O POLOVIČNEM ODVODU FUNKCIJE

NIK STOPAR

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 26A33

Definicijo n-tega odvoda funkcije, kjer je n naravno število, lahko razširimo do definicije odvoda reda α, kjer je α realno število. V prispevku predstavimo tako imenovan Riemann-Liouvillov odvod, ki je ena od možnih posplošitev običajnega odvoda. Pri tem največ pozornosti namenimo polovičnemu odvodu funkcije. Za motivacijo najprej definiramo odvode potenčnih funkcij na elementaren način, nato pa definicijo s pomočjo integralov razširimo na splošnejše funkcije, definirane na intervalu $[0, \infty)$. Na koncu predstavimo nekaj pomembnih lastnosti Riemann-Liouvillovega odvoda in med drugim pokažemo, da polovični odvod $D^{\frac{1}{2}}$ zadošča enakosti $D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f)) = f'$ za velik razred funkcij f.

ON THE HALF DERIVATIVE OF A FUNCTION

The definition of the nth derivative of a function, where n is a positive integer, can be extended to a definition of a derivative of order α, where α is a real number. In this note we present the so called Riemann-Liouville derivative, which is one of several possible generalizations of the ordinary derivative. We devote the most attention to the half derivative of a function. For motivation we first define derivatives of power functions in an elementary way and then extend the definition to include more general functions defined on the interval $[0, \infty)$. At the end we present some important properties of the Riemann-Liouville derivatives and show that the half derivative $D^{\frac{1}{2}}$ satisfies the equality $D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f)) = f'$ for a large class of functions f.

1. Polovični odvod

Z odvodom funkcije se prvič srečamo v srednji šoli, kjer spoznamo njegov pomen in njegovo uporabo v matematiki. Pri fiziki s pomočjo odvoda izračunamo hitrost objekta, če poznamo njegovo pot v odvisnosti od časa. Prav ta uporaba je bila motivacija Newtonu in Leibnizu pri vpeljavi odvoda in diferencialnega računa.

Pravimo, da je funkcija f *odvedljiva* v točki x_0, če obstaja limita

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Vrednosti $f'(x_0)$ pravimo *prvi odvod funkcije f v točki* x_0. Če je funkcija f odvedljiva v vsaki točki x z intervala (a, b), tedaj funkciji $f' \colon x \mapsto f'(x)$

pravimo *prvi odvod* funkcije f. Njena vrednost v točki $x_0 \in (a, b)$ je enaka $f'(x_0)$. Če je tudi funkcija f' odvedljiva na celem intervalu (a, b), potem njen odvod $(f')'$ označimo krajše z f'' in mu pravimo *drugi odvod* funkcije f. V tem primeru rečemo, da je funkcija f dvakrat odvedljiva na intervalu (a, b). Nobenega razloga ni, zakaj bi se pri drugem odvodu ustavili. V primeru, da je funkcija f še večkrat odvedljiva, lahko izračunamo njen *tretji odvod* f''', *četrti odvod* $f^{(4)}$, *peti odvod* $f^{(5)}$ in tako dalje, vse dokler ti obstajajo. Mnoge funkcije f so celo neskončno mnogokrat odvedljive in zanje lahko izračunamo n-ti odvod $f^{(n)}$ za poljubno naravno število n.

S tem smo opredelili, kaj je n-ti odvod funkcije, če je n naravno število. Kaj pa, če bi namesto naravnega števila vzeli kakšno drugo realno število, recimo $n = \frac{1}{2}$ ali $n = \frac{4}{3}$, ali celo $n = \pi$? Ali lahko tudi v tem primeru definiramo n-ti odvod funkcije? S tem vprašanjem se bomo ukvarjali v tem prispevku in poskusili nanj tudi odgovoriti.

Prva omemba vprašanja o definiciji odvoda poljubnega realnega reda sega v leto 1695, ko je Leibniz v pismu L'Hôpitalu omenil možnost posplošitve pojma odvoda naravnega reda do odvoda realnega reda. L'Hôpital je takoj želel vedeti, kaj je rezultat odvoda reda $\frac{1}{2}$. Kljub temu pa so se v literaturi odvodi realnih redov pojavili šele leta 1819, ko je Lacrox podal prvo formalno definicijo.

V tem razdelku se bomo osredotočili na primer $n = \frac{1}{2}$. Želeli bi torej osmisliti pomen izraza *polovični odvod* funkcije f. Po vzoru višjih odvodov ga označimo kar s $f^{(\frac{1}{2})}$, čeprav za zdaj še ne vemo, kaj to pomeni. Seveda želimo, da je $f^{(\frac{1}{2})}$ spet funkcija, da jo lahko po potrebi ponovno odvajamo. Poleg tega pa bi radi, da polovični odvod zadošča nekaterim lastnostim običajnih odvodov.

Prva pomembna lastnost običajnega odvoda je linearnost, to pomeni, da je za vsaki odvedljivi funkciji f in g in vsaki konstanti α in β tudi funkcija $\alpha f + \beta g$ odvedljiva in zanjo velja

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

Tudi za polovični odvod bomo zahtevali, da je linearen.

Do druge smiselne zahteve za polovični odvod vodijo višji odvodi. Vzemimo funkcijo f, ki je poljubno mnogokrat odvedljiva, in naj bosta m in n naravni števili. Če najprej izračunamo n-ti odvod funkcije f in nato m-ti odvod rezultata, tj. $(f^{(n)})^{(m)}$, tedaj dobimo $(n + m)$-ti odvod funkcije

$f^{(n+m)}$, saj smo funkcijo skupaj odvajali $(n+m)$-krat. Zapišimo to še z enačbo:

$$(f^{(n)})^{(m)} = f^{(n+m)}. \tag{1}$$

Smiselno je torej zahtevati, da tudi polovični odvod ustreza tej formuli. Če vzamemo $m = n = \frac{1}{2}$, dobimo zvezo

$$\left(f^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = f'.$$

Formula pove, da mora dvakratna zaporedna uporaba polovičnega odvoda na funkciji f kot rezultat dati prvi odvod funkcije f. Skratka, če označimo

$$D(f) = f' \quad \text{in} \quad P(f) = f^{\left(\frac{1}{2}\right)}, \tag{2}$$

tedaj iščemo tako preslikavo P, za katero bo veljalo $P \circ P = D$ oziroma $P(P(f)) = D(f)$ za določen razred funkcij f. Opozoriti je treba, da ne moremo pričakovati, da bo enakost $P(P(f)) = D(f)$ izpolnjena za poljubno odvedljivo funkcijo f, bo pa veljala za precej velik razred funkcij.

Če se omejimo le na potenčne funkcije s pozitivnimi eksponenti, take preslikave P ni težko najti. Oglejmo si, kako lahko pridemo do nje. Naj bo $h(x) = x^k$, kjer je k naravno število. Po vrsti izračunajmo običajne odvode funkcije h in uganemo splošno formulo.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= kx^{k-1}, \\
h''(x) &= k(k-1)x^{k-2}, \\
&\dots \\
h^{(n)}(x) &= k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)x^{k-n}.
\end{aligned}$$

Opazimo, da lahko n-ti odvod zapišemo s pomočjo fakultet

$$h^{(n)}(x) = \frac{k!}{(k-n)!}x^{k-n}. \tag{3}$$

Da bi prišli do definicije polovičnega odvoda, bi želeli v tej formuli n zamenjati z $\frac{1}{2}$. Tega za zdaj še ne smemo storiti, saj je funkcija fakulteta definirana le za nenegativna cela števila. Spomnimo se, da obstaja funkcija, ki posplošuje funkcijo fakulteta, tj. *Eulerjeva funkcija gama*, in je definirana za skoraj vsa realna števila. Definicijo in lastnosti te funkcije si bomo podrobneje ogledali v naslednjem razdelku. Na tem mestu omenimo le, da za vsako naravno število n velja $\Gamma(n+1) = n!$, hkrati pa za vsako pozitivno realno število x velja

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{4}$$

S pomočjo funkcije Γ lahko formulo (3) zapišemo v obliki

$$h^{(n)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}.$$

Za definicijo polovičnega odvoda potenčne funkcije v tej formuli n nadomestimo z $\frac{1}{2}$ in dobimo

$$P(x^k) = \left(x^k\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} x^{k-\frac{1}{2}}.$$

Ker je funkcija gama definirana za vsa pozitivna realna števila, lahko v tej formuli dopustimo, da je k poljubno realno število večje od $-\frac{1}{2}$. Če želimo izračunati $P(P(x^k))$, mora biti torej $k > 0$, zato se bomo omejili na funkcije s pozitivnimi eksponenti. Z upoštevanjem linearnosti lahko definicijo preslikave P razširimo na poljubne linearne kombinacije potenčnih funkcij s pozitivnimi eksponenti. Neformalno rečeno so take funkcije polinomi s poljubnimi, ne nujno naravnimi, pozitivnimi eksponenti. Preverimo, da tako definirana preslikava na tej množici funkcij res ustreza zahtevani enačbi $P \circ P = D$. Naj bo $k > 0$. Tedaj z upoštevanjem linearnosti in enakosti (4) dobimo

$$\begin{aligned} P(P(x^k)) &= P\left(\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} x^{k-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} P\left(x^{k-\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k)} x^{k-1} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} x^{k-1} = \frac{k\Gamma(k)}{\Gamma(k)} x^{k-1} \\ &= kx^{k-1} = (x^k)' = D(x^k). \end{aligned}$$

Zaradi linearnosti od tod sledi

$$P(P(\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \cdots + \alpha_m x^{k_m})) = D(\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \cdots + \alpha_m x^{k_m})$$

za poljubne $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ in $k_i > 0$.

2. Eulerjeva funkcija gama

V tem razdelku si bomo ogledali definicijo funkcije Γ in zabeležili njene najpomembnejše lastnosti, ki jih bomo potrebovali. Funkcijo Γ je uvedel Leonhard Euler.

Definicija 1. *Eulerjevo funkcijo gama* definiramo s predpisom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

za vsako realno število $x > 0$.

Izkaže se, da ta integral obstaja za vsak $x > 0$, za $x \leq 0$ pa ne obstaja. Ena od pomembnejših lastnosti funkcije Γ je naslednja enakost.

Trditev 2. *Za vsak $x > 0$ velja $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*

Enakost dokažemo z integracijo po delih, dokaz pa lahko bralec najde v [2, str. 441]. Iz te enakosti izpeljemo povezavo med funkcijo gama in funkcijo fakulteta.

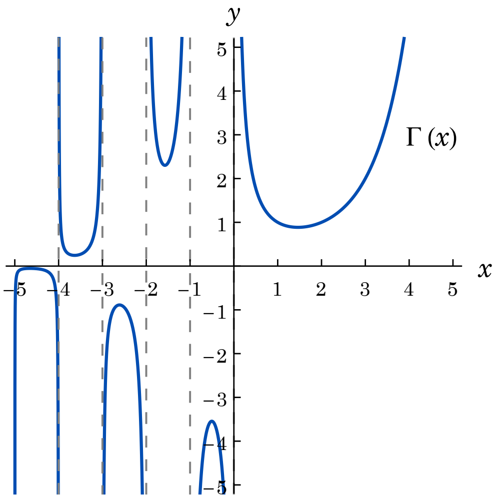
Posledica 3. *Za vsako nenegativno celo število n velja $\Gamma(n+1) = n!$.*

Definicijo funkcije Γ lahko razširimo na vsa negativna realna števila, ki niso cela. To storimo tako, da enakost iz trditve 2 zapišemo nekoliko drugače:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{5}$$

Ker je desna stran enakosti definirana za vse $x \in (-1, 0)$, lahko s to formulo razširimo definicijo funkcije Γ na interval $(-1, 0)$. Ko to storimo, je desna stran enakosti (5) definirana za vse $x \in (-2, -1)$, zato lahko enakost spet uporabimo za razširitev funkcije Γ na interval $(-2, -1)$. Postopek induktivno nadaljujemo in tako postopoma definiramo vrednosti funkcije Γ še na intervalih $(-3, -2)$, $(-4, -3)$, $(-5, -4)$, ... Na ta način dobimo funkcijo, katere graf je prikazan na sliki 1. Slika nakazuje, da funkcija Γ nima nobene ničle. Prepričajmo se, da je res tako. Iz definicije 1 sledi, da je $\Gamma(x) > 0$ za vse $x > 0$, saj je funkcija pod integralom pozitivna. Če pa je $x \in (-n-1, -n)$, kjer je n nenegativno celo število, tedaj je $x + n + 1 > 0$. Od tod po enakosti (5) sledi

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)} \neq 0. \tag{6}$$



Slika 1. Graf Eulerjeve funkcije gama.

Iz enakosti (6) sledi tudi, da za vsa nenegativna cela števila n velja

$$\lim_{x \to -n} \frac{1}{\Gamma(x)} = 0. \tag{7}$$

Ena izmed najbolj znanih vrednosti funkcije gama je vrednost

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \tag{8}$$

S pomočjo te vrednosti lahko izračunamo vrednosti $\Gamma(\frac{n}{2})$ za vsa liha cela števila n.

S funkcijo gama je povezana še ena pomembna funkcija, to je *Eulerjeva funkcija beta*, ki jo označimo z B. Definirana je na naslednji način.

Definicija 4. *Eulerjevo funkcijo beta* definiramo s predpisom

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$$

za vsaki realni števili $x, y > 0$.

Funkcijo beta lahko izrazimo s funkcijo gama. Zabeležimo to povezavo v trditev, saj jo bomo potrebovali kasneje. Podroben dokaz trditve najdemo v [2, str. 440–441].

Trditev 5. *Za vsaki realni števili $x, y > 0$ velja*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Več o funkcijah gama in beta in njunih lastnostih lahko bralec prebere v [2] ali [3].

3. Definicija odvoda reda α potenčnih funkcij

Spomnimo se enakosti (3) iz prvega razdelka, ki jo s pomočjo funkcije gama lahko zapišemo kot

$$\left(x^k\right)^{(n)} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}, \qquad k, n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Ker je funkcija gama definirana za vsa realna števila, razen za negativna cela števila in 0, lahko definiramo odvod reda α potenčne funkcije x^r kot

$$(x^r)^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} x^{r-\alpha}, \quad r, r-\alpha \notin \mathbb{Z}^-, \tag{10}$$

kjer smo z $\mathbb{Z}^-$ označili množico vseh negativnih celih števil. Omejitvi za r in α zagotovita, da sta funkcijski vrednosti $\Gamma(r+1)$ in $\Gamma(r-\alpha+1)$ definirani. Ker funkcija Γ nima nobenih ničel, je tudi ulomek $\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}$ v tem primeru definiran. Tako definirani odvodi potenčnih funkcij zadoščajo pričakovani enakosti (glej enakost (1))

$$((x^r)^{(\alpha)})^{(\beta)} = (x^r)^{(\alpha+\beta)}, \tag{11}$$

čim sta obe strani definirani. Bralcu prepuščamo, da veljavnost enakosti preveri sam.

Definicijo lahko razširimo tudi na nekatere druge primere za r in α, vendar moramo že vnaprej opozoriti, da razširjena definicija ne bo več ustrezala enakosti (11). Vseeno si oglejmo, katere primere še lahko dodamo.

Če $r \notin \mathbb{Z}^-$ in $r - \alpha \in \mathbb{Z}^-$, tedaj je števec ulomka $\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}$ definiran, imenovalec pa ne. Kljub temu pa iz enakosti (7) sledi, da je

$$\lim_{t \to r-\alpha+1} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(t)} = 0,$$

zato je ulomek $\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)}$ smiselno nadomestiti z 0 in definirati

$$(x^r)^{(\alpha)} = 0, \quad r \notin \mathbb{Z}^-, \; r-\alpha \in \mathbb{Z}^-. \tag{12}$$

Tako je na primer $(x^{-\frac{1}{2}})^{(\frac{1}{2})} = 0$. S tako razširitvijo definicije odvoda je funkcija $x^{-\frac{1}{2}}$ primer, ki krši enakost (11), saj je $((x^{-\frac{1}{2}})^{(\frac{1}{2})})^{(\frac{1}{2})} = 0^{(\frac{1}{2})} = 0$ in hkrati $(x^{-\frac{1}{2}})^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = (x^{-\frac{1}{2}})' \neq 0$.

Kaj pa, če je $r \in \mathbb{Z}^-$? Zakaj imamo tedaj težave z definicijo odvoda reda α? Če je $\alpha = n$ naravno število, seveda težav ni, saj gre tedaj za običajen odvod. V tem primeru lahko za $r < 0$ odvod izrazimo kot

$$(x^r)^{(n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(n-r)}{\Gamma(-r)} x^{r-n} \tag{13}$$

in desna stran je definirana celo za nekatere negativne n, tj. takrat, ko je $n - r > 0$ in posledično $n - r \in \mathbb{N}$. Bralcu prepuščamo, da enakost (13) izpelje sam. Kaj pa če vzamemo na primer $r = -1$ in $\alpha = \frac{1}{2}$? Kaj gre tedaj narobe? Razlog za naše težave je zelo preprost. Če bi želeli, da odvodi zadoščajo enakosti (1), bi moralo veljati

$$(x^{-1})^{\left(\frac{1}{2}\right)} = ((\ln x)')^{\left(\frac{1}{2}\right)} = (\ln x)^{\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

S tem pa pademo ven iz družine potenčnih funkcij in zato tudi ne moremo pričakovati, da bi bil rezultat odvajanja potenčna funkcija. To pomeni, da nam enakost (9) zagotovo ne more pomagati. Za določene primere, npr. $(x^{-1})^{(\frac{1}{2})}$, lahko celo pokažemo, da rezultat odvajanja ne more biti potenčna funkcija. Denimo, da velja $(x^{-1})^{\left(\frac{1}{2}\right)} = cx^r$. Iz zahtevane enakosti (1) tedaj sledi $(cx^r)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = -x^{-2}$. V posebnem je $c \neq 0$. Ker pa rezultat odvajanja v enakostih (10) in (12) ni nikoli potenčna funkcija z negativnim celim eksponentom, mora biti $r \in \mathbb{Z}^-$. Pišimo $r = -n$, kjer je n naravno število, torej je $(x^{-1})^{\left(\frac{1}{2}\right)} = cx^{-n}$ in $(cx^{-n})^{\left(\frac{1}{2}\right)} = -x^{-2}$. Z upoštevanjem enakosti (1) prvo enačbo $(n-1)$-krat odvajamo, da dobimo $(c_1 x^{-n})^{\left(\frac{1}{2}\right)} = c_2 x^{-2n+1}$ za neki neničelni konstanti c_1 in c_2. S primerjavo eksponentov v zadnjih dveh enačbah sklepamo $-2 = -2n+1$, od koder dobimo $n = \frac{3}{2}$, kar je protislovje. Torej $(x^{-1})^{\left(\frac{1}{2}\right)}$ ni potenčna funkcija.

Povzemimo enakosti (10), (12) in (13) v eno definicijo.

Definicija 6. Za realni števili r in α definiramo odvod reda α funkcije $f(x) = x^r$ kot

$$(x^r)^{(\alpha)} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} x^{r-\alpha} & ; \; r \notin \mathbb{Z}^-, \; r-\alpha \notin \mathbb{Z}^-, \\ 0 & ; \; r \notin \mathbb{Z}^-, \; r-\alpha \in \mathbb{Z}^-, \\ (-1)^\alpha \dfrac{\Gamma(\alpha - r)}{\Gamma(-r)} x^{r-\alpha} & ; \; r \in \mathbb{Z}^-, \; \alpha - r \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Poudariti je treba, da odvodi realnih redov niso definirani po točkah, ampak kot funkcije. Zato moramo zgornjo definicijo razumeti v smislu funkcij z definicijskim območjem $(0, \infty)$. Če je α naravno število, se definicija ujema z običajnim odvodom.

Primera $r \in \mathbb{Z}^-, \; \alpha - r \notin \mathbb{N}$ tukaj ne bomo obravnavali.

4. Definicija odvoda reda α splošnejših funkcij

Definicijo odvoda želimo razširiti na splošnejše funkcije, kot so potenčne. V tem razdelku bomo predstavili eno od možnih posplošitev, tj. *Riemann-Liouvillov odvod*, pri čemer se bomo omejili le na levo različico. Več o nekaterih drugih posplošitvah lahko bralec prebere v [4].

Do Riemann-Liouvillovega odvoda pridemo s pomočjo integralov. Morda se to zdi nenavadno, vendar je dokaj naravno, saj sta integriranje in odvajanje nasprotni operaciji. Pravzaprav smo v definiciji 6 integrale že uporabili. Če namreč vzamemo odvod negativnega reda $\alpha = -1$ in naravni eksponent n, tedaj je

$$(x^n)^{(-1)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} x^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

kar je ravno ena od primitivnih funkcij funkcije x^n. Kot bomo videli kasneje, definicija odvoda realnega reda izkoristi dejstvo, da integrali dvigujejo red odvedljivosti funkcij.

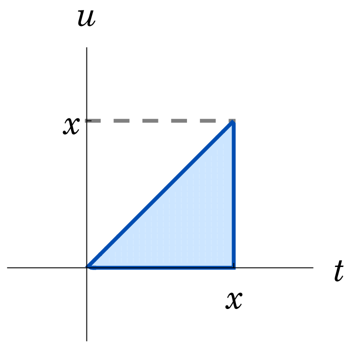
V nadaljevanju se bomo omejili na zvezne funkcije, definirane na intervalu $[0, \infty)$. Množico teh funkcij označimo s $\mathcal{C}([0, \infty))$. Za vsako funkcijo $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$ definiramo

$$I(f)(x) = \int_0^x f(t) \, dt, \qquad \text{za vse } x \geq 0.$$

Po izreku o določenem integralu kot funkciji zgornje meje je funkcija $I(f)(x)$ ena od primitivnih funkcij funkcije $f(x)$, kar pomeni, da je odvedljiva in njen odvod je enak $f(x)$. Preslikava $f \mapsto I(f)$ podaja operator $I\colon \mathcal{C}([0,\infty)) \to \mathcal{C}([0,\infty))$. Označimo še $I^n = I \circ I \circ \cdots \circ I$, kjer v kompozitumu operator I nastopa n-krat. Poiskati želimo eksplicitno formulo za $I^n(f)(x)$, podobno, kot smo to storili v prvem razdelku pri odvodih. Pri izračunu $I^2(f)(x)$ v notranjem integralu preimenujemo integracijsko spremenljivko, da se ne meša z integracijsko spremenljivko v zunanjem integralu

$$I^2(f)(x) = I\left(t \mapsto \int_0^t f(u)\ du\right)(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\ du\right) dt.$$

Integracijsko območje dvakratnega integrala je trikotnik, prikazan na spodnji sliki.



Zamenjajmo vrstni red integriranja in računajmo dalje

$$\begin{aligned} I^2(f)(x) &= \int_0^x \left(\int_u^x f(u)\ dt\right) du = \int_0^x \left(f(u)\int_u^x dt\right) du \\ &= \int_0^x f(u)(x-u)\ du. \end{aligned}$$

Podobno izračunamo

$$\begin{aligned} I^3(f)(x) = I(I^2(f))(x) &= \int_0^x \left(\int_0^t f(u)(t-u)\ du\right) dt \\ &= \int_0^x \left(\int_u^x f(u)(t-u)\ dt\right) du = \int_0^x \left(f(u)\int_u^x (t-u)\ dt\right) du \\ &= \int_0^x f(u)\frac{(x-u)^2}{2}\ du. \end{aligned}$$

in

$$I^4(f)(x) = \int_0^x f(u)\frac{(x-u)^3}{3!}\ du.$$

Od tod zlahka uganemo splošno formulo za $I^n(f)(x)$. Povzemimo jo v trditev.

Trditev 7. *Za vsako funkcijo $f \in \mathcal{C}([0,\infty))$ in vsako naravno število n velja*

$$I^n(f)(x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt, \qquad \text{za vse } x \geq 0.$$

Formulo dokažemo z indukcijo, dokaz pa poteka na enak način kot zgornja izpeljava, zato ga prepuščamo bralcu.

Pa ga imamo, splošen integral reda n funkcije f! Bralec verjetno že sluti, kaj sledi. Naravno število n bomo zamenjali z realnim številom α in funkcijo fakulteta s funkcijo gama.

Definicija 8. Za vsako funkcijo $f \in \mathcal{C}([0,\infty))$ in realno število $\alpha > 0$ definiramo *integral reda* α s formulo

$$I^\alpha(f)(x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt, \qquad x \geq 0.$$

Definiramo še $I^0(f)(x) = f(x)$ za vse $x \geq 0$.

V primeru, ko je $\alpha < 1$, imamo v zgornji definiciji opravka s posplošenim integralom, saj tedaj funkcija $(x-t)^{\alpha-1}$ ni definirana pri $t = x$. Preverimo, da pod pogoji iz definicije integral kljub temu obstaja in da je $I^\alpha(f)$ spet zvezna funkcija na intervalu $[0,\infty)$.

Obstoj integrala za vse $\alpha > 0$ sledi iz ocene

$$\int_0^x \left| f(t)\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| dt \leq \frac{M_x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,dt = \frac{M_x}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{x^\alpha}{\alpha}, \tag{14}$$

kjer smo z M_x označili maksimum zvezne funkcije f na intervalu $[0,x]$.

Če je $\alpha \geq 1$, tedaj je funkcija $(x,t) \mapsto f(t)\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pod integralom zvezna, zato je tudi funkcija $I^\alpha(f)$ zvezna. Za dokaz zveznosti v primeru $0 < \alpha < 1$ izberimo pozitivni števili ε in a, za kateri velja $\varepsilon < a$, in naj bo $x \in [\varepsilon, a]$. V integral vpeljemo novo spremenljivko $u = x - t$, da dobimo

$$I^\alpha(f)(x) = \int_0^x f(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,du = \int_0^\varepsilon f(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,du + \int_\varepsilon^x f(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,du.$$

Drugi integral v vsoti na desni strani je zvezna funkcija spremenljivke x na intervalu $[\varepsilon, a]$, saj je funkcija pod integralom zvezna. Prvi integral v vsoti na desni strani je posplošeni integral in je prav tako zvezna funkcija na intervalu $[\varepsilon, a]$, ker integral konvergira enakomerno na $[\varepsilon, a]$. Enakomerna konvergenca sledi po Weierstrassovem M-testu[1], saj velja ocena

$$\left|f(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right| \leq \frac{M_a}{\Gamma(\alpha)}u^{\alpha-1} \qquad \text{za vse } u \in [0,\varepsilon] \text{ in } x \in [\varepsilon, a],$$

pri čemer smo z M_a označili maksimum zvezne funkcije f na intervalu $[0, a]$, hkrati pa je

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{M_a}{\Gamma(\alpha)}u^{\alpha-1}\, du = \frac{M_a}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\varepsilon^{\alpha}}{\alpha}.$$

Ker sta bila ε in a poljubna, je funkcija $I^{\alpha}(f)$ za $0 < \alpha < 1$ zvezna na intervalu $(0, \infty)$. Hkrati pa je zvezna tudi v točki 0, saj iz ocene (14) sledi $\lim\limits_{x\to 0} I^{\alpha}(f)(x) = 0 = I^{\alpha}(f)(0)$.

Za vsak $\alpha > 0$ imamo torej operator

$$I^{\alpha}\colon \mathcal{C}([0,\infty)) \to \mathcal{C}([0,\infty)).$$

Do definicije odvodov ni več daleč. Preden jih definiramo, pa preverimo, da integrali zadoščajo ekvivalentni kompozicijski enakosti, kot jo pričakujemo od odvodov (glej enakost (1)).

Izrek 9. *Za vsaki realni števili $\alpha, \beta \geq 0$ in vsako funkcijo $f \in \mathcal{C}([0,\infty))$ velja $I^{\alpha}(I^{\beta}(f)) = I^{\alpha+\beta}(f)$.*

Dokaz. Če je $\alpha = 0$ ali $\beta = 0$, ni kaj dokazovati, zato predpostavimo, da sta $\alpha, \beta > 0$. Po definiciji je

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(I^{\beta}(f))(x) &= \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\frac{(t-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\, du\right)\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt \\ &= \int_0^x \left(\int_0^t f(u)\frac{(t-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, du\right) dt. \end{aligned}$$

Označimo z M_x maksimum funkcije f na intervalu $[0, x]$. Z nekaj računanja se lahko prepričamo, da velja

$$\int_0^x \left(\int_0^t \left|f(u)\frac{(t-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right| du\right) dt \leq M_x \cdot \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

[1] Običajna različica Weierstrassovega M-testa govori o posplošenih integralih z eno od mej ∞, glej [1, str. 268], vendar test deluje tudi za posplošene integrale, pri katerih funkcija pod integralom v eni od mej ni definirana.

za vse $x \geq 0$. Torej smemo v dvakratnem integralu zamenjati vrstni red integriranja, saj notranja integrala v obeh dvakratnih integralih konvergirata enakomerno

$$\begin{aligned} I^\alpha(I^\beta(f))(x) &= \int_0^x \left(\int_u^x f(u) \frac{(t-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \, dt \right) du \\ &= \int_0^x \left(f(u) \int_u^x \frac{(t-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \, dt \right) du. \end{aligned}$$

V notranjem integralu vpeljemo novo spremenljivko $s = \frac{t-u}{x-u}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} (t-u)^{\beta-1}(x-t)^{\alpha-1}dt &= \big(s(x-u)\big)^{\beta-1}\big((1-s)(x-u)\big)^{\alpha-1}(x-u)ds \\ &= s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}(x-u)^{\alpha+\beta-1}ds, \end{aligned}$$

torej dobimo

$$I^\alpha(I^\beta(f))(x) = \int_0^x \left(f(u) \frac{(x-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} \, ds \right) du.$$

Po definiciji 4 in trditvi 5 je

$$\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} \, ds = B(\beta, \alpha) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

zato sledi

$$I^\alpha(I^\beta(f))(x) = \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \, du = I^{\alpha+\beta}(f)(x). \qquad \blacksquare$$

Vrnimo se k definiciji odvodov. V tem razdelku bomo odvod reda α funkcije f označili z $D^\alpha(f)$ namesto $f^{(\alpha)}$. V posebnem je $D(f) = D^1(f)$ prvi odvod funkcije f in za vsako naravno število n je $D^n(f)$ običajni n-ti odvod funkcije f. V teh primerih pomen operatorja D^n torej že poznamo. Pri definiciji odvoda $D^\alpha(f)$ za preostala nenegativna realna števila α nam bo v pomoč zveza med operatorjema D in I. Zanju veljata enakosti

$$D(I(f))(x) = f(x), \tag{15}$$

$$I(D(f))(x) = f(x) - f(0), \tag{16}$$

za vse $x \geq 0$. Prva enakost sledi iz dejstva, da je $I(f)$ primitivna funkcija funkcije f, druga pa je posledica osnovnega izreka analize. Enakosti povesta, da sta si operatorja D in I skoraj inverzna. Smiselno je zahtevati, da sta tudi operatorja D^α in I^α na podoben način skoraj inverzna, le da se lahko v drugi enakosti v tem primeru pojavijo drugačni členi namesto $f(0)$. Tako naj bi zadoščala vsaj enakosti

$$D^\alpha(I^\alpha(f))(x) = f(x) \qquad \text{za vse } x \geq 0. \tag{17}$$

Spomnimo se, da poleg tega od odvodov želimo, da zadoščajo enakosti

$$D^\alpha(D^\beta(f)) = D^{\alpha+\beta}(f) \tag{18}$$

za velik razred funkcij f (iz razdelka 3 že vemo, da za vse funkcije to ne bo mogoče). Do definicije splošnega odvoda D^α pridemo tako, da ga izrazimo s pomočjo operatorjev I^β, $\beta \geq 0$, in operatorjev D^n, $n \in \mathbb{N}$. S pomočjo enakosti (17) in (18) lahko na primer izrazimo

$$D^{\frac{5}{3}}(f) = D^{\frac{5}{3}}(D^{\frac{1}{3}}(I^{\frac{1}{3}}(f))) = D^2(I^{\frac{1}{3}}(f)).$$

Tako pridemo do naslednje definicije.

Definicija 10. Naj bo $f \in \mathcal{C}([0,\infty))$ in $\alpha \geq 0$ realno število. Pravimo, da je funkcija f *α-krat odvedljiva*, če je za neko (in zato vsako) naravno število $n > \alpha$ funkcija $I^{n-\alpha}(f)(x)$ n-krat odvedljiva v vsaki točki $x \geq 0$. V tem primeru *odvod reda* α funkcije f definiramo s formulo

$$D^\alpha(f)(x) = D^n(I^{n-\alpha}(f))(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(\int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\,dt\right)$$

za vse $x \geq 0$. Če je odvod $D^\alpha(f)(x)$ zvezna funkcija, tedaj pravimo, da je f *α-krat zvezno odvedljiva.*

Preveriti moramo, da je definicija neodvisna od izbire naravnega števila n. Naj bosta $n > \alpha$ in k naravni števili. Ker je $I^{n-\alpha}(f)$ zvezna funkcija, iz enakosti (1), izreka 9 in enakosti (15) sledi

$$D^{n+k}(I^{n+k-\alpha}(f)) = D^n(D^k(I^k(I^{n-\alpha}(f)))) = D^n(I^{n-\alpha}(f)).$$

Torej je funkcija $I^{n-\alpha}(f)(x)$ n-krat odvedljiva natanko tedaj, ko je funkcija $I^{n+k-\alpha}(f)(x)$ $(n+k)$-krat odvedljiva. Hkrati ta enakost pove, da je definicija odvoda reda α neodvisna od izbire naravnega števila n. V posebnem iz definicije in enakosti (15) sledi $D^0(f)(x) = D(I(f))(x) = f(x)$.

Za potenčne funkcije $f(x) = x^r$ definicija 10 ne posploši definicije 6, saj pri naši omejitvi na zvezne funkcije definicijo 10 lahko uporabimo le, če je $r \geq 0$. Velja pa, da se v tem primeru obe definiciji ujemata, kar bomo preverili v razdelku 5. Izkaže se, da za $-1 < r < 0$ integral iz definicije 10 še vedno obstaja, čeprav taka potenčna funkcija ni definirana v 0, za $r \leq -1$ pa integral iz definicije ne obstaja več, saj ima potenčna funkcija v tem primeru v 0 pol previsoke stopnje.

V definiciji odvoda D^α je točka 0 odlikovana točka, ker nastopa v spodnji meji integrala. V definiciji bi lahko točko 0 zamenjali s katerokoli drugo točko a in se omejili na funkcije, definirane na intervalu $[a, \infty)$. S tem bi seveda dobili drugačno definicijo odvoda tudi za funkcije, definirane na celotni realni osi. Razlog, da smo izbrali točko 0, je ta, da se v tem primeru definicija ujema z definicijo odvoda potenčnih funkcij. Če bi namesto z intervalom $[0, \infty)$ delali z intervalom $(-\infty, 0]$, bi dobili desno različico Riemann-Liouvillovega odvoda, pri čemer pa bi se tudi formula za odvod nekoliko spremenila.

Bistvena razlika med običajnim odvodom f' in odvodom $D^\alpha(f)$ je v tem, da je vrednost $f'(x_0)$ odvisna le od vrednosti funkcije f v okolici točke x_0, medtem ko je vrednost $D^\alpha(f)(x_0)$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, odvisna od vrednosti funkcije f na celotnem intervalu $[0, \infty)$.

5. Lastnosti odvodov

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj lastnosti odvodov. Preverimo najprej veljavnost enakosti (17).

Trditev 11. *Za vsako funkcijo $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$ in vsako realno število $\alpha \geq 0$ velja*

$$D^\alpha(I^\alpha(f))(x) = f(x)$$

za vse $x \geq 0$.

Dokaz. Naj bo $n > \alpha$ naravno število. Z upoštevanjem definicije odvoda ter izreka 9 izpeljemo $D^\alpha(I^\alpha(f))(x) = D^n(I^{n-\alpha}(I^\alpha(f)))(x) = D^n(I^n(f)))(x)$. Iz enakosti (15) sledi, da je rezultat enak $f(x)$. ∎

Pri veljavnosti enakosti (18) moramo biti nekoliko bolj previdni, saj velja le, če je funkcija f »dovolj lepa«, kar ohlapno rečeno pomeni, da ima v točki

0 ničlo dovolj visoke stopnje. Natančneje, naj bo $\gamma \geq 0$ in n najmanjše naravno število, da je $n - \gamma > 0$. Za funkcijo $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$ pravimo, da je *regularna reda* γ, če je funkcija $g = I^{n-\gamma}(f)$ n-krat zvezno odvedljiva in zanjo velja $g^{(k)}(0) = 0$ za vse $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Izrek 12. *Naj bosta $\alpha, \beta \geq 0$ realni števili in $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$. Če je funkcija f regularna reda $\alpha + \beta$, tedaj velja $D^\alpha(D^\beta(f)) = D^{\alpha+\beta}(f)$.*

Dokaz izreka 12 lahko bralec najde v [4, Theorem 2.5]. Tukaj si bomo ogledali le dokaz za primer polovičnih odvodov, torej ko je $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Za dokaz bomo potrebovali še naslednjo lemo. Bralec naj jo primerja z enakostjo (16).

Lema 13. *Naj bo $\alpha > 0$ realno število in f zvezno odvedljiva funkcija, definirana na intervalu $[0, \infty)$. Tedaj je funkcija $I^\alpha(f)$ odvedljiva na intervalu $(0, \infty)$ in velja*

$$I^\alpha(D(f))(x) = D(I^\alpha(f))(x) - f(0)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

za vse $x > 0$.

Dokaz. V integral reda α za funkcijo f vpeljemo novo spremenljivko $u = x - t$, da dobimo

$$I^\alpha(f)(x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt = \int_0^x f(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, du.$$

Po formuli za odvod integrala s parametrom velja

$$\begin{aligned} D(I^\alpha(f))(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, du\right) \\ &= \int_0^x f'(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, du + f(0)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Ker smo odvajali posplošeni integral, preverimo še, da formulo za odvod res smemo uporabiti. Naj bo $a > \varepsilon > 0$ in M_a' maksimum funkcije $f'(x)$ na intervalu $[0, a]$. Ker je

$$\left| f'(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq \frac{M_a'}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} \qquad \text{za vse } u \in [0, \varepsilon] \text{ in } x \in [\varepsilon, a]$$

in hkrati velja

$$\int_0^\varepsilon \frac{M'_a}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1}\, du = \frac{M'_a}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\varepsilon^\alpha}{\alpha},$$

po Weierstrassovem M-testu posplošeni integral $\displaystyle\int_0^\varepsilon f'(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, du$ konvergira enakomerno na intervalu $[\varepsilon, a]$. Ker sta ε in a poljubna, enakost (19) velja za vse $x > 0$.

Sedaj v enakosti (19) v integral vpeljemo spremenljivko $t = x - u$, da dobimo

$$\begin{aligned} D(I^\alpha(f))(x) &= \int_0^x f'(t)\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt + f(0)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \\ &= I^\alpha(D(f))(x) + f(0)\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

Enakost iz leme od tod direktno sledi. ∎

Posledica 14. *Naj bo f zvezno odvedljiva funkcija, definirana na intervalu $[0, \infty)$, za katero velja $f(0) = 0$. Tedaj velja $D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f)) = D(f)$.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da je funkcija $g = I^{\frac{1}{2}}(f)$ zvezno odvedljiva. Ker je $f(0) = 0$, iz enakosti (16) sledi $I(f') = f$. Torej velja

$$g = I^{\frac{1}{2}}(I(f')) = I(I^{\frac{1}{2}}(f')),$$

pri čemer je zadnja enakost posledica izreka 9. Ker je f' zvezna funkcija, je tudi $I^{\frac{1}{2}}(f')$ zvezna funkcija, zato je po osnovnem izreku analize funkcija $I(I^{\frac{1}{2}}(f'))$ zvezno odvedljiva.

Ker je torej g zvezno odvedljiva funkcija, za katero velja $g(0) = 0$, iz leme 13 sledi

$$I^{\frac{1}{2}}(D(g))(x) = D(I^{\frac{1}{2}}(g))(x) \qquad \text{za vse } x > 0. \tag{20}$$

Po izreku 9 in enakosti (15) je $D(I^{\frac{1}{2}}(g)) = D(I^{\frac{1}{2}}(I^{\frac{1}{2}}(f))) = D(I(f)) = f$. Ker je hkrati $I^{\frac{1}{2}}(D(g))(0) = 0$ in $f(0) = 0$, iz enakosti (20) sledi

$$I^{\frac{1}{2}}(D(g))(x) = f(x) \qquad \text{za vse } x \geq 0.$$

Funkcija f je odvedljiva, zato lahko obe strani enakosti odvajamo in upoštevamo definicijo funkcije g, da dobimo

$$D(I^{\frac{1}{2}}(D(I^{\frac{1}{2}}(f))))(x) = D(f)(x) \qquad \text{za vse } x \geq 0.$$

Upoštevamo še definicijo odvoda $D^{\frac{1}{2}}(u) = D(I^{\frac{1}{2}}(u))$ in zaključimo

$$D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}(f))(x) = D(f)(x) \qquad \text{za vse } x \geq 0. \qquad \blacksquare$$

Za konec preverimo še, da se za potenčno funkcijo x^r, $r \geq 0$, odvod iz definicije 10 ujema z odvodom iz definicije 6.

Naj bo torej $r \geq 0$ in $\beta > 0$. Tedaj je

$$I^{\beta}(x^r) = \int_0^x t^r \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\, dt.$$

V integral vpeljimo novo spremenljivko $u = \frac{t}{x}$ in ga preuredimo

$$I^{\beta}(x^r) = \int_0^1 (xu)^r \frac{(x-xu)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\, xdu = \frac{x^{r+\beta}}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 u^r (1-u)^{\beta-1}\, du.$$

V zadnjem integralu prepoznamo funkcijo beta, zato s pomočjo trditve 5 dobimo

$$I^{\beta}(x^r) = \frac{x^{r+\beta}}{\Gamma(\beta)} B(r+1,\beta) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+\beta+1)} x^{r+\beta}.$$

Naj bo sedaj $\alpha > 0$ in $n > \alpha$ naravno število. Iz zadnje enakosti in definicije 10 izpeljemo

$$D^{\alpha}(x^r) = D^n(I^{n-\alpha}(x^r)) = D^n\left(\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+n-\alpha+1)} x^{r+n-\alpha}\right).$$

Odvod na desni poračunamo in dobimo

$$D^{\alpha}(x^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+n-\alpha+1)} (r+n-\alpha)(r+n-\alpha-1)\cdots(r-\alpha+1) x^{r-\alpha}.$$

Če je $r - \alpha \in \mathbb{Z}^-$, je eden od faktorjev v produktu na desni strani enak 0, saj so vsi faktorji cela števila, pri čemer je $r+n-\alpha \geq 0$ in $r-\alpha+1 \leq 0$. V tem primeru je odvod enak 0. Če pa $r - \alpha \notin \mathbb{Z}^-$, tedaj z večkratno uporabo trditve 2 izrazimo

$$\Gamma(r+n-\alpha+1) = (r+n-\alpha)(r+n-\alpha-1)\cdots(r-\alpha+1)\Gamma(r-\alpha+1),$$

od koder zaključimo

$$D^{\alpha}(x^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} x^{r-\alpha}.$$

Vidimo, da se formula ujema z definicijo 6.

Kot smo že omenili na koncu razdelka 4, definicija 10 deluje na primer tudi za funkcijo $x^{-\frac{1}{2}}$, čeprav ta ni definirana v točki 0. Z enakim računom kot zgoraj izračunamo, da je $D^{\frac{1}{2}}(x^{-\frac{1}{2}}) \equiv 0$, kar se prav tako ujema z definicijo 6. Ta funkcija torej spet pokaže, da enakost (18) ne velja za poljubne funkcije, zato so v posledici 14 dodatne predpostavke na funkcijo res potrebne.

Če smo začeli s polovičnim odvodom, pa z njim še končajmo. Z uporabo definicije in enakosti (8) lahko polovični odvod funkcije f zapišemo kot

$$D^{\frac{1}{2}}(f)(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt\right).$$

Izkaže se, da je le za redke elementarne funkcije polovični odvod spet elementarna funkcija. Tako na primer funkcije $D^{\frac{1}{2}}(e^x)$, $D^{\frac{1}{2}}(\sin x)$ in $D^{\frac{1}{2}}(\cos x)$ niso elementarne. Vemo že, da so $D^{\frac{1}{2}}(x^r)$, $r > 0$, elementarne funkcije, za konec pa brez dokaza omenimo le še primer

$$D^{\frac{1}{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{x})) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x+1}}.$$

LITERATURA

[1] R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, Second edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.

[2] F. Križanič, *Temelji realne matematične analize*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1990.

[3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1976.

[4] S. G. Samko, A. A. Kilbas in O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.