOM,VRED, LASTNOSTI $u_{izh} = 5,026V$

PARAMETER	NOMINALNA_VREDNOST	OBČUTLJIVOST [ENOTA/ %]
r3:resistance	5,0000K	-2,0e-002
r1:resistance	500,00	-1,2e-002
r2:resistance	20,000K	3,1e-002
vcc:dc	10,0000	2,5e-002
q3_tol.bf	150,00	-9,8e-003

- 5.1 Imamo enako vezje kot pri prejšnji nalogi, vendar drugačne tolerance. Izračunaj najbolj neugoden primer U_{izh} , če je toleranca uporov 5%, baterije 6...11V in $h_{fe} = 50 \dots 200$.
6. Stabiliziran vir, ki naj bi imel toleranco $5V \pm 2\%$, mora delovati v temperaturnem območju od -30°C do 100°C . Napetost 9V baterije lahko pade za največ 3V. Kolikšna je toleranca vira? Preveri tudi, ali vezje ustreza zahtevam. Znale so občutljivosti pri nazivnih vrednostih temperature (25°C) in napajalne napetosti (9V):

$$S_T^{U_{izh}} = -50 \text{ ppm}/^\circ\text{C}, \quad S_{U_{bat}}^{U_{izh}} = 10 \text{ mV}/\text{V}$$

7. Izpelji analitični izraz za napetost UR in izračunaj toleranco napetosti UR z metodo, ki linearizira lastnost. Tolerance uporov so 10 %, tokovnega generatorja pa 30 %.



Diferencialne občutljivosti napetosti UR za nominalni primer:

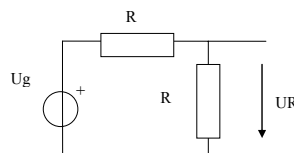
PARAMETER	VREDNOST PARAMETRA	OBČUTLJIVOST	NORMIRANA OBČUTLJIVOST [V/%]
R1	2,000E+03	-7,500E-04	-1,500E-02
R2	4,000E+03	-2,500E-04	-1,000E-02
R3	2,000E+03	2,500E-04	5,000E-03
IG	2,000E-03	-1,000E+03	-2,000E-02

8. Glej podatke iz naloge 5. Kolikšne naj bodo vrednosti parametrov, da bomo lahko simulirali najbolj neugoden primer U_{izh} ?

9. Moč nekega vezja je določena z izrazom: $P = \frac{R_1^2}{R_1 + R_2} \cdot k$. Vrednosti parametrov so:

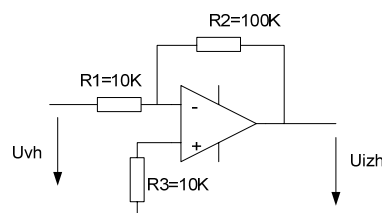
$R_1 = 1 \pm 20 \%$, $R_2 = 2 \pm 20 \%$, $k = 1 \text{ W}/\Omega$. Kolikšna je toleranca oziroma območje P? Uporabi metodo z ustreznim izborom ekstremnih vrednosti.

10. Izpelji analitični izraz za napetost UR in določi najbolj neugoden primer. $R = 1 \text{ k} \pm 20 \%$, $U_g = 10 \text{ V} \pm 20 \%$. Uporabi ustrezen izbor ekstremnih vrednosti parametrov.



11. Reši nalogo 7 z ustreznim izborom ekstremnih vrednosti. Z izračunom občutljivosti pri ekstremnih vrednostih parametrov preveri monotonost poteka lastnosti.

12. Izračunaj najbolj neugoden primer za napetostno ojačenje na dva načina: a. z ustreznim izborom ekstremnih vrednosti in b. z linearizacijo lastnosti. Upori imajo 10 % toleranco.



6. Ocena statistične tolerance in izmeta

6.1 Hitra ocena statistične tolerance

Podobno kot pri iskanju najbolj neugodnega primera nas tudi tukaj zanima, kako vpliva variabilnost parametrov na variabilnost lastnosti. Tokrat bomo upoštevali tudi verjetnost. Prispevek k spremembi lastnosti, ki nastane zaradi spremembe parametra x_i , bomo označili z $\Delta F(\Delta x_i)$. Če spremembe Δx_i niso prevelike, potem velja:

$$\Delta F(\Delta x_i) \approx S_{x_i}^F \cdot \Delta x_i$$

Spremembe parametrov naj bodo sedaj izražene s statističnimi merami npr. σ . Če se hkrati spremeni več parametrov, potem se rezultat vseh sprememb oceni z enačbo:

$$\Delta F \approx \sqrt{\Delta F^2(\Delta x_1) + \Delta F^2(\Delta x_2) + \dots + \Delta F^2(\Delta x_m)} \quad (6.1)$$

Če za spremembo parametra izberemo 3σ , potem se izračunana sprememba lastnosti ΔF tudi nanaša na velikost 3σ . Na ta način lahko hitro ocenimo statistično toleranco lastnosti (glej zgled na naslednji strani).

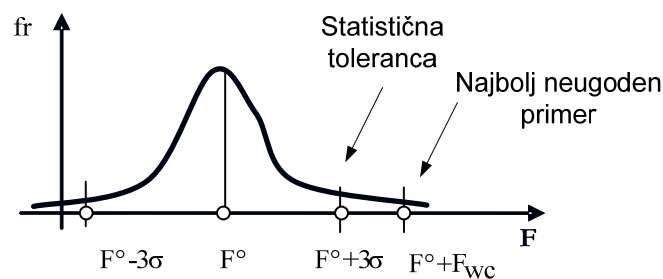
Najbolj neugoden primer smo ocenili z:

$$\Delta F_{wc} \approx |\Delta F(\Delta x_1)| + |\Delta F(\Delta x_2)| + \dots + |\Delta F(\Delta x_m)| \quad (6.2)$$

Takoj vidimo, da velja:

$$\Delta F_{wc} > \Delta F$$

To pomeni, da je vrednost najbolj neugodnega primera vedno večja kot statistično določene meje. Verjetnost, da zavzame lastnost vrednost, ki je večja ali enaka toleranci²⁵, je približno 0,15 %. Če je porazdelitev vseh parametrov normalna, je verjetnost nastopa najbolj neugodnega primera vedno manjša kot 0,15 %.

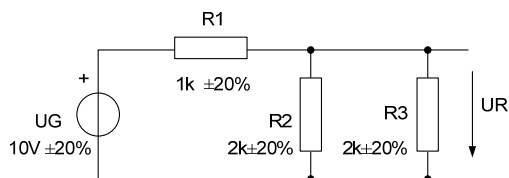


Slika 6.1 Najbolj neugoden primer vedno leži nad 3σ .

²⁵ Statistična toleranca je vrednost, ki ustreza 3σ . Glej tudi tabelo 2.1.

Zgled

Za narisano vezje poznamo normirane občutljivosti. $UR^0 = 5V$.
Oceni (statistično) toleranco napetosti UR .



PARAMETER	Toleranca [%]	Normirana občutljivost [V/%]
R2	20	1,250E-02
R3	20	1,250E-02
R1	20	-2,500E-02
VG	20	5,000E-02

Rešitev:

Prispevek k spremembi lastnosti, ki nastane zaradi spremembe parametra x_i :

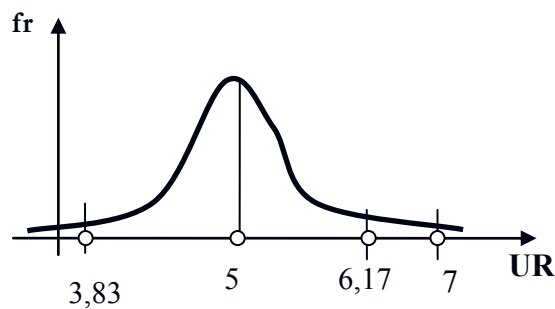
$$\Delta F(\Delta x_i) \approx S_{x_i}^F \Delta x_i$$

$$\Delta UR \approx \sqrt{\Delta F^2(\Delta R2) + \Delta F^2(\Delta R3) + \Delta F^2(\Delta R1) + \Delta F^2(\Delta UG)}$$

PARAMETER	Δx_i [%]	Normirana občutljivost [V/%]	$\Delta F(\Delta x_i)$	$\Delta F^2(\Delta x_i)$
R2	20	1,250E-02	0,25	0,0625
R3	20	1,250E-02	0,25	0,0625
R1	20	-2,500E-02	-0,50	0,2500
VG	20	5,000E-02	1,00	1,0000
Σ			2,00	1,37

Sprememba vsakega parametra je bila enaka vrednosti tolerance oziroma 3σ .

Statistična ocena tolerance je $\Delta UR = \sqrt{1,37} = 1,17V$ oziroma 23 %.
Ocenjena $\sigma = 0,39$. Najbolj neugoden primer je $\Delta UR = 2,00V$.



Z analizo najbolj neugodnega primera smo za to vezje ugotovili, da je $UR^{\max} = 7$. Ta vrednost je za približno 5σ oddaljena od nominalne vrednosti. Verjetnost, da bo $UR \geq 7$, je $2,35 \cdot 10^{-5} \%$ (glej tabelo 6.1).

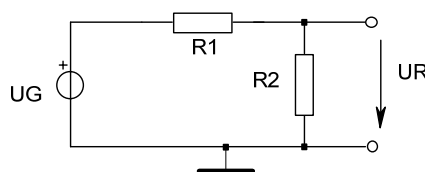
6.2 Statistična ocena z Monte Carlo analizo

Monte Carlo analiza, ki je v bistvu simulacija proizvodnje, poteka v treh zaporednih korakih:

1. naključni izbor parametrov za vsak primerek,
2. simulacija vezij (primerkov) in izračun lastnosti,
3. statistična analiza.

Ker je možno vse tri korake avtomatizirati, je ta analiza vgrajena v večino simulatorjev vezij. Celoten postopek bomo podrobneje prikazali kar na konkretnem zgledu, kjer bo UR lastnost, ki nas zanima.

$$R1 = 5\Omega \pm 20\%, R2 = 5\Omega \pm 10\%, UG = 4V \pm 10\%$$

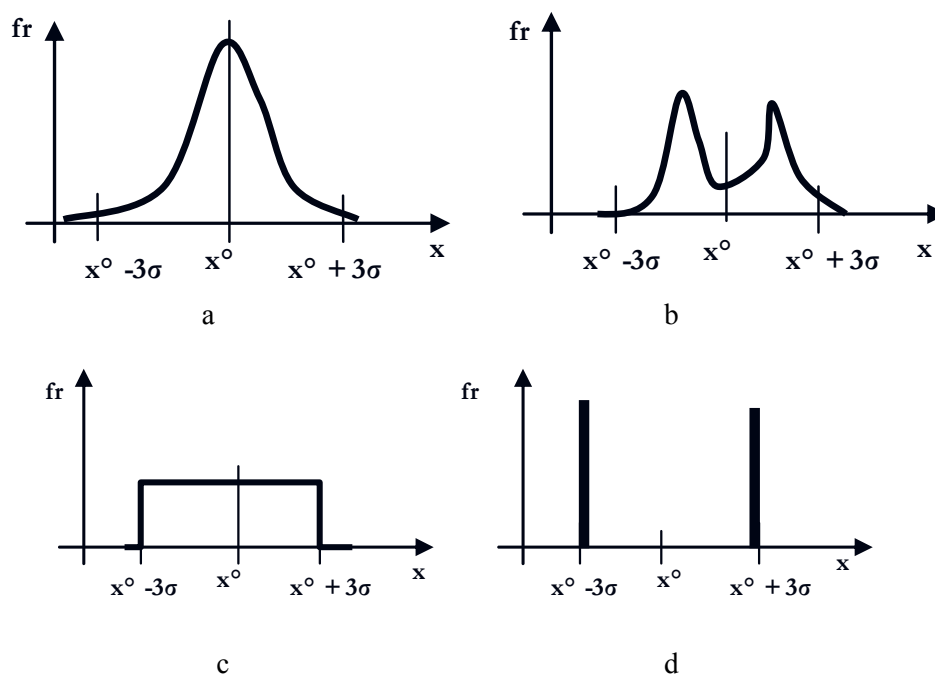


1. korak – naključni izbor parametrov

Pri Monte Carlo analizi naključno izbiramo vrednosti parametrov. Na primer, če je v vezju napetostni vir $UG = 10V \pm 20\%$, potem bomo izbirali vrednosti znotraj intervala 8V do 12V v skladu z ustrezno porazdelitvijo (glej sliko 6.2), ki velja za ta parameter.

V tem zgledu si bomo izbrali zelo malo primerkov²⁶, saj bomo računali brez uporabe računalnika. Odločimo se za 10 primerkov ($N = 10$) in pripravimo tabelo, kamor vpisujemo naključne vrednosti parametrov.

²⁶ Za resno izvedeno Monte Carlo analizo je potrebno večje število primerkov.



Slika 6.2 Najpogostejše uporabljene porazdelitve parametrov: a. Gaussova, b. Gaussova, ki ima izločen srednji del, c. enakomerna in d. binarna.

Območje parametra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$3,6 \leq UG \leq 4,4$	4,3	3,7	4,0	4,1	3,9	4,2	3,8	4,0	3,9	3,7
$4,0 \leq R1 \leq 6,0$	5,0	5,2	4,8	5,9	4,5	5,0	4,7	4,2	5,8	5,3
$4,5 \leq R2 \leq 5,5$	5,4	5,2	4,6	5,1	4,7	4,9	5,2	5,3	5,3	5,0

Dobili smo 10 primerkov vezja, katerih parametri imajo naključne vrednosti, ki se nahajajo znotraj toleranc.

2. korak – simulacija vezij

V drugem koraku vsak primerek simuliramo in dobimo N naključnih vrednosti lastnosti F : $F(1)$, $F(2)$, ... $F(N)$. Namesto simulacije bomo UR kar izračunali in vrednosti UR vpisali v tabelo 6.1.

$$UR = \frac{R2}{R1 + R2} UG \quad (6.3)$$

Tabela 6.1 Naključne vrednosti lastnosti UR

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
UR	2,2	1,9	1,7	1,9	2,0	2,1	2,0	2,2	1,9	1,8

Podoben niz dobljenih naključnih vrednosti bi dobili, če bi zgradili N vezij. V bistvu z Monte Carlo analizo simuliramo proizvodnjo. Postopek se ne spremeni, če nas zanima več lastnosti hkrati.

3. korak – statistična analiza

V zadnjem koraku se izvede statistična analiza naključnih vrednosti lastnosti $F(j)$, kjer je $j = 1..N$ (glej tabelo 6.1).

$$F^\circ \approx \overline{F} \quad (6.4)$$

$$\Delta F = 3\sigma \quad (6.5)$$

Pri velikem vzorcu je standardna deviacija vzorca približno enaka standardni deviaciji celotne populacije ($\sigma \approx s$). Isto velja za povprečno vrednost. Povprečno vrednost lastnosti računamo zgolj za kontrolo, saj pravo nominalno vrednost lastnosti večinoma poznamo²⁷. Večji je vzorec, bolj natančna in zanesljiva bo ocena tolerance (več o tem glej v poglavju Osnove statistične analize).

Rezultati statistične analize:

- Srednja vrednost: $\overline{UR} = 1,97V$
- Nominalna vrednost: $UR^\circ = 2,0V$
- Standardna deviacija vzorca: $s = 0,16V$
- Standardna deviacija celotne populacije²⁸: $\sigma \approx 0,16 \cdot 1,44 = 0,23V$
- Najbolj neugoden primer v nizu: $UR^{\max} = 2,2V$ in $UR^{\min} = 1,7V$
- Toleranca lastnosti $UR = (2 \pm 0,7)V$

V nizu lastnosti je zanimivo poiskati ekstremne vrednosti lastnosti F (to bomo poimenovali iskanje najbolj neugodnega primera s poskušanjem). Verjetnost naključnega odkritja pravega najbolj neugodnega primera je seveda izredno majhna in odvisna od porazdelitve in števila N .

6.3 Lastnosti in uporaba Monte Carlo analize

V primerjavi s predhodnimi metodami dobimo tukaj tudi **porazdelitev lastnosti F** . Za vsako vrednost F lahko izračunamo tudi **verjetnost**, da se bo zgodila. Z analitično metodo smo sicer lahko poiskali resnične ekstremne vrednosti lastnosti F , vendar nismo mogli podati ocene, kolikšna je verjetnost, da se bodo zgodili. To pomanjkljivost odpravlja Monte Carlo analiza, saj lahko ocenimo²⁹:

²⁷ Nominalno vrednost lastnosti dobimo, če za parametre izberemo njihove nominalne vrednosti.

²⁸ Ker imamo samo 10 primerkov, je standardna deviacija celotne populacije za 44 % večja (glej tabelo 2.2 in sliko 2.7).

²⁹ Glej zgled, ki sledi.

- Koliko vezij ne bo ustrezalo zahtevam oziroma **kolikšen bo izmet**³⁰?
- Katere vrednosti se bodo najpogosteje pojavljale?
- Kolikšna je verjetnost, da se bo pojavila najbolj neugodna kombinacija parametrov?

Nekatere prejšnje metode so bile uporabne le, če tolerance parametrov niso bile prevelike. Za Monte Carlo metodo ta omejitev ne velja. Edini pogoj, ki ga moramo izpolniti, je poznavanje porazdelitvene funkcije parametrov. Slabost te analize je, da potrebujemo veliko primerkov, če hočemo zanesljivo ocenjevati tolerance oziroma verjetnost najbolj neugodne kombinacije parametrov. Z večanjem računalniških zmogljivosti postaja ta problem čedalje manjši.

Le če gre za ozke tolerance, se vrsta porazdelitve ohranja. Npr., če so vsi parametri porazdeljeni po Gaussovi distribuciji, bo tudi porazdelitev lastnosti F porazdeljena po Gaussovi. Razlika bo le v srednji vrednosti in standardni deviaciji. Velike spremembe parametrov oziroma nelinearnost funkcije F lahko povzroči tudi preoblikovanje porazdelitvene funkcije.

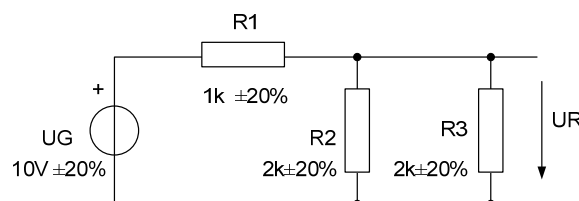
Pri navadni Monte Carlo analizi predpostavljamo, da so variacije med parametri statistično neodvisne. Ker to vedno ne velja (npr. pri proizvodnji integriranih vezij), dobimo bolj pesimistične ocene³¹, kot jih dajejo kasnejše meritve.

6.4 Računalniško podprta Monte Carlo analiza

Ker je vse tri korake možno avtomatizirati, Monte Carlo analizo podpira večina simulatorjev. Če lastnost ni delovna točka (npr. zgornja frekvenčna meja), je potrebno napisati skripte, ki pri vsaki simulaciji iz rezultatov izračunajo vrednost lastnosti.

Zgled

Vrednosti parametrov v narisanim vezju so porazdeljene po Gaussovi porazdelitvi. Določi toleranco napetosti U_R . Računalniško analizo izvedi s 50 primerki vezij. Za primerjavo ponovi analizo z 10, 100, 200 in 500 primerki vezij. Vezje ustreza naročnikovim zahtevam, če leži U_R znotraj intervala $5V \pm 10\%$. Kolikšen bo izmet?



³⁰ Angl. prevod *yield*.

³¹ PCA (Principal Components Analysis) Monte Carlo analiza odpravlja ta problem. Zgled take analize je v članku [CANTATORE, 1999].

Rešitev:

Nominalno vrednost poznamo: $UR = 5\text{ V}$, določiti je potrebno samo 3σ področje. V simulatorju elementom dodamo toleranco, izberemo Gaussovo porazdelitev in opravimo 50 analiz. Standardna deviacija tako dobljenih 50 vrednosti UR je $s = 0,346\text{ V}$. Ker gre za vzorec in ker nimamo velikega števila podatkov, ne moremo predpostaviti, da je $\sigma = s$. S pomočjo tabele 6.1 ugotovimo, da standardna deviacija celotne populacije σ leži v intervalu $s \pm 20\%$. Za najbolj neugoden primer izračuna deviacije je $\sigma = s + 20\% \approx 0,4$.

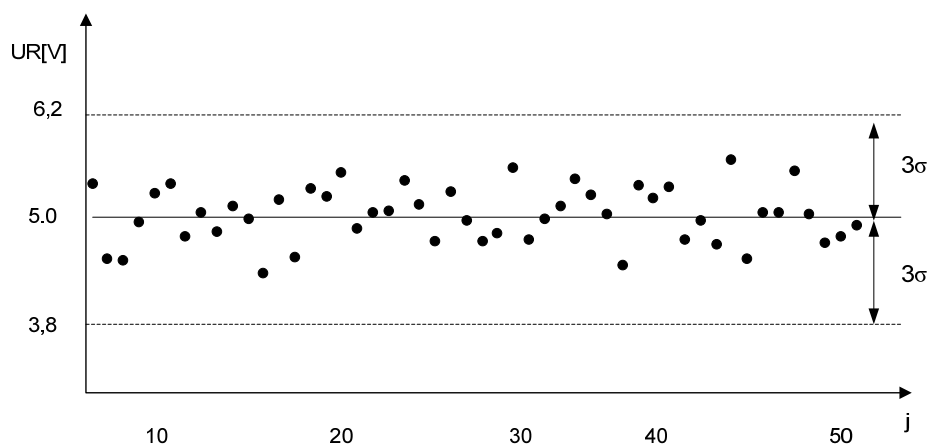
Statistična ocena toleranc (3σ) je: $UR = 5\text{ V} \pm 1,2\text{ V}$ oziroma $UR = 5\text{ V} \pm 24\%$. $UR^{\max} = 6,2\text{ V}$ in $UR^{\min} = 3,8\text{ V}$.

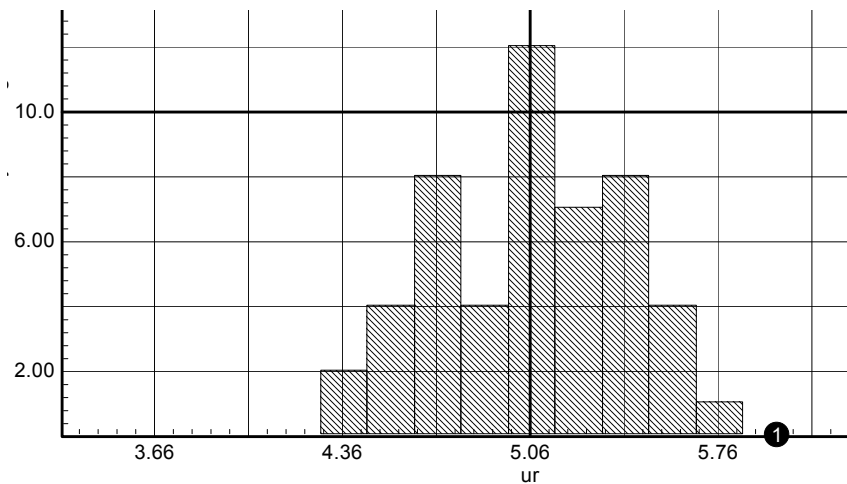
Na podoben način izvedemo analizo za druge vrednosti N . Iz podatkov iz tabele 6.2 je razvidno, da smo se že pri 50 primerkih zelo dobro približali dejanski toleranci, ki naj bi znašala $22,7\%$.

Tabela 6.2 Statistični podatki v odvisnosti od števila primerkov.

UR	N=10	N=50	N=100	N=200	N=500	N= ∞
Sred. vred.	5,047	5,055	4,990	4,984	4,992	5,000
Stand. dev.	0,387	0,346	0,346	0,356	0,370	0,391
Toleranca	33,2 %	24,6 %	23,7 %	24,5 %	22,2 %	22,7 %
Max. vred.	5,750	5,750	5,750	5,951	6,107	7,200
Min. vred.	4,514	4,320	4,295	3,958	3,958	3,200

Opomba: $N = \infty$; vrednosti so dobljene na analitični način, razen tolerance, ki velja za $N = 2000$. Standardna deviacija se nanaša na vzorec, toleranca pa na celotno populacijo.

Slika 6.3 Variacija UR v odvisnosti od j -tega primerka. S črtkano črto je označena tolerančna meja.



Slika 6.4 Porazdelitev vrednosti izhodne napetosti UR, prikazane v obliki histograma za $N = 50$.

Za kontrolo smo izrisali tudi porazdelitev napetostnega vira UG (glej sliko 6.5) in ocenili toleranco, ki je sicer bila znana. Toleranca, dobljena s simulacijo, je znašala 20,9 %, dejanska pa je bila 20 %.

V tem zgledu nas tudi zanima, kolikšen bo izmet oziroma kolikšna je verjetnost, da bo UR ležala izven 5 ± 10 % intervala. Ta podatek dobimo z enostavnim odštevanjem verjetnosti, ki jih odčitamo na kumulativni distribuciji³² (glej sliko 6.6) lastnosti UR:

$$P\{UR < 4,5\} = 16,3\% \text{ in } P\{UR < 5,5\} = 95,5\%$$

Verjetnost, da je UR znotraj intervala:

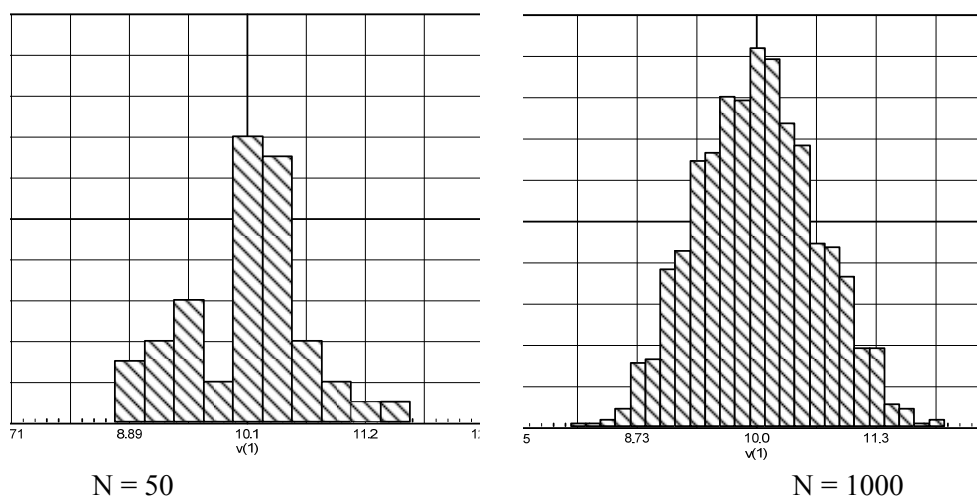
$$P\{4,5 < UR < 5,5\} = 95,5\% - 16,3\% = 79,2\%$$

Verjetnost, da je UR zunaj intervala:

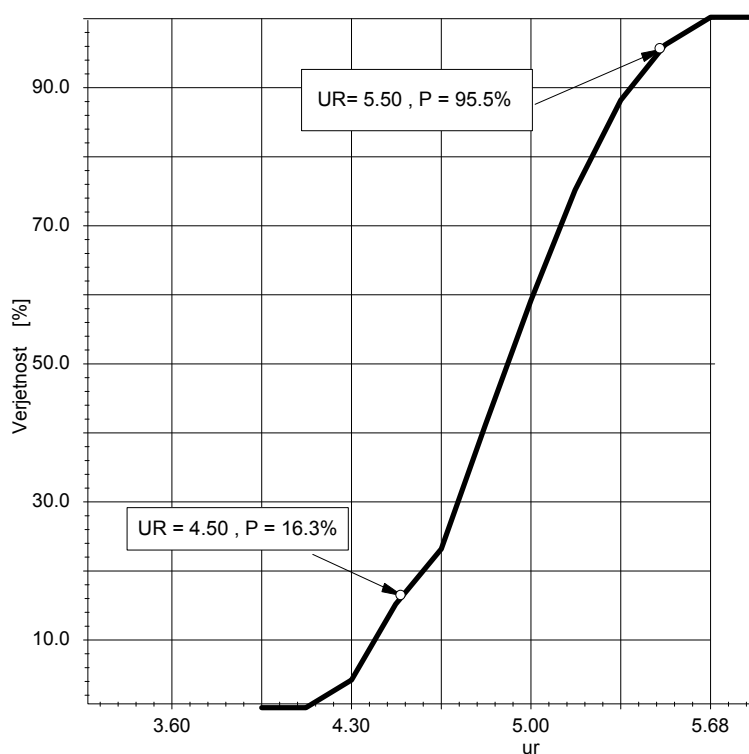
$$P\{4,5 > UR > 5,5\} = 100\% - 79,2\% = 20,8\% \approx \underline{\underline{21\%}}$$

21 % vezij ne ustreza naročnikovim zahtevam, saj pri njih leži UR izven intervala 5 ± 10 %.

³² Kumulativna distribucija prikazuje verjetnost $P\{UR < ur\}$.

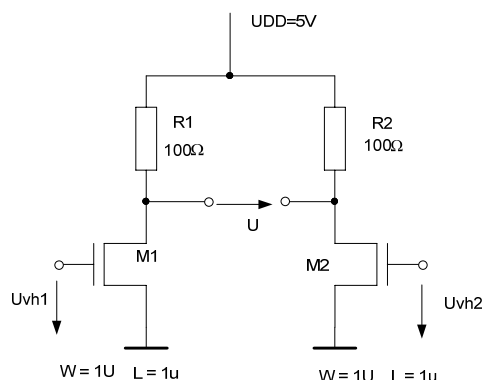


Slika 6.5 Porazdelitev (parametra) napajalne napetosti $U_G = 10V \pm 20\%$, prikazana v obliki histograma za 50 in za 1000 primerov.



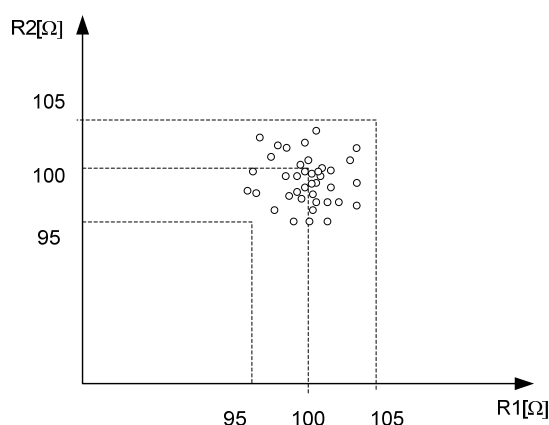
Slika 6.6 Kumulativna porazdelitev UR. Vezje je sprejemljivo, če velja $5V \pm 10\%$. Na sliki odčitamo, da bo izplen $95,5\% - 16,3\% = 79,2\%$ oziroma izmet bo znašal $20,8\%$.

Na sliki 6.7 je prikazan zelo preprost diferenčni ojačevalnik, ki ga bomo uporabili za zgled. Diferenčni ojačevalnik mora ojačevati samo razliko vhodnih napetosti. Če sta vhodni napetosti popolnoma enaki in če je tudi leva stran enaka desni, je napetost U enaka nič. Ker vrednosti parametrov rahlo variirajo (npr. upornost R_1 , R_2 , pragovna napetost itd.), na izhodu vedno obstaja neka napetost, ki ji pravimo preostala napetost³³. Preostala napetost naj bo lastnost, ki nas bo v tem zgledu zanimala.



Slika 6.7 Preprost diferenčni ojačevalnik

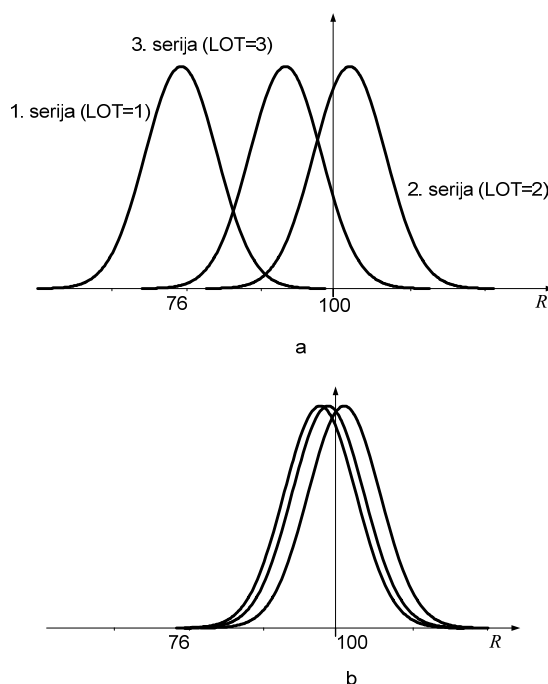
Nekorelirani parametri. Pri najpreprostejši proizvodnji je vezje sestavljeno iz diskretnih elementov, ki so povezani na tiskanini. Vsak element ima vrednost znotraj določenih toleranc (npr. $\Delta R = \pm 5 \%$). Med dejanskimi vrednostmi parametrov **ni nobene povezave**. Tudi nominalna vrednost vsakega parametra med proizvodnjo se bistveno ne spreminja. Dejanska vrednost R1 je popolnoma neodvisna (nekorelirana) od vrednosti, ki jo ima upor R2 (glej sliko 6.8). Z enostavno Monte Carlo analizo, ki smo jo predhodno opisali, bi določili tolerančno območje U oziroma ocenili izmet.



Slika 6.8 Nekorelirane vrednosti dveh uporov 100 ± 5 %.

³³ Ang. offset voltage.

Korelirani parametri. Narava proizvodnje nekaterih elektronskih elementov je takšna, da se nominalna vrednost parametrov občasno spremeni. To je še posebej izrazito pri proizvodnji **integriranih vezij**. Natančnost izdelanih elementov je odvisna od natančnosti orodij in homogenosti materiala. Vrednost upornosti integriranega upora je odvisna od njegovih dimenzij in plastne upornosti materiala. Plastna upornost je predvsem odvisna od količine primesi. Če proizvodnjo čez čas ponovijo (nova serija)³⁴, so dimenzije uporov še vedno iste, vendar je količina primesi rahlo spremenjena, saj tehnologi ne morejo zagotoviti popolnoma enakih pogojev (temperatura, količina primesi itd.), kot so bili pri prejšnji seriji. Zato imajo vsi upori lahko rahlo prevelike ali pa premajhne vrednosti, kar se v porazdelitvi kaže kot premik nominalne vrednosti³⁵ (glej sliko 6.9 in sliko 6.10). Na sliki 6.7 bi imela oba upora pri prvi seriji npr. vrednost 108Ω , pri drugi 99Ω , tretji 80Ω itd. To variabilnost med serijami bomo imenovali **variabilnost procesa**. S primernim načrtovanjem lahko vpliv variabilnosti procesa izdelave pogosto odpravimo³⁶.



Slika 6.9 Porazdelitev upornosti 100Ω integriranega upora, kadar so razlike med serijami velike (a) in majhne (b).

Kljub temu, da bomo na eni rezini izdelali upore, ki naj bi bili enaki, nastanejo med njimi zelo majhne razlike³⁷, ki so večinoma posledica nenatančnosti orodij.

³⁴ Sinonim je šarža. Angl. prevod je *lot*.

³⁵ Angl. *global process variations, intra-die variations*.

³⁶ Kljub povečani vrednosti uporov (glej sliko 6.7) bi preostala napetost bila enaka nič, saj bi bila padca napetosti na obeh uporih enaka.

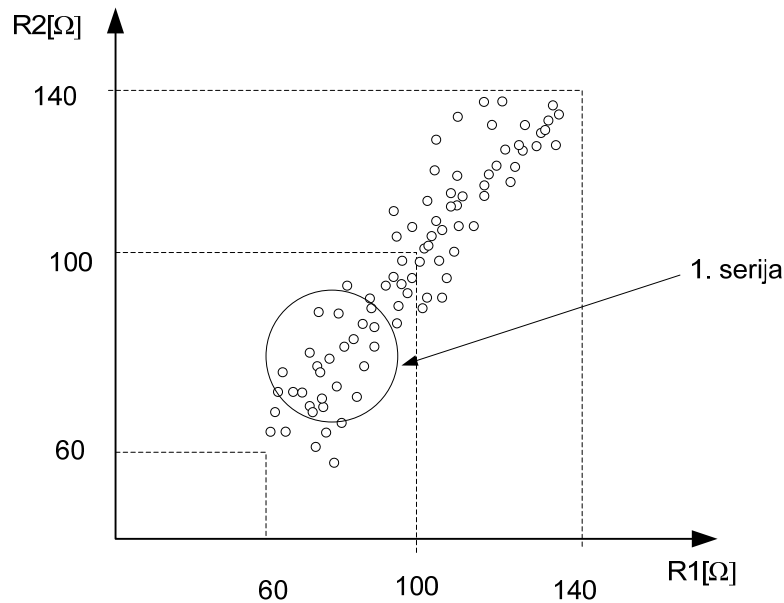
³⁷ Angl. *local mismatch*.

To variabilnost znotraj serije bomo poimenovali **variabilnost elementov**. Npr. pragovna napetost med tranzistorji, ki so na isti rezini, variira za nekaj desetink mV, med rezinami pa celo do 150mV [TARIM, 1999].

Ugotovili smo, da pri proizvodnji integriranih vezij vrednosti parametrov variirajo zaradi **variabilnosti procesa in variabilnosti elementov**. Označimo tolerance (izražene v procentih) med serijami s T_{LOT} in tolerance znotraj serije s T_{DEV} . Pričakujemo lahko, da bo v vseh serijah največja in najmanjša vrednost nekega parametra x znašala:

$$x^{\max} = x^{\circ} \left(1 + \frac{T_{LOT}}{100} \right) \left(1 + \frac{T_{DEV}}{100} \right) \quad x^{\min} = x^{\circ} \left(1 - \frac{T_{LOT}}{100} \right) \left(1 - \frac{T_{DEV}}{100} \right)$$

Za proizvodnjo integriranih vezij velja, da je $T_{LOT} > T_{DEV}$. Zaradi variabilnosti procesa so nekateri, sicer različni parametri (npr. R in pragovna napetost) med seboj tudi delno korelirani, kar zelo zaplete natančno simulacijo proizvodnje in določevanje izmeta³⁸. Z določeno poenostavitvijo lahko simulacijo izvedemo tudi s cenejšimi simulatorji (PSPice, Intusoft). V takih primerih je potrebno opisati variabilnost parametrov z dvema tolerancama³⁹: prva se nanaša na **variabilnost procesa**, druga pa **variabilnost elementov**. Prav tako je potrebno izbrati zadostno število primerkov v eni seriji in število serij⁴⁰. V tabeli 6.3 so prikazane dejanske vrednosti treh enakih uporov, ki se pojavljajo v štirih serijah. Za vsako serijo je prikazanih prvih pet primerkov vezij.



Slika 6.10 Korelirane vrednosti dveh uporov $R^{\circ} = 100\Omega$ iz različnih serij (glej tudi tabelo 6.3).

³⁸ Več o tem glej v [MICHAEL, 1993], [TARIM, 1999].

³⁹ Zelo pogosto sta to parametra LOT in DEV. LOT je za variabilnost procesa in DEV za variabilnost elementov.

⁴⁰ V Intusoftovem simulatorju sta to parametra CASES in LOTS.

Tabela 6.3 Naključno izbrane vrednosti⁴¹ za enake upore R1, R2 in R3. Znotraj štirih serij se vrednosti uporov razlikujejo za 5 %, med serijami pa za 40 %.

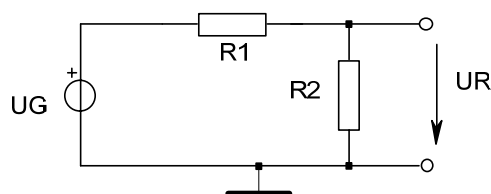
	CASE=1	CASE=2	CASE=3	CASE=4	CASE=5
Serija 1	76.214	78.033	76.505	77.672	77.915
	78.883	79.575	75.993	75.687	78.770
	77.678	77.275	78.647	77.134	76.662
Serija 2	105.72	104.89	105.45	104.30	103.47
	104.48	103.59	103.31	102.69	105.31
	105.39	102.60	104.70	101.37	103.18
Serija 3	80.846	83.023	82.040	80.460	82.982
	80.643	82.177	83.658	84.027	83.042
	80.866	81.336	81.120	82.406	86.130
Serija 4	103.98	106.78	101.42	104.28	104.48
	104.64	104.26	106.27	101.92	106.17
	103.39	103.67	106.33	105.20	106.54

⁴¹ Simulirano s simulatorjem SPICE/Intusoft (LOT=40%, DEV=5%).

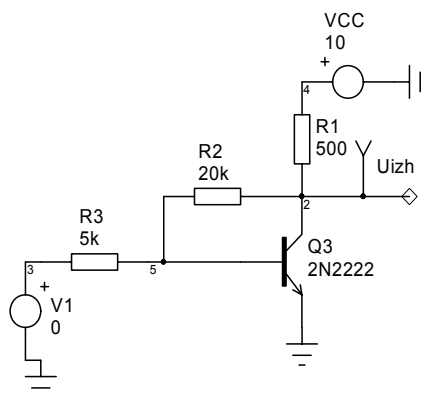
6.6 Naloge za poglavje 6

1. Določi toleranco UR oziroma najbolj neugoden primer napetosti UR na naslednje načine:
 1. najbolj neugoden primer z linearizacijo lastnosti,
 2. najbolj neugoden primer z ustreznim izborom ekstremnih vrednosti,
 3. s hitro oceno statistične tolerance,
 4. s statistično metodo (Monte Carlo metoda, sam si naključno izberi 10 vrednosti).

$R1 = 5\Omega \pm 20\%$, $R2 = 5\Omega \pm 10\%$, $UG = 4V \pm 10\%$



2. Oцени najbolj neugoden primer in statistično toleranco Uizh.



IME IN NOM.VRED.LASTNOSTI uizh = 5.026V

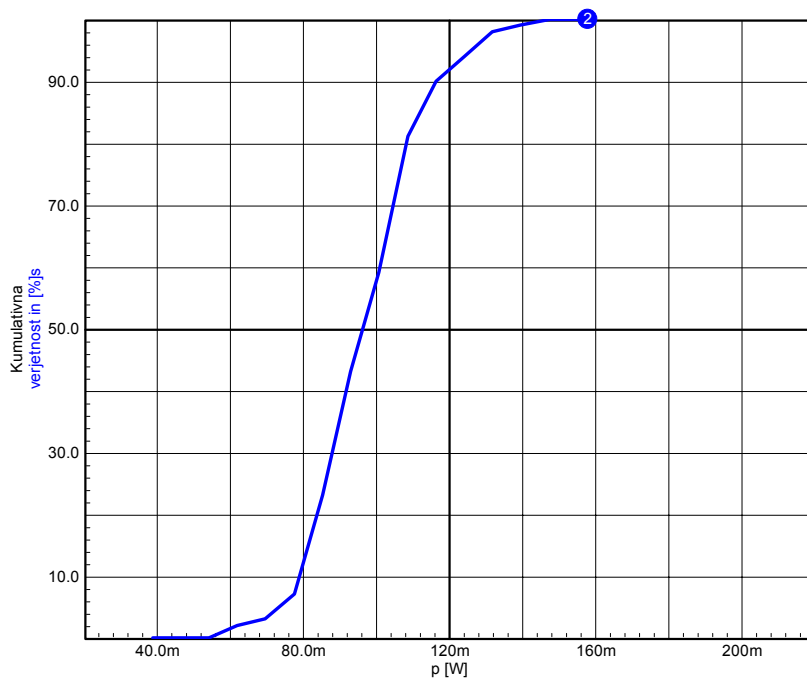
PARAMETER	TOLERANCA	OBČUTLJIVOST [ENOTA/%]
r3:resistance	5 %	-2,0e-002
r1:resistance	5 %	-1,2e-002
r2:resistance	5 %	3,1e-002
vcc:dc	20 %	2,5e-002
q3_tol.bf	35 %	-9,8e-003

3. Ojačenje NMOS ojačevalnika je definirano z $A_u = -\sqrt{\frac{W_1/L_1}{W_2/L_2}}$. Vrednosti parametrov

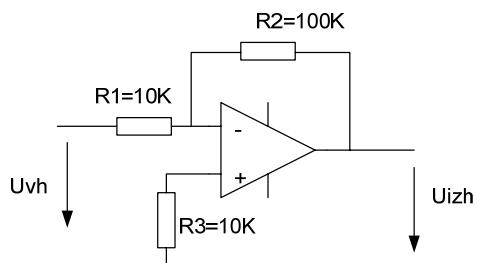
so: $W1 = 10\mu\text{m}$, $L1 = 1\mu\text{m}$, $W2 = 1\mu\text{m}$, $L2 = 10\mu\text{m}$. Vsi parametri imajo toleranco $\pm 0,2\mu\text{m}$. Oцени najbolj neugoden primer ojačenja na dva načina.

4. Imamo isti ojačevalnik kot pri prejšnji nalogi. Z Monte Carlo analizo (10 primerov) izračunaj toleranco ojačenja. Pravilnost izračuna preveri s hitro oceno statistične tolerance.
5. S simulacijo smo dobili potek kumulativne distribucije za moč P.

- Kolikšna je verjetnost, da bo moč P manjša od 80mW ?
- Kolikšen bo približno izmet, če je zahtevano, da velja $80\text{mW} < P < 100\text{mW}$?
- Kolikšna je nazivna vrednost moči?

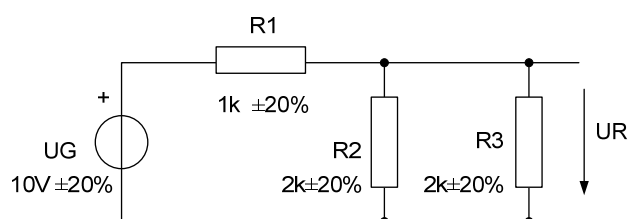


6. Oцени statistično toleranco ojačenja in najbolj neugoden primer. Upori imajo 10 % toleranco.



7. Primerjava metod za analizo toleranc

Vezje, ki ga prikazuje slika 7.1, smo analizirali z vsemi obravnavanimi metodami, razen z analitično metodo. Rezultati, ki se nahajajo v tabeli 7.1, kažejo, da očitno ležijo ekstremne vrednosti U_R na robovih, ki jih določajo ekstremne vrednosti parametrov. Ker so bile vrednosti parametrov normalno porazdeljene, obstaja izredno majhna verjetnost, da se bo pojavil najbolj neugoden primer. Tudi v 500 primerkih (glej tabelo 7.2) se največja in najmanjša vrednost v znatni meri razlikujeta od dejanskega najbolj neugodnega primera.



Slika 7.1 Vezje, ki smo ga analizirali z vsemi metodami.

Tabela 7.1 Rezultati analiz

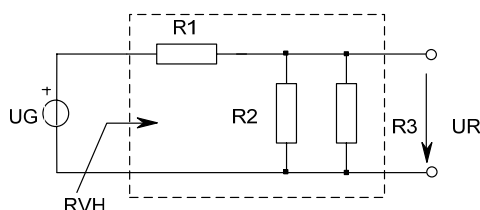
Najbolj neugoden primer	$U_R^{\min}$	U_R°	$U_R^{\max}$
Analitična metoda	3,20 (-36 %)	5,00	7,20 (+44 %)
Linearizacija lastnosti	3,00 (-40 %)	5,00	7,00 (+40 %)
Ustrezen izbor ekstremnih vrednosti	3,20 (-36 %)	5,00	7,20 (+36 %)
S poskušanjem (N = 50)	4.32		5,75

Ocena statistične tolerance	σ	Toleranca
Hitra ocena toleranc	0,39	5V ± 1,17 V oz. 5V ± 23 %
Statistična metoda – Monte Carlo (N = 50)	0,4 V	5V ± 1,2 V oz. 5V ± 24 %
Statistična metoda – Monte Carlo (N = 1000)	0,4 V	5V ± 1,2 V oz. 5V ± 23 %

8. Načrtovanje toleranc parametrov

Z načrtovanjem toleranc (parametrov) začnemo šele, ko s pravilno izbiro nominalnih vrednosti parametrov uspemo, da so nominalne vrednosti lastnosti znotraj dopustnih območij. Sedaj nas zanima, za koliko lahko variirajo vrednosti preostalih parametrov (glej sliko 8.1). Naloga načrtovalca je, da določi takšne tolerance parametrov, pri katerih so lastnosti še vedno znotraj dopustnih odstopanj. Nekatere tolerance oziroma območja so včasih že znana (npr. temperaturno območje).

Robustnost vezja je lastnost, ki pove, v kolikšni meri je odporno na spremembo vrednosti elementov, iz katerih je zgrajeno. V večini primerov želimo čim večjo robustnost, saj se z oženjem toleranc elementov viša njihova cena. Ugotovili bomo, da v večini primerov obstaja neskončno rešitev in le v izjemnih primerih rešitev ne obstaja oziroma je samo ena: vse tolerance so enake nič.



Element (parameter)	Nominalna vrednost	Toleranca oziroma območje
R1	1K	?
R2	2K	?
R3	2K	?
UG	10V	?
temperatura	25 °C	30 °C...100 °C

Lastnost	Nominalna vrednost	Toleranca
UR	5V	15 %
RVH	2K	12 %

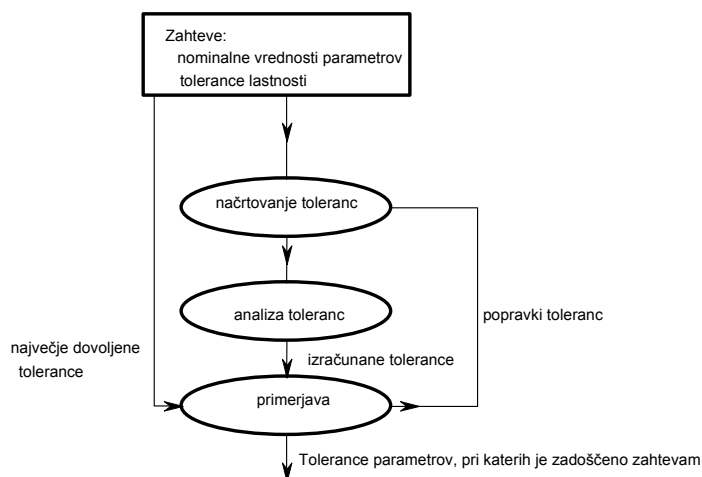
Slika 8.1 Pri načrtovanju toleranc (parametrov) poznamo nominalne vrednosti parametrov in znane so tolerance lastnosti F . Iščemo, kolikšne so lahko tolerance parametrov.

Načrtovanje toleranc parametrov je torej obraten postopek kot analiza toleranc. Podobno kot pri analizi tudi tukaj ločimo:

- načrtovanje toleranc za predpisan najbolj neugodnem primer in
- načrtovanje toleranc za predpisano statistično toleranco lastnosti.

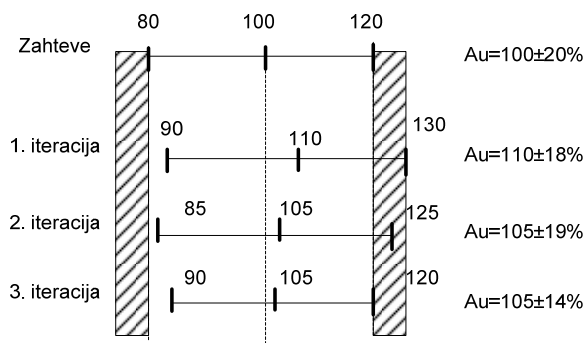
Večinoma z enostavnimi metodami določimo približne začetne vrednosti toleranc parametrov, nakar z analizo preverimo, kolikšna je toleranca lastnosti. V primeru preseženega odstopanja gremo v drugi krog načrtovanja: na podlagi občutljivosti spremenimo vrednosti nekaterih toleranc in ponovimo analizo. To delamo tako dolgo, dokler ne najdemo ustreznih toleranc ali pa ugotovimo, da

je potrebno spremeniti nominalne vrednosti ali pa celo strukturo vezja. V praksi je torej načrtovanje iterativni proces, v katerem si pomagamo z analizo toleranc in analizo občutljivosti. Na sliki 8.3 je prikazan zgled takega načrtovanja. Ker nismo uspeli že v prvi iteraciji, se moramo odločiti: ali bomo povečali korektnost, ali pa zožili tolerance parametrov. Kljub temu da smo se v drugi iteraciji odločili za korekcijo nominalne vrednosti, je zgornja meja še vedno izven dopustnega področja. Zato se v tretji iteraciji odločimo še za zoženje toleranc parametrov in uspemo.



Slika 8.2 Načrtovanje toleranc je iterativni proces.

Robustnost vezja lahko v nekaterih primerih povečamo tudi z ustrezno spremembo nominalnih vrednosti, s čimer se ukvarjajo optimizacijski postopki, ki vključujejo tudi robustnostne kriterije [BÜRMEN, 2002], [BÜRMEN, 2003].



Slika 8.3 Zgled načrtovanja toleranc

Predno začnemo z načrtovanjem toleranc, moramo ugotoviti, kateri parametri že imajo določeno toleranco. Npr. pri vezju na sliki 8.1 je to temperatura. Parametrov, ki že imajo predpisano toleranco, ne moremo spreminjati, njen vpliv pa je vseeno potrebno upoštevati.

8.1 Predpisana je (statistična) toleranca samo ene lastnosti

Najprej se bomo omejili samo na tiste primere, kjer je simetrična toleranca samo ene lastnosti. To je najbolj enostaven primer načrtovanja toleranc. Pri načrtovanju vedno izhajamo iz enačbe, ki smo jo uporabili pri analizi. Pri hitri analizi toleranc smo ugotovili, da kadar je lastnost monotona funkcija, je statistična toleranca lastnosti odvisna od vsote kvadratov vseh prispevkov parametrov:

$$\Delta F^2 \approx \Delta F^2(\Delta x_1) + \Delta F^2(\Delta x_2) + \dots + \Delta F^2(\Delta x_m)$$

Enačba velja le, če funkcija ni preveč nelinearna in hkrati ne nastopajo prevelike spremembe parametrov. Prispevke posameznih parametrov lahko izrazimo z občutljivostmi:

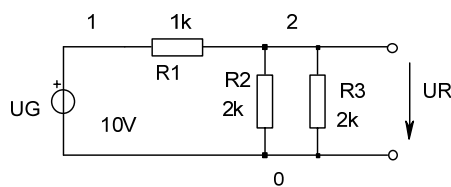
$$\Delta F^2 \geq (S_{x_1}^F)^2 (\Delta x_1)^2 + (S_{x_2}^F)^2 (\Delta x_2)^2 + \dots + (S_{x_m}^F)^2 (\Delta x_m)^2 \quad (8.1)$$

Dobili smo enačbo, s pomočjo katere lahko določimo tolerance parametrov. Ker je predpisano maksimalno odstopanje ΔF , je lahko desna stran enačbe seveda tudi manjša. Edine neznanke v tej enačbi so tolerance parametrov, ki jih izbiramo tako, da je zadoščeno zgornji enačbi.

Če nobena izmed toleranc ni že predpisana, imamo m neznank in samo eno neenačbo. Izberemo si lahko $m-1$ toleranc, eno pa nato izračunamo. Večanje tolerance enega parametra zahteva nižanje drugih. Če si izberemo prevelike tolerance parametrov, se lahko zgodi, da rešitev ne obstaja. Na podlagi medsebojne primerjave normiranih občutljivosti se lahko odločimo, katere parametre bomo zanemarili. Tako lahko problem določevanja parametrov delno omilimo.

Pri izboru toleranc tudi upoštevamo ceno, ki je povezana s toleranco. Npr. upor s toleranco 1 % je zagotovo cenejši kot napajalnik z enako toleranco.

Zgled 1 Kolikšne naj bodo tolerance parametrov, če naj bo $U_R = 5V \pm 5\%$?



$$U_R^0 = 5V$$

PARAMETER	Normirana občutljivost [V/%]
R2	1,250E-02
R3	1,250E-02
R1	-2,500E-02
VG	5,000E-02

Rešitev:

5 % od $U_R = 5V$ je 0,25V

$$62,5 \cdot 10^{-3} \geq (S_{R1}^{UR})^2 (\Delta R_1)^2 + (S_{R2}^{UR})^2 (\Delta R_2)^2 + (S_{R3}^{UR})^2 (\Delta R_3)^2 + (S_{UG}^{UR})^2 (\Delta UG)^2$$

$$62,5 \cdot 10^{-3} \geq 0,625 \cdot 10^{-3} (\Delta R_1)^2 + 0,156 \cdot 10^{-3} (\Delta R_2)^2 + 0,156 \cdot 10^{-3} (\Delta R_3)^2 + 2,5 \cdot 10^{-3} (\Delta UG)^2$$

Odločimo se, da si bomo toleranco ΔUG izbrali in da bodo imeli vsi upori enake tolerance. Če izberemo $\Delta UG = 4 \%$, potem zanaša prispevek $2,5 \cdot 10^{-3} (\Delta UG)^2 = 2,5 \cdot 10^{-3} (4)^2 = 40 \cdot 10^{-3}$ in za upore ostane $22,5 \cdot 10^{-3}$.

$$62,5 \cdot 10^{-3} \geq 0,625 \cdot 10^{-3} (\Delta R)^2 + 0,156 \cdot 10^{-3} (\Delta R)^2 + 0,156 \cdot 10^{-3} (\Delta R)^2 + 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot (4\%)^2$$

$$\Delta R \leq \sqrt{\frac{62,5 - 40}{0,625 + 0,156 + 0,156}} = 4,9\% \approx 5\%$$

Vsi upori naj imajo 5 % toleranco, napajalni vir pa 4 %.

Z analizo napravimo kontrolo:

Hitra ocena toleranc:

$$U_R^0 = 5,0000 \quad \Delta U_R = 0,234V \text{ (4,68 \%)} \quad \Delta U_R^{\max} = 5,23V \quad \Delta U_R^{\min} = 4,77V$$

Monte Carlo (N=100):

$$U_R^0 = 4,99869 \quad \Delta U_R = 0,237V \text{ (4,75 \%)} \quad \Delta U_R^{\max} = 5,21V \quad \Delta U_R^{\min} = 4,79V$$

Predpisan je najbolj neugoden primer za eno lastnost – poenostavitev z linearizacijo

Zopet bomo obravnavali najenostavnejši primer, kjer nas zanima samo ena lastnost, ki je odvisna od m parametrov in jo je možno v izbrani točki tudi linearizirati:

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_m) = F(\underline{x})$$

Predpisan je tudi najbolj neugoden primer lastnosti $F^{\max}$ in $F^{\min}$. Zahtevali bomo, da funkcija ni preveč nelinearna in da hkrati ne bodo nastopale prevelike spremembe parametrov ter da poznamo občutljivosti. Pri analizi toleranc smo poiskali povezavo med majhno spremembo parametrov in spremembo lastnosti. Najbolj neugoden primer lastnosti smo izračunali po enačbi :

$$\Delta F \geq |S_{x_1}^F \cdot \Delta x_1| + |S_{x_2}^F \cdot \Delta x_2| + \dots + |S_{x_m}^F \cdot \Delta x_m| = \sum_{i=1}^m |S_{x_i}^F \cdot \Delta x_i| \quad (8.2)$$

V tej enačbi so edine neznanke tolerance parametrov, ki jih izbiramo tako, da je zadoščeno zgornji enačbi.

Zgled 2

Prepustni pas F nekega filtra je odvisen od dveh kondenzatorjev. Občutljivosti prepustnega pasu so: $\hat{S}_{C_1}^F = 0,5 \text{ kHz} / \%$ in $\hat{S}_{C_2}^F = 1 \text{ kHz} / \%$. Dopustno odstopanje prepustnega pasu je $\Delta F = \pm 2 \text{ kHz}$. Kolikšni sta lahko toleranci C_1 in C_2 ?

1. rešitev:

Če se odločimo za enaki toleranci $\Delta C = \Delta C_1 = \Delta C_2$, lahko toleranco kar izračunamo:

$$\Delta C = \frac{\Delta F}{\sum_{i=1}^m |\hat{S}_i^F|} = \frac{2}{0,5 + 1} = 1,3\% \quad (8.3)$$

2. rešitev:

Če si izberemo toleranco prvega parametra: $\Delta C_1 = 2\%$, potem je lahko toleranca drugega: $\Delta C_2 = 1\%$.

3. rešitev:

Če pa si izberemo za toleranco prvega parametra: $\Delta C_1 = 4\%$, potem že prispevek tega parametra presega dovoljeno toleranco F in v tem primeru rešitev ne obstaja.

8.3 Predpisan je najbolj neugoden primer za več nelinearnih lastnosti

V večini primerov mora vezje zadostiti ne samo eni, temveč več zahtevam, npr. $P = 100 \text{ W} \pm 20 \%$, $f_{zg} = 100 \text{ Hz} \pm 10 \%$, $\text{cena} = 1000 \text{ SIT} \pm 10 \%$. Načrtovanje toleranc se sedaj zelo zaplete, saj sprememba enega parametra lahko vpliva hkrati na več lastnosti:

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_1(\underline{x}) \\
F_2 &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_2(\underline{x}) \\
&\vdots \\
F_n &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = F_n(\underline{x})
\end{aligned}$$

Če je F odvisna samo od dveh parametrov in je opisna z enostavnim analitičnim izrazom, je problem kljub temu relativno enostavno rešljiv.

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_1(x_1, x_2) \\
F_2 &= F_2(x_1, x_2)
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Znani naj bosta tudi zgornji in spodnji meji obeh lastnosti: $F_1^{\min}, F_1^{\max}$ in $F_2^{\min}, F_2^{\max}$. Tudi pri izboru vrednostih parametrov smo v splošnem omejeni, saj le-ti zaradi fizikalnih in drugih omejitev ne morejo zavzeti poljubne vrednosti. Npr. pri uporabi smo omejeni samo na pozitivne vrednosti. Z upoštevanjem še teh omejitev dobimo naslednje pogoje, katerim mora zadostiti rešitev:

$$\begin{aligned}
F_1^{\min} &\leq F_1 \leq F_1^{\max} \\
F_2^{\min} &\leq F_2 \leq F_2^{\max} \\
x_1^{\min} &\leq x_1 \leq x_1^{\max} \\
x_2^{\min} &\leq x_2 \leq x_2^{\max}
\end{aligned} \tag{8.5}$$

Torej množica parov x_1, x_2 , ki ustreza vsem štirim pogojem, predstavlja vrednosti, ki jih lahko zavzameta x_1 in x_2 . Označimo z F_1^{konst} maksimalno oziroma minimalno vrednost lastnosti F_1 . Če sta enačbi 8.4 relativno preprosti, lahko izrazimo eksplisitno odvisnost parametra x_2 :

$$x_2 = F_1'(F_1^{\text{konst}}, x_1)$$

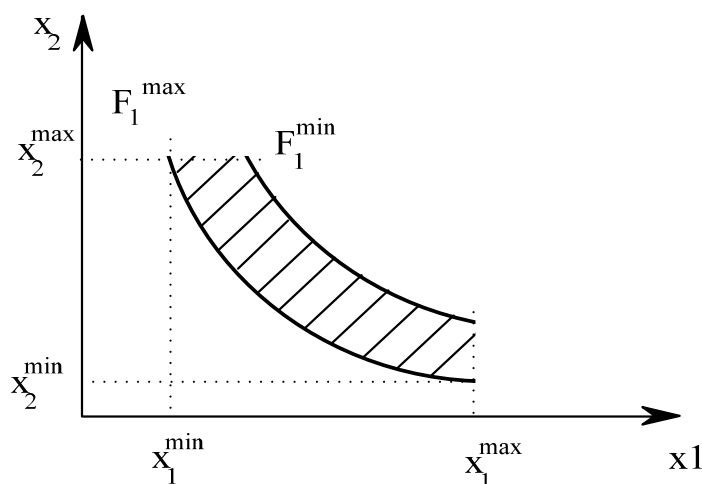
V tem izrazu je sedaj F_{konst} parameter.

Zgled 3

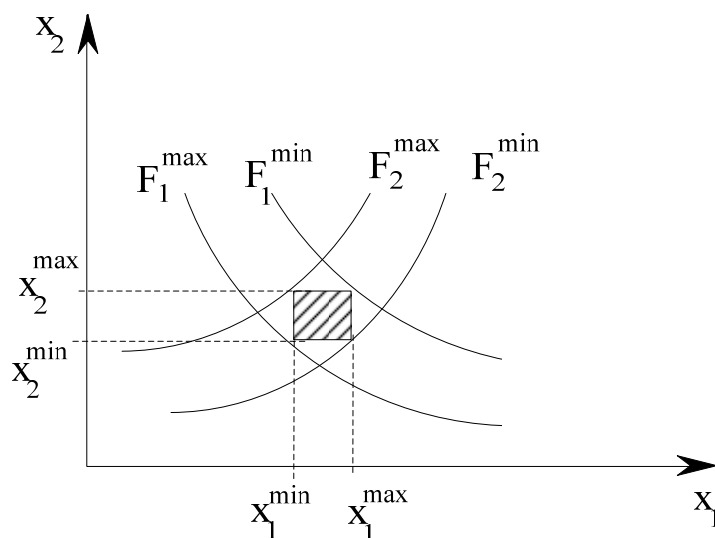
$$\begin{aligned}
F_1 &= -4(x_1 - 5)^2 + x_2 \\
x_2 &= 4(x_1 - 5)^2 + F_1
\end{aligned}$$

Če sedaj narišemo obe funkciji za $F_1^{\min}$ in $F_1^{\max}$, predstavlja površina med obema krivuljama množico rešitev (slika 8.4). Ker parametra ne moreta v splošnem zavzeti katerekoli vrednosti, na grafu označimo veljavni interval.

Podobno napravimo še z drugo lastnostjo. Sedaj vrišemo še obe krivulji, med katerima ležijo rešitve za drugo lastnost. Če se ti krivulji sekata s tistima, ki smo ju pred tem narisali, potem dobimo v pravokotniku množico parov x_1, x_2 , ki ustrezajo vsem štirim pogojem (8.5). Množica možnih rešitev se je glede na sliko 8.4 drastično zmanjšala. Lahko se tudi zgodi, da rešitev sploh ne obstaja – krivulje so vzporedne ali pa se sekajo v tistem področju, kateremu ne ustrezajo omejitve glede parametrov.



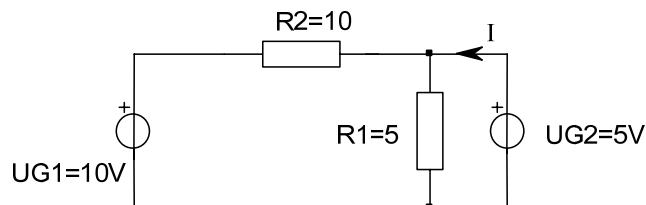
Slika 8.4 Množica rešitev, ki ustreza enačbam: $F_1^{\min} \leq F_1 \leq F_1^{\max}$,
 $x_1^{\min} \leq x_1 \leq x_1^{\max}$ in $x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max}$.



Slika 8.5 Šrafiran pravokotnik je množica rešitev.

Zgled 4

Dopustno odstopanje toka in moči za najbolj neugoden primer je: $I^{\circ} \pm 20\%$ in $P^{\circ} \pm 10\%$. Določi najprej nominalne vrednosti in nato toleranci R1 in R2. Toleranci UG2 in UG1 zanemari. Rešitev preveri z ustrežno analizo.



Izpeljemo izraza za tok in moč: $I = \frac{5}{R1} - \frac{5}{R2}$ $P = \frac{25}{R2} + \frac{25}{R1}$

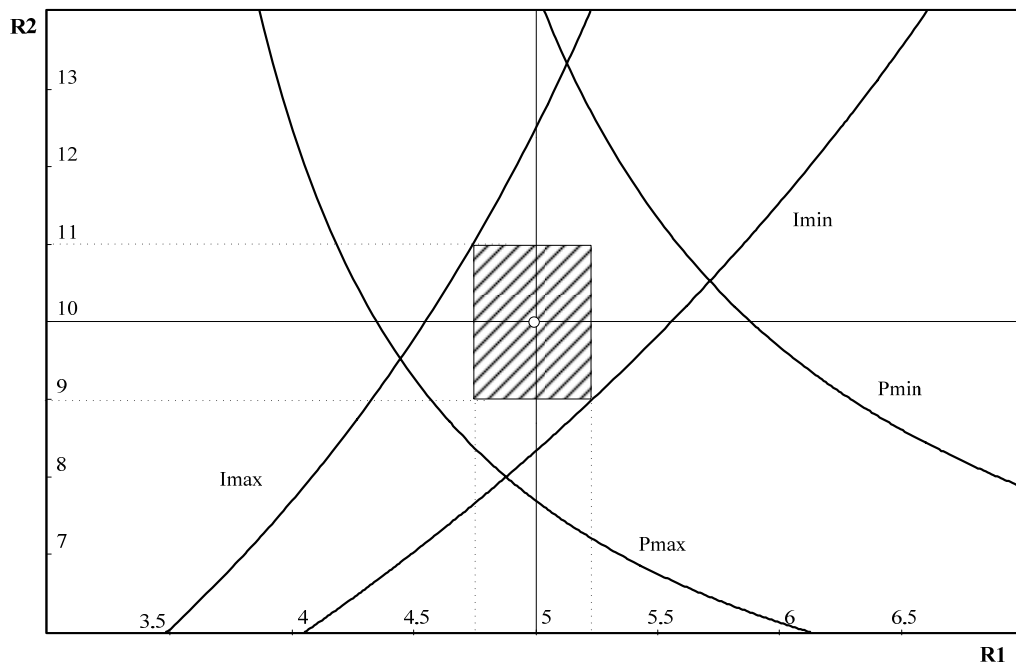
Nominalne vrednosti so: $I^{\circ} = 0,5\text{A}$ in $P^{\circ} = 7,5\text{W}$.

$$\begin{aligned} P^{\max} &= 8,25\text{ W} & P^{\min} &= 6,75\text{ W} \\ I^{\max} &= 0,6\text{ A} & I^{\min} &= 0,4\text{ A} \end{aligned}$$

Funkciji sta hiperboli in zato jih lahko enostavno narišemo, vrišemo nominalne točke in nato vrišemo največji možni pravokotnik. Ker obstaja neskončno rešitev, bomo prikazali samo dve.

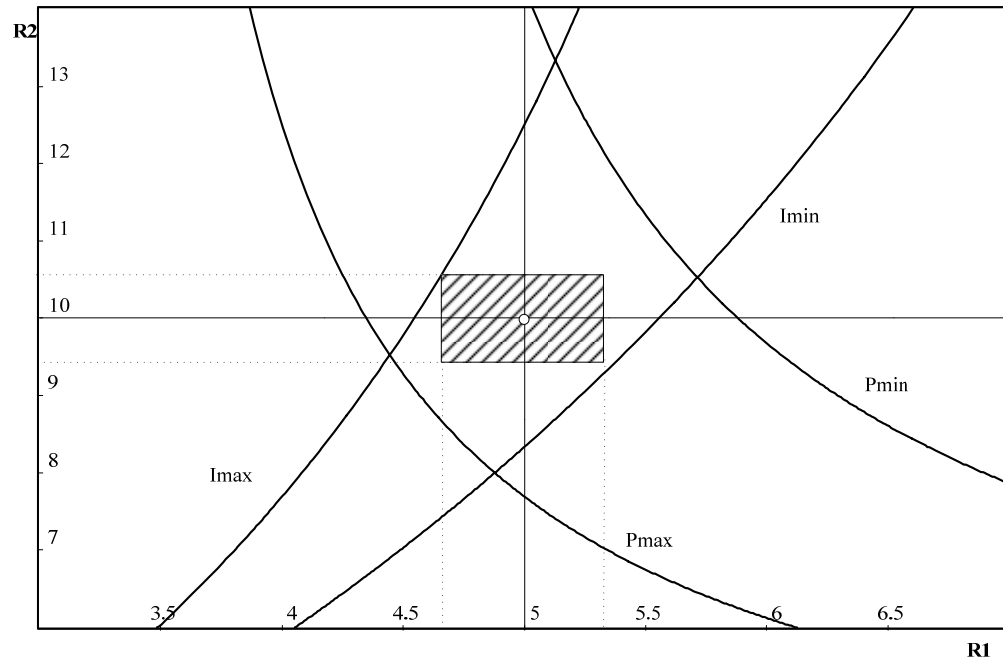
Ena izmed možnih rešitev: $4,7\Omega < R1 < 5,2\Omega$ in $9\Omega < R2 < 11\Omega$

Oziroma, če se odločimo za simetrične tolerance: $R1 = 5 \pm 4\%$ in $R2 = 10 \pm 10\%$



Druga možna rešitev: $4,6\Omega < R1 < 5,3\Omega$ in $10,5\Omega < R2 < 9,5\Omega$

Oziroma, če se odločimo za simetrične tolerance: $R1 = 5 \pm 6\%$ in $R2 = 10 \pm 5\%$



Z analizo napravimo kontrolo:

Uporabili bomo kar ustrezen izbor ekstremnih vrednosti parametrov. Preverili bomo pravilnost prve rešitve $4,7\Omega < R1 < 5,2\Omega$ in $9\Omega < R2 < 11\Omega$:

$$I_{\max} = \frac{5}{R1_{\min}} - \frac{5}{R2_{\max}} = \frac{5}{4,7} - \frac{5}{11} = 0,61A$$

$$I_{\min} = \frac{5}{R1_{\max}} - \frac{5}{R2_{\min}} = \frac{5}{5,2} - \frac{5}{9} = 0,41A$$

$$P_{\max} = \frac{25}{R2_{\min}} + \frac{25}{R1_{\min}} = \frac{25}{9} + \frac{25}{4,7} = 8,1W$$

$$P_{\min} = \frac{25}{R2_{\max}} + \frac{25}{R1_{\max}} = \frac{25}{11} + \frac{25}{5,2} = 7,1W$$

Vidimo, da smo določili prave tolerance uporov.

8.4 Predpisan je najbolj neugoden primer za več lastnosti – poenostavitev z linearizacijo

Pri pravkar obravnavani analitični metodi smo zahtevali, da je F zapisana v analitični obliki. Glede nelinearnosti nismo postavljali nobenih omejitev, prav

tako ne za velikost oziroma simetričnost tolerance. Če odvisnost lastnosti od parametrov ni izrazito nelinearna, lahko funkcije v okolici točke lineariziramo in celoten postopek poenostavimo. Ta pristop seveda zahteva simetrično podane tolerance in pa poznavanje občutljivosti.

$$\begin{aligned}\Delta F1 &\geq S_{x1}^{F1} \Delta x_1 + S_{x2}^{F1} \Delta x_2 + \dots S_m^{F1} \Delta x_m \\ \Delta F2 &\geq S_{x1}^{F2} \Delta x_1 + S_{x2}^{F2} \Delta x_2 + \dots S_m^{F2} \Delta x_m \\ &\vdots \\ \Delta Fn &\geq S_{x1}^{Fn} \Delta x_1 + S_{x2}^{Fn} \Delta x_2 + \dots S_m^{Fn} \Delta x_m\end{aligned}$$

Dobimo sistem n neenačb z m neznankami. V redkih primerih je $m = n$ in če se hkrati odločimo za maksimalne možne tolerance, se neenačaji spremenijo v enačaje. Takrat obstaja samo ena rešitev, ki jo dobimo, če rešimo sistem enačb.

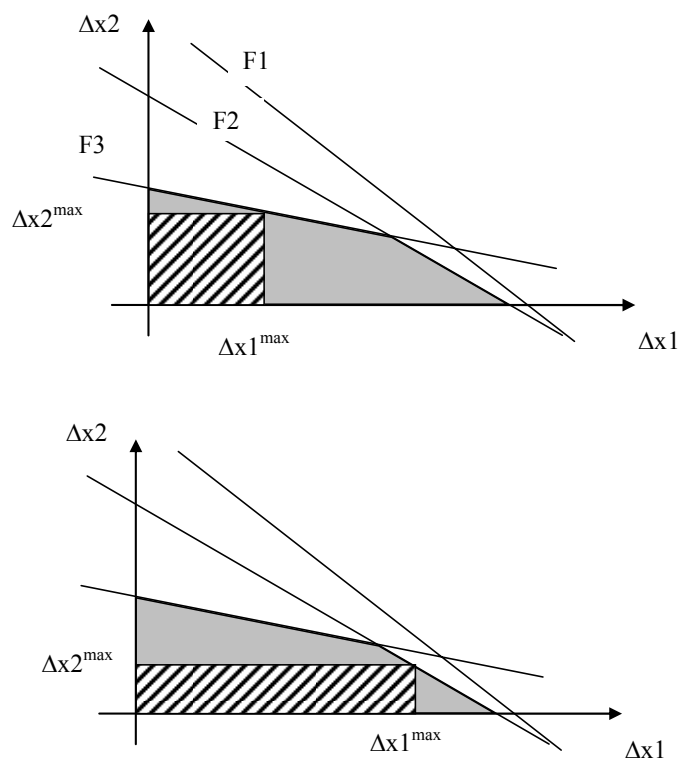
Če imamo samo dva parametra, je problem relativno enostavno rešljiv.

$$\begin{aligned}\Delta F1 &\geq S_{x1}^{F1} \Delta x_1 + S_{x2}^{F1} \Delta x_2 \\ \Delta F2 &\geq S_{x1}^{F2} \Delta x_1 + S_{x2}^{F2} \Delta x_2 \\ &\vdots \\ \Delta Fn &\geq S_{x1}^{Fn} \Delta x_1 + S_{x2}^{Fn} \Delta x_2\end{aligned}\tag{8.6}$$

Ko izrazimo eksplicitno odvisnost Δx_2 , dobimo niz neenačb:

$$\begin{aligned}\Delta x_2 &\leq -\frac{S_{x1}^{F1}}{S_{x2}^{F1}} \Delta x_1 + \left| \frac{\Delta F1}{S_{x2}^{F1}} \right| \\ \Delta x_2 &\leq -\frac{S_{x1}^{F2}}{S_{x2}^{F2}} \Delta x_1 + \left| \frac{\Delta F2}{S_{x2}^{F2}} \right| \\ &\vdots \\ \Delta x_2 &\leq -\frac{S_{x1}^{Fn}}{S_{x2}^{Fn}} \Delta x_1 + \left| \frac{\Delta Fn}{S_{x2}^{Fn}} \right| \\ \Delta x_2 &\geq 0 \\ \Delta x_1 &\geq 0\end{aligned}\tag{8.7}$$

Ker je lahko ΔF pozitiven ali negativen, smo v enačbi upoštevali pozitivno vrednost kvocienta $\Delta F/S$. Dobili smo niz premic, katerih sivo področje predstavlja množico rešitev (glej sliko 8.6). Ker sta Δx_1 in Δx_2 statistično neodvisna, ležijo prave rešitve v vrisanem pravokotniku, ki se začne v koordinatnem izhodišču. Podobno kot prej je tudi tukaj možno vrisati več različnih pravokotnikov.



Slika 8.6 Sivo področje so dopustne vrednosti, ki zadoščajo vsem lastnostim (narisane so samo F_1 , F_2 in F_3). Vrišemo lahko neskončno pravokotnikov. Prikazani sta dve možnosti.

Zgled 5 (enako vezje in zahteve kot pri zgledu 4)

S perturbacijsko metodo s simulatorjem izračunamo normirane občutljivosti⁴²:

$$S_{x_i}^F = \frac{\Delta F}{\Delta x_i} \cdot \frac{x_i^\circ}{F^\circ}$$

Parameter	Občutljivost P	Občutljivost I
R2	-0,33 %/%	0,99 %/%
R1	-0,66 %/%	-1,98 %/%

Če se parameter R2 poveča za 1 %, se moč zmanjša za 0,33 %.

⁴² Pri simulaciji smo izbrali $\Delta R1 = \Delta R2 = 1 \%$.

$$\Delta R_2 \leq -\frac{S_{R1}^P}{S_{R2}^P} \Delta R_1 + \left| \frac{\Delta P}{S_{R2}^P} \right|$$

$$\Delta R_2 \leq -\frac{S_{R1}^I}{S_{R2}^I} \Delta R_1 + \left| \frac{\Delta I}{S_{R2}^I} \right|$$

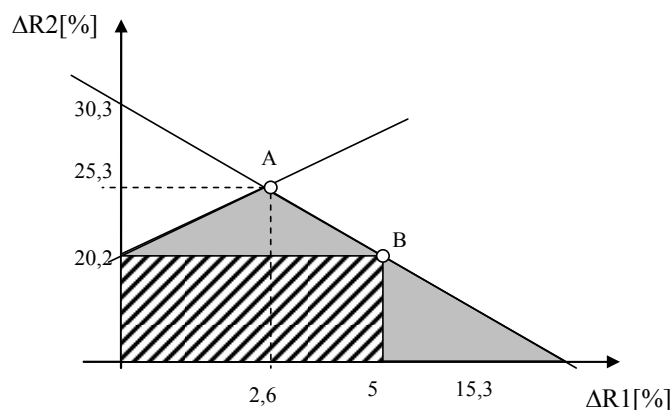
Ko vstavimo vrednosti v enačbo, dobimo meje področja, znotraj katerih se lahko gibljeta toleranci ΔR_1 , ΔR_2 izraženi v procentih:

$$\Delta R_2 \leq -2,00\Delta R_1 + 30,3$$

$$\Delta R_2 \leq 2,00\Delta R_1 + 20,2$$

$$\Delta R_2 \geq 0$$

$$\Delta R_1 \geq 0$$



Napravimo skico področja, ki ga definirajo enačbe in vrišemo pravokotnik, ki se mora začeti v koordinatnem izhodišču. Takoj vidimo, da lahko pravokotnik vrišemo na neskončno načinov. Izberemo $\Delta R_2 = 20\%$ in sedaj lahko iz prve enačbe izračunamo položaj desnega zgornjega vogala (točka B): $\Delta R_1 = 5\%$.

Toleranci uporov sta: $R_1 = 5 \pm 5\%$ in $R_2 = 10 \pm 20\%$.

Analiza

Z analizo najbolj neugodnega primera bomo preverili, ali rešitev $R_1 = 5 \pm 5\%$ in $R_2 = 10 \pm 20\%$ ustreza postavljenim zahtevam:

$$\begin{aligned} P &= 7,5W \pm 10\%, P_{\max} = 8,25 W, & P_{\min} &= 6,75 W \\ I &= 0,5A \pm 20\%, I_{\max} = 0,6 A, & I_{\min} &= 0,4 A \end{aligned}$$

Najbolj neugoden primer (pri mejnih vrednostih parametrov):

$$P_{\max} = 8,38 W \quad \text{oz. } +12\%$$

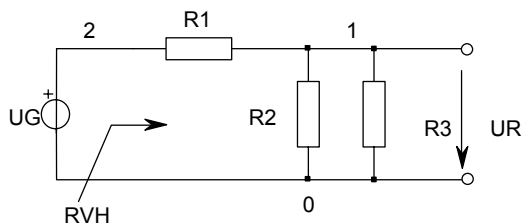
$P_{\min} = 6,84 \text{ W}$ oz. -9%
 $I_{\max} = 0,63 \text{ A}$ oz. $+27 \%$
 $I_{\min} = 0,32 \text{ A}$ oz. -35%

Vidimo, da moč rahlo presega dovoljeno odstopanje, medtem ko je tok izrazito prevelik. Če pogledamo občutljivosti, vidimo, da je potrebno zmanjšati toleranco R2 za približno 15 %. Tudi če bi zmanjšali toleranco R1 na nič, bi se s tem zmanjšala toleranca I samo za $5 \% \cdot 1,98 \% \approx 10 \%$ točk.

V drugem krogu načrtovanja bi ustrezno spremenili vrednosti toleranc in ponovno preverili načrtovanje.

8.5 Naloge za poglavje 8

1. Predpisane so zahteve za statistično toleranco vhodne upornosti: $R_{vh} = 2k \pm 5\%$. Določi tolerance uporov.



Občutljivostni koeficienti:

PARAMETER	VREDNOST PARAMETRA	NORMIRANA OBČUTLJIVOST UR [V/%]	NORMIRANA OBČUTLJIVOST RVH [Ω/%]
R2	2,000D+03	1,250D-02	5
R3	2,000D+03	1,250D-02	5
R1	1,000D+03	-2,500D-02	10
VG	1,000D+01	5,000D-02	0

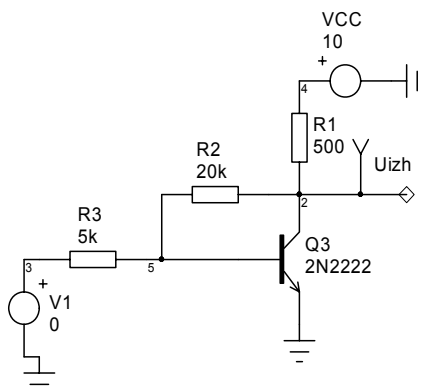
2. Za vezje iz naloge 1 so predpisane zahteve za najbolj neugoden primer napetosti: $U_R = 5 \pm 1V$. Pripravi naslednje možne rešitve:

- vse tolerance so enake
- izberemo $U_G \pm 15\%$
- izberemo $R \pm 2\%$
- izberemo $U_G \pm 25\%$

3. Kolikšne so lahko tolerance kondenzatorjev v nizkoprepustnem filtru, če je zahtevana statistična toleranca zgornje frekvenčne meje $\pm 5\%$? Toleranca uporov je 2% .

PARAMETER	NOMINALNA VREDNOST	NORMIRANA OBČUTLJIVOST [%/%]
c1	1N	0,2
r1	10K	-0,5
r2	10K	-0,5
c2	1N	-1,2

4. Napravili smo analizo občutljivosti za U_{izh} in za tok I_{CC} , ki teče iz baterije. Izhodna napetost nikakor ne sme preseči intervala $U_{izh} = 5 \pm 15\%$. Kolikšne so lahko tolerance uporov in napajalne napetosti, če je $h_{fe} = 150 \pm 35\%$? Poišči najmanj dve rešitvi: a) če izberemo $\Delta V_{CC} = \pm 10\%$, b) če izberemo toleranco uporov 1% .



IME IN NOM.VRED.LASTNOSTI uizh = 5.0267V

PARAMETER	NOMINALNA_VREDNOST	OBČUTLJIVOST [ENOTA/%]
r3:resistance	5,0000K	-2,01558e-002
r1:resistance	500,00	-1,26834e-002
r2:resistance	20,000K	3,154205e-002
vcc:dc	10,0000	2,561671e-002
q3_tol.bf	150,00	-9,80126e-003

IME IN NOM,VRED, LASTNOSTI vcc#branch⁴³ = -9,9467M

PARAMETER	NOMINALNA_VREDNOST	OBČUTLJIVOST [ENOTA/%]
r3:resistance	5,0000K	-4,03115e-005
r1:resistance	500,00	7,360934e-005
r2:resistance	20,000K	6,308410e-005
vcc:dc	10,0000	-1,48767e-004
q3_tol.bf	150,00	-1,96025e-005

5. Kolikšne so tolerance parametrov pri prejšnji nalogi, če so zahtevane statistične tolerance:
 $U_{izh} = 5V \pm 15\%$ in $I_{CC} = 10mA \pm 10\%$. Tokovno ojačenje tranzistorja ima toleranco $h_{fe} = 150 \pm 35\%$, $\Delta V_{CC} = \pm 10\%$.

⁴³ Tako označuje simulator SPICE tok skozi baterijo VCC.

9. Osnove statistične analize

Kadar imamo opravka s proizvodnjo nekega sistema, je potrebno njegove lastnosti opisati na statističen način. Čeprav je statistična analiza ena izmed zelo uporabnih vej matematike, je mnogokrat zapostavljena. V tem poglavju bodo na kratko in na poenostavljen način razložena nekatera poglavja iz statistične analize. Poudarek bo na tisti snovi, ki jo potrebujemo za razumevanje nekaterih poglavij pri analizi toleranc. Pri obravnavi bomo marsikatero probleme poenostavili oziroma se ne bomo spuščali v podrobnosti.

Slučajni ali naključni dogodek: je dogodek, za katerega nikoli ne moremo z absolutno gotovostjo trditi, da se bo v predpisanem trenutku zgodil (npr. odpoved računalnika, število pik pri metu kocke itd.). Slučajni dogodek je rezultat nekega pojava, eksperimenta ali opazovanja. Dogodek, ki se bo vedno zgodil, je **gotov dogodek**. Dogodek, ki se ne bo nikoli zgodil, imenujemo **nemogoč dogodek**. Gotov in nemogoč dogodek v bistvu nista slučajna, saj vemo da se bo prvi zagotovo zgodil, drugi pa nikoli. Kljub temu oba prištevamo k slučajnim. Slučajni dogodek bomo označili z X , število opazovanj oziroma eksperimentov pa z N .

Vse možne izide nekega eksperimenta lahko predstavimo z množico, ki jo imenujemo **vzorčni prostor**¹. Označili jo bomo z D . Vrednosti v vzorčnem prostoru so lahko **zvezne** (npr. napetost baterije) ali pa **diskretne** (npr. število napak).

Ko računamo s slučajnimi dogodki, moramo paziti, da ne bomo uporabili matematičnih operacij, ki so za določen tip podatka nesmiselne. Glede na smiselnost matematičnih operacij lahko vrste podatkov (dogodkov) razdelimo v štiri kategorije, ki so opisane v tabeli 9.1.

Tabela 9.1

Ime kategorije	zgled	dovoljene (smiselne) matematične operacije
nominalna	spol, odpoved, logično stanje	$= \neq$
ordinalna	vrstni red na tekmi	$= \neq > <$
intervalna	temp. v $^{\circ}\text{C}$	$= \neq > < + -$
racionalna	temp. v $^{\circ}\text{K}$, napetost, ojačenje	$= \neq > < + - * /$

¹ Sinonim je *zaloga vrednosti*.

Zgled 1

Slučajni dogodek je število pik pri metu kocke. Ker je možnih natanko 6 različnih vrednosti, je število pik diskretni dogodek. Dogodek $X = 1,214$ npr. ne obstaja. Število pik spada v intervalno kategorijo. Vzorčni prostor je: $D = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Zgled 2

Napoved jutranje temperature. Množica možnih vrednosti so vsa realna števila med 0 °K in $\infty\text{ °K}$. Ta podatek uvrščamo v racionalno kategorijo. Vzorečni prostor je množica pozitivnih realnih števil.

Zgled 3

Na tekočem traku proizvajamo enake ojačevalnike. Izbrali smo 12 ojačevalnikov in izmerili ojačenje. Ojačenje vsakega ojačevalnika je vrednost slučajne spremenljivke. Vzorečni prostor je množica pozitivnih realnih števil.

i	Au
1	163
2	140
3	110
4	150
5	130
6	143
7	145
8	126
9	150
10	184
11	148
12	135

Slika 9.1 Vrednost ojačenja Au dvanajstih ojačevalnika

Navadna spremenljivka je popolnoma definirana, če povemo, kakšne vrednosti lahko zavzame oziroma kakšna je zaloga njenih vrednosti. Npr.: $y \in \mathfrak{R}$ pomeni, da lahko y zavzame katerokoli realno število. Tudi slučajnim dogodkom lahko priredimo neko spremenljivko, ki je običajno označena z veliko črko, npr. X . **Slučajna spremenljivka je popolnoma definirana, če poznamo njen vzorečni prostor oziroma zalogo vrednosti in neki zakon, ki pove, kolikšna je verjetnost posameznega dogodka.**

Temu zakonu pravimo **porazdelitveni zakon** ali na kratko **porazdelitev**². Porazdelitev je vedno možno opisati na več načinov. Najbolj pogosta sta:

² Sinonim je *distribucija*.

verjetnostna funkcija in **porazdelitvena funkcija**. Med obema nastopa preprosta povezava, ki jo bomo kasneje podrobneje opisali.

Najprej bomo obravnavali diskretne porazdelitve, nato pa zvezne. Če je porazdelitveni zakon formalno opisan (npr. z analitičnim izrazom), potem takšno porazdelitev uvrščamo med **teoretične**. Porazdelitve, ki so dobljene na podlagi poskusov ali opazovanj, bomo uvrščali med **empirične**.

9.1 Diskretna porazdelitev

Diskretni porazdelitveni zakon podajamo na dva načina:

1. z diskretno verjetnostno funkcijo ali verjetnostno shemo ali
2. z diskretno porazdelitveno funkcijo³.

Kadar ne bo nobenega dvoma, da govorimo o diskretnih oziroma zveznih porazdelitvah, bomo atribut diskretni oziroma zvezni izpuščali.

Verjetnostna shema je lahko tabela ali matrika, v kateri so našteje vse mogoče vrednosti in pripadajoče verjetnosti.

$$X = \begin{bmatrix} x_1, \dots, x_n \\ p_1, \dots, p_n \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

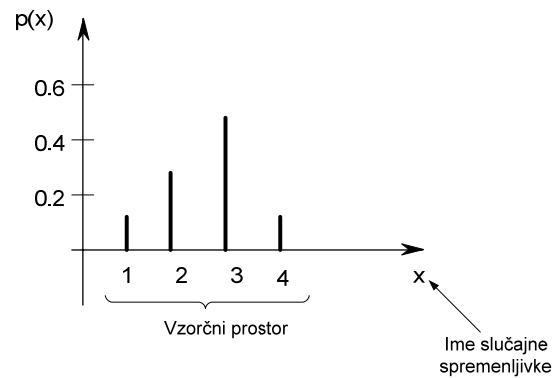
Verjetnostno shemo lahko prikažemo tudi grafično s **paličastim grafom**. Na abscisi narišemo vzorčni prostor, tako da označimo vse vrednosti v naraščajočem zaporedju. Običajno dogodke oštevilčimo (npr. dež naj bo dogodek številka 1, sonce dogodek številka 2 itd.). Z dolžino debele črte označimo velikost verjetnosti (glej sliko 9.2).

Zgled 4

Možni so štirje dogodki. Verjetnost, da se zgodi dogodek številka 1, je 0,1, verjetnost dogodka številka 2 je 0,3, dogodka številka 3 je 0,5 in dogodka številka 4 je 0,1. To lahko prikažemo z naslednjo verjetnostno shemo:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,1 & 0,3 & 0,5 & 0,1 \end{bmatrix}$$

³ Sinonim je kumulativna distribucija

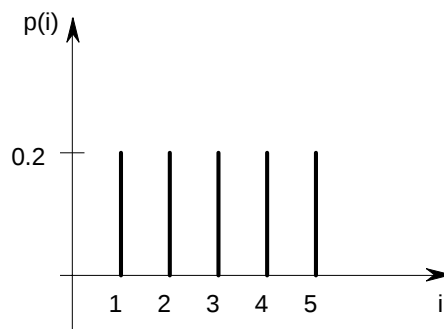


Slika 9.2 Diskretna verjetnostna funkcija. Verjetnost, da se zgodi dogodek štev. 3, je 0,5. To lahko zapišemo kot $P\{X = 3\} = 0,5$.

Običajno opisujemo verjetnostno funkcijo z ustreznim analitičnim izrazom in opisom vzorčnega prostora (zaloge vrednosti). Npr. porazdelitev, ki jo imenujemo binomska, je opisana z izrazom:

$$P\{X = x\} = p(n, p, x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

Najbolj preprosta je enakomerna porazdelitev, kjer za vsako vrednost naključne spremenljivke obstaja **enaka** verjetnost, da se zgodi.



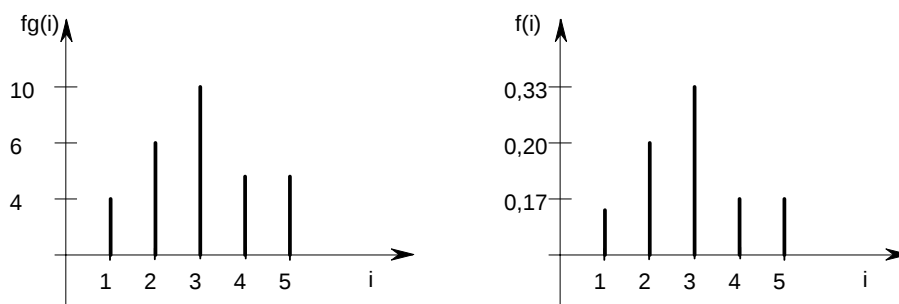
Slika 9.3 Zgled enakomerne diskretne porazdelitve.

Pogostost pojavljanja slučajnega dogodka, ki smo ga opazili, lahko prikažemo s tabelo ali pa s funkcijo oziroma grafom. To funkcijo bomo označili s f_g . Če število teh dogodkov delimo s številom poskusov, dobimo **relativno frekvenco** $f(i)$. To empirično porazdelitev imenujemo tudi **frekvenčna porazdelitev**.

Zgled 5

Imamo 5 računalnikov, ki delujejo v mreži. Če mreža razpade, lahko sistem diagnostike identificira odpoved samo enega računalnika. Takoj, ko se kateri izmed njih pokvari, ga pošljemo v servis, kjer ga popravijo. Vsakič torej peljemo samo en računalnik na popravilo. Slučajni dogodek naj bo številka računalnika, ki se je pokvaril. Če označimo vsak računalnik s številko od 1 do 5, je vzorčni prostor $D = \{1,2,3,4,5\}$. Število odpovedi smo vpisali v tabelo.

i		$f_g(i)$	$f(i) = \frac{f_g(i)}{N}$
1	////	4	0,133
2	///// /	6	0,200
3	///// /////	10	0,333
4	/////	5	0,167
5	/////	5	0,167
N		30	$\Sigma = 1$



Slika 9.4 Frekvenčna (empirična) porazdelitev odpovedi petih računalnikov. Verjetnost, da bo odpovedal računalnik številka 2, je približno 0,20.

Če bi računalnike v zgledu 5 opazovali dlje časa, bi se število odpovedi povečalo in frekvenčna porazdelitev bi se neprestano delno spreminjala. Šele pri neskončno dolgem času bi porazdelitev limitirala proti določeni obliki. Takoj se seveda pojavi vprašanje, kateri teoretični distribuciji ustreza naša empirična. Če bi znali zelo dobro opisati mehanizem odpovedovanja računalnikov, bi lahko izpeljali izraz za porazdelitveno funkcijo. Ker tega ne poznamo, lahko samo s primerjavo znanih porazdelitev ugibamo, kateri je najbolj podobna. S posebnimi statističnimi testi lahko izračunamo verjetnost, da neka empirična porazdelitev ustreza določeni teoretični.

Če je N (število podatkov oziroma poskusov) dovolj velik, potem velja, da je vrednost točke i v frekvenčni distribuciji približno enaka verjetnosti, da se dogodek številka i zgodi. Če povečujemo število poskusov ($N \rightarrow \infty$), potem konvergira relativna frekvenca v verjetnost oziroma frekvenčna distribucija postane **verjetnostna funkcija**⁴:

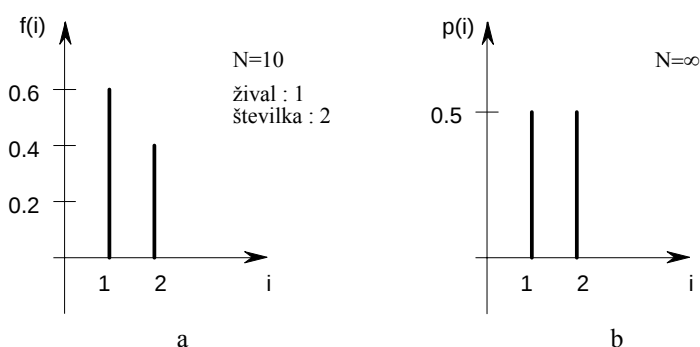
$$P\{X = i\} \approx f(i) \quad (9.2)$$

Npr. verjetnost odpovedi prvega računalnika iz prejšnjega zgleda je približno 0,133.

Zgled 6

Mečemo kovanec. Možna sta dva izida: številka ali žival. Prvi slučajni dogodek bo žival, drugi pa številka. Opravimo 10 metov in žival se pojavi 6-krat, številka 4-krat. Porazdelitev bomo prikazali s paličastim grafom (glej sliko 9.5). Ta porazdelitev, ki smo jo narisali na podlagi opazovanja, je empirična. Če ponovimo poskus, v večini primerov ne bomo dobili enakih rezultatov.

V tem primeru lahko kar s preprostim sklepanjem ugotovimo, kakšna je teoretična porazdelitev. Pri kovanju, ki ni dodatno predelan, je verjetnost, da se pri metu pojavi žival, enaka verjetnosti, da se pojavi številka. Torej obe verjetnosti sta enaki, to je 0,5. Takoj lahko vidimo, da gre za enakomerno porazdelitev. Z večanjem števila poskusov se spreminja oblika empirične porazdelitve. Pri neskončnem številu metov bi oblika empirične porazdelitve konvergirala proti teoretični.



Slika 9.5 Empirična oziroma frekvenčna porazdelitev (a) in teoretična porazdelitev oziroma verjetnostna funkcija (b).

⁴ V anglosaksonski literaturi se za to verjetnostno funkcijo pogosto uporablja tudi kratica pdf, ki izvira iz: *probability density function*.

Le redko lahko na tako enostaven način določimo teoretično porazdelitev oziroma verjetnostno funkcijo.

Lastnosti verjetnostne funkcije in frekvenčne porazdelitve

1. Za empirično in teoretično diskretno porazdelitev velja, da nobena vrednost ne more biti negativna.

$$f(i) \geq 0 \text{ za vsak } i \in D \quad (9.3)$$

2. Vsota verjetnosti vseh možnih dogodkov je 1.

$$\sum_{i=1}^n f(i) = 1 \quad (9.4)$$

3. Iz obeh pogojev sledi, da se vrednosti $f(i)$ nahajajo med 0 in 1:

$$0 \leq f(i) \leq 1$$

S seštevanjem verjetnosti dogodkov lahko izračunamo verjetnost sestavljenega dogodka, to je dogodka, ki je sestavljen iz več drugih dogodkov. Npr. verjetnost, da odpove prvi ali drugi računalnik, je:

$$P\{X = 1 \text{ ali } X = 2\} = p(1) + p(2)$$

To lahko tudi krajše zapišemo v naslednji obliki:

$$P\{X \leq 2\} = p(1) + p(2)$$

Če to posplošimo, potema velja, da je vsota verjetnosti na nekem intervalu $[j, k]$ enaka verjetnosti, da bo slučajna spremenljivka zavzela vrednost na tem intervalu.

$$P\{j \leq X \leq k\} = \sum_{j \leq i \leq k} p(i) \quad (9.5)$$

Npr. verjetnost, da odpove 2. ali 3. ali 4. računalnik, je $0,2 + 0,333 + 0,167 = 0,7$

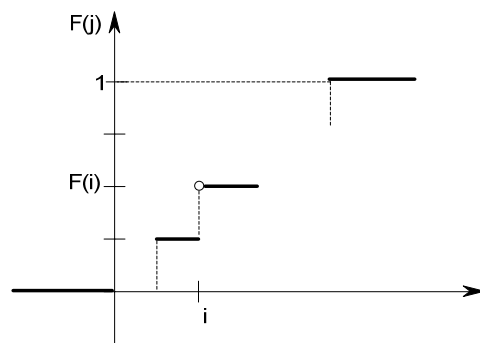
Porazdelitvena funkcija

Izračun, kot smo ga pravkar napravili, lahko poenostavimo, če si že vnaprej izračunamo verjetnost, da zavzame slučajna spremenljivka vrednost enako ali

manjšo od i . To funkcijo, ki jo bomo označili s F , imenujemo **porazdelitvena funkcija**⁵:

$$F(i) = P\{X \leq i\} = \sum_{j=1}^i p(j) \quad (9.6)$$

Ker so verjetnosti ali frekvence pozitivna števila, je $F(i)$ **monotono skokoma naraščajoča funkcija, katere začetna vrednost je 0 in končna 1**.



Slika 9.6 Pri vrednosti i funkcija skoči na vrednost $F(i)$.

V nekaterih primerih nas zanima $P\{X > i\}$. Če sta možna samo dve možnosti, potem velja, da je $P\{X \leq i\} + P\{X > i\} = 1$. Iz tega lahko izračunamo verjetnost $P\{X > i\}$:

$$\begin{aligned} P\{X > i\} &= 1 - P\{X \leq i\} = 1 - F(i) \\ P\{X > i\} &= 1 - F(i) \end{aligned} \quad (9.7)$$

Če poznamo $F(i)$, lahko z odštevanjem izračunamo verjetnost, da pade X v določen interval:

$$P\{j \leq X \leq k\} = F(k) - F(j) \quad (9.8)$$

Spoznavali smo dva načina podajanja porazdelitve: z verjetnostno ali pa s porazdelitveno funkcijo. Oba načina sta enakovredna.

Včasih je v besedilu potrebno razlikovati med empirično in teoretično porazdelitvijo. Empirično porazdelitveno funkcijo, ki je dobljena s seštevanjem frekvenc, bomo poimenovali **kumulativna frekvenčna porazdelitev ali vsota frekvenc**.

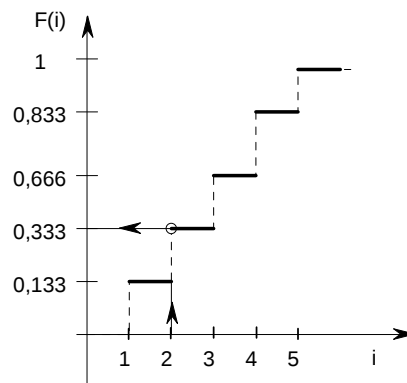
⁵ V tuji literaturi se za to porazdelitev pogosto uporablja tudi kratica cdf, ki izvira iz: *cumulative distribution function* (kumulativna porazdelitvena funkcija).

Zgled 7

Podatki so enaki kot pri zgledu številka 5. Nariši empirično porazdelitveno funkcijo. Kolikšna je približno verjetnost, da bo odpovedal prvi ali drugi računalnik?

i		$f_g(i)$	$f(i) = \frac{f_g(i)}{N}$	$F(i)$
1	////	4	0,133	0,133
2	///// /	6	0,200	0,333
3	///// /////	10	0,333	0,666
4	/////	5	0,167	0,833
5	/////	5	0,167	1
N		30	$\Sigma = 1$	

Iz tabele ali iz grafa (glej sliko 9.7) odčitamo $P\{X \leq 2\} = F(2) = 0,333$.



Slika 9.7 Empirična porazdelitvena funkcija. Verjetnost, da bo odpovedal prvi ali drugi računalnik je 0,333 in ne 0,133.

9.2 Zvezna porazdelitev

Koncept zvezne porazdelitve je v mnogih delih zelo podoben diskretnemu. Slučajna spremenljivka je popolnoma definirana, če je definirana zaloga vrednosti, ki jih lahko zavzame in porazdelitev.

Naj bo vzorčni prostor slučajne spremenljivke X množica realnih števil na neskončnem ali pa na končnem intervalu $D = (c,d)$. Slučajna spremenljivka

lahko torej zavzame katerokoli vrednost na realni osi oziroma znotraj nekega intervala.

Podobno kot pri diskretnih porazdelitvah je tudi tukaj porazdelitev lahko teoretična ali empirična. Empirično zvezno porazdelitev prikazujemo na dva načina:

1. s frekvenčno porazdelitvijo ali
2. s kumulativno frekvenčno porazdelitveno funkcijo.

Teoretično pa:

1. z gostoto verjetnosti ali
2. z (zvezno) porazdelitveno funkcijo.

9.3 Frekvenčna porazdelitev

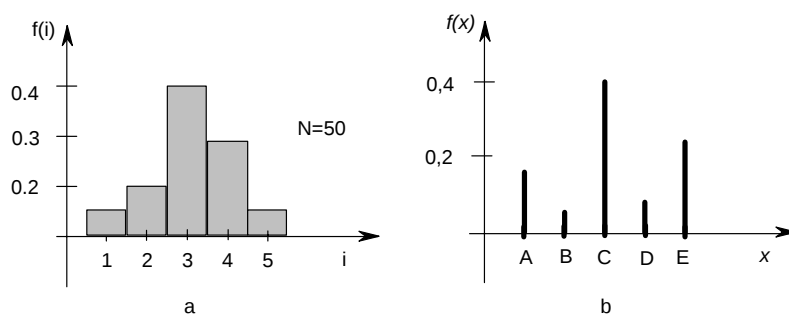
Najprej si bomo pogledali, kako opišemo zvezno **empirično** porazdelitveno funkcijo. Zalogo vrednosti oziroma vzorčni prostor razdelimo na **enako** široke intervale, ki jim pravimo tudi **razredi**. Večinoma definicijsko območje D razdelimo na 5 do 20 intervalov. Glede na največjo in najmanjšo vrednost slučajne spremenljivke določimo širino posameznih razredov. Na začetku in na koncu območja, v katerem ležijo podatki, dodamo še en interval, v katerega pa ne bo padla nobena vrednost. Ta dva intervala potrebujemo za pravilno risanje približnega poteka frekvenčne porazdelitve. Nato preštejemo⁶, koliko slučajnih dogodkov pade v vsak razred. Ker nikakor ne moremo vnaprej predvideti, v kateri interval bomo uvrstili dogodek, je število dogodkov v intervalu slučajna diskretna spremenljivka.

Če to število delimo s številom vseh podatkov N , dobimo **diskretno empirično porazdelitev** (frekvenčno porazdelitev), katere lastnosti smo obravnavali že v prejšnjem poglavju:

$$f(i) \geq 0 \text{ za vsak } i \in D \quad \text{in} \quad (9.9)$$

$$\sum_{i=1}^N f(i) = 1 \quad (9.10)$$

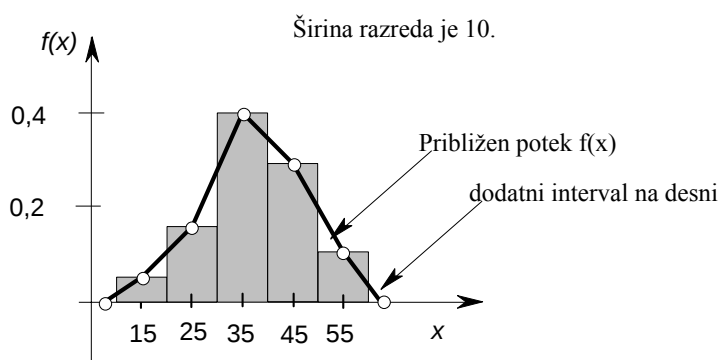
⁶ Izračunamo frekvenco.



Slika 9.8 Histogram (a) in diskretna porazdelitev (b).

Grafično prikazujemo tako dobljeno porazdelitev kot **histogram** (glej sliko 9.8a). Le-ta je sestavljen iz enako širokih **stikajočih** pravokotnikov, katerih **višina je proporcionalna frekvenci**. Na abscisi označimo indekse razredov ali pa njihove sredine. Ker gre za zvezne slučajne spremenljivke, je način risanja drugačen kot pri diskretnih porazdelitvah (glej sliko 9.8b). Pri diskretnih slučajnih spremenljivkah smo uporabili odebeljene črte, ki se niso stikale in tako nedvoumno poudarili, da vmesne vrednosti ne obstajajo.

Približen potek frekvenčne porazdelitve dobimo, če v histogramu potegnemo krivuljo skozi točke, ki so določene s sredino razreda in višino posameznega stolpca (glej sliko 9.9). Tako dobljenemu grafu pravimo **frekvenčni poligon**. Zaradi dodanih razredov na začetku in na koncu se ta krivulja vedno začne in konča z vrednostjo nič. Kasneje bomo spoznali, da tako dobimo empirično gostoto verjetnosti.



Slika 9.9 Iz histograma izrišemo (empirično) zvezno porazdelitev.

Kot bomo videli na naslednjem zgledu, je celoten postopek določevanja frekvenčne porazdelitve zelo enostaven.

Zgled 8

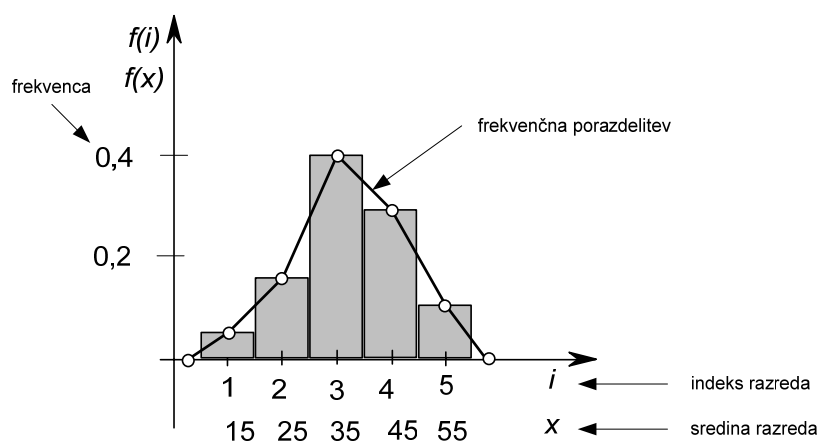
Nariši frekvenčno porazdelitev, če se spremenljivka X pojavlja z naslednjimi vrednostmi.

11 24,2 25 22 33 34,3 32 33 38 35
 34 37 43 45,1 48 45 44 44 56 51

Ker imamo malo podatkov, se odločimo za 5 razredov. Ker so vrednosti med 10 in 60, se odločimo, da bo interval širok 10.

i	Δx		sredina razreda	$f_g(i)$	$f(i) = \frac{f_g(i)}{N}$
1	$-\infty - 10$		5	0	0
2	11 - 20	/	15	1	0.05
3	21 - 30	///	25	3	0.15
4	31 - 40	//// /	35	8	0.4
5	41 - 50	//// /	45	6	0.3
6	51 - 60	//	55	2	0.1
7	61 - ∞		65	0	0
N				$\Sigma=20$	$\Sigma=1$

Najprej narišemo histogram, nato pa povežemo sredine stolpcev.



Slika 9.10 Histogram in frekvenčna porazdelitev.

Za zelo velik N oziroma za $N \rightarrow \infty$ je frekvenca vsakega razreda enaka verjetnosti, da pade slučajna spremenljivka vanj.

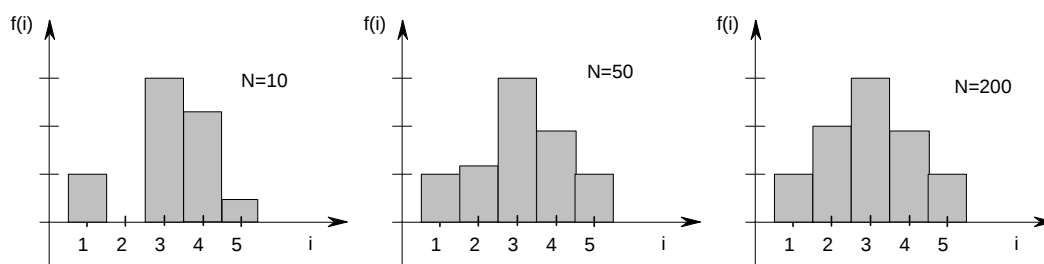
$$P\{X \in i\} \approx f(i) \quad (9.11)$$

Npr. v prejšnjem zgledu je verjetnost, da pade X v **5. interval** (41,50), enaka 0,3. To lahko zapišemo tudi takole:

$$P\{X \in 5\} = 0,3, \text{ če se verjetnost nanaša na indeks intervala,}$$

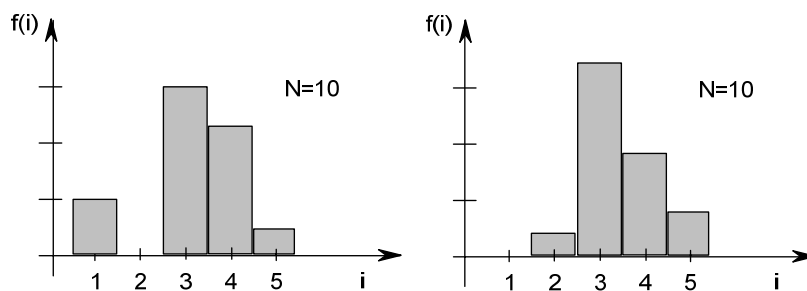
ali

$$P\{X \in (41,50)\} = 0,3, \text{ če se verjetnost nanaša na interval.}$$



Slika 9.11 Oblika empirične porazdelitve je odvisna tudi od števila podatkov.

Število podatkov zelo vpliva na obliko porazdelitve in seveda tudi na natančnost statistične analize (glej sliko 9.11). Velja preprosto pravilo: z večanjem števila podatkov se večja natančnost⁷. Pri **majhnem številu podatkov** ne smemo pozabiti, da pri ponovitvi eksperimenta oziroma opazovanja vsakič ne dobimo enake porazdelitve, saj vsakokrat dobimo drugačen niz slučajnih podatkov (glej sliko 9.12).



Slika 9.12 Ponovitev eksperimenta pri majhnem številu podatkov ne daje popolnoma enake porazdelitve. Večji je N , večja je podobnost.

⁷ Natančnejša povezava se nahaja v [CHATEFIELD, 1978], [SPIEGEL, 1972].

9.4 Kumulativna frekvenčna porazdelitev

Podobno kot pri diskretni porazdelitvi (glej enačbo 9.6) lahko tudi tukaj tvorimo varianto empirične porazdelitve, ki prikazuje, kolikšna je verjetnost, da bo slučajna spremenljivka X enaka ali manjša od vrednosti v izbranem intervalu.

$$F(i) = P\{X \leq i\} = \sum_{j=1}^i f(j) \quad (9.12)$$

Tudi ta funkcija je monoton naraščajoča in se vzpenja od 0 do 1. Enako kot pri diskretni porazdelitvi tudi tukaj veljata izraza:

$$P\{X > i\} = 1 - F(i)$$

$$P\{j < X \leq k\} = F(k) - F(j)$$

Zgled 9

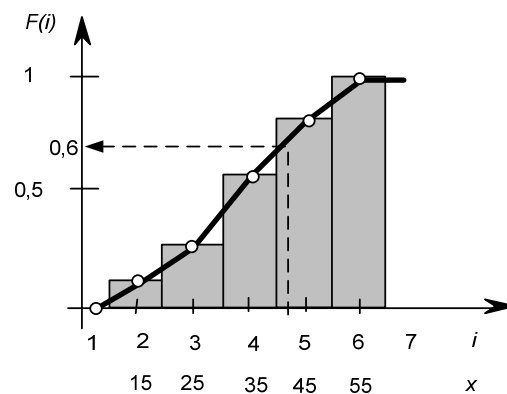
Imamo enake podatke kot pri prejšnjem zgledu. Kolikšna je verjetnost, da bo $X \leq 39$? Kolikšna je verjetnost, da bo $19 \leq X \leq 40$? Nariši približen potek porazdelitve in odčitaj verjetnosti.

i	Δx		sredina razreda	$f_g(i)$	$f(i) = \frac{f_g(i)}{N}$	$F(i)$
1	$-\infty - 9$		5	0	0	0
2	10 - 20	/	15	1	0.05	0.05
3	21 - 30	///	25	3	0.15	0.20
4	31 - 40	//// /	35	8	0.4	0.60
5	41 - 50	//// /	45	6	0.3	0.90
6	51 - 60	//	55	2	0.1	1.00
7	61 - ∞		65	0	0	
N				$\Sigma=20$	$\Sigma=1$	

$x = 39$ se nahaja v 4 intervalu: $P\{X \leq 39\} = F(i = 4) = 0,6$.

$$P\{19 \leq X \leq 40\} = F(i = 4) - F(i = 2) = 0,6 - 0,05 = 0,55$$

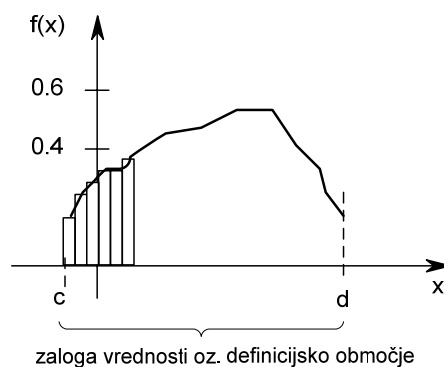
Če narišemo graf kumulativne frekvenčne porazdelitve, lahko te podatke zelo hitro odčitamo tudi iz grafa (glej sliko 9.13).



Slika 9.13 Kumulativna frekvenčna porazdelitev. Če potegnemo krivuljo skozi sredine stolpcov, dobimo približek zvezne porazdelitve⁸.

9.5 Gostota verjetnosti

Z oženjem intervalov in večanjem števila opazovanj lahko frekvenčno distribucijo aproksimiramo z zvezno funkcijo, ki ji pravimo **gostota verjetnosti** (glej sliko 9.14).



Slika 9.14 Gostota verjetnosti.

Gostota verjetnosti $f(x)$ je funkcija, ki je definirana na definicijskem območju $D = (c, d)$ in ima naslednje lastnosti:

1. vrednosti so vedno večje ali enake nič.

$$f(x) \geq 0 \text{ za vsak } x \in D \quad (9.13)$$

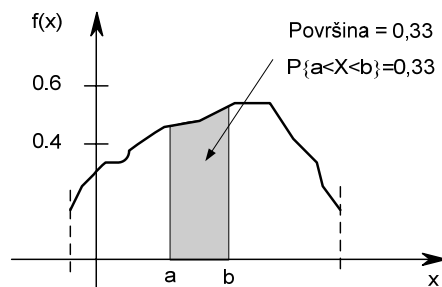
⁸ Zvezna porazdelitev bo opisana v nadaljevanju.

2. Z oženjem intervalov se je seštevanje pretvorilo v izračun površine pod krivuljo, ki jo lahko izračunamo tudi z integralom. Iz tega sledi, da je površina znotraj definicijskega območja D vedno 1.

$$\int_c^d f(x)dx = 1 \quad (9.14)$$

3. Površina pod gostoto verjetnosti v intervalu (a,b) je enaka verjetnosti, da X pade v interval (a,b) .

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx \quad (9.15)$$



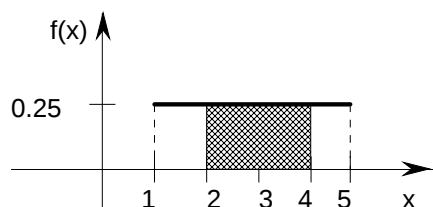
Slika 9.15 Površina pod grafom gostote verjetnosti na intervalu (a,b) je enaka verjetnosti, da X pade v interval (a,b) .

Iz enačbe (9.15) sledi, da je:

$$P\{X = a\} = 0 \quad (9.16)$$

Torej vrednosti $f(x)$ ne moremo interpretirati kot verjetnost, da X zavzame vrednost x . To je možno samo pri empirični porazdelitvi (frekvenčni porazdelitvi), kjer se verjetnost nanaša na **interval**.

Zgled 10



Kolikšna je verjetnost, da X pade v interval $(2,4)$?

Če želimo izračunati verjetnost, da zavzame X vrednost med 2 in 4, moramo izračunati črtano površino. To lahko storimo z integriranjem ali pa kar s preprostim geometrijskim izračunom:

$$P\{2 \leq X \leq 4\} = \int_2^4 f(x)dx = 2 \cdot 0,25 = 0,5$$

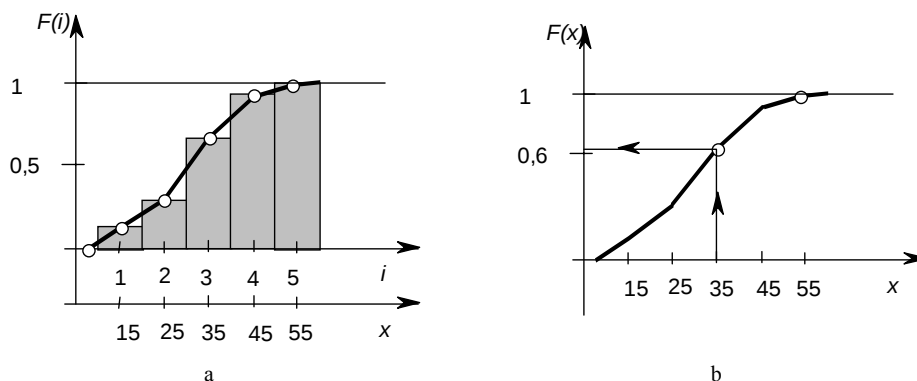
9.6 Zvezna porazdelitvena funkcija

Pri diskretni slučajni spremenljivki smo s seštevanjem posameznih verjetnosti dobili porazdelitev $F(x) = P\{X \leq x\}$. To lahko tukaj storimo z izračunom določenega integrala, ki ima spremenljivo zgornjo mejo:

$$P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(w)dw \quad (9.17)$$

Izračunana površina pod $f(x)$ predstavlja verjetnost, da bo dogodek X zavzel vrednost enako ali manjšo od x . To funkcijo, ki jo bomo označili s $F(x)$, imenujemo **zvezna porazdelitvena funkcija**⁹. Podobno kot diskretna porazdelitev je tudi monotono naraščajoča funkcija, ki je zvezna in ni nikoli negativna. Njena začetna vrednost je nič, konča pa se pri ena.

Izračun zvezne porazdelitvene funkcije s pomočjo integrala je primeren le za teoretične porazdelitve. Če rišemo empirično zvezno porazdelitev, potem je njen približek enak kumulativni frekvenčni porazdelitvi (glej sliko 9.16).



Slika 9.16 a) Empirična zvezna porazdelitev za slučajno spremenljivko iz zgleda 9. b) Verjetnost, da je $X \leq 35$, je 0,6. Verjetnost, da je $X > 35$, je $1 - 0,6 = 0,4$.

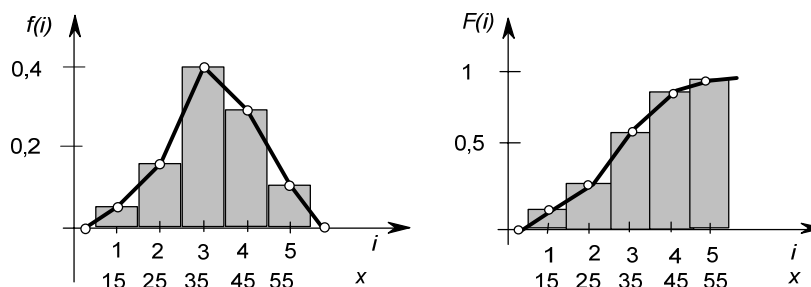
⁹ Ker gre za integral gostote verjetnosti, imenujemo to funkcijo tudi verjetnostni integral.

Razlika med porazdelitvama

Zvezna slučajna spremenljivka je popolnoma definirana, če poznamo njen vzorčni prostor (zalogo vrednosti) in njeno porazdelitev. Npr. slučajno spremenljivko X iz zgleda 8 in 9 bi opisali z:

- opisom zaloge vrednosti: $9 < x < 61$
- opisom frekvenčne ali kumulativne frekvenčne porazdelitve (glej sliko 9.17).

Za katero vrste porazdelitve naj se odločimo? Iz frekvenčne porazdelitve (gostote verjetnosti) lažje razberemo, kako so porazdeljene verjetnosti. Npr. največja je verjetnost, da pade spremenljivka v tretji interval (glej sliko 9.17). To ni tako razvidno na kumulativni porazdelitvi, ki pa je zelo primerna za računanje raznih verjetnosti.



Slika 9.17 Frekvenčna porazdelitev (levo) in kumulativna frekvenčna porazdelitev (desno) spremenljivke X iz zgledov 8 in 9.

Namesto prikazovanja porazdelitve je pogosto enostavneje, če lastnosti slučajne spremenljivke opišemo z določenimi parametri, ki so preproste skalarne vrednosti. Najpogostejša sta: povprečna vrednost in razpršenost.

9.7 Mere povprečja

Če imamo nek niz podatkov, nas pogosto zanima, kolikšna je tipična vrednost. V statistiki se uporablja več načinov izračunavanja povprečja. Najbolj pogosti so naslednji:

1. aritmetična sredina,
2. modus in
3. mediana.

Mere povprečja izberemo glede na obliko frekvenčne distribucije in kategorijo podatkov.

Niz podatkov je včasih tako velik, da raje izberemo samo podmnožico, ki ji pravimo vzorec, celotni niz pa menujemo celotna populacija. Npr. proizvodnja kondenzatorjev predstavlja neskončno veliko populacijo. Z analizo vzorca nato

sklepamo, kakšne so lastnosti celotne populacije. Ocenjevanje lastnosti celotne populacije zahteva dodatne izračune, ki pa jih ne bomo obravnavali. Zapomnimo si le preprosto pravilo, večji je vzorec, večja je natančnost analize.

1. aritmetična sredina

Kadar bomo izračunavali povprečno vrednost celotne populacije, bomo to označili z μ . Ker v izračunu seštevamo posamezne vrednosti, morajo podatki spadati najmanj v **intervalno** lestvico.

Za vzorec iz populacije:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (9.18)$$

Za celotno populacijo:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (9.19)$$

Pogosto želimo na podlagi vzorca določiti srednjo vrednost celotne populacije. Vrednost aritmetične sredine vzorca je odvisna od števila podatkov v vzorcu ali z drugimi besedami: vrednost aritmetične sredine vzorca leži znotraj nekega intervala, ki se z večanjem vzorca manjša.

Zgled 11

Kupili smo 10000 enakih uporov. Iz te zaloge jemljemo različno velike vzorce (število uporov) in izračunavamo aritmetično sredino vrednosti upora v vzorcu. Npr. štirikrat po 5 uporov, nato štirikrat po 20 uporov itd. Rezultate prikazuje naslednja tabela:

N	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$
5	24,2	20,2	23,4	19,2
20	19,9	22,9	20,0	23,9
30	21,0	22,3	21,9	21,0
50	21,2	21,1	21,4	21,2

Kolikšna je aritmetična sredina celotne populacije? Pri petih podatkih se je srednja vrednost gibala med 19,2 in 24,2, pri 50 pa med 21,1 in 21,4. Vidimo, da števila počasi limitirajo proti neki vrednosti. Kolikšne so

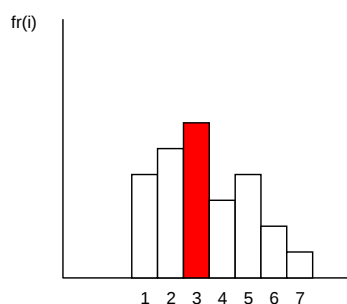
meje, znotraj katerih se nahaja aritmetična sredina celotne populacije, je možno določiti s posebnim statističnim testom¹⁰.

2. modus

Naslednje merilo za opis povprečja je modus. Modus je vrednost podatka oziroma vrednost intervala, ki se najpogosteje pojavlja. Primeren je za podatke, ki spadajo v nominalno lestvico.

Zgled 12

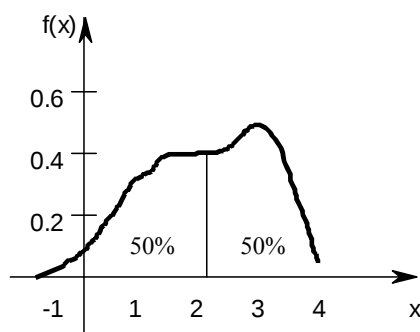
Znana je frekvenčna porazdelitev. Določi modus.



Najbolj pogosto se pojavljajo dogodki, ki jih uvrščamo v tretji interval. Modus je tri.

3. mediana

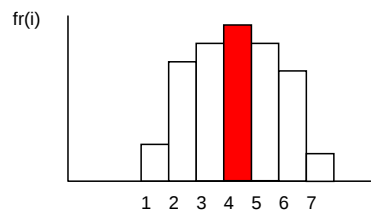
To je točka (vrednost vzorca), ki razdeli površino pod frekvenčno distribucijo **na dva enaka dela**. Primerna je za podatke, ki spadajo vsaj v ordinalno lestvico.



Slika 9.18 Mediana je približno 2,3.

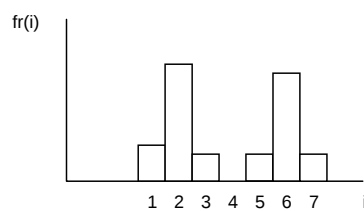
¹⁰ Več o tem je v vsaki knjigi, ki podrobneje obravnava statistiko.

Samo za simetrične porazdelitve z enim modusom velja: $\bar{x} = x_{\text{mediana}} = x_{\text{modus}} !!$



Slika 9.19 Ker je oblika porazdelitvene funkcije simetrična, je aritmetična srednja vrednost enaka modusu ($i = 4$).

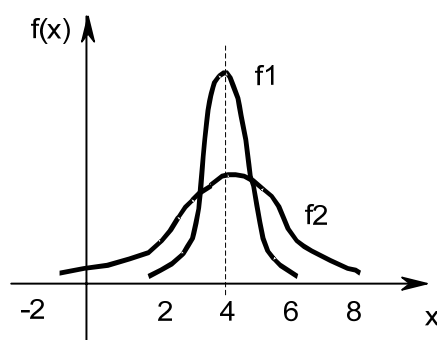
Če ne poznamo porazdelitve, se lahko zgodi, da izberemo popolnoma napačno merilo za oceno povprečja. Za podatke na sliki 9.20 bi izračunali, da je aritmetična sredina približno 4 interval, vendar v njem sploh ni nobenega podatka.



Slika 9.20 Aritmetična sredina je približno 4 interval, vendar v njem sploh ni nobenega podatka.

9.8 Mere razpršenosti¹¹

To so merila, ki povedo, kako so razpršeni podatki.



Slika 9.21 Porazdelitvi f_1 in f_2 imata približno enaki povprečni vrednosti $\bar{x} = 4$, vendar so pri f_2 podatki bolj razpršeni kot pri f_1 .

¹¹ Sinonimi so: mere variabilnosti, disperzija.

Najbolj pogoste mere:

1. variacijski razmik,
2. povprečni absolutni odklon,
3. standardna deviacija in
4. varianca.

Variacijski razmik

To najpreprostejše merilo je razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo v nizu podatkov.

Povprečni absolutni odklon:

$$MD = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N} \quad (9.20)$$

Standardna deviacija¹²:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}} \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N-1}} \quad (9.21)$$

za celotno populacijo

za vzorec iz populacije

Varianca ali disperzija:

To je kvadrat standardne deviacije.

¹² Vsak povprečen kalkulator ima to funkcijo. Če je nima, si moramo pomagati s tabelo.

Zgled 13

Izračunaj vsa obravnavana merila razpršenosti.

8 10 7 11 12 8 8 9 10 7

	x_i	$ \bar{x} - x_i $	$(\bar{x} - x_i)^2$
	8	1	1
	10	1	1
	7	2	4
	11	2	4
	12	3	9
	8	1	1
	8	1	1
	9	0	0
	10	1	1
	7	2	4
Σ	90	14	26

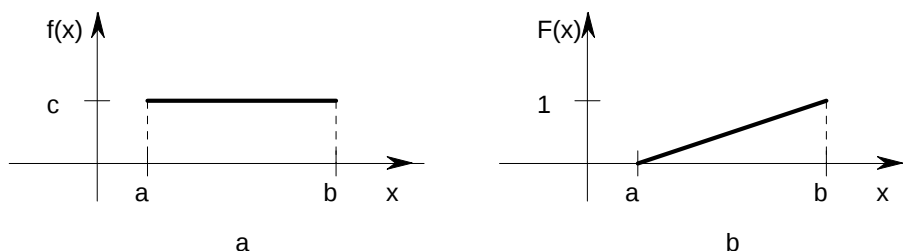
$$\bar{x} = 9$$

1. variacijski razmik $x^{max} - x^{min} = 5$
2. povprečni absolutni odklon = 1,4
3. standardna deviacija (za celotno populacijo) = 1,61
4. varianca = 2,60.

Opomba: če imamo na kalkulatorju funkcijo za standardno deviacijo, tabele ne potrebujemo.

9.9 Enakomerna porazdelitev

Med zveznimi porazdelitvami je najbolj enostavna enakomerna porazdelitev.



Slika 9.22 Gostota verjetnosti (a) in porazdelitvena funkcija (b).

Ker mora biti površina pod $f(x)$ enaka ena, je vrednost c določena z izrazom:

$$c = \frac{1}{b-a}$$

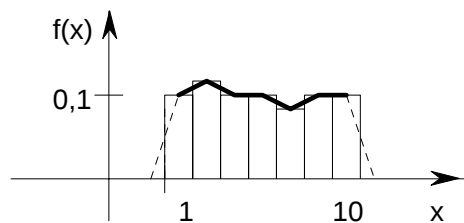
Porazdelitvena funkcija linearno narašča znotraj intervala, v katerem je definirana slučajna spremenljivka X :

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_a^x f(x)dx = \frac{x-a}{b-a}$$

Empirična gostota oziroma frekvenčna porazdelitev je samo približno konstantna.

Zgled 14

Narisana je empirična porazdelitev. Kolikšna je verjetnost, da zavzame slučajna spremenljivka katerokoli vrednost znotraj posameznih razredov?

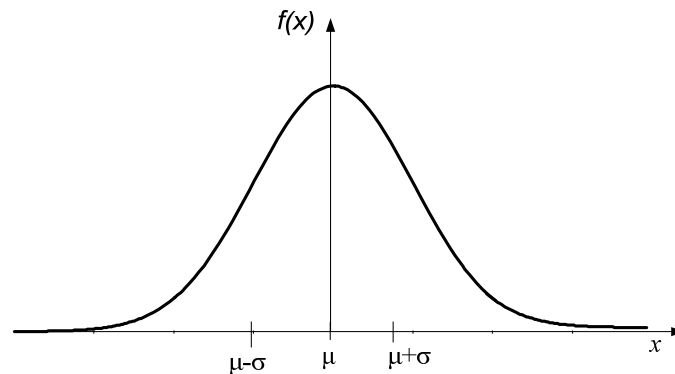


Verjetnost, da zavzame slučajna spremenljivka katerokoli vrednost znotraj posameznih razredov, je približno 0,1.

9.10 Normalna ali Gaussova porazdelitev

To je zvezna teoretična porazdelitev, pri kateri je gostota verjetnosti opisana z naslednjo funkcijo:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (9.22)$$



Slika 9.23 Gostota verjetnosti (Gaussova porazdelitev), ki je opisana z izrazom (9.22).

Pri empirični porazdelitvi izračunamo srednjo vrednost μ in standardno deviacijo σ z naslednjima izrazoma:

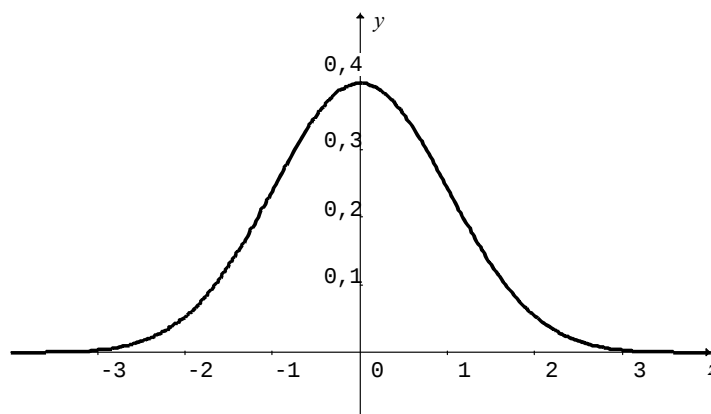
$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}}$$

Kadar imamo opravka z vzorcem, je potrebno izraz za σ ustrezno korigirati. Mnogo pojavov v naravi ustreza tej distribuciji in zato lahko pogosto predpostavimo, da je empirična distribucija dejansko Gaussova. Z uvedbo standardiziranega odklona (spremenljivka z) se izraz (9.22) poenostavi:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{9.23}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{9.24}$$

Ker je izračun določenega integrala, s katerim bi lahko izračunali porazdelitveno funkcijo $F(x)$ oziroma $F(z)$, zapleten, se uporablja samo numerična integracija, katere rezultati so v tabeli 9.2. Tej inačici Gaussove funkcije pravimo **standardizirana ali normirana Gaussova funkcija**.



Slika 9.24 Potek standardizirane Gaussove funkcije.

Nekaj vrednosti površin, s katerimi se pogosto srečamo:

Interval	z	Površina
$\mu \pm 1\sigma$	-1...1	0,6826
$\mu \pm 1,96\sigma$	-1,96..1,96	0,9500
$\mu \pm 2\sigma$	-2...2	0,9545
$\mu \pm 3\sigma$	-3...3	0,9973

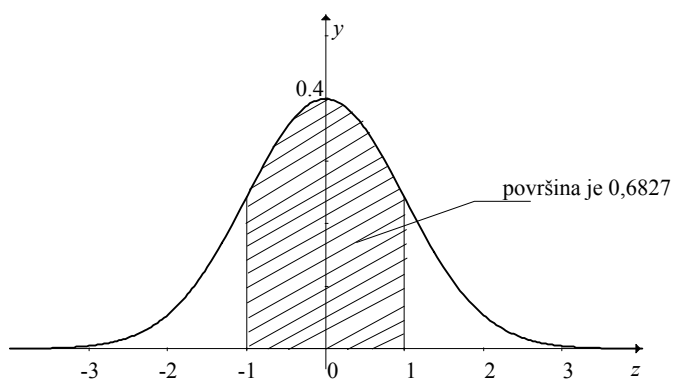
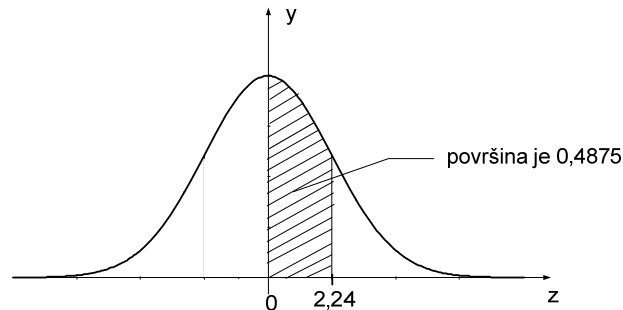
Slika 9.25 Površina, ki ustreza intervalu $\pm 1\sigma$.

Tabela 9.2 Površina pod standardizirano normalno distribucijo v intervalu od 0 do z

[illegible]

Zgled 15

Kolikšna je površina pod krivuljo v intervalu $0 < z < 2,24$?

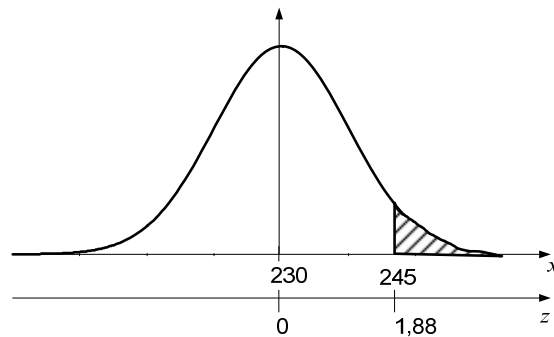


Iz tabele 9.2 odčitamo, da je pri $z = 2,24$ površina 0,4875.

Zgled 16

Vrednosti napetosti so distribuirane po normalni distribuciji. Srednja vrednost je 230 V, standardna deviacija pa 8. Kolikšna je verjetnost, da bo napetost večja od 245 V?

Najprej napravimo preprosto skico poteka gostote verjetnosti in označimo iskano površino.



$$z = \frac{245 - 230}{8} = 1,875 \approx 1,88$$

Iskano površino izračunamo z odštevanjem dveh površin:

Za celotno desno polovico velja $P\{0 < z < +\infty\} = 0,5000$ in za $P\{0 < z < 1,88\} = 0,4699$

$$P\{1,88 < z < +\infty\} = 0,5000 - 0,4699 = 0,0301$$

Verjetnost, da bo napetost večja od 245, je 3 %.

9.11 Ocenitev standardne deviacije celotne populacije s pomočjo vzorca

Pogosto bi radi na podlagi **vzorca** ocenili, kolikšna je standardna deviacija **celotne populacije** (npr. ocenjevanje toleranc). Iz celotne populacije naključno izberemo N elementov in izračunamo standardno deviacijo. Postopek ponavljamo. Vedno bomo dobili drugačno vrednost. Z večanjem števila podatkov se bo interval, znotraj katerega se nahajajo izračunane standardne deviacije vzorca, ožil.

Če za populacijo velja normalna porazdelitev, je interval zaupanja, v katerem leži standardna deviacija celotne populacije, določen z naslednjim približnim izrazom:

$$\sigma = s \pm \frac{z \cdot s}{\sqrt{2N}} = s \left(1 \pm \frac{z}{\sqrt{2N}} \right) = s \left(1 \pm \frac{\Delta s}{s} \right) \quad (9.25)$$

σ : standardna deviacija celotne populacije

s : standardna deviacija vrednosti v vzorcu

N : število vzorcev

z : standardiziran odklon

Z večanjem števila podatkov v vzorcu se večja natančnost ocene. Pri $N \rightarrow \infty$, je $\sigma = s$.

V spodnji tabeli je prikazana povezava med velikostjo vzorca in relativno napako ocene za 95 % stopnjo zaupanja ($z = 1,96$).

Tabela 9.3 Nekaj tipičnih vrednosti.

N	$\frac{\Delta s}{s}$
10	0,44
50	0,20
100	0,14
200	0,10

Zgled 17

Iz tekočega traku, na katerem izdelujemo 5 V usmernike, smo naključno izbrali 100 usmernikov. Povprečna vrednost v vzorcu je bila 4,95 V, standardna deviacija pa 0,1 V. Kolikšna je standardna deviacija napetosti usmernikov, ki prihajajo s tekočega traku? Ocena naj velja za 95 % stopnjo zaupanja.

$$s = (0,1 \pm 0,1 \cdot 0,14) V = (0,1 \pm 0,014) V = 0,1(1 \pm 0,14) V$$

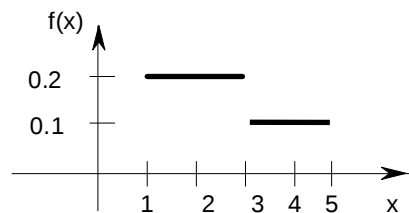
Torej s 95 % verjetnostjo lahko trdimo, da leži standardna deviacija vseh usmernikov v intervalu 0,086 V - 0,114 V.

9.12 Naloge za poglavje 9

1. Naključni dogodek je število pik pri metu ene kocke.

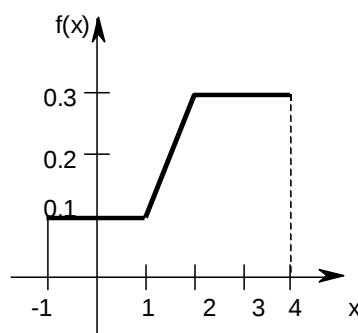
1. Določi vzorčni prostor.
2. Nariši verjetnostno funkcijo.
3. Nariši porazdelitveno funkcijo.
4. Kolikšna je verjetnost, da bomo vrgli 5 pik?
5. Kolikšna je verjetnost, da bomo vrgli najmanj 5 pik?
6. Kolikšna je verjetnost, da bomo vrgli najmanj 2 in ne več kot 4 pike?

2. Kolikšen je vzorčni prostor slučajne spremenljivke X ? Ali je $f(x)$ porazdelitvena funkcija?



3. Znana je gostota verjetnosti $f(x)$.

1. Preveri, ali gostota verjetnosti $f(x)$ ustreza vsem zahtevam.
2. Določi verjetnost, da bo $X \leq 3$.
3. Določi verjetnost, da bo $X > 3$.
4. Določi verjetnost, da bo $1 \leq X \leq 3$.
5. Nariši porazdelitveno funkcijo $F(x)$ in ponovi izračune od 2 do 4.



4. Nariši empirično gostoto verjetnosti (frekvenčno distribucijo). Kolikšna je verjetnost, da bo $X > 11$?

12	10	9	11	12	14	13	14	15	12
9	11	12	13	11	12	10	12	13	11

5. V laboratoriju smo merili napetost usmernikov. Podatki so zbrani v tabeli. Enote so volti.

12,1	17,4	13,2	16,8	15,9	17,5	12,4	16,3	13,0	16,2
15,3	14,3	11,5	13,7	16,4	14,7	15,5	11,3	13,4	15,0
16,1	17,2	16,1	16,1	16,2	17,9	15,7	16,0	16,1	16,7
12,9	13,4	16,1	15,9	18,8	13,6	12,6	17,5	15,3	20,6

1. Kaj je slučajni dogodek?
 2. Kolikšen je približno vzorčni prostor?
 3. Nariši empirično gostoto verjetnosti (frekvenčno distribucijo).
 4. Nariši kumulativno frekvenčno distribucijo.
 5. Komentiraj frekvenčno distribucijo. Kaj lahko iz nje razbereš?
 6. Kolikšna je ocena verjetnosti, da je napetost manjša od 14,0V?
 7. Kolikšna je ocena verjetnosti, da se napetost nahaja med 12,2V in 16,8V?
 8. Kolikšna je ocena verjetnosti, da je napetost večja od 12,0V?
 9. Kolikšna je ocena verjetnosti, da je napetost enaka 16,0V?
6. Povprečna vrednost zgornje frekvenčne meje (fzg) 500 ojačevalnikov je 151 MHz in $\sigma = 15$ MHz. Podatki so porazdeljeni skladno z normalno porazdelitvijo.
1. Koliko ojačevalnikov ima zgornjo frekvenčno mejo med 120 MHz in 155 MHz?
 2. Specifikacije zahtevajo, da mora imeti ojačevalnik zgornjo frekvenčno mejo večjo od 120 MHz. Koliko procentov ojačevalnikov specifikacijam ne ustreza?
7. Glej podatke iz naloge 4. Predpostavi, da so vrednosti porazdeljene po Gaussovi porazdelitvi. Kolikšna je ocena verjetnosti, da bo $X > 11$?
8. Glej podatke v nalogi 5. Predpostavi, da se dogodki distribuirajo po Gaussovi distribuciji. Odgovori na vprašanja od 6 do 9 iz iste naloge.
9. S tekočega traku smo naključno vzeli 12 ojačevalnikov in izmerili napetostno ojačenje. Pogreške, ki nastanejo pri meritvi, bomo zanemarili.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Au	163	140	110	150	130	143	145	126	150	184	148	135

Določi in nariši frekvenčno in kumulativno frekvenčno distribucijo. Kolikšna je ocena verjetnosti, da bo ojačenje med 130 in 160? Kolikšna je ocena verjetnosti, da bo ojačenje 150?

10. Literatura

[BRATKOVIČ, 1992] F. Bratkovič: "*Računalniško načrtovanje vezij – občutljivost in optimizacija*", Fakulteta za elektrotehniko v Ljubljani, Ljubljana, 1992.

[BÜRMEN, 2002] A. Bürmen, D. Strle, F. Bratkovič, J. Puhan, I. Fajfar, T. Tuma: "*Penalty Function Approach to Robust Analog IC Design*", Informacije MIDEM 32 (2002)3, Ljubljana, 2002.

[BÜRMEN, 2003] A. Bürmen, D. Strle, F. Bratkovič, J. Puhan, I. Fajfar, T. Tuma: "*Automated robust design and optimization of integrated circuits by means of penalty functions*". AEÜ – International Journal of Electronics and Communications, 2003, 57, številka 1, str. 47-56.

[CALAHAN, 1972] D. A. Calahan: "*Computer Aided Network Design*", McGraw Hill, 1972.

[CANTATORE, 1999] E. Cantatore, F. Corsi, C. Marzocca, G. Matarrese: "*Relative Robustness Against Process Fluctuations of Basic Building Blocks for Analog Front-End of Particle Detectors*", Proceedings of The Fifth Workshop On Electronics For LHC Experiments, University of Winsconsin, 1999.

[HYMOWITZ, 1988] L. G. Meares and C. E. Hymowitz: "*Simulating with Spice*", Intusoft, San Pedro, CA, 1988.

[LAMEY, 1994] Robert Lamey: "*Illustrated Guide to Pspice*", Thomson Delmar Learning, 1994.

[MICHAEL, 1993] C. Michael and M. Ismail: "*Statistical Modeling for Computer-Aided Design of Analog MOS Integrated Circuits*", Norwell, MA: Kluwer, 1993.

[RASHID, 2003] Muhammad H. Rashid: "*Introduction to PSpice Using OrCAD for Circuits and Electronics*", Prentice Hall; 3. izdaja, 2003.

[TUMA, 1997] Tadej Tuma: "*Analiza vezij s programom SPICE3*", Fakulteta za elektrotehniko, 1. izdaja, Ljubljana, 1997.

[TUINENGA, 1988] Paul W. Tuinenga: "*Spice: A Guide to Circuit Simulation and Analysis Using PSpice*", Prentice Hall College Div, New Jersey, 1988.

[TARIM, 1999] T. B. Tarim and M. Ismail, "*Statistical Design and Yield Enhancement of CMOS Analog VLSI Circuits*", IEEE Circuits and Devices Magazine, marec, 1999, str. 12-22.

[VADNAL, 1972] Alojzij Vadnal: "*Elementarni uvod v verjetnostni račun*", DZS, Ljubljana, 1972.

[CHATFIELD, 1983] Christopher Chatfield: "*Statistics for technology*", John Wiley&Sons, London, 1983.

[SPIEGEL, 1972] Murray R. Spiegel: "*Theory and problems of statistics*", Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1972.

"*Engineering Statistics Handbook*", december 2000:

<http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/main.htm>

[ČIBEJ, 1998] Jože Andrej Čibej: "*Matematika: Kombinatorika, Verjetnosti račun, Statistika*", DZS, Ljubljana, 1998.

11. Priloge

11.1 Lestvice vrednosti po DIN IEC 63

E3 (50 %): 1; 2,2; 4,7

E6 (20 %): 1; 1,5; 2,2; 3,3; 4,7; 6,8

E12 (10 %): 1; 1,2; 1,5; 1,8; 2,2; 2,7; 3,3; 3,9; 4,7; 5,6; 6,8; 8,2

E24 (5 %): 1; 1,1; 1,21; 1,33; 1,47; 1,62; 1,78; 1,96; 2,15; 2,37;
2,61; 2,87; 3,16; 3,48; 3,83; 4,22; 4,64; 5,11; 5,62; 6,19;
6,81; 7,50; 8,25; 9,09

E48 (2 %): 100; 105; 110; 115; 121; 127; 133; 140; 147; 154; 162;
169; 178; 187; 196; 205; 215; 226; 237; 249; 261; 274; 287; 301;
316; 332; 348; 365; 383; 402; 422; 442; 464; 487; 511; 536; 562;
590; 619; 649; 681; 715; 750; 787; 825; 866; 909; 953;

E96 (1 %) 100; 102; 105; 107; 110; 113; 115; 118; 121;
124; 127; 130; 133; 137; 140; 143; 147; 150; 154; 158;
162; 165; 169; 174; 178; 182; 187; 191; 196; 200; 205;
210; 215; 221; 226; 232; 237; 243; 249; 255; 261; 267;
274; 280; 287; 294; 301; 309; 316; 324; 332; 340; 348;
357; 365; 374; 383; 392; 402; 412; 422; 432; 442; 453;
464; 475; 487; 499; 511; 523; 536; 549; 562; 576; 590;
604; 619; 634; 649; 665; 681; 698; 715; 732; 750; 768;
787; 806; 825; 845; 866; 887; 909; 931; 953; 976;

E192 (0,5 %) 100; 101; 102; 104; 105; 106; 107; 109; 110;
111; 113; 114; 115; 117; 118; 120; 121; 123; 124; 126;
127; 129; 130; 132; 133; 135; 137; 138; 140; 142; 143;
145; 147; 149; 150; 152; 154; 156; 158; 160; 162; 164;
165; 167; 169; 172; 174; 176; 178; 180; 182; 184; 187;
189; 191; 193; 196; 198; 200; 203; 205; 208; 210; 213;
215; 218; 221; 223; 226; 229; 232; 234; 237; 240; 243;
246; 249; 252; 255; 258; 261; 264; 267; 271; 274; 277;
280; 284; 287; 291; 294; 298; 301; 305; 309; 312; 316;
320; 324; 328; 332; 336; 340; 344; 348; 352; 357; 361;
365; 370; 374; 379; 383; 388; 392; 397; 402; 407; 412;
417; 422; 427; 432; 437; 442; 448; 453; 459; 464; 470;
475; 481; 487; 493; 499; 505; 511; 517; 523; 530; 536;
542; 549; 556; 562; 569; 576; 583; 590; 597; 604; 612;
619; 626; 634; 642; 649; 657; 665; 673; 681; 690; 698;
706; 715; 723; 732; 741; 750; 759; 768; 777; 787; 796;
806; 816; 825; 835; 845; 856; 866; 876; 887; 898; 909;
920; 931; 942; 953; 965; 976; 988;

12. Stvarno kazalo

A

absolutni minimum · 32
analiza najbolj neugodnega primera
 ustrezen izbor ekstremnih vrednosti
 parametrov · 40
analitična metoda · 32
definicija · 32
linearizacija lastnosti v prostoru toleranc · 35
metoda z vsemi možnimi kombinacijami
 vrednosti parametrov · 37
metoda z izborom ekstremnih vrednosti
 parametrov · 39
analiza občutljivosti · 17
analiza občutljivosti
 perturbacijska metoda · 19
 analitični izračun · 20
 določitev s simulatorjem · 25
analiza ogliščnih točk · 40
analiza toleranc
 definicija · 31
aritmetična sredina · 94

C

CASES · 56
corner analysis · 40

D

delovna točka · 25
DEV · 56
diferencialna občutljivost · 20, 26
DIN IEC 63 · 14
diskretna porazdelitev · 78
disperzija · 97

E

empirična porazdelitev · 78
enakomerna porazdelitev · 98

F

frekvenčna porazdelitev · 79, 85
frekvenčni poligon · 86

G

Gaussova porazdelitev · 10, 100
gostota verjetnosti · 90

H

hitra ocena statistične tolerance · 45, 65
histogram · 86

I

inkrementalna občutljivost · 19, 27
integrirana vezja · 55
intervalna kategorija · 76
IsSpice4 · 26
izmet · 50

K

kategorija podatkov · 76
koeficient občutljivosti · 20
korelirani parametri · 55
kumulativna porazdelitev · 53
kumulativna frekvenčna porazdelitev · 83, 89

L

local mismatch · 55
lokalni minimum · 32
lot · 55
LOT · 56

M

mediana · 93, 95
mere povprečja · 93
mere razpršenosti · 96
meritev občutljivosti
 perturbacijska metoda · 19
meritev toleranc · 12
modus · 95
Monte Carlo analiza · 47, 60
 Principal Components Analysis · 50

N

načrtovanje toleranc · 61
 načrtovanje toleranc
 predpisan je najbolj neugoden primer za več lastnosti · 69
 predpisan je neugoden primer ene lastnosti · 64
 predpisana je statistična toleranca ene lastnosti · 62
 predpisanih je več nelinearnih lastnosti · 65
 najbolj neugoden primer
 analitična metoda · 60
 definicija · 32
 nazivna vrednost · 9, 19
 nekorelirani parametri · 54
 nesimetrično podana toleranca · 9
 nominalna vrednost · 9, 19
 nominalna kategorija · 76
 normalna porazdelitev · 99
 normirana občutljivost · 21

O

občutljivost na temperaturo · 24
 ordinalna kategorija · 76

P

pdf · 81
 parameter · 18
 parameterski prostor · 39
 perturbacijska metoda · 19
 porazdelitveni zakon · 77
 povprečni absolutni odklon · 97
 probability density function · 81

R

racionalna kategorija · 76
 relativna frekvenca · 79
 robustnost · 8, 61, 62

S

sensitivity analysis · 17

simetrično podana toleranca · 9
 simulacija proizvodnje · 54
 skript · 25, 27
 slučajna spremenljivka · 77
 slučajni dogodek · 76
 SPICE 2G6 · 26
 standardizirana lestvica vrednosti · 15
 standardne vrednosti parametrov · 14
 standardizirana Gaussova porazdelitev · 100
 standardna deviacija · 97
 ocenitev · 104

Š

šarža · 55

T

temperaturni koeficient parametra · 25
 toleranca
 navadna definicija · 9
 statistična definicija · 10
 tolerančni prostor · 39
 teoretična porazdelitev · 78

V

variabilnost elementov · 55
 variabilnost procesa · 55
 variacijski razmik · 97
 varianca · 97
 verjetnostna funkcija · 81
 verjetnostna shema · 78
 vsota frekvenc · 83
 vzorčni prostor · 76

W

worst case analysis · 31

Z

zaokroževanje nazivnih vrednosti · 17
 zvezna porazdelitev · 84
 zvezna porazdelitvena funkcija · 92